Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
Калининградский государственный университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 9

Калининград
1978

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 9

Калининград
1978

УДК 513.73

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Калининградского государственного университета

Статьи настоящего выпуска относятся к следующим разделам дифференциальной геометрии: многообразия квадрик в многомерных и трехмерных пространствах, теория многомерных сетей, дифференцируемые соответствия, связности, ассоциированные с многообразиями фигур, многообразия пар фигур.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области геометрии.

Содержание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

А.В. А б р а м о в

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ ∇ -СОПРЯЖЕННЫХ СЕТЕЙ

Пусть $\Sigma_p = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ -сеть в некоторой области гладкой поверхности вещественного евклидова пространства E_n. К поверхности V_p присоединяем подвижной полуортогональный репер $\mathcal{R} = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, где $x \in V_p$, $\vec{e}_i$ -единичные векторы, касательные к линиям сети, $\vec{e}_\alpha$ - попарно ортогональные единичные векторы нормали $N_{n-p}(x)$, $i, j, k = 1, \ldots, p$; $\alpha, \beta = p+1, \ldots, n$. Выпишем деривационные формулы поверхности:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta; \qquad (1)$$

где $\vec{x}$ -радиус-вектор точки x. При этом

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha; \qquad (2)$$

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k \quad (i \neq j); \qquad (3)$$

$$dg_{ij} = g_{ik} \omega_j^k + g_{jk} \omega_i^k, \quad \omega_\alpha^k + g^{ki} \omega_i^\alpha = 0, \quad \omega_\beta^\alpha + \omega_\alpha^\beta = 0; \qquad (4)$$

где b_{ij}^α -компоненты вторых основных тензоров поверхности; g_{ij} -метрический тензор; $\{a_{jk}^i\}$ -объект сети Σ_p.

Для того, чтобы сеть Σ_p была ∇-сопряженной [1], необходимо и достаточно, чтобы компоненты объекта сети в репере $\mathcal{R}$ удовлетворяли условию

$$a_{jk}^i = 0 \quad (i \neq j, j \neq k, k \neq i). \qquad (5)$$

Векторы $\vec{b}_{ij} = b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$ вместе с точкой x определяют главную нормаль $N_q(x) \subset N_{n-p}(x)$, где q -ранг системы векторов $\vec{b}_{ij}$. Плоскость $P_{ij} = [x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha, a_{ij}^k \vec{e}_k + \vec{b}_{ij}$ (i, j, k - различны, по k суммируется) является плоскостью смещения прямой $[x, \vec{e}_i]$ вдоль направления семейства σ_j. Условие (5) эквивалентно следующему геометрическому критерию [1]:

для того, чтобы сеть Σ_p в области U поверхности V_p в евклидовом пространстве E_n была ∇-сопряженной, необходимо и достаточно, чтобы плоскости P_{ij} пересекали главную нормаль $N_q(x)$ по прямой или совпадали с соответствующими плоскостями $[x, \vec{e}_i, \vec{e}_j]$ $(i \neq j)$.

В настоящей заметке рассматриваются ∇-сопряженные сети на трехмерной поверхности V_3 в пятимерном вещественном евклидовом пространстве E_5, когда прямые $\ell_{ij}=[x,\vec{b}_{ij}]$ специальным образом расположены. В дальнейшем индексы принимают значения: $i,j,k=1,2,3;\ \alpha,\beta=4,5$.

I. Прямые $\ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{23}$ совпадают. Положим:

$$\vec{b}_{13}=\varphi\vec{b}_{12},\quad \vec{b}_{23}=\psi\vec{b}_{12}. \tag{6}$$

Дифференцирование равенств (2) - (6) приводит к уравнениям:

$$\begin{gathered}\Delta b^\alpha_{11}\wedge\omega^1+\Delta b^\alpha_{12}\wedge\omega^2+(\Delta\varphi\cdot b^\alpha_{12}+\varphi\Delta b^\alpha_{12})\wedge\omega^3=0,\\ \Delta b^\alpha_{21}\wedge\omega^1+\Delta b^\alpha_{22}\wedge\omega^2+(\Delta\psi\cdot b^\alpha_{12}+\psi\Delta b^\alpha_{21})\wedge\omega^3=0,\\ (\Delta\varphi\cdot b^\alpha_{12}+\varphi\cdot\Delta b^\alpha_{12})\wedge\omega^1+(\Delta\psi\cdot b^\alpha_{12}+\psi\Delta b^\alpha_{12})\wedge\omega^2+\Delta b^\alpha_{33}\wedge\omega^3=0.\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\Delta b^\alpha_{11}=\nabla b^\alpha_{11}+(b^\alpha_{11}a^1_{21}+b^\alpha_{22}a^2_{11})\omega^2+(b^\alpha_{11}a^1_{31}+b^\alpha_{33}a^3_{11})\omega^3, \tag{8}$$

$$\Delta b^\alpha_{22}=\nabla b^\alpha_{22}+(b^\alpha_{11}a^1_{21}+b^\alpha_{22}a^2_{11})\omega^1+(b^\alpha_{22}a^2_{32}+b^\alpha_{33}a^3_{22})\omega^3, \tag{9}$$

$$\Delta b^\alpha_{33}=\nabla b^\alpha_{33}+(b^\alpha_{33}a^3_{13}+b^\alpha_{11}a^1_{33})\omega^1+(b^\alpha_{33}a^3_{23}+b^\alpha_{22}a^2_{33})\omega^3, \tag{10}$$

$$\Delta b^\alpha_{12}=\nabla b^\alpha_{12},$$

$$\Delta\varphi=d\varphi+\varphi(\omega^2_2+\omega^1_1-\omega^3_3)+\varphi^2\omega^3_2+\varphi\cdot\psi\omega^3_1-\psi\omega^2_1-\omega^2_3,$$

$$\Delta\psi=d\psi+\psi(\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3)+\psi^2\omega^3_1+\varphi\cdot\psi\omega^3_2-\varphi\omega^1_2-\omega^1_3.$$

Здесь ∇b^α_{ij} -ковариантная производная тензора b^α_{ij}.

$$\Delta a^i_{ji}\wedge\omega^i+\Delta a^i_{jj}\wedge\omega^j, \tag{12}$$

где

$$\Delta a^i_{ji}=da^i_{ji}-a^i_{ji}\omega^j_j-a^i_{ki}\omega^k_i-a^i_{jj}\omega^i_i+b^\alpha_{ij}\omega^i_\alpha+\sum_\alpha g^{iu}b^\alpha_{jk}b^\alpha_{ui}\omega^k+a^i_{ji}a^i_{ki}\omega^k,$$

$$\Delta a^i_{jj}=da^i_{jj}+a^i_{jj}(\omega^i_i-2\omega^j_j)-a^i_{ji}\omega^i_j+b^\alpha_{jj}\omega^i_\alpha+\sum_\alpha g^{iu}b^\alpha_{jk}b^\alpha_{uj}\omega^k+(a^k_{jj}a^i_{kk}-a^i_{jj}a^j_{kj})\omega^k.$$

В принятых обозначениях для системы (2)-(11) $q=22$, $S_1=12$, $S_2=10$, $N=Q=32$. Справедлива

Т е о р е м а. Поверхность $V_3\subset E_5$, несущая ∇-сопряженную сеть с совпадающими прямыми ℓ_{12}, ℓ_{13} и ℓ_{23}, существует и определяется с произволом десять функций двух аргументов.

Для сравнения заметим, что поверхность $V_3\subset E_5$, несущая произвольную ∇-сопряженную сеть, существует с произволом двух функций трех аргументов.

На поверхности $V_3\subset E_5$ существует поле особой нормали [2] тогда и только тогда, когда метрический тензор поверхности является линейной комбинацией вторых тензоров:

$$g_{ij}=h_\alpha b^\alpha_{ij}. \tag{13}$$

Если полем особой нормали служит прямая ℓ_{12}, то

$$g_{23}=\psi g_{12},\quad g_{13}=\varphi g_{12},\quad \vec{b}^{\,2}_{12}=g_{12}\vec{b}_{ii}\vec{b}_{12}. \tag{16}$$

Последнее равенство - необходимое и достаточное условие того, что прямая ℓ_{12} -особая нормаль. Если сеть не имеет сопряженных направлений, то она не может быть полуортогональной. Особая нормаль не может быть ортогональной ни одному вектору нормальной кривизны линий сети. Точки с радиус-векторами $\vec{z}_i=\vec{x}+\vec{b}_{ii}$ лежат на одной прямой, ортогональной прямой ℓ_{12}.

Произвол существования поверхности $V_3\subset E_5$, несущей ∇-сопряженную сеть, когда две из прямых ℓ_{ij} совпадают, а третья вырождается в точку, - девять функций двух аргументов.

2. Прямые ℓ_{13}, ℓ_{23} вырождаются в точку:

$$\vec{b}_{13}=\vec{0},\ \vec{b}_{23}=\vec{0}\quad(\vec{b}_{12}\neq\vec{0}). \tag{17}$$

Система уравнений (2) принимает вид:

$$\omega^\alpha_1=b^\alpha_{11}\omega^1+b^\alpha_{12}\omega^2,\ \omega^\alpha_2=b^\alpha_{21}\omega^1+b^\alpha_{22}\omega^2,\ \omega^\alpha_3=b^\alpha_{33}\omega^3 \tag{18}$$

Дифференцирование системы (18) приводит к уравнениям:

$$\Delta b^{\alpha}_{11}\wedge\omega^1+\Delta b^{\alpha}_{12}\wedge\omega^2-b^{\alpha}_{12}a^2_{32}\,\omega^2\wedge\omega^3=0,$$
$$\Delta b^{\alpha}_{21}\wedge\omega^1+\Delta b^{\alpha}_{22}\wedge\omega^2-b^{\alpha}_{12}a^1_{31}\,\omega^1\wedge\omega^3=0,$$
$$-b^{\alpha}_{21}a^2_{32}\,\omega^2\wedge\omega^1-b^{\alpha}_{12}a^1_{31}\,\omega^1\wedge\omega^2+\Delta b^{\alpha}_{33}\wedge\omega^3=0,$$

где формы Δb^{α}_{ii} и Δb^{α}_{12} имеют такое же строение, как и аналогичные формы (8) - (11). Так как $\vec{b}_{12}\neq\vec{0}$, то

$$a^2_{32}=a^1_{31}. \qquad (19)$$

То есть псевдофокусы прямой $[x,\vec{e}_3]$ совпадают. Присоединяем равенства (19) к исходной системе, получаем систему уравнений в инволюции. Для нее $q=19$, $S_1=12$, $S_2=7$, $N=Q=26$. Следовательно, поверхность $V_3\subset E_5$, несущая ∇-сопряженную сеть с двумя вырожденными в точку прямыми ℓ_{23} и ℓ_{13}, существует и определяется с произволом семь функций двух аргументов. Если к тому же на прямой $[x,\vec{e}_3]$ псевдофокусов не существует, то произвол существования поверхности V_3 -шесть функций двух аргументов.

Так как ∇-сопряженная сеть является голономной, то вдоль каждого семейства линий сети Σ_3 поверхность V_3 расслаивается на двумерные поверхности. Для последнего случая из деривационных формул (1) следует: $d\vec{e}_3=\omega^3_3\vec{e}_3$, если только $\omega^3=0$. Поэтому направление семейства σ_3 образует постоянное поле направлений вдоль каждой двумерной поверхности V_2, на которые расслаивается поверхность V_3, вдоль семейства σ_3. Если поверхность V_3 несет голономную сеть Σ_3, такую, что на каждой поверхности V_2, на которые расслаивается поверхность V_3 вдоль семейства σ_3, образует постоянное поле направлений, то это направление сопряжено семействам σ_1 и σ_2 и параллельно переносится вдоль них.

Пусть сеть Σ_3 - ∇-сопряженная, имеет две пары сопряженных направлений ($\vec{\ell}_{13}=\vec{0}$, $\vec{b}_{23}=\vec{0}$) и семейство σ_3 -асимптотическое, то есть

$$\vec{b}_{33}=\vec{0}. \qquad (20)$$

Система уравнений (18) принимает более простой вид:

$$\omega^{\alpha}_1=b^{\alpha}_{11}\omega^1+b^{\alpha}_{12}\omega^2;\ \ \omega^{\alpha}_2=b^{\alpha}_{21}\omega^1+b^{\alpha}_{22}\omega^2;\ \ \omega^{\alpha}_3=0.$$

Дифференцироваиие последней системы уравнений приводит к равенству (19) и конечным соотношениям:

$$\vec{b}_{11}a^1_{33}+\vec{b}_{12}a^2_{33}=\vec{0};\ \ \vec{b}_{12}a^1_{33}+\vec{b}_{22}a^2_{33}=\vec{0}. \qquad (21)$$

Поверхность $V_3\subset E_5$, несущая ∇-сопряженную сеть с двумя парами сопряженных направлений и общим для этих пар асимптотическим и геодезическим полем направлений, существует и определяется с произволом шесть функций двух аргументов.

Если главная нормаль двумерна, то семейство σ_3 прямолинейное. Если семейство σ_3 не прямолинейное, то главная нормаль одномерна. Единственная асимптотическая форма имеет вид:

$$\Phi=-b^4_{12}\,(a^2_{33}\omega^1+a^1_{33}\omega^2)^2.$$

Отсюда по теореме Сегре следует:

Т е о р е м а. Поверхность $V_3\subset E_5$, несущая ∇-сопряженную сеть с двумя парами полей сопряженных направлений и общим для этих пар полем асимптотических направлений (но не геодезических), является развертывающейся поверхностью.

Если семейство σ_3 состоит из прямых и главная нормаль одномерна, то в общем случае поверхность V_3 -поверхность класса 1. Она будет развертывающейся поверхностью только тогда, когда

$$|\vec{b}_{12}|=\sqrt{|\vec{b}_{11}|\cdot|\vec{b}_{22}|}.$$

Перейдем к рассмотрению ∇-сети Фосса с двумя парами полей сопряженных направлений. ∇-сетью Фосса [1] называется ∇-сопряженная геодезическая сеть. К условию (5) добавляются равенства:

$$a^i_{jj}=0 \qquad (i\neq j) \qquad (22)$$

Из системы (3), (5), (22) следует:

$$\vec{b}_{jj}(g^{ii}\vec{b}_{ik}+g^{ik}\vec{b}_{kk})-\vec{b}_{jk}(g^{ii}\vec{b}_{ij}+g^{ik}\vec{b}_{ik})=0. \qquad (23)$$

Из (23) и (17) вытекает:

$$\vec{b}_{12}\cdot\vec{b}_{33}=0,\ \vec{b}_{22}\cdot\vec{b}_{33}=0,\ \vec{b}_{11}\cdot\vec{b}_{33}=0.$$

Поэтому прямые ℓ_{ij} занимают положения:

$$\ell_{12}=\ell_{11}=\ell_{22}\perp\ell_{33}.$$

Присоединенная кривая [2] поверхности имеет уравнение:

$$\det\|\sum_{\alpha}(b^{\alpha}_{ij}y^{\alpha}-g_{ij})\|=0. \qquad (24)$$

Если поверхность V_3 несет ∇-сеть Фосса с двумя парами полей сопряженных направлений и поле особой нормали, то уравнение (24) имеет вид:

$$(b^5_{33}y^5-1)(b^4_{12}y^4-g_{12})^2=0.$$

Следовательно, присоединенная кривая распадается на пару совпадающих и прямую им ортогональную. При этом особая нормаль проходит через точку их пересечения.

3. $\ell_{12}\perp\ell_{13}$, ℓ_{23} вырождается в точку. Поверхность V_3, удовлетворяющая этим условиям, существует и определяется с произволом девять функций двух аргументов. Если Σ_3 – ∇-сеть Фосса, то из равенств (23) следует:

$$\vec{b}_{22}\cdot\vec{b}_{33}=0,\ \vec{b}_{22}\cdot\vec{b}_{13}=0,\ \vec{b}_{33}\cdot\vec{b}_{12}=0,$$

то есть прямые ℓ_{ij} занимают положения:

$$\ell_{12}=\ell_{22}\perp\ell_{13}=\ell_{33}.$$

Уравнения (24) в нашем случае есть уравнения вида:

$$a_{\alpha\beta}y^{\alpha}y^{\beta}=0.$$

Дополняя пространство E_5 несобственными точками, можно сказать, что присоединенная кривая распадается на кривую второго порядка и бесконечно удаленную прямую.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О ∇-сопряженных сетях в пространстве аффинной связности.-Изв.высш.уч.зав."Математика", 1974, № 5, с, 24-30.

2. Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи на P- поверхности евклидова пространства.- "Сиб.мат.журнал", 1966, (УП), №3, 499-511.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

Б.А. А н д р е е в

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И МНОГООБРАЗИЕМ $R_H(Q)$ ГИПЕРКВАДРИК АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА.

Изучается локальное биективное отображение φ точечного $(n+1)$-мерного проективного пространства P_{n+1} в специальное многообразие $R_H(Q)$ эллипсоидов n-мерного аффинного пространства A_n. Во 2-й дифференциальной окрестности построены и геометрически охарактеризованы инвариантные алгебраические многообразия, с помощью которых определяются характеристические прямые отображения φ и индуцируемых им отображений. Получена связь касательных к этим отображениям дробнолинейных отображений с соответствующими типами характеристических направлений.

§I. Многообразие $R_H(Q)$

Пусть Q $(n-1)$-мерный эллипсоид n-мерного аффинного пространства A_n с его фундаментальной группой G, а H -подгруппа группы G, состоящая из прямых гомотетий и параллельных переносов. Обозначим $R_H(Q)$ орбиту действия группы H на пространстве $R(Q)$ эллипсоидов.

Пусть Q_0 -произвольный элемент из $R_H(Q)$, H_0 -одномерная подгруппа группы H, состоящая из гомотетий с неподвижной точкой эллипсоида Q_0, а $T \subset H$ -группа параллельных переносов. H является полупрямым произведением групп T и H_0 и при этом действует на $R_H(Q)$ просто транзитивно. Отсюда получаем:

$$\dim R_H(Q) = n+1. \tag{1.1}$$

Многообразие $R_H(Q)$ расслаивается, с одной стороны, на одномерные многообразия концентрических эллипсоидов и, с другой - на n-мерные многообразия эллипсоидов, являющихся орбитами действия группы T. Будем обозначать символами $R_{H_0}(Q)$ и $R_T(Q)$ соответственно слои первого и второго расслоений, содержащие элемент Q, а символами Π_{H_0} и Π_T соответственно, отображения $\Pi_{H_0}: R_H(Q) \to R_{H_0}(Q_0)$ и $\Pi_T: R_H(Q) \to R_T(Q_0)$, причем $\Pi_{H_0}(Q) = R_{H_0}(Q_0) \cap R_T(Q)$ и $\Pi(Q) = R_T(Q_0) \cap R_{H_0}(Q)$.

Поместив начало A репера $\tau = \{A, \bar{e}_i\}$ $(i,j,\ldots=1,\ldots,n)$ пространства A_n в центр эллипсоида Q_0, запишем его уравнение в виде

$$a_{ij} x^i x^j = 1. \tag{1.2}$$

Если уравнение произвольного эллипсоида $Q \in R_H(Q)$ имеет вид:

$$a_{ij} x^i x^j - 2 b^j a_{ij} x^i = c^2 - a_{ij} b^i b^j, \tag{1.3}$$

то для $\Pi_{H_0}(Q)$ и $\Pi_T(Q)$ имеем соответственно:

$$a_{ij} x^i x^j = c^2; \quad a_{ij} x^i x^j - 2 b^j a_{ij} x^i = 1 - a_{ij} b^i b^j. \tag{1.4}$$

Здесь b^i -координаты центра эллипсоида Q, C - его коэффициент растяжения относительно эллипсоида Q_0. Можно показать, что многообразие $R_H(Q)$ обладает следующим свойством: любая гиперквадрика пучка, определяемого эллипсоидами $Q_1 \in R_H(Q)$ и $Q_2 \in R_H(Q)$, также принадлежит многообразию $R_H(Q)$. Таким образом, многообразие $R_H(Q)$ является линейным семейством эллипсоидов, или, как мы будем говорить, подпространством пространства всех гиперквадрик исходного точечного пространства. Легко видеть, что многообразия $R_{H_0}(Q)$ обладают таким же свойством, а многообразия $R_T(Q)$, однако, им не обладают.

Обозначим символами $R_H(Q, Q_0)$ и $R_T(Q_0) \times R_{H_0}(Q_0)$ соответственно пространство $R_H(Q)$ с фиксированным элементом Q_0 и множество пар $(\Pi_T(Q), \Pi_{H_0}(Q))$. Биекция $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}: (\Pi_T(Q), \Pi_{H_0}(Q)) \in R_{H_0}(Q_0) \to Q \in R_H(Q, Q_0)$$

превращает $R_H(Q, Q_0)$ в прямое произведение, в котором второй сомножитель $R_{H_0}(Q_0)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с числовой полупрямой R_1^+: $t = \ln C$, $t \in R_1^+$, а первый - $R_T(Q_0)$-с пространством A_n. Рассматривая последнее как метрическое пространство с тензором a_{ij}, а R_1^+ -как метрическое пространство с естественной метрикой, будем называть естественной метрикой в $R_H(Q, Q_0)$ метрику, порожденную в нем структурой прямого произведения.

Первичными формами эллипсоида (1.2) в подвижном репере с деривационными формулами

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j$$

и уравнениями структуры

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j\,, \quad \mathcal{D}\omega^j_i = \omega^\ell_i \wedge \omega^j_\ell$$

являются формы Пфаффа

$$\omega^i,\ \ \theta_{ij} \equiv da_{ij} - a_{i\ell}\,\omega^\ell_j - a_{\ell j}\,\omega^\ell_i\,. \tag{1.5}$$

Примем за независимые первичные формы многообразия следующие пфаффовы формы:

$$\omega^i,\ \ \theta \overset{d}{=} -\frac{1}{2n}\,a^{ij}\theta_{ij} \equiv -\frac{1}{2n}\,d\ln a + \frac{1}{n}\,\omega^i_i\,, \tag{1.6}$$

где $a = \det(a_{ij})$, а a^{ij} –тензор,взаимный к тензору a_{ij}. Тогда дифференциальные уравнения многообразия $R_H(Q)$ примут вид:

$$\theta_{ij} = -2\,a_{ij}\,\theta\,, \tag{1.7}$$

среди которых $C^2_{n+1} - 1$ независимых.

§2. Отображение φ. Касательные отображения

Рассмотрим биективное отображение φ некоторой области $\mathcal{U}$ $(n+1)$-мерного точечного проективного пространства P_{n+1} в многообразие $R_H(Q)$. Поместив вершину R_o подвижного репера $R = \{R_o, R_\mathcal{J}\}$, $(\mathcal{J}, \mathcal{K}, \ldots = 1, \ldots, n+1)$ пространства P_{n+1} в произвольную точку $P_o \in \mathcal{U}$, запишем дифференциальные уравнения отображения φ в виде:

$$\omega^i = \Lambda^i_\mathcal{J}\,\Omega^\mathcal{J}_o\,, \tag{2.1}$$

$$\theta = \Lambda^i_\mathcal{J}\,\Omega^\mathcal{J}_o\,, \tag{2.2}$$

где $\Omega^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{K}'}$ $(\mathcal{J}', \mathcal{K}', \ldots = 0, 1, \ldots, n+1)$ –компоненты инфинитезимальных перемещений репера R. В результате двукратного продолжения системы (2.1),(2.2) имеем:

$$\Delta\Lambda^i_\mathcal{J} = \Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\,\Omega^\mathcal{K}_o\,, \quad \Delta\Lambda_\mathcal{J} = \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\,\Omega^\mathcal{K}_o\,,$$

$$\Delta\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}} = \Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}\mathcal{L}}\,\Omega^\mathcal{L}_o\,, \quad \Delta\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}} = \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}\mathcal{L}}\,\Omega^\mathcal{L}_o\,,$$

где

$$\Delta\Lambda^i_\mathcal{J} \equiv d\Lambda^i_\mathcal{J} + \Lambda^t_\mathcal{J}\,\omega^i_t - \Lambda^i_\mathcal{T}\,\Omega^\mathcal{T}_\mathcal{J} + \Lambda^i_\mathcal{J}\,\Omega^o_o\,,$$

$$\Delta\Lambda_\mathcal{J} \equiv d\Lambda_\mathcal{J} - \Lambda_\mathcal{T}\,\Omega^\mathcal{T}_\mathcal{J} + \Lambda_\mathcal{J}\,\Omega^o_o\,,$$

$$\Delta\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \equiv d\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}} + \Lambda^t_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\,\omega^i_t - \Lambda^i_{\mathcal{T}\mathcal{K}}\,\Omega^\mathcal{T}_\mathcal{J} - \Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{T}}\,\Omega^\mathcal{T}_\mathcal{K} + 2\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\,\Omega^o_o + \Lambda^i_\mathcal{J}\,\Omega^o_\mathcal{K} + \Lambda^i_\mathcal{K}\,\Omega^o_\mathcal{J}\,,$$

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \equiv d\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}} - \Lambda_{\mathcal{T}\mathcal{K}}\,\Omega^\mathcal{T}_\mathcal{J} - \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{T}}\,\Omega^\mathcal{T}_\mathcal{K} + 2\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\,\Omega^o_o + \Lambda_\mathcal{J}\,\Omega^o_\mathcal{K} + \Lambda_\mathcal{K}\,\Omega^o_\mathcal{J}\,.$$

Пусть $Q_o = \varphi(P_o)$. Отображение $\varphi: \mathcal{U} \to R_H(Q)$ для каждой фиксированной P_o индуцирует отображения $\varphi_T = \Pi_T \circ \varphi: \mathcal{U} \to R_T(Q_o)$ и $\varphi_{H_o} = \Pi_{H_o} \circ \varphi: \mathcal{U} \to R_{H_o}(Q_o)$, дифференциальные уравнения которых записываются соответственно в виде (2.1) и (2.2). Для координатных представлений отображений φ_T и φ_{H_o} имеем:

$$b^i = \Lambda^i_\mathcal{J}\,\widetilde{X}^\mathcal{J} + \Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\,\widetilde{X}^\mathcal{J}\widetilde{X}^\mathcal{K} + \langle 3 \rangle\,, \tag{2.3}$$

$$\ln C = \Lambda_\mathcal{J}\,\widetilde{X}^\mathcal{J} + \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\,\widetilde{X}^\mathcal{J}\widetilde{X}^\mathcal{K} + \langle 3 \rangle\,, \tag{2.4}$$

где b^i, –координаты эллипсоидов (1.4), $\widetilde{X}^\mathcal{J}$ –неоднородные координаты точки $P \in \mathcal{U}$, а символ $\langle 3 \rangle$ означает совокупность членов 3-го порядка малости относительно $\widetilde{X}^\mathcal{J}$.

Обозначим $X^\mathcal{J}$ однородные координаты в P_{n+1}. Тензоры

I-го порядка $\Lambda^i_\jmath$ и $\Lambda_\jmath$ определяют подпространства в P_{n+1}:

$$\Lambda^i_\jmath X^\jmath = 0, \tag{2.5}$$

$$\Lambda_\jmath X^\jmath = 0 \tag{2.6}$$

размерностей 1 и n, содержащие точку P_0, являющиеся в ней касательными подпространствами для многообразий $\varphi^{-1}(R_{H_0}(Q_0))$ и $\varphi^{-1}(R_T(Q_0))$ и обозначаемые в дальнейшем соответственно символами L°_T и $L^\circ_{H_0}$.

Уравнения касательных к φ_T и φ_{H_0} дробнолинейных отображений $K_T(P_\jmath)$ и $K_{H_0}(Q_\jmath)$ имеют соответственно вид:

$$b^i = \frac{\Lambda^i_\jmath \tilde{X}^\jmath}{1 - P_\varkappa \tilde{X}^\varkappa}, \tag{2.7}$$

$$\ln C = \frac{\Lambda_\jmath \tilde{X}^\jmath}{1 - Q_\varkappa \tilde{X}^\varkappa}. \tag{2.8}$$

Системы величин $\{P_\jmath\}$ и $\{Q_\jmath\}$ являются квазитензорами. Отображения (2.7) и (2.8) вырождены; в их области определения выполняется: $\mathrm{Im}\, K_T(P_\jmath)(L^\circ_T) = Q_0$, $\mathrm{Im}\, K_{H_0}(Q_\jmath)(L^\circ_{H_0}) = Q_0$. Во множестве пар $K(P_\jmath, Q_\varkappa) = (K_T(P_\jmath), K_{H_0}(Q_\varkappa))$ рассмотрим подмножество пар $K(P_\jmath)$ согласованных отображений, характеризующихся равенством $Q_\jmath = P_\jmath$. Однопараметрические семейства эллипсоидов: $b^i = b^i_0 t$, $C = C_0^t$ являются геодезическими метрического пространства $R_H(Q, Q_0)$ с введенной ранее естественной метрикой.

Т е о р е м а 1. Образы прямых связки $\{P_0\}$ при согласованных отображениях $K(P_\jmath)$ являются геодезическими пространства $R_H(Q, Q_0)$.

Утверждение теоремы справедливо также для всех прямых, не лежащих в гиперплоскости $P_\jmath X^\jmath = X^\circ$.

§ 3. Индикатрисы. Характеристические направления

Назовем инвариантные многообразия

$$\Lambda^i_{\jmath\varkappa} X^\jmath X^\varkappa - 2\Lambda^i_\jmath X^\jmath X^\circ = 0,$$

$$\Lambda_{\jmath\varkappa} X^\jmath X^\varkappa - 2\Lambda_\jmath X^\jmath X^\circ = 0$$

соответственно T-индикатрисой $\mathcal{J}_T$ и H_0-индикатрисой $\mathcal{J}_{H_0}$. В общем случае T-индикатриса (H_0-индикатриса) является алгебраическим многообразием размерности $1(n)$ и порядка 2^n (2), содержит точку P_0 и имеет в этой точке касательным подпространством подпространство $L^\circ_T(L_{H_0})$.

Рассуждая так же, как в §2 работы [1], получим понятие $K_T(P_\jmath)-(K_{H_0}(Q_\jmath))$-главных прямых отображения $\varphi_T(\varphi_{H_0})$.

О п р е д е л е н и е 1. Точка A, не принадлежащая подпространству L°_T (подпространству $L^\circ_{H_0}$), называется $\varphi_T-(\varphi_{H_0})$-главной, если существует касательное к $\varphi_T(\kappa\,\varphi_{H_0})$ дробно-линейное отображение $K_T(P_\jmath)(K_{H_0}(Q_\jmath))$, такое, что, когда прямая P_0A является $K_T(P_\jmath)-(K_{H_0}(Q_\jmath))$-главной, то выполняется: $\lim\limits_{B\to A} b^i = \infty$ $(\lim\limits_{B\to A} C = \infty)$, $B \in P_{n+1}$.

Следующие две теоремы доказываются так же, как теоремы 1 и 2 работы [1].

Т е о р е м а 2. На каждой $K_T(P_\jmath)-(K_{H_0}(Q_\jmath))$-главной прямой существует единственная $\varphi_T-(\varphi_{H_0})$-главная точка.

Т е о р е м а 3. Множества $\mathfrak{J}_T \setminus (\mathfrak{J}_T \cap L^\circ_T)$ и $\mathfrak{J}_{H_\circ} \setminus (\mathfrak{J}_{H_\circ} \cap L^\circ_{H_\circ})$ являются соответственно множествами φ_T-главных и $\varphi_{H_\circ}$-главных точек.

О п р е д е л е н и е 2. Прямая связки $\{P_\circ\}$ называется T-характеристической (характеристической) прямой отображения φ, если она имеет непустое пересечение с множеством $\mathfrak{J}_T \setminus (\mathfrak{J}_T \cap L^\circ_T)$ (с множеством $(\mathfrak{J}_T \cap \mathfrak{J}_{H_\circ}) \setminus P_\circ$).

Заметим, что, определяя аналогично, с помощью $\mathfrak{J}_{H_\circ}$, $H_\circ$, характеристические прямые, мы получим любую прямую, не лежащую в $L^\circ_{H_\circ}$, что связано с одномерностью многообразия $H_\circ(Q_\circ)$.

Понимая касание одномерных многообразий Q как касание кривых в пространстве с введенной естественной метрикой, а касание отображений – в соответствии с §1 [2], сформулируем следующую теорему.

Т е о р е м а 4. Отображение $\varphi_T(\varphi)$ имеет геометрическое касание 2-го порядка с отображением $K_T(P_\gamma)(K(P_\gamma))$ для T-характеристических (характеристических) направлений отображения φ.

Доказательство проводится аналогично доказательству теорем 6 и 8 работы [3].

Список литературы

1. А н д р е е в Б.А. О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и пространством пары.– В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7. Калининград, 1976, с.5-9.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.–"Итоги науки, ВИНИТИ. Геометрия", 1963, М., 1965, с.65-107.

3. А н д р е е в Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q). В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6, Калининград, 1975, с.5-18.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

Т.Н.Балазюк

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОСНАЩЕННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается распределение первого рода m-мерных плоскостей , в текущем элементе которого задан $(m-1)$-мерный конус второго порядка с вершиной в центре элемента (распределение $\Lambda(g)$. Установлено, что с распределением $\Lambda(g)$ в первой дифференциальной окрестности ассоциируется гиперполосное распределение $\mathcal{H}(\Lambda(g))$, внутренне определенное исходным многообразием, для которого распределение $\Lambda(g)$ является базисным. Построены охваты геометрических объектов, поля которых определяют различные дифференциально- геометрические структуры [3], на распределении $\Lambda(g)$.

Исследования проводятся инвариантным теоретико-групповым методом Г.Ф.Лаптева [1].

На протяжении изложения индексы принимают следующие значения:

$\bar{J},\bar{K},\bar{L},\ldots=0,1,\ldots,n;\ J,K,L,\ldots=1,2,\ldots,n,\ a,b,c,\ldots=1,2,\ldots,n-1;$

$i,j,k,\ldots=1,2,\ldots,m;\ \alpha,\beta,\gamma,\ldots=m+1,\ldots,n;\ u,v,\ldots=m+1,\ldots,n-1.$

I. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ $\Lambda(g)$. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $R=\{M_{\bar J}\}$, дифференциальные уравнения движения которого имеют вид:

$$dM_{\bar J}=\omega_{\bar J}^{\bar K}M_{\bar K}. \qquad (I.1)$$

Формы Пфаффа удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_{\bar J}^{\bar K}=\omega_{\bar J}^{\bar L}\wedge\omega_{\bar L}^{\bar K} \qquad (I.2)$$

и линейному соотношению

$$\omega_{\bar J}^{\bar J}=0. \qquad (I.3)$$

Совмещая вершину M_0 репера R с текущей точкой пространства P_n, мы приведем структурные формы точки к каноническому виду ω_0^J. Такой репер будем обозначать R^0.

Зададим в P_n m-мерную плоскость $\Lambda\ (m\neq n-1)$, определив ее точкой M_0 и m независимыми аналитическими точками $T_i=M_i+\Lambda_i^\alpha M_\alpha$. Условия стационарности плоскости Λ при фиксации точки M_0 имеют вид:

$$\delta\Lambda_i^\alpha-\Lambda_j^\alpha\bar\theta_i^j+\Lambda_i^\beta\bar\omega_\beta^\alpha+\bar\omega_i^\alpha=0, \qquad (I.4)$$

где

$$\bar\theta_i^j=\bar\omega_i^j+\Lambda_i^\alpha\bar\omega_\alpha^j,\quad \mathcal{D}\bar\theta_i^j=\bar\theta_i^l\wedge\bar\theta_l^j. \qquad (I.5)$$

Замечание. Можно ввести формы θ_i^j, которые при ω_0^J превращаются в формы $\bar\theta_i^j$ и удовлетворяют структурным уравнениям $\mathcal{D}\theta_i^j=\theta_i^l\wedge\theta_l^j+\omega_0^K\wedge\theta_{iK}^j$.

Согласно [4], распределением (Λ) m-мерных центрированных плоскостей Λ в P_n называется многообразие, определяемое относительно репера R^0 следующей системой дифференциальных уравнений:

$$d\Lambda_i^\alpha-\Lambda_j^\alpha\theta_i^j+\Lambda_i^\beta\omega_\beta^\alpha+\omega_i^\alpha=\Lambda_{iK}^\alpha\omega_0^K. \qquad (I.6)$$

Пусть в текущей Λ-плоскости распределения (Λ) задан $(m-1)$- мерный конус g второго порядка с вершиной в точке M_0, который определяется невырожденным симметрическим тензором g_{ij} и задается в репере R^0 системой конечных уравнений:

$$g_{ij}x^ix^j=0,\quad x^\alpha-\Lambda_i^\alpha x^i=0. \qquad (I.7)$$

Распределение таких плоскостей будем называть распределением Λ-плоскостей, оснащенным полем конусов (g) или распределением $\Lambda(g)$.

Система дифференциальных уравнений, определяющая распределение $\Lambda(g)$, отнесенное к реперу R^0, имеет вид:

$$d\Lambda_i^\alpha-\Lambda_j^\alpha\theta_i^j+\Lambda_i^\beta\omega_\beta^\alpha+\omega_i^\alpha=\Lambda_{iK}^\alpha\omega_0^K, \qquad (I.8)$$
$$dg_{ij}-g_{lj}\theta_i^l-g_{il}\theta_j^l+2g_{ij}\omega_0^0=g_{ijK}\omega_0^K.$$

Система величин $\{\Lambda_i^\alpha,\Lambda_{iK}^\alpha,g_{ij},g_{ijK}\}$ образует фундаментальный объект первого порядка распределения $\Lambda(g)$ относительно репера R° [1].

Величины

$$W^\alpha_{ij} \overset{def}{=} \Lambda^\alpha_{ij} + \Lambda_{i\beta}\Lambda^\beta_j, \qquad (1.9)$$

удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$dW^\alpha_{ij} - W^\alpha_{\ell j}\theta^\ell_i - W^\alpha_{i\ell}\theta^\ell_j + W^\beta_{ij}\theta^\alpha_\beta + W^\alpha_{ij}\omega^\circ_\circ = W^\alpha_{ijK}\omega^K_\circ, \qquad (1.10)$$

$$(1.11)$$

образуют тензор, присоединенный к группе с инвариантными формами $\bar\theta^j_i, \bar\theta^\alpha_\beta, \omega^\circ_\circ$. В случае, когда n и m удовлетворяют соотношению $n-m \le \frac{m(m+1)}{2}$ из компонент объекта $\mathcal{W}^\alpha_{ij} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(W^\alpha_{ij}+W^\alpha_{ji})$ по формулам, приведенным в работе Н.М.Остиану [5], можно построить относительный инвариант $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{W}^\alpha_{ij})$, удовлетворяющий дифференциальным уравнениям:

$$d\ln\mathcal{J} - 2(n-m)\theta^i_i + m\theta^\alpha_\alpha + m(n-m)\omega^\circ_\circ = \mathcal{J}_K\omega^K_\circ. \qquad (1.12)$$

Обозначим

$$\mathcal{W}^{ij}_\alpha \overset{def}{=} \frac{\partial \ln\mathcal{J}}{\partial W^\alpha_{ij}}. \qquad (1.13)$$

Используя лемму Г.Ф.Лаптева [2], убеждаемся, что

$$d\mathcal{W}^{ij}_\alpha - \mathcal{W}^{ij}_\beta\theta^\beta_\alpha + \mathcal{W}^{\ell j}_\alpha\theta^i_\ell + \mathcal{W}^{i\ell}_\alpha\theta^j_\ell - \mathcal{W}^{ij}_\alpha\omega^\circ_\circ = \mathcal{W}^{ij}_{\alpha K}\omega^K_\circ. \qquad (1.14)$$

2. ГИПЕРПОЛОСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, АССОЦИИРОВАННОЕ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ $\Lambda(g)$. Система дифференциальных уравнений распределения центрированных гиперплоскостей H пространства P_n, определенных точками $M_\circ$, $P_a = M_a + x^n_a M_n$, в репере R° имеет вид:

$$dx^n_a - x^n_b\theta^b_a + x^n_a\omega^n_n + \omega^n_a = x^n_{aK}\omega^K_\circ, \quad \theta^b_a \overset{def}{=} \omega^b_a + x^n_a\omega^b_n. \qquad (2.1)$$

Требование инцидентности плоскости Λ гиперплоскости H с общим центром имеет вид: $x^n_i = \Lambda^n_i - \Lambda^u_i x^n_u$.

Пару распределений (1.8) и (2.1) с таким отношением инцидентности будем называть гиперполосным распределением $\mathcal{H}(\Lambda(g))$ [6]. При этом распределение $\Lambda(g)$ является базисным распределением, а распределение гиперплоскостей H – оснащающим.

Гиперполосное распределение $\mathcal{H}(\Lambda(g))$ в репере R° определяется системой дифференциальных уравнений (1.8), к которой присоединяется система уравнений

$$dx^n_u - x^n_v\theta^v_u + x^n_u\omega^n_n - x^n_i\theta^i_u + \omega^n_u = x^n_{uK}\omega^K_\circ. \qquad (2.2)$$

Система величин $\{\Lambda^\alpha_i, x^n_u, g_{ij}, \Lambda^\alpha_{iK}, x^n_{uK}, g_{ijK}\}$ образует фундаментальный объект первого порядка гиперполосного распределения $\mathcal{H}(\Lambda(g))$, отнесенного к реперу R°.

Исключая случай аполярности объектов g_{ij} и $\mathcal{W}^{ij}_\alpha$, введем величины

$$g_\alpha \overset{def}{=} \mathcal{W}^{ij}_\alpha g_{ij}, \qquad (2.3)$$

удовлетворяющие в репере R° следующим дифференциальным уравнениям:

$$dg_\alpha - g_\beta\theta^\beta_\alpha + g_\alpha\omega^\circ_\circ = g_{\alpha K}\omega^K_\circ. \qquad (2.4)$$

Из системы (2.4) следует, что величины

$$H^n_u \overset{def}{=} -\frac{g_u}{g_n} \qquad (2.5)$$

удовлетворяют уравнениям вида (2.2), где $H^n_i = \Lambda^n_i - \Lambda^u_i x^n_u$.

Следовательно, доказана теорема:

С распределением $\Lambda(g)$ в первой дифференциальной окрестности инвариантно ассоциируется гиперполосное распределение $\mathcal{H}(\Lambda(g))$, для которого распределение $\Lambda(g)$ является базисным.

3. ИНВАРИАНТНЫЕ ОБРАЗЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Точка $F = y^\circ M_\circ + y^i T_i + y^u T_u$ $(y^n = 0)$ текущего элемента H распределения $\mathcal{H}(\Lambda(g))$, отнесенного к реперу $R_T(H) = \{M_\circ, T_i, M_u, M_n\}$, включающему и точек $M_\circ, T_i, M_u$ гиперплоскости H, является фокальной, а направление смещения центра $M_\circ$, определяемое формами $\omega^J_\circ$, – соответствующим фокальным направлениям, если выполнены условия:

$$(y^\circ\delta^n_K + y^i\Lambda^n_{iK} + y^u H^n_{uK})\omega^K_\circ = 0, \quad y^n = 0. \qquad (3.1)$$

Рассматривая смещения центра $M_\circ$ по кривым, принадлежащим распределению $\Lambda(g)$ и определяемым дифференциальными уравнениями

$$\omega^n_\circ = 0, \quad \omega^u_\circ = \Lambda^u_i\omega^i_\circ, \quad \omega^i_\circ = \mu^i\theta, \ (\mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta_1), \qquad (3.2)$$

условия (3.1) приведем к виду:

$$[y^i(\Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{iu}\Lambda^u_j) + y^u(H^n_{uj} + H^n_{uv}\Lambda^v_j)]\mu^j = 0, \quad y^n = 0. \qquad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что характеристика $\mathcal{K}$ гиперплоскости H при смещениях по кривым, принадлежащим $\Lambda(g)$, определяется системой конечных уравнений:

$$W^n_{ij} y^i + W^n_{uj} y^u = 0, \quad y^n = 0, \quad W^n_{uj} \overset{def}{=} H^n_{uj} + H^n_{uv} \Lambda^v_j. \qquad (3.4)$$

Так как в репере $R_T(H)$

$$dW^n_{ij} - W^n_{\ell j}\theta^\ell_i - W^n_{i\ell}\theta^\ell_j + W^n_{ij}(\theta^n_n + \omega^o_o) = W^n_{ij\kappa}\,\omega^\kappa_o, \qquad (3.5)$$

то W^n_{ij} -тензор, а $W \overset{def}{=} \det\|W^n_{ij}\|$ · относительный инвариант.

О п р е д е л е н и е. Гиперполосное распределение $\mathcal{H}(\Lambda(q))$ называется регулярным [6], если тензор $\{W^n_{ij}\}$ невырожденный.

Т е о р е м а. Распределение $\mathcal{H}(\Lambda(q))$ является регулярным тогда и только тогда, когда пересечение плоскостей Λ и $\mathcal{K}$ совпадает с точкой M_o.

Ограничиваясь рассмотрением регулярного распределения $\mathcal{H}(\Lambda(q))$, мы можем плоскость $\mathcal{K}$ интерпретировать как нормаль первого рода плоскости Λ внутри гиперплоскости H.

Построен охват объекта $\{k_u\}$, определяющего в плоскости $(n-m-2)$-мерную плоскость k, не проходящую через центр M_o, которая является аналогом плоскости Кенигса, и в репере $R_T(H_o)$ определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} y^o - k_u y^u = 0, \\ y^i - \mathcal{K}^i_u y^u = 0, \quad y^n = 0, \end{gathered} \qquad (3,6.)$$

где

$$k \overset{def}{=} -\frac{1}{m}[\tilde{\mathcal{K}}^i_{ui} - W^v_{\ell i}\mathcal{K}^i_v\mathcal{K}^\ell_u - (H^n_{ui} + W^n_{\ell i}\mathcal{K}^\ell_u)\hat{\nu}^i_n],$$
$$\tilde{\mathcal{K}}^i_{ui} \overset{def}{=} \mathcal{K}^i_{ui} \pm \mathcal{K}^i_{uv}\Lambda^v_i; \quad \hat{\nu}^i_n \overset{def}{=} (\delta^i_j + \Lambda^v_j\mathcal{K}^i_v)\nu^j_n - \mathcal{K}^i_v\nu^v_n; \quad \mathcal{K}^i_u \overset{def}{=} -W^n_{uj}W^{ij}_n, \qquad (3.7)$$

а $\{\nu^a_n\}$-геометрический объект, определяющий одномерную нормаль первого рода гиперплоскости H.

Таким образом, с распределением $\mathcal{H}(\Lambda(q))$ инвариантным образом связано распределение $(n-m-2)$-мерных плоскостей k, определяемых уравнениями (3.8). Найден охват объекта $\{b_i\}$, удовлетворяющего дифференциальным уравнениям

$$db_i - b_j\theta^j_i + b_i\omega^o_o + \theta^o_i = b_{i\kappa}\omega^\kappa_o, \quad \theta^o_i \overset{def}{=} \omega^o_i + \Lambda^\alpha_i\omega^o_\alpha. \qquad (3.8)$$

Формулы охвата имеют вид:

$$b_i \overset{def}{=} -\frac{1}{n-m-1}[\Lambda^u_{iu} + W^u_{ij}\tilde{\mathcal{K}}^j_u - (\Lambda^n_{iu} + W^n_{ij}\tilde{\mathcal{K}}^j_u)(\nu^u_n - \nu^\ell_n\Lambda^u_\ell)] \qquad (3.9)$$

Показано, что объект $\{b_i\}$ определяет $(m-1)$-мерную плоскость b, инцидентную плоскости Λ и не проходящую через центр M_o. Оказывается, что плоскость b соответствует в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази плоскости $\mathcal{K}$.

Построены охваты геометрических объектов, определяющих нормаль второго рода плоскости H, а также прямую χ плоскости H, проходящую через центр, - аналог канонической касательной.

Таким образом, с распределением $\Lambda(q)$ ассоциируется структура гиперполосного распределения $\mathcal{H}(\Lambda(q))$, оснащающие гиперплоскостные элементы которого несут структуру почти произведения.

Найдены необходимые и достаточные условия того, что распределение $\Lambda(q)$ несет T -структуру по Леграну [7].

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр.Моск.матем.о-ва", 1953, №2, с.275-282.

2. Л а п т е в Г.Ф. Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности.-Докл.АН СССР", 1959, 126, № 3, с.490-493.

3. Л а п т е в Г.Ф. О с т и а н у Н.М. - структуры на дифференцируемых многообразиях. Проблемы геометрии. М., Всесоюзн.ин-т научн.и технич.информ.АН СССР, 1975, 7, с.5-21.

4. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве.-"Тр.геометрич.семинара Всесоюзн.ин-т научн.и технич.информ.АН СССР", 1973, №4, с.71-120.

5. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства"-"Тр.геометрич.семинара Всесоюз. ин-т научн.и технич.информ.АН СССР", 1966, № 1, 1966, с.239-264.

6. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперплосного распределения -мерных линейных элементов.-"Проблемы геометрии. Всесоюзн.ин-т научн.и технич.информ.АН СССР", 1975, № 7, с.117-152.

7. Ш и р о к о в А.П. Структуры на дифференцируемых многообразиях.-"Алгебра.Топология.Геометрия.1976.М., 1969, с.125-186. (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 9 1978
УДК 513.73

М.В. Бразевич

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НОРМАЛИЗАЦИИ

Задачи внутреннего оснащения линейчатых многообразий, как голономных, так и неголономных, являются трудными задачами классической дифференциальной геометрии. Такие задачи ставились и решались многими геометрами (см. работы [1], [3]-[6], [12]). Так в работе [1] В.И. Близникасом решена задача внутреннего оснащения неголономного комплекса. Поскольку задание неголономного комплекса эквивалентно заданию инвариантной корреляции на всем многообразии Грассмана $G_{\tau}(1,3)$, то в указанной задаче по заданной корреляции восстанавливается нормализация многообразия Грассмана.

В данной заметке решается, по сути дела, задача, обратная задаче внутреннего оснащения неголономного комплекса, т.е. по заданной нормализации восстанавливается корреляция на многообразии Грассмана. Чисто аналитическое решение этой задачи приведено в тезисах доклада [7]. В данной заметке даются некоторые геометрические характеристики внутренним корреляциям нормализованного многообразия Грассмана.

Все исследования выполнены единым аналитическим методом дифференциально-геометрических исследований (методом Г.Ф. Лаптева [10]-[11]).

§1. Общие замечания и аналитическое решение задачи

Пусть задано нормализованное многообразие Грассмана, т.е. многообразие Грассмана $G_{\tau}(1,3)$, оснащенное полем дифференциально-геометрического объекта следующей структуры :

$$\nabla h_{\alpha}^{p} + \omega_{\alpha}^{p} = h_{\alpha\beta}^{pq}\,\omega_{q}^{\beta}, \tag{1}$$

$$(p, q, \ldots = 1, 2\,;\ \alpha, \beta, \ldots = 3, 4).$$

Здесь и в дальнейшем считаем, что проективное пространство P_3 отнесено к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{I}}\}$ ($\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \ldots = 1,2,3,4$), деривационные формулы которого имеют вид :

$$dA_{\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}} A_{\mathcal{J}}, \tag{2}$$

где компоненты инфинитезимального перемещения этого репера, т.е. 1-формы $\omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}}$, являются инвариантными 1-формами группы проективных преобразований $PG(3,R)$ и удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}. \tag{3}$$

Полагаем также, что прямая $\ell = (A_1 A_2)$ описывает многообразие Грассмана G_{τ} (1,3), а соответствующая (нормализующая) прямая ℓ^*, заданная в репере $\{A_{\mathcal{I}}\}$ уравнениями

$$x^p = h^p_\alpha x^\alpha, \tag{4}$$

описывает многообразие нормалей $\mathfrak{M}(\ell^*)$.

Уравнения геометрических образов в основном будем задавать в другом подвижном репере $\{H_\mathcal{J}\}$, связанным с исходным репером $\{A_\mathcal{J}\}$ следующим образом:

$$H_p = A_p, \quad H_\alpha = A_\alpha + h^p_\alpha A_p. \tag{5}$$

Заметим, что система величин

$$\mathcal{H}^{(1)} = \{h^p_\alpha, h^{pq}_{\alpha\beta}\} \tag{6}$$

образует первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект нормализованного многообразия Грассмана. Этот объект имеет следующие подобъекты (тензоры):

1) 16- компонентный тензор $H^{pq}_{\alpha\beta}$, являющийся неголономной ковариантной производной [2] оснащающего объекта h^p_α относительно линейной дифференциально-геометрической связности, индуцируемой этим объектом в главном расслоенном пространстве P или Q (см. [1]). Этот тензор определяется формулами

$$H^{pq}_{\alpha\beta} = h^{pq}_{\alpha\beta} - h^p_\beta h^q_\alpha, \tag{7}$$

и его компоненты удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla H^{pq}_{\alpha\beta} = H^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma_t. \tag{8}$$

2) Симметричный по парам индексов тензор $S^{pq}_{\alpha\beta}$, определенный формулами

$$S^{pq}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\sigma_{st}\,\sigma^{\gamma\varepsilon} H^{sp}_{\gamma\alpha} H^{tq}_{\varepsilon\beta}. \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем применяемые обобщенные символы Кронекера $\sigma_{pq}, \sigma^{pq}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma^{\alpha\beta}$ определим равенствами

$$\begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma^{33} & \sigma^{34} \\ \sigma^{43} & \sigma^{44} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Компоненты тензора (9) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla S^{pq}_{\alpha\beta} + S^{pq}_{\alpha\beta}(\omega^t_t - \omega^\gamma_\gamma) = S^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma_t. \tag{10}$$

3) Симметричный по парам индексов тензор $P^{pq}_{\alpha\beta}$, определенный равенствами

$$P^{pq}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(H^{pq}_{\alpha\beta} + H^{qp}_{\beta\alpha}), \tag{11}$$

а его компоненты удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla P^{pq}_{\alpha\beta} = P^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma_t. \tag{12}$$

4) Кососимметричный по парам индексов тензор $G^{pq}_{\alpha\beta}$, определенный равенствами

$$G^{pq}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(H^{pq}_{\alpha\beta} - H^{qp}_{\beta\alpha}). \tag{13}$$

Его компоненты удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla G^{pq}_{\alpha\beta} = G^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma_t. \tag{14}$$

Пусть $B^{pq}_{\alpha\beta}$ - произвольный тензор, охваченный объектом $\mathcal{H}^{(1)}$. Из компонент этого тензора можно построить две, в общем случае, различные матрицы четвертого порядка

$$B = \begin{Vmatrix} B^{12}_{34} & B^{12}_{33} & B^{11}_{34} & B^{11}_{33} \\ -B^{12}_{44} & -B^{12}_{43} & -B^{11}_{44} & -B^{11}_{43} \\ -B^{22}_{34} & -B^{22}_{33} & -B^{21}_{34} & -B^{21}_{33} \\ B^{22}_{44} & B^{22}_{43} & B^{21}_{44} & B^{21}_{43} \end{Vmatrix}, \quad B^* = \begin{Vmatrix} B^{21}_{43} & B^{21}_{33} & B^{11}_{43} & B^{11}_{33} \\ -B^{21}_{44} & -B^{21}_{34} & -B^{11}_{44} & -B^{11}_{34} \\ -B^{22}_{43} & -B^{22}_{33} & -B^{12}_{43} & -B^{12}_{33} \\ B^{22}_{44} & B^{22}_{34} & B^{12}_{44} & B^{12}_{34} \end{Vmatrix},$$

имеющие один и тот же характеристический полином

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 . \qquad (15)$$

Коэффициенты этого полинома b_J являются относительными инвариантами веса J нормализованного многообразия Грассмана, следовательно, корни полинома (15), обозначим их $\underset{J}{\lambda}$, являются относительными инвариантами веса 1. Собственные вектора матриц B и B^* $\underset{J}{\lambda}{}^{\alpha}_{p}(B)$ и $\underset{J}{\lambda}{}^{\alpha}_{p}(B^*)$ определяются из линейных систем

$$(B^{pq}_{\alpha\beta} - \underset{J}{\lambda}\,\sigma_{pq}\,\sigma^{\alpha\beta})\,\underset{J}{\lambda}{}^{\beta}_{q}(B) = 0, \qquad (16)$$

$$(B^{pq}_{\alpha\beta} - \underset{J}{\lambda}\,\sigma_{pq}\,\sigma^{\alpha\beta})\,\underset{J}{\lambda}{}^{\alpha}_{p}(B^*) = 0 \qquad (17)$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\underset{J}{\lambda}{}^{\alpha}_{p} + \underset{J}{\lambda}{}^{\alpha}_{p}\,\underset{J}{\omega} = \underset{J}{\lambda}{}^{\alpha q}_{p\beta}\,\omega^{\beta}_{q}, \qquad (18)$$

где 1-формы $\underset{J}{\omega}$ зависят от выбора корня $\underset{J}{\lambda}$ и являются полными дифференциалами, т.е. $\mathcal{D}\underset{J}{\omega} = 0$.

Из формул (18) следует, что собственные вектора матриц B и B^* определяют тензорные поля на многообразии Грассмана. Эти поля и порождают инвариантные корреляции на многообразии $Gr(1,3)$.

Действительно, легко проверить, что при фиксации луча $\ell \in Gr(1,3)$ и точки $M = t^p H_p$ на этом луче, фиксируется плоскость

$$\sigma_{\alpha\beta}\,\lambda^{\alpha}_{p}\,t^p x^{\beta} = 0 . \qquad (19)$$

Кроме того, дифференциально-геометрический объект λ^{α}_{p} структуры (18) при наличии тензора $C^{pq}_{\alpha\beta}$ индуцирует дифференциально-геометрические объекты

$${}'\lambda^{p}_{\alpha} = C^{pq}_{\alpha\beta}\,\lambda^{\beta}_{q}, \quad {}''\lambda^{p}_{\alpha} = C^{qp}_{\beta\alpha}\,\lambda^{\beta}_{q} . \qquad (20)$$

Компоненты этих объектов, в силу (18) и дифференциальных уравнений тензора $C^{pq}_{\alpha\beta}$, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla\lambda^{p}_{\alpha} + \lambda^{p}_{\alpha}\,\omega = \lambda^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta}_{q}, \qquad (21)$$

где $\lambda^{pq}_{\alpha\beta} \neq \lambda^{qp}_{\beta\alpha}$, и, следовательно, опять определяют инвариантные корреляции на многообразии Грассмана, т.е. при фиксации луча $\ell \in Gr(1,3)$ и точки $M = t^p H_p$ на этом луче, фиксируется плоскость

$$\sigma_{pq}\,\lambda^{p}_{\alpha}\,t^q x^{\alpha} = 0. \qquad (22)$$

Заметим также, что дифференциально-геометрический объект λ^{α}_{p} структуры (18) и индуцируемые им объекты (20) в случае, когда многообразие нормалей $\mathfrak{M}(\ell^*)=Gr(1,3)$, определяют инвариантные корреляции не только на исходном многообразии Грассмана $Gr\ (1,3)$, но и на многообразии $\mathfrak{M}(\ell^*)$. Для совпадения многообразия нормалей со всем многообразием Грассмана достаточно, чтобы относительный инвариант

$$H = \det \| H^{pq}_{\alpha\beta} \|, \ dH + 4H(\omega^t_t - \omega^\gamma_\gamma) = H^q_\beta\, \omega^\beta_q \qquad (23)$$

был отличен от нуля. В случае, когда $H \neq 0$, легко проверить, что при фиксации луча ℓ^* и точки $M = t^\alpha H_\alpha$ на этом луче фиксируются плоскости

$$\sigma_{\alpha\beta}\, \lambda^\alpha_p\, t^\beta x^p = 0, \qquad (24)$$

$$\sigma_{pq}\, \lambda^p_\alpha t^\alpha x^q = 0. \qquad (25)$$

Указанное замечание позволяет обобщить понятие пар голономных линейчатых многообразий трехмерного пространства на неголономные. Эти обобщения даны в работе автора [8].

Отметим только, что дифференциально-геометрический объект λ^α_p структуры (18) порождает всего лишь следующие две пары неголономных многообразий:

$$NGr(1,3,1;\lambda^\alpha_p) - NGr^*(1,3,1;\lambda^p_\alpha = H^{pq}_{\alpha\beta}\lambda^\beta_q), \qquad (26)$$

$$NGr(1,3,3;\lambda^p_\alpha = H^{qp}_{\beta\alpha}\lambda^\beta_q) - NGr^*(1,3,3;\lambda^\alpha_p). \qquad (27)$$

Заметим также, что пару неголономных комплексов (27) мы

можем представить в виде

$$NGr(1,3,3;\lambda^p_\alpha) - NGr^*(1,3,3;\lambda^\alpha_p = H^{\alpha\beta}_{pq}\lambda^q_\beta), \qquad (28)$$

где $H^{\alpha\beta}_{pq}$ – тензор, обратный к тензору $H^{pq}_{\alpha\beta}$, и считать, что пару (28) определяет дифференциально-геометрический объект λ^p_α структуры (21).

Каждая из отмеченных пар неголономных линейчатых многообразий индуцирует проективные преобразования на луче ℓ и ℓ^* в силу следующей схемы:

$$\forall M = t^p H_p \to N = \pi(M) \cap \ell^* \to \widetilde{M} = \sigma(N) \cap \ell, \qquad (29)$$

$$\forall N = t^\alpha H_\alpha \to M = \sigma(N) \cap \ell \to \widetilde{N} = \pi(M) \cap \ell^*, \qquad (30)$$

где $\pi(M)$ и $\sigma(N)$ – плоскости, соответствующие точкам M и N в корреляциях, определяемых соответственно первым и вторым неголономным многообразием из рассматриваемой пары. Например, плоскости $\pi(M)$ и $\sigma(N)$ в формулах (29) для пары (26) определяются уравнениями (19) и (25), а для пары (27) - уравнениями (22) и (24).

§ 2. Некоторые геометрические интерпретации

Матрицы, составленные из компонент тензоров $H^{pq}_{\alpha\beta}$, $S^{pq}_{\alpha\beta}$ и $P^{pq}_{\alpha\beta}$, также, как матрицы B и B^* из компонент тензора $B^{pq}_{\alpha\beta}$, будем обозначать $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^*$, S, S^*, P, P^*. Заметим, что в силу симметричности тензоров $S^{pq}_{\alpha\beta}$ и $P^{pq}_{\alpha\beta}$

3 Зак. 14409

$$S = S^*, \quad P = P^*.$$

Дадим некоторые геометрические характеристики внутренним корреляциям многообразия Грассмана, определяемым собственными векторами матриц $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^*$, S и P.

1) Если искать такое внутреннее оснащение исходного многообразия Грассмана дифференциально-геометрическим объектом λ^α_p структуры (18), чтобы этот объект и индуцируемый им объект

$$\lambda^p_\alpha = H^{pq}_{\alpha\beta} \lambda^\beta_q \tag{31}$$

определяли одну и ту же корреляцию на многообразии Грассмана, то мы и придем к собственным векторам матрицы $\mathcal{H}$. Отсюда совершенно очевидно, что проективные преобразования (29) и (30), индуцируемые парой неголономных многообразий (26), будут тождественными тогда и только тогда, когда дифференциально-геометрический объект λ^α_p является собственным вектором матрицы $\mathcal{H}$.

Аналогично, дифференциально-геометрический объект λ^α_p структуры (18) и индуцируемый им объект

$$\lambda^p_\alpha = H^{qp}_{\beta\alpha} \lambda^\beta_q \tag{32}$$

определяют одну и ту же корреляцию на многообразии Грассмана, а также проективные преобразования (29) и (30), порождаемые парой неголономных комплексов (27), будут тождественные тогда и только тогда, когда дифференциально-геометрический объект λ^α_p будет собственным вектором матрицы $\mathcal{H}^*$.

Доказательства этих результатов приведены в работе автора [8].

2) В работе [1] В.И.Близникасом введено понятие особой линейчатой поверхности неголономного комплекса. Когда луч ℓ описывает особую линейчатую поверхность первого неголономного комплекса $NG\tau(1,3,3;\{\lambda^p_\alpha\})$ из пары (28), то соответствующий луч ℓ^* опишет, так называемую присоединенную линейчатую поверхность, которая в общем случае, не будет особой для второго неголономного комплекса $NG\tau(1,3,3;\{\lambda^\alpha_p\})$ из пары (28).

Оказывается, что присоединенная линейчатая поверхность для особой линейчатой поверхности первого неголономного комплекса из пары (28) будет особой для второго неголономного комплекса этой пары тогда и только тогда, когда дифференциально-геометрический объект λ^p_α, порождающий пару (28), определяется формулой

$$\lambda^p_\alpha = \rho\, \sigma^{pq} \sigma_{\alpha\beta} \xi^\beta_q, \tag{33}$$

где ξ^β_q - собственный вектор матрицы S.

Действительно, зададим линейчатые поверхности, описываемые лучом ℓ и ℓ^*, следующими дифференциальными уравнениями (см. [8]):

$$\omega^\alpha_p = \xi^\alpha_p \theta, \quad \nabla\xi^\alpha_p \wedge \theta = 0, \quad \mathcal{D}\theta = 0; \tag{34}$$

$$\theta^p_\alpha = \xi^p_\alpha \theta, \quad \nabla\xi^p_\alpha \wedge \theta = 0, \quad \mathcal{D}\theta = 0, \tag{35}$$

где

$$\Theta^p_\alpha = H^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_q. \tag{36}$$

Поверхность (34) будет особой для неголономного комплекса $NGr(1,3,3;\ \{\lambda^p_\alpha\ )$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (см. [1])

$$\xi^\alpha_1\xi^2_\alpha = \xi^\alpha_2\xi^1_\alpha = \xi^\alpha_1\xi^1_\alpha - \xi^\alpha_2\xi^2_\alpha = 0. \tag{37}$$

Аналогично поверхность (35) будет особой для неголономного комплекса NGr (1,3,3; $\{\lambda^\alpha_p\}$) из пары (28) при выполнении условий

$$\xi^p_3\xi^4_p = \xi^p_4\xi^3_p = \xi^p_3\xi^3_p - \xi^p_4\xi^4_p = 0. \tag{38}$$

Из (37) и (38), учитывая, что $\lambda^p_\alpha = H^{qp}_{\beta\alpha}\lambda^\beta_q$, и принимая во внимание, что поверхность (35) будет присоединенной к поверхности (34), только при выполнении равенств

$$\xi^p_\alpha = H^{pq}_{\alpha\beta}\,\xi^\beta_q, \tag{39}$$

мы приходим к системе уравнений, определяющих дифференциально-геометрический объект ξ^β_q:

$$(S^{pq}_{\alpha\beta} - \lambda\,\sigma^{pq}\sigma_{\alpha\beta})\,\xi^\beta_q = 0, \tag{40}$$

где λ - корни характеристического уравнения

$$\det\| S^{pq}_{\alpha\beta} - \lambda\,\sigma^{pq}\sigma_{\alpha\beta}\| = 0. \tag{41}$$

После чего получение формул (33) не представляет труда.

3) Пусть на многообразии Грассмана заданы четыре различные инвариантные корреляции. Назовем четверку корреляций гармонической, если плоскости, соответствующие этим корреляциям в каждой точке луча $\ell \in Gr$ (1,3), образуют гармоническую четверку.

Оказывается, что четверка корреляций исходного многообразия Грассмана, определяемая дифференциально-геометрическими объектами

$$\lambda^\alpha_p,\ {}'\lambda^p_\alpha = H^{pq}_{\alpha\beta}\lambda^\beta_q,\ {}''\lambda^p_\alpha = P^{pq}_{\alpha\beta}\lambda^\beta_q,\ {}'''\lambda^p_\alpha = G^{pq}_{\alpha\beta}\lambda^\beta_q, \tag{42}$$

будет гармонической тогда и только тогда, когда дифференциально-геометрический объект λ^α_p является собственным вектором матрицы P .

Для доказательства достаточно взять произвольную точку $M = t^p H_p$ на луче ℓ и потребовать, чтобы сложное отношение четырех плоскостей, соответствующих этой точке в корреляциях, определяемых объектами (42), равнялось -1.

В заключение отметим, что в случае гармонической нормализации многообразия Грассмана (этот случай совпадает с вырождением нормализованного многообразия Грассмана в комплекс коррелятивных элементов К.И.Гринцевичуса и аналитически выделяется условиями $H^{pq}_{\alpha\beta} = H^{qp}_{\beta\alpha}$, см. [9]) имеем следующие соотношения между рассматриваемыми матрицами:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^* = P, \quad S = \tfrac{1}{2}\mathcal{H}^2. \tag{43}$$

Из (43) следует, что собственные векторы всех матриц совпадают и сохраняются только геометрические характеристики, данные в пп. I и 2.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить свою благодарность профессору В.И.Близникасу за постановку задачи и ценные советы.

Список литературы

I.Б л и з н и к а с В.И. Некоторые вопросы теории неголономных комплексов.-"Тр.геометрич.семинара, ВИНИТИ АН СССР", 1974, №5, с.69-96.

2.Б л и з н и к а с В.И. Неголономное дифференцирование и линейные связности в пространстве опорных элементов.- "Лит.мат.сб.", 1966, 6, №2, с.I4I-208.

3.Б л и з н и к а с В.И., Г р и г е л и о н и с С.И. О внутренних оснащениях неголономного гиперкомплекса $\mathcal{N}Gr$ (I,4,5)-"Тр.геометрич.семинара, ВИНИТИ АН СССР", 1973, 4, с.I2I - I54.

4.Б л и з н и к а с В.И.Л у п е й к и с З.Ю.О внутренних оснащениях линейчатого комплекса.-"Тр.геом.семинара, ВИНИТИ АН СССР", 1973, 4, с.I55-I68.

5.Б л и з н и к а с В.И.Некоторые вопросы геометрии гиперкомплекса прямых.-"Тр.геометрич.семинара, ВИНИТИ АН СССР 1974, 6, с.43-III.

6.Б л и з н и к е н е И.В. О геометрии неголономной конгруэнции первого рода.-"Тр.геометрич.семинара, ВИНИТИ АН СССР", 1971, 3, с.I25-I48.

7.Б р а з е в и ч М.В. О внутренних корреляциях нормализованного многообразия Грассмана.-В кн.: I50 лет геометрии Лобачевского, М., ВИНИТИ, 1976, с.33.

8.Б р а з е в и ч М.В.Некоторые вопросы геометрии нормализованного многообразия Грассмана.М., ВИНИТИ, 1975, 28 с., № 355-376 Деп.

9.Б р а з е в и ч М.В. К дифференциальной геометрии нормализованного многообразия Грассмана Gr (I.3).-В кн.: Шестая Всесоюзн.геометрич.конф. по современным проблемам геометрии.Вильнюс, 1975, с.40-43.

IO.Л а п т е в Г.Ф.Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр.Моск.матем.о-ва", 1953, №2, с.275-385.

II.Л а п т е в Г.Ф.Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований.-"Тр.3-го Всесоюзн.Мат. съезда", 1958, т.3, с.409-4I8.

I2.О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве.-"Тр.геометрич.семинара, ВИНИТИ АН СССР, 1973, 4, с.7I-I20.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 9 1978

УДК 513.73

В.Н. Величкин

СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ОСНАЩЕНИЯМИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ V_{n-1} В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_n

В настоящей статье рассматриваются специальные оснащения гиперповерхности V_{n-1} в евклидовом пространстве E_n, индуцирующие на ней различные аффинные связности: эвиаффинную, вейлеву, риманову. Найдены необходимые и достаточные условия на выбор таких оснащений.

П° I. Пусть задана гиперповерхность V_{n-1} в евклидовом пространстве E_n. Присоединим к ней подвижной репер первого порядка $\mathcal{R}=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_n\}$ $(i,j,k=1,\dots,n-1)$, где $x\in V_{n-1}$, $\vec{e}_i$ – единичные векторы, лежащие в касательной плоскости T_x, $\vec{e}_n$ – единичный вектор нормали к поверхности V_{n-1} в точке x. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^n\vec{e}_n,\quad d\vec{e}_n=\omega_n^i\vec{e}_i+\omega_n^n\vec{e}_n. \tag{1}$$

При этом компоненты метрического тензора поверхности V_{n-1} $\gamma_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$ подчиняются соотношению:

$$d\gamma_{ij}=\gamma_{ik}\omega_j^k+\gamma_{jk}\omega_i^k, \tag{2}$$

а формы ω^i, ω_j^i удовлетворяют известным уравнениям структуры евклидова пространства.

Пусть

$$\vec{e}=\xi^i\vec{e}_i+\vec{e}_n \tag{3}$$

другое оснащение поверхности V_{n-1}. Здесь ξ^i достаточное число раз дифференцируемые функции переменных $u^1,\dots,u^{n-1}$ – параметров точки поверхности.

Присоединим к поверхности V_{n-1} еще один подвижной репер $\bar{\mathcal{R}}=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}\}$. Пусть деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\bar{\omega}_i^j\vec{e}_j+\bar{\omega}_i^n\vec{e},\quad d\vec{e}=\bar{\omega}_n^j\vec{e}_j+\bar{\omega}_n^n\vec{e}. \tag{4}$$

Подставляя в формулы (4) выражение (3) и результат его дифференцирования и сравнивая полученные выражения с формулами (I), получим формулы связи реперов $\mathcal{R}$ и $\bar{\mathcal{R}}$:

$$\bar{\omega}_j^i=\omega_j^i-\xi^i\omega_j^n, \tag{5}$$

$$\bar{\omega}_i^n=\omega_i^n, \tag{6}$$

$$\bar{\omega}_n^i=d\xi^i+\xi^j\omega_j^i+\omega_n^i-\xi^i\xi^j\omega_j^n, \tag{7}$$

$$\bar{\omega}_n^n=\xi^i\omega_i^n. \tag{8}$$

П° 2. Необходимо, чтобы оснащение (псевдонормаль) (3) было инвариантно связано с поверхностью V_{n-1}. Для этого надо, чтобы векторное поле

$$\vec{p}=\xi^i\vec{e}_i \tag{9}$$

также было инвариантно связано с нашей поверхностью. Из формул (1) имеем:

$$d\vec{p}=(d\xi^i+\xi^j\omega_j^i)\vec{e}_i+\xi^i\omega_i^n\vec{e}_n. \tag{10}$$

Для инвариантности потребуем, чтобы дифференцирование по вторичным параметрам давало нуль:

$$\delta\vec{p}=(\delta\xi^i+\xi^j\pi_j^i)\vec{e}_i=0. \tag{11}$$

Здесь учтено, что формы ω_i^n главные, так как

$$\omega_i^n=b_{ij}\omega^j,\quad b_{ij}=b_{ji}. \tag{12}$$

Из (11) следует, что справедливы разложения:

$$d\xi^i+\xi^j\omega_j^i=x_k^i\omega^k. \tag{13}$$

Продифференцировав внешним образом выражение (13), используя уравнения структуры и сами разложения (13), мы получим:

$$(dx_k^i-x_j^i\omega_k^j+x_k^j\omega_j^i-\xi^j\omega_n^i b_{jk}^n)\wedge\omega^k=0. \tag{14}$$

Из (14) по лемме Картана получаем:

$$dx_k^i-x_j^i\omega_k^j+x_k^j\omega_j^i+\xi^j\gamma^{il}\omega_l^n b_{jk}^n=x_{kj}^i\omega^j, \tag{15}$$

причем
$$x^i_{kj} = x^i_{jk} \,. \tag{16}$$

Переходя в (15) к дифференцированию по вторичным параметрам и учитывая, что ω^n_ℓ главные формы, получим:
$$\delta x^i_k - x^i_j \pi^j_k + x^j_k \pi^i_j = 0 \,. \tag{17}$$
Здесь использованы разложения (12) и
$$\omega^i_n + \gamma^{ij} \omega^n_j = 0 \,. \tag{18}$$
Отсюда по критерию Г.Ф.Лаптева [1] заключаем, что x^i_k есть тензор типа аффинора.

П$^\circ$ 3. Найдем условия, при которых связность, индуцируемая оснащением (3), является эквиаффинной.

Известно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы связность была эквиаффинной, является [2]
$$\mathcal{D}\bar\omega^i_i = 0 \,. \tag{19}$$
(здесь сумма по $i = 1, \ldots, n-1$). Используя формулу (5), получаем:
$$\mathcal{D}\bar\omega^i_i = \mathcal{D}\omega^i_i - \mathcal{D}(\xi^i \omega^n_i) \,. \tag{20}$$
Но
$$\mathcal{D}\omega^i_i = 0 \,, \tag{21}$$
так как связность, индуцированная метрической нормалью, является эквиаффинной. Таким образом, условие (19) принимает вид:
$$(d\xi^k + \xi^i \omega^k_i) \wedge (b_{kj}\omega^j) = x^k_\ell b_{kj}\, \omega^\ell \wedge \omega^j = 0 \,. \tag{22}$$
Здесь использованы разложения (13).

Итак,
$$x^k_{[\ell} b_{j]k} = 0 \tag{23}$$
есть условие на выбор оснащения (3), при котором оно индуцирует на поверхности V_{n-1} эквиаффинную связность.

П$^\circ$ 4. Найдем условия, при которых связность, индуцируемая оснащением (3), является вейлевой с основным тензором b_{ij}, определяемым условиями (12).

Известно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы связность была вейлевой с основным тензором b_{ij}, является [2]
$$\bar\nabla b_{ij} = \theta\, b_{ij} \,, \tag{24}$$

где
$$\nabla b_{ij} = d b_{ij} - b_{kj}\bar\omega^k_i - b_{ik}\bar\omega^k_j \,, \tag{25}$$
θ – дополнительный ковектор связности Вейля.

Из формулы перехода (5) с учетом соотношений (12), (18) получим следующее выражение для $\bar\nabla b_{ij}$:
$$\bar\nabla b_{ij} = \nabla b_{ij} + \xi^k (b_{kj} b_{i\ell} + b_{ik} b_{j\ell})\omega^\ell . \tag{26}$$

С другой стороны, известно, что в результате продолжения уравнений (12) и применения леммы Картана мы получим соотношение
$$d b_{ij} - b_{kj}\omega^k_i - b_{ik}\omega^k_j + b_{ij}\omega^n_n = b_{ijk}\omega^k , \tag{27}$$
причем b_{ijk} – тензор (проверяется по критерию Г.Ф. Лаптева [I]) симметрический по всем своим индексам. Но в силу выбора вектора $\vec e_n$ репера $\mathcal{R}$ имеем $\omega^n_n = 0$, и потому
$$\nabla b_{ij} = b_{ijk}\,\omega^k , \tag{28}$$
и, таким образом, формула (26) принимает вид:
$$\bar\nabla b_{ij} = [b_{ij\ell} + \xi^k (b_{kj} b_{i\ell} + b_{ik} b_{j\ell})]\omega^\ell , \tag{29}$$
а условие (24) вид:
$$[b_{ij\ell} + \xi^k (b_{kj} b_{i\ell} + b_{ik} b_{j\ell})]\omega^\ell = \theta\, b_{ij} \tag{30}$$
Пусть
$$\theta = v_\ell\, \omega^\ell \tag{31}$$
Тогда из (30) в силу линейной независимости форм ω^ℓ получим
$$b_{ij\ell} + \xi^k (b_{kj} b_{i\ell} + b_{ik} b_{j\ell}) = v_\ell\, b_{ij} . \tag{32}$$
Так как тензор b_{ij} мы приняли за основной тензор связности Вейля, то существует взаимный тензор b^{ij} ; свертывая с ним выражение (32), получим
$$v_\ell = \frac{1}{n-1} b^{ij} b_{ij\ell} + \frac{2\xi^k}{n-1} b_{k\ell} \,. \tag{33}$$

П$^\circ$ 5. Предположим, что помимо условия вейлевости (24) для оснащения (3) выполняется условие эквиаффинности (23). Эквиаффинная вейлева связность есть риманова связность [2]. Известно, что для римановой связности путем перенормирования основного тензора (в нашем случае b_{ij}) можно достичь того, чтобы $\theta = 0$, и значит $v_\ell = 0$. Предполагая, что такая перенормировка произведена, из (33) получим

$$2\xi^{\kappa} b_{\kappa l} + b^{ij} b_{ijl} = 0. \qquad (34)$$

Наконец, свернув (34) с $b^{\kappa l}$, получим

$$\xi^{\kappa} = \frac{1}{2(n-1)} b^{ij} b^{\kappa l} b_{ijl}. \qquad (35)$$

Формула (35) показывает, как выбрать псевдонормаль (3) так, чтобы получить на поверхности $V_{n-1} \subset E_n$ риманову связность с основным тензором b_{ij}.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр.Моск.мат.о-ва," 1963, т.2, с.275-382.

2. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. Изд. 2-е испр. М., "Наука", 1976, с.432.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

Л.Г.К о р с а к о в а

ПАРЫ $\mathcal{D}$

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются пары $\mathcal{D}$ конгруэнций коник C_1 и C_2, не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей, причем коники C_1 и C_2 имеют две общие точки пересечения с прямой ℓ. Исследуется пара $\mathcal{D}$, все коники которой инцидентны одной квадрике- пара $\mathcal{D}^Q$.

§ I. Пары $\mathcal{D}^Q$ конгруэнций коник, инцидентных инвариантной квадрике

Рассмотрим в пространстве P_3 пару (C_1, C_2) [1] конгруэнций коник C_1 и C_2, не лежащих в одной плоскости и не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей α_1 и α_2, описывающих двупараметрические семейства. Отнесем пару (C_1, C_2) к реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где вершина A_i $(i, j, \kappa = 1, 2;\ i \neq j$, по индексам i, j не суммировать) репера R -одна из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ. Вершины A_{i+2} являются полюсами прямой ℓ относительно коники C_i соответственно. Деривационные формулы репера R имеют вид

$$d A_{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\beta} A_{\beta} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4),$$

где линейные дифференциальные формы ω_{α}^{β} удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0$.

Коники C_1 и C_2 в репере R при соответствующей нормировке вершин определяются уравнениями

$$(x^3)^2 - (a_1 x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0; \tag{1.1}$$

$$(x^4)^2 - (a_2 x^2)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{1.2}$$

Пара (C_1, C_2) конгруэнций коник C_1 и C_2 называется парой $\mathcal{D}$ [2], если коники C_1 и C_2 пересекаются в точках A_i.

Условия, аналитически характеризующие пары $\mathcal{D}$, имеют вид:

$$a_1 = a_2 = 0. \tag{1.3}$$

Обозначим

$$\omega_i^4 = \omega_i. \tag{1.4}$$

Система пфаффовых уравнений пары $\mathcal{D}$ имеет вид:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k,$$
$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \; \Omega_i = b_i^k\omega_k, \tag{1.5}$$

где

$$\Omega_i = \omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_{i+2}^{i+2}.$$

Рассмотрим задачу о принадлежности всех коник C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) пары $\mathcal{D}$ некоторой инвариантной квадрике Q, уравнение которой в общем случае может быть записано в виде:

$$Q \equiv (x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^2 + 2c\,x^3x^4 = 0. \tag{1.6}$$

Пары $\mathcal{D}$, у которых все коники C_1, C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) принадлежат инвариантной квадрике Q, назовем парами $\mathcal{D}^Q$.

Из условия

$$dQ = (2\Theta - \omega_1^1 - \omega_2^2)\,Q \qquad (\mathcal{D}\Theta = 0) \tag{1.7}$$

инвариантности квадрики Q получим, что выполняются следующие соотношения:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_3^i = \omega_j^3 + c\,\omega_j, \quad \omega_4^i = c\,\omega_j^3 + \omega_j, \tag{1.8}$$
$$\Omega_1 = 2c\,\omega_3^4, \; \Omega_2 = 2c\,\omega_4^3, \; dc + (c^2-1)(\omega_3^4 + \omega_4^3) = 0.$$

Пары $\mathcal{D}^Q$ определяются уравнениями (1.8), уравнениями

$$\omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k \tag{1.9}$$

и замыканиями уравнений (1.8). Анализируя эту систему, приходим к выводу, что пары $\mathcal{D}^Q$ существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Пары $\mathcal{D}^Q$ обладают следующими свойствами: 1/ точка A_i является фокусом лучей A_iA_3; A_iA_4 прямолинейных конгруэнций (A_iA_3), (A_iA_4); 2/ одно семейство торсов прямолинейной конгруэнции (A_iA_3) соответствует линиям, огибаемым прямыми A_iA_3 на поверхности (A_i); 3/ торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Справедливость первого утверждения следует из формул, определяющих фокусы $F_i = s_iA_i + t_iA_3$, $\Phi_i = \lambda_iA_i + \mu_iA_4$ лучей A_iA_3, A_iA_4 конгруэнций (A_iA_3), (A_iA_4) соответственно, где

$$t_i\{s_i\Gamma_i^{3j} + t_i[\Gamma_i^{3j}\Gamma_3^{4i} - (\Gamma_i^{3i} + c)\Gamma_3^{4j}]\} = 0,$$
$$\mu_i\{\lambda_i\Gamma_i^{3j} + \mu_i[\Gamma_4^{3j}(c\Gamma_i^{3i} + 1) - c\,\Gamma_4^{3i}\Gamma_i^{3j}]\} = 0.$$

2/ Торсы конгруэнции (A_iA_3) определяются уравнениями

$$\omega_i\,\omega_3^j = 0.$$

3/ Для определения торсов конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) имеем уравнения:

$$\omega_1^3\omega_2-\omega_1\omega_2^3=0,$$

$$(1-c^2)(\omega_1^3\omega_2-\omega_1\omega_2^3)=0,$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. Прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены относительно квадрики Q.

Т е о р е м а 2. Квадрика Q тогда и только тогда является конусом, когда конгруэнция (C_1) (или (C_2)) коник C_1 (или C_2) расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадрика Q вырождается в конус, если выполняется условие

$$\nu\equiv c^2-1=0. \qquad (1.10)$$

Учитывая условия (1.10), (1.3) и систему пфаффовых уравнений пары $\mathcal{D}^Q$ (1.8), (1.9) в квадратичных уравнениях [1, стр. 211-212], определяющих расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4), убеждаемся, что они тождественно удовлетворяются. Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь конгруэнция (C_1) коник C_1 расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4). Тогда выполняются следующие квадратичные уравнения:

$$\nu\omega_2\wedge\omega_1=0,\quad \nu\omega_3^4\wedge\omega_2=0,\quad \nu\omega_3^4\wedge\omega_1=0.$$

Допустим, что $\nu\neq 0$.

Значит, имеют место уравнения

$$\omega_2\wedge\omega_1=0,\ \omega_3^4\wedge\omega_2=0,\ \omega_3^4\wedge\omega_1=0,$$

благодаря которым размерность многообразия плоскостей коник C_1 меньше двух, чего быть не может.

Следовательно, $\nu=0$.

Аналогичную картину мы получим, если рассмотреть расслоение от конгруэнции (C_2) коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4). Теорема доказана.

Отметим, что вершиной конуса является точка $E=A_3-\varepsilon A_4$ $(\varepsilon^2=1)$, прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) представляет собой связку прямых с центром в точке E, поскольку $dE=(\omega_3^3-\varepsilon\omega_4^3)E$.

§ 2. Характеристические пары $\mathcal{D}^Q$

О п р е д е л е н и е. Пара $\mathcal{D}^Q$ называется характеристической, если: 1/ точка A_3 является характеристической точкой плоскости коники C_1; 2/ линии на поверхности (A_3), огибаемые прямыми A_3A_i, являются ее асимптотическими линиями.

Для характеристической пары $\mathcal{D}^Q$ выполняются условия:

$$\omega_3^4=0,\ \Gamma_2^{31}=\Gamma_1^{32}=0. \qquad (2.1)$$

Замыкая уравнение $\omega_3^4=0$, имеем:

$$\Gamma_1^{31}=\Gamma_2^{32}=\gamma.$$

Система пфаффовых уравнений характеристической пары $\mathcal{D}^Q$ примет вид:

$$\begin{aligned}&\omega_i^j=0,\ \omega_1^3=\gamma\omega_1,\ \omega_2^3=\gamma\omega_2,\ \ \omega_3^i=\omega_j^3+c\omega_j,\\ &\omega_4^i=c\omega_j^3+\omega_j,\ \ \omega_3^4=0,\ \ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k, \qquad (2.2)\\ &\Omega_1=0,\ \Omega_2=2c\omega_4^3,\ \ dc=(1-c^2)\omega_4^3,\ d\gamma=-(\gamma c+1)\omega_4^3.\end{aligned}$$

Характеристические пары $\mathcal{D}^Q$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 3. Характеристические пары $\mathcal{D}^Q$ обладают следующими свойствами: I/множества точек (A_1) и (A_2) являются плоскими линиями, касательные к которым пересекаются в точке $P=\gamma A_3+A_4$; 2/пара конгруэнций (A_3A_4) и (A_1A_2) односторонне расслояема от (A_3A_4) к (A_1A_2); 3/конгруэнция (A_iA_4) -параболическая; 4/многообразия прямых (A_1A_3), (A_2A_3) являются линейчатыми поверхностями; 5/плоскости $(A_iA_3A_4)$ описывают однопараметрическое семейство; 6/прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) является связкой, центр которой совпадает с точкой пересечения характеристик плоскостей $(A_1A_3A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Имеем:

$$dA_i=\omega_i^iA_i+\omega_iP,$$

$$dP=-\frac{3}{4}c\,\omega_4^3P+(\gamma^2+2\gamma c+1)(\omega_2A_1+\omega_1A_2).$$

Так как

$$(d^{(n)}A_i\,A_1A_2P)=0,$$

то линия (A_i) -плоская, (P) -плоскость (PA_1A_2).

2/Квадратичные уравнения

$$\omega_4^1\wedge\omega_1^3+\omega_4^2\wedge\omega_2^3=0,\quad \omega_3^1\wedge\omega_1+\omega_3^2\wedge\omega_2=0,$$

$$\omega_3^1\wedge\omega_1^3+\omega_3^2\wedge\omega_2^3-\omega_4^1\wedge\omega_1-\omega_4^2\wedge\omega_2=0,$$

характеризующие расслоение от конгруэнции (A_3A_4) к (A_1A_2) [3, стр.67], тождественно удовлетворяются в силу уравнений (2.2).

3/Фокусы $F_i=m_iA_i+n_iA_4$ луча A_iA_4 конгруэнции (A_iA_4) определяются уравнениями

$$(n_i)^2=0,$$

следовательно, конгруэнция (A_iA_4) -параболическая, A_i - сдвоенный фокус ее луча.

4/Имеем:

$$d[A_iA_3]=(\omega_i^i+\omega_3^3)[A_iA_3]+\omega_i\{[A_4A_3]+(\gamma+c)[A_1A_2]\},$$

откуда непосредственно следует, что прямые (A_iA_3) описывают однопараметрическое многообразие.

5/Поскольку

$$d[A_iA_3A_4]\Big|_{\omega_i=0}=-\omega_j^j[A_iA_3A_4],$$

то плоскости $(A_iA_3A_4)$ неподвижны вдоль линий $\omega_i=0$, соответствующих асимптотическим линиям на поверхности (A_3).

6/Характеристика плоскости $(A_iA_3A_4)$ задается уравнениями

$$x^3(\gamma+c)+x^4(\gamma c+1)=0,\quad x^j=0$$

Точка T пересечения характеристик плоскостей $(A_1A_3A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$ определяется формулой

$$T=-(c\gamma+1)A_3+(\gamma+c)A_4,$$

причем $dT=-\frac{7}{4}c\,\omega_4^3T$, то есть точка T неподвижна. Многообразие прямых A_3A_4 -двупараметрическое, все прямые этого семейства проходят через неподвижную точку, значит (A_3A_4) -связка. Теорема доказана.

Для характеристической поверхности (A_3) найдено трехпараметрическое семейство соприкасающихся квадрик, уравнение которого в неоднородных координатах имеет вид:

$$a_{44}z^2+2[xy-(\gamma+c)z]+2a_{24}yz+2a_{14}xz=0,$$

где

$$x=\frac{x^1}{x^3},\ y=\frac{x^2}{x^3},\ z=\frac{x^4}{x^3}.$$

Т е о р е м а 4. Поверхность (A_3) является невырожденной инвариантной квадрикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение квадрики Ли поверхности (A_3) в однородных координатах имеет вид:

$$\Phi\equiv(\gamma^2-1)(x^4)^2+2x^1x^2-2(\gamma+c)x^3x^4=0. \qquad (2.3)$$

Дифференцируя уравнение (2.3) с помощью уравнений стационарности [4]

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega^\alpha_\beta+\theta x^\alpha \quad (\mathcal{D}\theta=0),$$

убеждаемся, что

$$d\Phi=(2\theta-\tfrac{1}{2}c\omega^3_4)\Phi,$$

то есть Φ -инвариантная квадрика и поверхность (A_3) совпадает с ней. Точки A_1 и A_2 инцидентны квадрике (A_3), прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены относительно нее.

Т е о р е м а 5. Пусть K_α -квадратичное многообразие, образованное пересечением квадрики (A_3) плоскостью $x^\alpha=0$. Тогда K_3 -коники, касающаяся коники C_2 в точках A_1 и A_2; K_i и K_4 распадаются на пару прямых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Многообразия K_3, K_i и K_4 определяются соответственно уравнениями:

$$x^3=0,\quad (\gamma^2-1)(x^4)^2+2x^1x^2=0,$$
$$x^i=0,\quad x^4[(\gamma^2-1)x^4-2(\gamma+c)x^3]=0,$$
$$x^4=0,\quad x^1x^2=0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.-"Тр. геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР", М., 1971, 3, с.193-220.

2. К о р с а к о в а Л.Г. Пары конгруэнций коник в P_3, не касающихся линии пересечения своих плоскостей.-В кн.: Всесоюзная научная конференция по неевклидовой геометрии. 150 лет геометрии Лобачевского (тезисы докладов), Казань, 1976, с.104.

3. Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956.

4. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр. Московского математического общества", 1953, т.2, с.275-383.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

В.С.Малаховский

ПОВЕРХНОСТИ, НОРМАЛИ КОТОРЫХ ОРТОГОНАЛЬНО ПЕРЕСЕКАЮТ ЛИНИЮ

В трехмерном евклидовом пространстве E_3 рассматривается поверхность, все нормали которой ортогонально пересекают линию $\mathcal{L}$ (поверхность $\mathcal{K}$ с осевой линией $\mathcal{L}$). Дано приложение метода внешних форм и подвижного репера к установлению характеристического признака такой поверхности. Именно показано, что поверхность $S \in E_3$ тогда и только тогда является поверхностью $\mathcal{K}$ с осевой линией $\mathcal{L}$, когда она образована окружностями постоянного радиуса с центрами на линии $\mathcal{L}$ и плоскостями, ортогональными линии $\mathcal{L}$. Как частный случай получен характеристический признак тора.

§ I. Поверхность $\mathcal{K}$

О п р е д е л е н и е 1. Поверхностью $\mathcal{K}$ называется поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E_3, все нормали которой ортогонально пересекают линию $\mathcal{L}$. Линия $\mathcal{L}$ называется осевой линией поверхности $\mathcal{K}$.

Обозначим буквой B точку пересечения с линией $\mathcal{L}$ нормали к поверхности $\mathcal{K}$ в текущей ее точке A. Отнесем поверхность $\mathcal{K}$ к ортонормированному реперу $\{A, \bar{e}_i\}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$, где орт $\bar{e}_3$ направлен по нормали AB, а орт $\bar{e}_1$ коллинеарен касательной к линии $\mathcal{L}$ в точке B.

Положим:

$$\bar{B} = \bar{A} + \frac{1}{c}\bar{e}_3, \quad c \neq 0. \tag{1.1}$$

Дифференцируя (1.1), находим

$$d\bar{B} = (\omega^1 - \frac{1}{c}\omega_1^3)\bar{e}_1 + (\omega^2 - \frac{1}{c}\omega_2^3)\bar{e}_2 - \frac{dc}{c^2}\bar{e}_3, \tag{1.2}$$

где ω^i, ω_i^k -компоненты деривационных формул

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^k \bar{e}_k \tag{1.3}$$

репера $\{A, \bar{e}_i\}$, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{1.4}$$

Так как $d\bar{B} \parallel \bar{e}_1$, то

$$\omega_2^3 = c\omega^2, \quad dc = 0. \tag{1.5}$$

Поверхность $\mathcal{K}$ удовлетворяет системе уравнений Пфаффа:

$$\omega^3 = 0, \ \omega_1^3 = a\omega^1, \ \omega_2^3 = c\omega^2, \ \omega_1^2 = k\omega^1 + b\omega^2, \ dc = 0, \tag{1.6}$$

причем

$$a - c \neq 0, \tag{1.7}$$

так как линия $\mathcal{L}$ не вырождается в точку.

Замыкая уравнения (1.5) с учетом (1.6), (1.4), находим

$$k = 0 \tag{1.8}$$

Т е о р е м а 1.1. Поверхности $\mathcal{K}$ существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замкнутая система уравнений поверхности $\mathcal{K}$ состоит из пфаффовых уравнений

$$\omega^3=0\,,\ \omega_1^3=a\omega^1,\ \omega_2^3=c\omega^2,\ \omega_1^2=h\omega^1,\ dc=0 \tag{1.9}$$

и внешних квадратичных уравнений

$$\begin{gathered} da\wedge\omega^1+h\,(a-c)\,\omega^1\wedge\omega^2=0\,,\\ dh\wedge\omega^1+(h^2+ac)\,\omega^1\wedge\omega^2=0\,. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Система (1.9),(1.10)-в инволюции и определяет поверхности $\mathcal{K}$ с произволом двух функций одного аргумента. Геометрически этот произвол интерпретируется произволом задания осевой линии $\mathcal{L}$ в E_3.

Назовем координатные линии $\omega^2=0,\ \omega^1=0$ на поверхности $\mathcal{K}$ соответственно линиями $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$.

Обозначим

$$ds=\omega^2\big|_{\omega^1=0}\,. \tag{1.11}$$

Перемещение репера $\{A,\bar e_i\}$ вдоль $\mathcal{F}_2$ характеризуется следующими деривационными формулами:

$$\frac{d\bar A}{ds}=\bar e_2\,,\ \ \frac{d\bar e_1}{ds}=0\,,\ \ \frac{d\bar e_2}{ds}=c\,\bar e_3\,,\ \ \frac{d\bar e_3}{ds}=-c\,\bar e_2\,. \tag{1.12}$$

Сравнивая формулы (1.12) с деривационными формулами репера Френе линии $\mathcal{F}_2$:

$$\frac{d\bar A}{ds}=\bar t\,,\ \ \frac{d\bar t}{ds}=\rho\bar n\,,\ \ \frac{d\bar n}{ds}=-\rho\bar t+\tau\bar b\,,\ \ \frac{d\bar b}{ds}=-\tau\bar n\,, \tag{1.13}$$

где $\bar t,\bar n,\bar b$ -орты касательной, главной нормали и бинормали линии $\mathcal{F}_2$, ρ -ее кривизна, τ-кручение в точке A, убеждаемся, что

$$\bar t=\bar e_2\,,\ \ \bar n=\bar e_3\,,\ \ \bar b=\bar e_1\,, \tag{1.14}$$

$$\rho=|c|=\mathrm{const}\,,\ \ \tau=0\,. \tag{1.15}$$

Следовательно, линии $\mathcal{F}$ -окружности постоянного радиуса $r=\frac{1}{|c|}$ с центрами B на линии $\mathcal{L}$ и плоскостями, ортогональными линии $\mathcal{L}$. Справедливо обратное утверждение. Мы приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а 1.2. Поверхность S тогда и только тогда является поверхностью $\mathcal{K}$ с осевой линией $\mathcal{L}$, когда она образована окружностями постоянного радиуса с центрами на линии $\mathcal{L}$ и плоскостями, ортогональными линии $\mathcal{L}$.

В частности, если линия $\mathcal{L}$ -прямая, то поверхность это прямой круговой цилиндр с осью $\mathcal{L}$ [1].

§2. Поверхности T

О п р е д е л е н и е 2. Поверхностью T называется поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E_3, все нормали которой ортогонально пересекают окружность $\mathcal{L}\in E_3$.

Из определения следует, что поверхность T является поверхностью $\mathcal{K}$, у которой осевая линия - окружность.

Обозначим

$$\tilde\omega^1=\left(1-\frac{a}{c}\right)\omega^1. \tag{2.1}$$

Так как $\mathcal{D}\tilde\omega^1=0$, то форма Пфаффа $\tilde\omega^1$ является полным дифференциалом:

$$\tilde\omega^1=d\sigma\,. \tag{2.2}$$

Вдоль линии $\mathcal{L}$ справедливы формулы

$$\frac{d\bar B}{d\sigma}=\bar e_1\,,\ \ \frac{d\bar e_1}{d\sigma}=\frac{c}{c-a}\,(h\bar e_2+a\bar e_3)\,. \tag{2.3}$$

Следовательно, орты

$$\bar{t}_1=\bar{e}_1\ ,\quad \bar{n}_1=\frac{h\bar{e}_2+a\bar{e}_3}{\sqrt{h^2+a^2}}\ ,\ \bar{b}_1=\frac{h\bar{e}_3-a\bar{e}_2}{\sqrt{h^2+a^2}} \tag{2.4}$$

являются соответственно ортами касательной, главной нормали и бинормали линии $\mathcal{L}$ в точке B, а ее кривизна ρ_1 определяется формулой

$$\frac{\rho_1^2}{c^2}=\frac{h^2+a^2}{(c-a)^2}\ . \tag{2.5}$$

Так как осевая линия $\mathcal{L}$ поверхности T -окружность, то

$$d\rho_1=0\ ,\quad d\bar{b}_1=0\ . \tag{2.6}$$

Из (2.5), (2.6) с учетом (1.6) находим:

$$da=h(a-c)\omega^2\ ,\ dh=(ac+h^2)\omega^2. \tag{2.7}$$

Т е о р е м а 2.1. Поверхности T существуют и определяются с произволом семи постоянных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадратичные уравнения (1.10) в силу (2.7) удовлетворяются тождественно. Система пфаффовых уравнений (1.9), (2.7) вполне интегрируема. Следовательно, ее общее решение зависит от семи произвольных постоянных.

Произвол решения системы (1.9), (2.7) интерпретируется следующим образом: шесть констант определяют положение осевой окружности $\mathcal{L}$ в пространстве E_3,

, а седьмая константа определяет радиус окружности с центром на $\mathcal{L}$, порождающей поверхность T.

Из (1.9), (2.7) следует, что вторая полость эволюты поверхности T также вырождается, причем вырождается в прямую ℓ, ортогональную плоскости окружности $\mathcal{L}$ и проходящую через ее центр. Значит, T -поверхность вращения с осью ℓ [1], причем ее меридианы-линии $\mathcal{F}_2$ -являются окружностями постоянного радиуса $\tau=\frac{1}{|c|}$. Пусть R -радиус окружности $\mathcal{L}$. Если $R>\tau$, то поверхность T -это тор. Наоборот, все нормали тора пересекают ортогонально его осевую окружность.

Получаем теорему

Т е о р е м а 2.2. Поверхность $S\in E_3$ тогда и только тогда является тором, когда все ее нормали ортогонально пересекают окружность $\mathcal{L}$ радиуса $R>\tau$, где τ -отрезок нормали к S до окружности $\mathcal{L}$.

Из (1.9), (2.7) следует, что на торе вдоль линий $\mathcal{F}_1$ все инварианты a, b, c постоянны.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. О характеристических признаках некоторых классов поверхностей. -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 6. Калининград, I975, с. 79-89.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

В.В.Махоркин

МНОГООБРАЗИЯ ГИПЕРКВАДРИК n-МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА И ИХ ФОКАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В работе исследуются многообразия гиперквадрик n-мерного проективного пространства, их фокальные многообразия, а также ассоциированные с ними конструкции. Рассматриваются поверхности в пространстве P_n, порожденные фокальными многообразиями. Осуществлена канонизация репера и дана его геометрическая характеристика.

§1. Фундаментальный объект порядка p многообразия $K(m,n)$

Рассмотрим проективное пространство P_n и в нем подвижной репер $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются уравнениями:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots, n), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективной группы

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_n^n = 0. \tag{1.3}$$

Уравнение невырожденной гиперквадрики Q_{n-1} в репере $\{A_\alpha\}$ имеет вид:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \tag{1.4}$$

причем

$$\det \| a_{\alpha\beta} \| \neq 0, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \tag{1.5}$$

Положим:

$$\Theta_{\alpha\beta} \equiv d a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma - a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma. \tag{1.6}$$

Тогда система дифференциальных уравнений, определяющая многообразие $K(m,n)$, примет вид (см. [1]):

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i}\tau^i, \quad \Delta\Lambda_{\alpha\beta i} \wedge \tau^i = 0, \tag{1.7}$$

где

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta i} \equiv d\Lambda_{\alpha\beta i} - \Lambda_{\gamma\beta i}\omega_\alpha^\gamma - \Lambda_{\alpha\gamma i}\omega_\beta^\gamma - \Lambda_{\alpha\beta j}\tau_i^j, \tag{1.8}$$

$$(i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, m),$$

а формы τ^i, τ_j^i являются инвариантными формами бесконечной аналитической группы преобразований пространства параметров (см. [2]). Осуществляя продолжение системы (1.7), получим фундаментальный объект многообразия $K(m,n)$ порядка p:

$$\{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta i_1}, \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2}, \ldots, \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2 \ldots i_p}\}. \tag{1.9}$$

§ 2. Фокальные многообразия

Используя фундаментальный объект (1.9) порядка p многообразия $K(m,n)$, построим следующую систему уравнений

$$F_0 = 0, \; F_{i_1} = 0, \; \ldots, \; F_{i_1 i_2 \ldots i_p} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$F_0 \equiv a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \quad F_{i_1 i_2 \ldots i_p} \equiv \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2 \ldots i_p} x^\alpha x^\beta,$$

причем

$$n = N_p + 1, \tag{2.2}$$

где

$$N_p = m + \frac{m(m+1)}{2!} + \ldots + \frac{m(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+p-1)}{p!} . \quad (2.3)$$

В этом случае система уравнений (2.1) состоит из n уравнений и определяет в общем случае 2^n фокальных точек ранга p (см. [1]).

Фокальные многообразия ранга q $(<p)$ определяются следующей системой уравнений:

$$F_0 = 0,\ F_{i_1} = 0,\ \ldots,\ F_{i_1 i_2 \ldots i_q} = 0 \quad (2.4)$$

и являются в общем случае алгебраическими многообразиями размерности $n - N_q - 1$ порядка $2^{N_q + 1}$.

Таким образом, с каждой гиперквадрикой многообразия $K(m,n)$ ассоциируется последовательность фокальных многообразий $\overset{(q)}{f}(m,n)$, обладающих следующими свойствами:

$$\overset{(p)}{f}(m,n) \subset \overset{(p-1)}{f}(m,n) \subset \ldots \subset \overset{(2)}{f}(m,n) \subset \overset{(1)}{f}(m,n) \subset Q_{n-1} . \quad (2.5)$$

§ 3. Канонизация репера

Используя (1.7), (1.8) и (2.1), осуществим следующую канонизацию репера $\{A_\alpha\}$:

$$a_{oo} = \Lambda_{ooi_1} = \ldots = \Lambda_{ooi_1 \ldots i_p} = 0 ,$$
$$a_{ok} = \Lambda_{oki_1} = \ldots = \Lambda_{oki_1 \ldots i_p} = 0 . \quad (3.1)$$

Геометрически такая канонизация означает, что вершина A_o репера $\{A_\alpha\}$ помещается в одну из фокальных точек ранга p, а плоскость L_o, натянутая на вершины $A_o, A_1, \ldots, A_m$, содержится в пересечении плоскостей, касательных к многообразиям $\overset{(q)}{f}(m,n)$ в точке A_o. Касательная плоскость L_q к фокальному многообразию $\overset{(q)}{f}(m,n)$ в точке A_o определяется следующей системой уравнений:

$$a_{o\hat{\xi}}\, x^{\hat{\xi}} = 0,\ \Lambda_{o\hat{\xi} i_1} x^{\hat{\xi}} = 0, \ldots, \Lambda_{o\hat{\xi} i_1 \ldots i_p} x^{\hat{\xi}} = 0 \quad (3.2)$$
$$(\hat{\eta}, \hat{\xi}, \ldots = m+1, \ldots, n).$$

Таким образом

$$L_o \subset L_{p-1} \subset \ldots \subset L_1. \quad (3.3)$$

Так как фокальное многообразие $\overset{(q)}{f}(m,n)$ определяется квадрикой Q_{n-1} многообразия $K(m,n)$, то оно локально порождает в пространстве P_n поверхность S_q, образующей которой является многообразие $\overset{(q)}{f}(m,n)$. Эти поверхности также обладают свойством:

$$S_p \subset S_{p-1} \subset \ldots \subset S_1. \quad (3.4)$$

Анализируя предыдущее, получаем:

Т е о р е м а . В общем случае многообразие $K(m,n)$ огибает поверхность S_1, касаясь ее вдоль $\overset{(1)}{f}(m,n)$, поверхность S_1 огибает поверхность S_2, касаясь ее вдоль $\overset{(2)}{f}(m,n)$, ..., поверхность S_{p-1} огибает поверхность S_p, касаясь ее вдоль $\overset{(p)}{f}(m,n)$.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в -мерном проективном пространстве.-"Тр.геометрического семинара ВИНИТИ СССР", 1974, 6, с.113-133.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей.-"Итоги науки ВИНИТИ. Геометрия", 1963, с.5-64.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

О. С. Редозубова

О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ПАР Θ КОНГРУЭНЦИЙ

В данной статье рассмотрены такие пары Θ конгруэнций [1], соответствующие прямые которых проходят через фокусы конгруэнции общих перпендикуляров. Кроме того, соответствующие прямые этих пар либо лежат в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров (n° I, II), либо являются нормалями фокальных поверхностей этой конгруэнции (n° III), либо соответственно параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров (n° IV).

Поместим вершину ортонормированного репера $R=\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ на прямой конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров, $\vec{e}_3$ выберем параллельно τ. Соответствующие прямые τ_a пары Θ пересекают τ в точках $\mathcal{K}_a$ $(a=1,2)$. $(\mathcal{K}_a)$ -фокальные поверхности данной конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров. Пусть F_a, F'_a -фокусы прямых τ_a пары Θ. Прямые τ_a образуют с вектором $\vec{e}_1$ углы α_a. $\overrightarrow{\mathcal{K}F_a}=\rho_a\vec{\eta}_a$, $\overrightarrow{\mathcal{K}F'_a}=\rho'_a\vec{\eta}_a$, так что ρ_a, ρ'_a -абсциссы фокусов прямых конгруэнции $\{\tau_a\}$. $\overrightarrow{0\mathcal{K}_a}=h_a\vec{e}_3$, $\vec{\eta}_a=\vec{e}_1\cos\alpha_a+\vec{e}_2\sin\alpha_a$ —направляющие векторы прямых τ_a.

Известно [1], что пара Θ определяется требованиями того, чтобы касательные плоскости фокальных поверхностей (F_1), (F'_1) прошли соответственно через точки F_2, F'_2, а фокальные поверхности (F_2), (F'_2) имели касательные плоскости, проходящие соответственно, через точки F'_1, F_1: $(\overrightarrow{dF_1},\vec{\eta}_1,\overrightarrow{F_1F_2})=0$, $(\overrightarrow{dF'_1},\vec{\eta}_1,\overrightarrow{F'_1F'_2})=0$, $(\overrightarrow{dF_2},\vec{\eta}_2,\overrightarrow{F_2F'_1})=0$, $(\overrightarrow{dF'_2},\vec{\eta}_2,\overrightarrow{F'_2F_1})=0$.

После некоторых преобразований получим систему уравнений, определяющую пары Θ[1]:

$$\begin{aligned}
&H_1\rho_2+Q_1-A_1\rho_1+\Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}=0,\\
&H_1\rho'_2+Q_1-A_1\rho'_1+\Omega_{13}\frac{\rho'_1\rho'_2}{h_1-h_2}=0,\\
&H_2\rho'_1+Q_2-A_2\rho_2+\Omega_{23}\frac{\rho'_1\rho_2}{h_1-h_2}=0,\\
&H_2\rho_1+Q_2-A_2\rho'_2+\Omega_{23}\frac{\rho_1\rho'_2}{h_1-h_2}=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Компоненты инфинитезимальных перемещений репера R ω^i, ω^j_i $(i,j,k=1,2,3)$ удовлетворяют условиям:

$$\overrightarrow{d\Theta}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega^j_i\vec{e}_j,\quad \omega^j_i=-\omega^i_j.$$

Известно [1], что пары Θ могут быть четырех классов: Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4. Пары Θ_1 характеризуются условиями $\rho=\rho'_1\rho_2-\rho_1\rho'_2$, $g=\rho_1\rho_2-\rho'_1\rho'_2$, пары Θ_2-условиями $\rho=0$, $g\neq0$, пары Θ_3-условиями $\rho\neq0$, $g=0$, пары Θ_4 -условиями $\rho=g=0$.

В формулах (1): $H_a=\dfrac{\omega^3+dh_a}{h_1-h_2}$, $A_a=\dfrac{\omega^2_1+d\alpha_a}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}$,

$$\Omega_a=\omega^1\cos\alpha_a+\omega^2\sin\alpha_a,\quad \Omega^*_a=\omega^1\sin\alpha_a-\omega^2\cos\alpha_a,$$
$$\Omega_{a3}=\omega^3_1\cos\alpha_a+\omega^3_2\sin\alpha_a,\quad \Omega^*_{a3}=-\omega^3_1\sin\alpha_a+\omega^3_2\cos\alpha_a,$$
$$\Theta_a=\frac{\Omega^*_a+h_a\Omega^*_{a3}}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Обозначим касательные плоскости фокальных поверхностей $(\mathcal{K}_a)$ конгруэнции $\{\tau\}$ через Π_a.

I. Предположим, что $\tau_a\subset\Pi_a$. Тогда $(\overrightarrow{d\mathcal{K}_a},\vec{\eta}_a,\vec{e}_3)=0$, и, следовательно, $Q_a=0$ (2). Пары Θ_1 определяются системой:

$$A_1\rho - Q_1\tau_2 + \Omega_{13}\frac{\rho_2\rho_2'\tau_1}{h_1-h_2} = 0, \quad H_1\rho - Q_1\tau_1 + \Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_1'\tau_2}{h_1-h_2} = 0,$$
$$-A_1 g + Q_2\tau_1 + \Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_1'\tau_2}{h_1-h_2} = 0, \quad H_2 g - Q_2\tau_2 + \Omega_{23}\frac{\rho_2\rho_2'\tau_1}{h_1-h_2} = 0, \qquad (3)$$

где $\tau_a = \rho_a - \rho_a'$ -расстояние между фокусами конгруэнции τ_a. Подставляя (2) в систему (3), получим:

$$A_1 = -\Omega_{13}\frac{\rho_2\rho_2'\tau_1}{\rho(h_1-h_2)}, \quad A_2 = \Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_1'\tau_2}{g(h_1-h_2)},$$
$$H_1 = -\Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_1'\tau_2}{g(h_1-h_2)}, \quad H_2 = -\Omega_{23}\frac{\rho_2\rho_2'\tau_1}{g(h_1-h_2)}. \qquad (4)$$

Дифференцируя (2) внешним образом и подставляя (4), получим систему уравнений:

$$\rho_1\rho_1'\tau_2 - \rho_2\rho_2'\tau_1\cos(\alpha_1-\alpha_2) = 0, \quad \rho_1\rho_1'\tau_2\cos(\alpha_1-\alpha_2) - \rho_2\rho_2'\tau_1 = 0.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет только нулевое решение $\rho_1\rho_1'\tau_2 = 0$, $\rho_2\rho_2'\tau_1 = 0 \Rightarrow \rho_1\rho_1' = \rho_2\rho_2' = 0$, так как $\tau_a \neq 0$ как расстояние между фокусами прямых. Но тогда либо $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и $\rho = 0$, что неверно для пар θ_1, либо $\rho_1 = \rho_2' = 0$ и $g = 0$, что также неверно. Итак, не может быть пар θ_1 при условии, что $\tau_a \subset \Pi_a$.

В случае пары θ_2 [1] при подстановке в уравнения этой пары уравнений (2) получим $\rho_1'\rho_2 = \rho_1\rho_2' = 0 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 0$ (или $\rho_1' = \rho_2' = 0$). Поверхности (F_a) и $(\mathcal{K}_a)$ совпадают, и касательная плоскость поверхности (F_2) проходит через F_1, а не через F_1', как это требуется для пары θ. Следовательно, этот случай невозможен. Аналогично и в случае $\rho_1' = \rho_2' = 0$. Итак, не существует пар θ_2 таких, что $\tau_a \subset \Pi_a$. Точно так же можно показать, что ни пар θ_3, ни пар θ_4 здесь не существует. Доказана

Т е о р е м а 1. Не существует пар θ, для которых $\tau_a \subset \Pi_a$.

II. Рассмотрим теперь случай, когда $\tau_1 \subset \Pi_2$, $\tau_2 \subset \Pi_1$. Здесь $\Omega_1^* + h_2\Omega_{13}^* = 0$, $\Omega_2^* + h_1\Omega_{23}^* = 0$.

Эти уравнения приводятся к виду:

$$Q_1 = \{\Omega_{13}\cos(\alpha_1-\alpha_2) - \Omega_{23}\}\frac{h_1-h_2}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}, \qquad (5)$$

$$Q_2 = \{\Omega_{23}\cos(\alpha_1-\alpha_2) - \Omega_{13}\}\frac{h_1-h_2}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}. \qquad (6)$$

Пары θ_1 определяются системой уравнений (3), (5), (6). Можно доказать, что имеет место

Т е о р е м а 2. Пары θ_1, для которых $\tau_1 \subset \Pi_2$, $\tau_2 \subset \Pi_1$, существуют с произволом в две функции одного аргумента. Не существует пар $\theta_2, \theta_3, \theta_4$, обладающих этим свойством.

Дифференцируя внешним образом (5), (6) и подставляя выражения H_a, A_a, найденные из (3), получим систему уравнений:

$$(h_1-h_2)^2(\rho_2+\rho_2') + \rho_2\rho_2'(\rho_1+\rho_1')\cos(\alpha_1-\alpha_2) = 0,$$
$$\rho_1\rho_1'(\rho_2+\rho_2')\cos(\alpha_1-\alpha_2) + (h_1-h_2)^2(\rho_1+\rho_1') = 0. \qquad (7)$$

Так как $\rho_2+\rho_2'$ и $\rho_1+\rho_1'$ одновременно не могут быть нулями, то определитель системы равен нулю. Получим:

$$(h_1-h_2)^4 = \rho_1\rho_1'\rho_2\rho_2'\cos^2(\alpha_1-\alpha_2). \qquad (8)$$

Уравнения системы (7) линейно зависимы, откуда следует:

$$\rho_2+\rho_2' = -(\rho_1+\rho_1')\frac{\rho_2\rho_2'\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{(h_1-h_2)^2}. \qquad (9)$$

Уравнения (8), (9) есть необходимые условия пары θ_1, у которой $\tau_1 \subset \Pi_2$, $\tau_2 \subset \Pi_1$. Из (8) следует

Т е о р е м а 3. У пары θ, соответствующие прямые которой лежат в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров, четвертая степень расстояния между соответствующими прямыми пары равна произведению абсцисс фокусов и квадрата косинуса угла между прямыми.

Отнеся конфигурацию к трехграннику Гишара [2], будем иметь

$$\omega^1 = -\hat{\rho}\, \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \omega_2^3, \quad \omega^2 = -\hat{\rho}\, \mathrm{tg}\,\varphi \cdot \omega_1^3, \tag{10}$$

где $2\hat{\rho} = 2h$ -расстояние между фокусами конгруэнции $\{\tau\}$, 2φ -угол между фокальными плоскостями этой конгруэнции. Вершина репера R будет находиться в центре прямой τ, а оси $\vec{e}_a$ -в биссекторных плоскостях конгруэнции $\{\tau\}$. Подставляя (10) в уравнения (5), (6), получим, приравнивая нулю коэффициенты при линейно независимых формах ω_1^3, ω_2^3,

$$\hat{\rho}\, \mathrm{tg}\,\varphi \cdot \cos\alpha_1 - h_2 \sin\alpha_1 = 0, \quad -\hat{\rho}\, \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \sin\alpha_1 + h_2 \cos\alpha_1 = 0,$$

$$\hat{\rho}\, \mathrm{tg}\,\varphi \cdot \cos\alpha_2 - h_1 \sin\alpha_2 = 0, \quad -\hat{\rho}\, \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \sin\alpha_2 + h_1 \cos\alpha_2 = 0,$$

откуда получим: $\mathrm{tg}^2\varphi = \mathrm{tg}^2\alpha_1 = \mathrm{tg}^2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 = -\varphi$.

Таким образом, прямые τ_a пары равнонаклонны к биссекторным плоскостям конгруэнции общих перпендикуляров и находятся на равных расстояниях от центра прямой τ этой конгруэнции. Такие пары называются симметричными. Заметим, что пары Θ_1 данного вида не могут быть ортогональными, что следует из уравнений (7), а, значит, конгруэнция общих перпендикуляров не может быть нормальной (здесь угол между соответствующими прямыми конгруэнтен углу между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров). Получена

Т е о р е м а 4. Пары Θ_1, соответствующие прямые которой лежат в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров, есть симметричные пары, причем конгруэнция общих перпендикуляров не может быть нормальной.

Найдем полные кривизны фокальных поверхностей $(\mathcal{K}_a)$ конгруэнции $\{\tau\}$. Для этого используем формулы [2].

$$K^1 = \frac{-(\omega_1^3 \sin\varphi - \omega_2^3 \cos\varphi) \wedge (\omega_1^2 + d\varphi) \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{(\omega^3 + d\hat{\rho}) \wedge \hat{\rho} \cdot (\omega_2^3 \cos\varphi + \omega_1^3 \sin\varphi)}.$$

Подставляя сюда $\varphi = -\alpha_1$, $\alpha_2 = -\alpha_1$, а также $\hat{\rho} = h$ и выражения H_a, A_a, найденные из (3), получим для K^1 выражение

$$K^1 = -\frac{\rho \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{q (h_1 - h_2)^2}.$$

Аналогично для полной кривизны поверхности $(\mathcal{K}_2)$ в точке $\mathcal{K}_2$.

$$K^2 = -\frac{q \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\rho (h_1 - h_2)}.$$

Тогда

$$K^1 \cdot K^2 = \frac{\sin^4(\alpha_1 - \alpha_2)}{(h_1 - h_2)^4} = \frac{\sin^4 2\varphi}{(2\hat{\rho})^4}.$$

Но известно, что $\frac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi} = d$ равно расстоянию между граничными точками конгруэнции $\{\tau\}$. Следовательно,

$$K^1 \cdot K^2 = \frac{1}{d^4}. \tag{11}$$

Из [2] известно, что это свойство характеризует конгруэнцию W. Итак, получена

Т е о р е м а 5. Если к конгруэнции $\{\tau\}$ присоединена пара Θ так, что соответствующие прямые лежат в фокальных плоскостях конгруэнции $\{\tau\}$, то данная конгруэнция есть конгруэнция W.

III. Если $\{\tau_a\}$ -конгруэнция нормалей фокальной поверхности $(\mathcal{K}_a)$, то, как показано в [3], пары Θ существуют с произволом в две функции одного аргумента (Пары Θ_4). Кроме того доказано, что конгруэнция $\{\tau\}$ общих перпендикуляров является конгруэнцией В, а пары Θ - симметричными.

IV. Пусть, наконец, $\tau_1 \parallel \vec{N}_2$, $\tau_2 \parallel \vec{N}_1$, где $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ - векторы нормалей фокальных поверхностей $(\mathcal{K}_1)$, $(\mathcal{K}_2)$ конгруэнции $\{\tau\}$. В данном случае выполняются условия:

$$\Omega_1 - h_2 \Omega_{13} = 0, \quad \Omega_2 - h_1 \Omega_{23} = 0. \tag{12}$$

Эти уравнения можно привести к виду

$$Q_1=\Omega_{13}\frac{(h_1-h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)},\quad Q_2=\frac{(h_1-h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}. \quad (13)$$

Пары θ_1 определяются системой уравнений (3), (13). После дифференцирования (13) внешним образом и подстановки H_a и A_a, найденных из (3), получим уравнения:

$$\begin{gathered}\tau_1^2(h_1-h_2)^2(\rho_1+\rho_1')\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1\rho_1'\tau_2^2(\rho_1+\rho_1')\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)=0,\\ -\tau_1^2(\rho_2+\rho_2')\rho_2\rho_2'\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)+\tau_2^2(h_1-h_2)^2(\rho_1+\rho_2')\cos(\alpha_1-\alpha_2)=0.\end{gathered} \quad (14)$$

Так как система должна иметь ненулевые решения $\rho_1+\rho_1'$ и $\rho_2+\rho_2'$ (в противном случае существовали бы пары θ_4), то определитель системы равен нулю. Имеем:

$$(h_1-h_2)^4\cos^2(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1\rho_1'\rho_2\rho_2'\sin^4(\alpha_1-\alpha_2)=0, \quad (15)$$

из двух уравнений (14) независимо только одно. Имеет место

Т е о р е м а 6. Пары θ_1, у которых соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, существуют с произволом в две функции одного аргумента. Не существует пар θ_2, θ_3, θ_4, обладающих таким свойством.

Относя конфигурацию к трехграннику Гишара, получим из (13) с учетом (10) систему уравнений, из которой следует, что $\alpha_1=-\alpha_2$. Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 7. Пары θ конгруэнций, у которых соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, являются симметричными, и угол между фокальными плоскостями этой конгруэнции конгруэнтен углу между соответствующими прямыми пары.

Список литературы.

1. Р е д о з у б о в а О.С. Метрические свойства пар θ

конгруэнций.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6. Калининград, 1975, с.143-168.

2. Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М.-Л. 1950, с.73-94.

3. Р е д о з у б о в а О.С. Пары θ нормальных конгруэнций.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7. Калининград, 1976, с.86-93.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

В.Н.Р ы б а к о в

ИНВАРИАНТНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В работе рассматриваются специальные классы отображений поверхностей в E_3 с использованием инвариантных квадратичных форм.

Рассмотрим поверхность $V_2 \in E_3$ и ее произвольную точку M, радиус-вектор которой обозначим $\vec{M}$.

Отнесем поверхность V_2 к реперу первого порядка $R=\{M,\vec{e}_i\}$, где $\vec{e}_3$ единичный вектор нормали в точке M. Имеем известные формулы
$$d\vec{M}=\omega^i\vec{e}_i\,,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^k\vec{e}_k\,, \tag{1}$$
$$\omega^3=0\,. \tag{2}$$
Равенство (2) следует из того, что вектор $\vec{e}_3$ -направляющий вектор нормали в точке M.

Хорошо известно, что на поверхности V_2 имеются три линейно-независимые инвариантные квадратичные формы
$$\Phi^1=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2,\quad \Phi^2=\omega^1\omega_1^3+\omega^2\omega_2^3\,,\quad \Phi^3=\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3\,, \tag{3}$$
Φ^1, Φ^2 -первая и вторая квадратичные формы, Φ^3 -форма Вейнгартена.

Образуем форму
$$\Psi=P_i^0\,(H,K)\,\Phi^i,\quad i=1,2,3. \tag{4}$$
В этой форме P_i^0 -заданные функции от полной кривизны и средней кривизны K. Дифференцируя уравнение (2) внешним

образом, получим
$$\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0\,, \tag{5}$$
формы ω^1 и ω^2 линейно независимы. Применяя лемму Картана, имеем
$$\omega_1^3=a\,\omega^1+b\,\omega^2,\qquad \omega_2^3=b\,\omega^1+c\,\omega^2. \tag{6}$$
В форме (4) заменим формы Φ^i их выражениями (3). Применив разложения (6), получим форму Ψ в виде:
$$\Psi=(p_1^0+p_2^0a+p_3^0b)(\omega^1)^2+(p_1^0+p_2^0c-p_3^0b)(\omega^2)^2+$$
$$+\,[2\,p_2^0b+p_3^0\,(c-a)]\,\omega^1\omega^2. \tag{7}$$

Форма Ψ -квадратичная форма. Известно, что квадратичную форму заменой репера можно привести к сумме квадратов. (В точке M реперы остаются реперами первого порядка).

Будем считать, что замена сделана, и, сохраняя прежние обозначения, получим
$$2\,p_2^0b+p_3^0\,(c-a)=0 \tag{8}$$
и
$$\Psi=A^2\,(\omega^1)^2\pm B^2\,(\omega^2)^2, \tag{9}$$
где
$$A^2=p_1^0+p_2^0a+p_3^0b,\qquad \pm B^2=p_1^0+p_2^0c-p_3^0b. \tag{10}$$

Заметим, что исследуются две системы знаков, другие выборы знаков приводят к тем же результатам.

Далее рассмотрим поверхность $\hat{V}_2\in E_3$, её произвольную точку $\hat{M}$ и её радиус вектор $\hat{\vec{M}}$. Как и первую поверхность V_2, поверхность $\hat{V}_2$ отнесем к реперу первого порядка
$$\hat{R}=\{\hat{M},\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}.$$

Для неё имеет место все сказанное относительно поверхности V_2. Поэтому отметим нужные нам формулы

$$\hat{\omega}^3_1 = \hat{a}\,\hat{\omega}^1 + \hat{b}\,\hat{\omega}^2, \quad \hat{\omega}^3_2 = \hat{b}\,\hat{\omega}^1 + \hat{c}\,\hat{\omega}^2 \tag{11}$$

и

$$\hat{\Psi} = \hat{p}^\circ_i(\hat{H},\hat{K})\,\hat{\Phi}^i, \tag{12}$$

где $\hat{p}_i$ такие функции, что

$$\hat{K} = K, \quad \hat{H} = H, \quad \hat{p}^\circ_i = p^\circ_i. \tag{13}$$

Форму $\hat{\Psi}$ можно привести к форме, содержащей только квадраты. Тогда получим

$$2\hat{p}^\circ_2\hat{b} + \hat{p}^\circ_3(\hat{c} - \hat{a}) = 0 \tag{14}$$

и

$$\hat{\Psi} = \hat{A}^2(\hat{\omega}^1)^2 \pm \hat{B}^2(\hat{\omega}^2)^2, \tag{15}$$

где

$$\hat{A}^2 = \hat{p}^\circ_1 + \hat{p}^\circ_2\hat{a} + \hat{p}^\circ_3\hat{b},$$
$$\pm\hat{B}^2 = \hat{p}^\circ_1 + \hat{p}^\circ_2\hat{c} - \hat{p}^\circ_3\hat{b}. \tag{16}$$

Определим отображение $\varphi : V_2 \to \hat{V}_2$ (17) по закону

$$\Psi = \hat{\Psi}, \quad \hat{p}^\circ_i\hat{\Phi}^i = p^\circ_i\Phi^i. \tag{18}$$

Соотношение (18) выполняется при любых ω^1, ω^2.

Очевидно, что закон отображения есть отношение эквивалентности.

Учитывая равенства (9) и (15), получим из условия (18)

$$\hat{A}^2(\hat{\omega}^1)^2 \pm \hat{B}^2(\hat{\omega}^2)^2 = A^2(\omega^1)^2 \pm B^2(\omega^2)^2. \tag{19}$$

Т е о р е м а. Если задана поверхность V_2 и функции $p^\circ_i(H,K)$, то отображение φ существует с произволом четырех функций одного аргумента.

При доказательстве рассмотрим два случая.

I. Формы Ψ, $\hat{\Psi}$, положительно определенные

$$\hat{A}^2(\hat{\omega}^1)^2 + (\hat{B}^2)(\hat{\omega}^2)^2 = A^2(\omega^1)^2 + B^2(\omega^2)^2. \tag{20}$$

В этом случае общее решение уравнения (20) имеет вид:

$$\hat{A}\,\hat{\omega}^1 = A\cos\alpha\cdot\omega^1 + B\sin\alpha\;\omega^2,$$
$$\hat{B}\,\hat{\omega}^2 = -A\sin\alpha\cdot\omega^1 + B\cos\alpha\cdot\omega^2, \tag{21}$$

где α неизвестная функция координат точки M. Далее, учитывая известные формулы

$$\hat{H} = \hat{a} + \hat{c}; \quad \hat{K} = \hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2 \tag{22}$$

и равенство (14), исключим $\hat{b}$ из функций $\hat{p}^\circ_i(\hat{a}+\hat{c}, \hat{a}\hat{c}-\hat{b}^2)$. Тогда остается система Пфаффа, состоящая из уравнений (11), (21). Дифференцируя их внешним образом, получим четыре квадратичных уравнения с неизвестными формами $\hat{\omega}^2_1$, $d\alpha$, $d\hat{a}$, $d\hat{c}$; $s_1 = 4$, и решение зависит от четырех функций одного аргумента. Теорема доказана.

2. Формы Ψ и $\hat{\Psi}$ неопределенные

$$\hat{A}^2(\hat{\omega}^1)^2 - \hat{B}^2(\hat{\omega}^2)^2 = A^2(\omega^1)^2 - B^2(\omega^2)^2. \tag{23}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\hat{A}\sin\beta\cdot\hat{\omega}^1 = A\,\omega^1 + B\cos\beta\cdot\omega^2,$$
$$\hat{B}\sin\beta\cdot\hat{\omega}^2 = A\cos\beta\cdot\omega^1 + B\,\omega^2, \tag{24}$$

где β -неизвестная функция от криволинейных координат точки M.

Далее этот случай исследуется точно так же, как и первый.

Опять получается $s_1 = 4$, то есть четыре функции одного аргумента. Теорема доказана.

Отметим некоторые частные случаи. Для их выделения заметим, что $\Psi = 0$ дает $\hat{\Psi} = 0$ (по некоторым направлениям), то есть эти равенства определяют соответствующие инвариантные сети (γ) и $(\hat{\gamma})$ на поверхностях V_2 и $\hat{V}_2$. Поэтому естественно выделить следующие случаи:

1/ Сеть (γ) -линии кривизны поверхности V_2.

Т е о р е м а. Если (γ)-линии кривизны поверхности V_2, то сеть $(\hat{\gamma})$ -тоже линии кривизны поверхности $\hat{V}_2$, и выполняется равенство

$$\hat{p}^o_3 \hat{\Phi}^3 = p^o_3 \Phi^3. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линии кривизны определяются равенством $\Phi^3 = 0$, то есть имеем

$$p^o_i \Phi^i = t \Phi^3. \tag{26}$$

Формы Φ^i независимы. Поэтому

$$p^o_1 = 0, \quad p^o_2 = 0, \quad t = p^o_3. \tag{27}$$

В силу определения функций $\hat{p}^o_i$ (13)

$$\hat{p}^o_1 = 0, \quad \hat{p}^o_2 = 0, \tag{28}$$

а тогда из равенств (18) получим равенство (26). Теорема доказана.

2/ Сеть (γ) на поверхности V_2 -асимптотические линии

В этом случае имеем теорему, аналогичную теореме о линиях кривизны, только равенство (18) примет вид

$$\hat{p}^o_2 \hat{\Phi}^2 = p^o_2 \Phi^2. \tag{29}$$

3/ Сеть (γ) -ортогональная сеть на V_2.

Т е о р е м а. Если сеть (γ) -ортогональна, то сеть $(\hat{\gamma})$ также ортогональна, и необходимым и достаточным условием для этого является выполнение равенства

$$p^o_2 = -\frac{2 p^o_1}{H}. \tag{30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенств (9) видно, что сеть ортогональна, если

$$A^2 = -B^2, \tag{31}$$

а тогда из равенств (10) имеем равенство (30). В силу того, что имеют место о соотношения (13), получим

$$\hat{p}^o_2 (\hat{H}, \hat{K}) = -\frac{2 \hat{p}^o_1 (\hat{H}, \hat{K})}{\hat{H}}. \tag{32}$$

При выполнении этого условия из равенства (16) получим

$$\hat{A}^2 = -\hat{B}^2, \tag{33}$$

и теорема доказана.

4/ Сеть (γ) сопряжена.

Т е о р е м а. Если сеть (γ) сопряжена на поверхности V_2, то и сеть $(\hat{\gamma})$ на поверхности $\hat{V}_2$ так же сопряжена. Необходимым и достаточным условием этого является выполнение равенства

$$p^o_1 = -\frac{1}{2} \frac{p^{o2}_3 \cdot H}{p^o_2}. \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что сопряженные μ_1 и μ_2 определяются из равенства

$$(\omega^1 - \mu \omega^2)(\omega^3_1 \mu + \omega^3_2) = 0. \tag{35}$$

Используя равенства (6), получим

$$(b+\mu a)(\omega^1)^2-(\mu^2 b+\mu c)(\omega^2)^2+ \quad (36)$$
$$+(c-\mu^2 a)\omega^1\omega^2=0.$$

Сравнивая с формой Ψ (7), получим

$$c-\mu^2 a=0,\quad -\frac{\mu^2 b+\mu c}{b+\mu a}=-\frac{B^2}{A^2}. \quad (37)$$

Исключим μ^2 из второго уравнения (37) и используя значения A^2, B^2 и (18), получим равенство (34). Легко проверить, что если оно выполняется, то есть (γ) сопряжена. В силу равенств (13) имеем

$$\hat{P}_1^\circ(\hat{H},\hat{K})=-\frac{1}{2}\,\frac{\hat{P}_3^{\circ 2}(\hat{H},\hat{K})\cdot\hat{H}}{\hat{P}_2^\circ(\hat{H},\hat{K})}, \quad (38)$$

то есть сеть $(\tilde{\gamma})$ на поверхности $\hat{V}_2$ сопряжена и теорема доказана.

Список литературы

1. К а р т а н Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Изд.-во МГУ, 1962.

2. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.-Л., 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

Г.Л.Свешникова, Н.В.Ермакова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции кривых второго порядка (коник) с характеристической точкой F плоскости коники, принадлежащей этой конике. Такие конгруэнции названы конгруэнциями $\mathcal{L}$. Ранее В.В.Рыжков [1] рассматривал в P_3 конгруэнции плоских алгебраических кривых, причем характеристическая точка плоскости коники не лежала на конике. Доказано существование конгруэнций $\mathcal{L}$. Рассмотрен класс конгруэнций $\mathcal{L}$ (конгруэнции $\mathcal{L}_1$), в котором для огибающей поверхности (F) семейства плоскостей коник найдена квадрика Ли Q. Получены характеристическое и фокальное многообразия конгруэнции (Q) квадрик Ли Q.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta,\ \alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4,$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры и условию

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0 .$$

Поместим вершину A_i $(i,j,k=1,2;\ i\neq j)$ репера R в фокальную точку коники, которая описывает невырождающуюся поверхность, вершину A_3 -в полюс прямой A_1A_2 относительно коники. Нормируем вершины репера так, чтобы точка $E_{12}=A_1+A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна прямой FA_3. Тогда характеристическая точка плоскости коники записывается в виде $F=A_1+A_2-\sqrt{2}A_3$. Пусть ℓ -линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i. Точка $B_i=\Gamma_i^{3i}A_3+A_4$ -точка пересечения с прямой ℓ, касательной к линии $\omega_j^4=0$ на поверхности (A_i) в точке A_i. Помещаем вершину A_4 репера на прямую ℓ в четвертую гармоническую к точке A_3 относительно точек B_i.

Уравнение коники и система уравнений Пфаффа, определяющая конгруэнцию $\mathcal{L}$, имеют вид:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0, \tag{1}$$

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,$$

$$\omega_3^4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1+\omega_2),\quad \omega_1^1-\omega_3^3=a^k\omega_k,\quad \omega_2^2-\omega_3^3=b^k\omega_k, \tag{2}$$

причем

$$\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32}=0,\quad \Gamma_4^{ii}+\Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii}-\Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij}=0,$$

$$b^1-a^2+\frac{1}{\sqrt{2}}(2\Gamma_1^{31}+2\Gamma_3^{12}-2\Gamma_3^{21}-\Gamma_2^{31}-\Gamma_1^{32})=0, \tag{3}$$

где

$$\omega_i^4=\omega_i,\quad \omega_1\wedge\omega_2\neq 0 .$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (2),(3) и

анализируя полученную замкнутую систему, убеждаемся, что конгруэнции $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $\mathcal{L}_1$ называется конгруэнция $\mathcal{L}$, обладающая следующими свойствами: 1/асимптотические линии на поверхностях (A_i) соответствуют фокальным линиям $\omega_1\omega_2=0$; 2/ фокусами луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) являются точки E_{12} и $E_{12}^*=A_1-A_2$; 3/ $\Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21},\ a^1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Используя в уравнениях (2),(3) условия определения конгруэнции $\mathcal{L}_1$ и осуществляя последнюю нормировку вершин репера в виде:

$$\Gamma_1^{32}=1,$$

получаем для конгруэнции $\mathcal{L}_1$ следующую вполне интегрируемую систему уравнений Пфаффа:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=\omega_j,\quad \omega_3^i=\beta\omega_j,\quad \omega_4^i=\omega_3^j,\quad \omega_4^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1+\omega_2),$$

$$\omega_3^4=\omega_4^3,\quad \omega_i^i=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{a}{2}\right)\omega_i+\frac{1}{2}a\omega_j,\quad \omega_3^3=-\frac{1}{2}a(\omega_1+\omega_2), \tag{4}$$

$$\omega_4^4=\left(\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\omega_1+\omega_2),\qquad d\beta=da=0,$$

где

$$\Gamma_3^{12}=\beta,\quad a^2=a .$$

Т е о р е м а. Конгруэнции $\mathcal{L}_1$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/торсы прямолинейных конгруэнций (A_3A_4) и (A_1A_2) соответствуют; 2/фокусы E_{34} и E_{34}^* луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) гармонически делят точки A_3 и A_4; 3/прямолинейные конгруэнции (A_iA_3) и (A_iA_4)-параболические; 4/касательные к координатным линиям $\omega_i = 0$ на поверхностях (A_j) пересекаются в точке A_4 ;5/ поверхности $(E^*_{12}), (E_{34})$ вырождаются в линии; 6/точки E_{34} и E^*_{34} являются двойными точками гомографии [2] поверхностей (A_1) и (A_2); 7/существует двустороннее расслоение [3] прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4).

Доказательство. 1/Торсы прямолинейных конгруэнций (A_3A_4) и (A_1A_2) определяются одним уравнением $(\omega_1)^2-(\omega_2)^2=0$, значит, они соответствуют.

2/Фокусами луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции являются точки $E_{34}=A_3+A_4$ и $E^*_{34}=A_3-A_4$. Действительно, точки A_3, A_4, E_{34} и E^*_{34} образуют гармоническую четверку.

3/Фокусы каждого из лучей A_iA_3 и A_iA_4 прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) и (A_iA_4) совпадают. Сдвоенной фокальной точкой каждого из лучей является точка A_i, значит, эти конгруэнции являются параболическими. 4/Касательные к координатным линиям $\omega_i = 0$ на поверхностях (A_j) в точках A_j пересекают прямую ℓ в точках $B_j=\Gamma^{3j}_j A_3+A_4$. Для конгруэнций $\mathcal{L}_1$ точки B_j совпадают с точкой A_4.

5/Из формул

$$dE^*_{12}=\omega^1_1 E^*_{12}+(\omega_2-\omega_1)\left(E^*_{34}+\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)A_2\right),$$

$$dE_{34}=\left(\frac{1}{2}a+\sqrt{2}\right)(\omega_1+\omega_2)E_{34}+(\omega_1+\omega_2)\left(\beta E_{12}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+a\right)A_3\right)$$

видно, что поверхности (E^*_{12}) и (E_{34}) вырождаются в линии.

6/Торсы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнением $(\omega_1)^2-(\omega_2)^2=0$. Касательные к линии $\omega_1-\omega_2=0$ (соответственно, к линии $\omega_1+\omega_2=0$) на поверхностях (A_1) и (A_2) в точках A_1 и A_2 пересекаются в точке E_{34}

(соответственно, в точке E^*_{34}). Эти точки являются двойными точками гомографии поверхностей (A_1) и (A_2).

7/ Условия двустороннего расслоения прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4):

$$\omega^1_4\wedge\omega^3_1+\omega^2_4\wedge\omega^3_2=0,\quad \omega^4_1\wedge\omega^1_3+\omega^4_2\wedge\omega^2_3=0,$$

$$\omega^1_3\wedge\omega^3_1-\omega^2_4\wedge\omega^4_2=0,\quad \omega^2_3\wedge\omega^3_2-\omega^1_4\wedge\omega^4_1=0,$$

$$\omega^3_2\wedge\omega^1_3+\omega^4_2\wedge\omega^1_4=0,\quad \omega^3_1\wedge\omega^2_3+\omega^4_1\wedge\omega^2_4=0$$

тождественно удовлетворяются в силу системы уравнений (4). Теорема доказана.

Для фокальной поверхности (A_i) конгруэнции $\mathcal{L}_1$ найдена квадрика Ли

$$(x^j)^2-4\beta x^i x^j+4\beta^2 x^3x^4-2\sqrt{2}\,x^j(x^3+x^4)=0,$$

получено каноническое представление поверхности (A_i):

$$\beta x = yz-\frac{1}{3\sqrt{2}}(y^3+z^3)-\frac{1}{2}yz(y+z),$$

где

$$x=\frac{x^j}{x^i},\quad y=\frac{x^3}{x^i},\quad z=\frac{x^4}{x^i}.$$

Квадрика Ли Q огибающей поверхности (F) семейства плоскостей коник (1) имеет уравнение

$$2\sqrt{2}\,x^3(x^1+x^2)+2(x^3)^2-(x^4)^2+4x^1x^2+2(1+\sqrt{2}a-2\beta)x^3x^4=0.$$

Исследована конгруэнция квадрик Ли (Q). Ее характеристическое многообразие состоит из двух кривых второго порядка (5) и (6) :

$$\left.\begin{aligned} &2x^1x^3+(\sqrt{2}a+2)x^1x^4+(a+\sqrt{2})x^3x^4+\frac{\sqrt{2}}{2}(x^3)^2-\\ &\qquad-(\sqrt{2}\beta-\frac{a}{2})(x^4)^2+\sqrt{2}(x^1)^2=0,\\ &x^1-x^2=0.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &2x^1x^3+(\sqrt{2}a+2)x^1x^4+(a+\sqrt{2})x^3x^4+\frac{\sqrt{2}}{2}(x^3)^2-\\ &\qquad-(\sqrt{2}\beta-\frac{a}{2})(x^4)^2+\sqrt{2}(x^1)^2=0,\\ &x^1+x^2+(a+\sqrt{2})x^4+\sqrt{2}x^3=0.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Фокальное многообразие конгруэнции квадрик Ли (Q) состоит из восьми точек, причем точка F является сдвоенной фокальной точкой.

С конгруэнцией $\mathcal{L}_1$ ассоциируется конгруэнция коник (C_1). Коника C_1 получается при пересечении квадрики Ли плоскостью $x^3=0$, ее уравнение имеет вид:

$$(x^4)^2-4x^1x^2=0,\ x^3=0. \quad (7)$$

Найдены все шесть фокусов коники C_1, четыре из них имеют следующую геометрическую характеристику-это точки A_1, A_2 и точки $\mathcal{D}_1=A_1+A_2+2A_4$, $\mathcal{D}_2=A_1+A_2-2A_4$, которые являются точками пересечения коники (7) и прямой $E_{12}A_4$.

Список литературы

I. Р ы ж к о в В.В. О конгруэнциях плоских алгебраических кривых.-ДАН СССР, 1943, т.41, №5, с.202-204.

2. Ф и н и к о в С.П. Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева."Уч.зап.МГПИ", 1956, 16, вып.3.

3. Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций, М., ГИТТЛ, 1956.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

Е.В. С к р ы д л о в а

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КОНИКОЙ И ПРЯМОЙ

В работе [1] рассмотрен наиболее общий тип конгруэнций $(CL)_{1,2}$ -вырожденных конгруэнций [2] пар фигур, порожденных коникой C, описывающей однопараметрическое семейство, и прямой L, описывающей конгруэнцию (L). В настоящей работе, дополняющей предыдущую, в трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается особый тип конгруэнций $(CL)_{1,2}$, в которых образующие элементы C и L пересекаются, не будучи, однако, инцидентными одной и той же плоскости. Конгруэнции $(CL)_{1,2}$ такого типа мы будем обозначать $(CL)^*_{1,2}$. Для конгруэнций $(CL)^*_{1,2}$ построен геометрически фиксированный репер, указаны их некоторые свойства.

§1. Система уравнений конгруэнции $(CL)^*_{1,2}$

В конгруэнциях $(CL)^*_{1,2}$ каждой прямой L конгруэнции (L) ставится в соответствие единственная пересекаемая ею коника C однопараметрического семейства (C), полным прообразом которой является линейчатая поверхность $(L)_C$. Отнесем конгруэнцию $(CL)^*_{1,2}$ к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, в котором вершина A_3 совпадает с точкой пересечения коники C и прямой L, вершины A_1 и A_2 расположены в точках пересечения коники C с характеристикой ее плоскости и A_4 -произвольная точка луча L, не инцидентная плоскости коники.

Деривационные формулы репера запишем в виде

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1.1}$$

где ω_α^β -формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{1.3}$$

Уравнения коники C относительно репера R с учетом соответствующей нормировки вершин запишутся в виде

$$x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 = 0, \quad x^4 = 0 \tag{1.4}$$

Так как прямая L описывает конгруэнцию, то

$$\operatorname{rang}(\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2) = 2. \tag{1.5}$$

Не умаляя общности можно считать, что формы ω_3^1 и ω_3^2 линейно независимы и принять их в качестве базисных форм конгруэнции $(CL)^*_{1,2}$:

$$\omega_3^i \overset{def}{=} \omega^i \quad (i, j, \kappa = 1, 2). \tag{1.6}$$

Из условия совпадения характеристики плоскости коники C с прямой A_1A_2 будем иметь

$$\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0, \quad \omega_3^4 \neq 0 \tag{1.7}$$

Учитывая соотношения (1.6), (1.7), систему пфаффовых уравнений конгруэнции $(CL)^*_{1,2}$ можно записать в виде:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^j \omega_3^4, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^3 \omega_3^4, \quad \omega_3^4 = \Gamma(\omega^1 + \omega^2),$$
$$\omega_i^4 = 0, \quad \omega_4^i = \Gamma_{4\kappa}^i \omega^\kappa, \quad \omega_i^i - \omega_3^3 = \Gamma^i \omega_3^4 + \omega^i. \tag{1.8}$$

Здесь и далее суммирование по индексам i, j не производится и $i \neq j$.

Исследуя систему (1.8), убеждаемся, что конгруэнции $(CL)^*_{1,2}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Торсы прямолинейной конгруэнции (L) тогда и только тогда высекают на поверхности (A_3) координатную сеть, когда характеристические точки граней $(A_iA_3A_4)$ инцидентны прямой L.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейной конгруэнции (L) определяются уравнением

$$(\omega^1)^2\Gamma_{41}^2 + \omega^1\omega^2(\Gamma_{42}^2 - \Gamma_{41}^1) - (\omega^2)^2\Gamma_{42}^1 = 0. \tag{1.9}$$

На поверхности (A_3) они тогда и только тогда высекут координатную сеть, когда

$$\Gamma_{41}^2 = \Gamma_{42}^1 = 0. \tag{1.10}$$

Характеристическая точка M_i грани $(A_jA_3A_4)$ определяется формулой

$$M_i = \Gamma_{4j}^i A_j + \Gamma_j^i \Gamma(\Gamma_{4i}^i - \Gamma_{4j}^i)A_3 - \Gamma_j^i \Gamma A_4. \tag{1.11}$$

Очевидно, условия (1.10) необходимы и достаточны для того, чтобы точки M_1 и M_2 были инцидентны прямой L.

Класс конгруэнций $(CL)^*_{1,2}$ с рассмотренными свойствами существует и определяется с произволом девяти функций одного аргумента. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Линейчая поверхность $(L)_C$ тогда и только тогда будет являться развертывающейся, когда прямые A_1M_2 и A_2M_1 пересекаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для того, чтобы прямые A_1M_2 и A_2M_1 пересекались, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\Gamma^2_{42}-\Gamma^2_{41}=\Gamma^1_{41}-\Gamma^1_{42}. \tag{1.12}$$

В силу равенства (1.12) уравнение (1.9) торсов конгруэнции (L) примет вид

$$(\omega^1+\omega^2)(\Gamma^2_{41}\omega^1-\Gamma^1_{42}\omega^2)=0 \tag{1.13}$$

Так как уравнение

$$\omega^4_3=\Gamma(\omega^1+\omega^2)=0$$

выделяет из конгруэнции (L) линейчатую поверхность $(L)_C$, то поверхность $(L)_C$ в этом случае является торсом. Класс конгруэнций $(CL)^*_{1,2}$, обладающих указанными свойствами, существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов. Теорема доказана.

Завершим геометрическую фиксацию репера: вершину A_4 поместим в точку прямой L, которая вместе с A_3 гармонически разделяет фокальные точки этой прямой. Если конгруэнция (L) параболическая, то вершину A_4 совместим с фокусом ее луча. В результате фиксации репера будем иметь

$$\omega^i_4=(-1)^j a\omega^i+\Gamma^i_{4j}\omega^j, \quad \omega^3_4=\Gamma^3_{4k}\omega^k. \tag{1.15}$$

§ 2. Конгруэнция $(CL)^{*Q}_{1,2}$

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $(CL)^{*Q}_{1,2}$ называется конгруэнция $(CL)^*_{1,2}$, у которой плоскости коник C образуют пучок, а сами коники инцидентны одной и той же неподвижной квадрике

$$Q\equiv 2x^1x^2+2x^1x^3+2x^2x^3+2a_{34}x^3x^4+a_{44}(x^4)^2=0. \tag{2.1}$$

Т е о р е м а 3. Конгруэнция $(CL)^{*Q}_{1,2}$ существует и определяется с произволом одной функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие неподвижности квадрики (2.1)

$$dQ=(2\Theta-\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_1-\omega^3_2)\,Q \tag{2.2}$$

эквивалентно следующей системе равенств:

$$\omega^j_i+\omega^3_i=0, \tag{2.3}$$

$$\omega^1+\omega^2+a_{34}\omega^4_3=0, \tag{2.4}$$

$$\omega^i_i-\omega^3_3-\omega^i-\omega^i_j+\omega^3_i+\omega^3_j=0, \tag{2.5}$$

$$a_{34}\omega^3_i+\omega^j_4+\omega^3_4=0, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} da_{34}+a_{34}(\omega^1_1+\omega^2_2-\omega^3_3-\omega^4_4)+a_{34}(\omega^3_1+\omega^3_2)-\\ -a_{44}\omega^4_3-\omega^1_4-\omega^2_4=0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$da_{44}+a_{44}(\omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^4_4)+a_{44}(\omega^3_1+\omega^3_2)-2a_{34}\omega^3_4=0. \tag{2.8}$$

Так как плоскости коник C образуют пучок, то

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0 . \qquad (2.9)$$

Из уравнений (2.3), (2.5) и (2.6) тогда будем иметь

$$\omega_i^j = 0 , \quad \omega_i^i - \omega_3^3 = \omega^i ,$$

$$\omega_4^1 = \omega_4^2 = -\omega_4^3 . \qquad (2.10)$$

Сравнивая уравнения (1.15) и (2.10), получим

$$\omega_4^1 = a\,(\omega^1 - \omega^2) . \qquad (2.11)$$

Равенство (2.4) эквивалентно конечному соотношению

$$1 + a_{34}\Gamma = 0 . \qquad (2.12)$$

Завершим нормировку вершин репера так, чтобы

$$\Gamma = 1 . \qquad (2.13)$$

При этом единичные точки прямых A_1A_4 и A_2A_4 будут инцидентны касательной плоскости к поверхности (A_3).

Продолжая уравнение

$$\omega_3^4 = \omega^1 + \omega^2 , \qquad (2.14)$$

получим

$$\omega_3^3 - \omega_4^4 + \omega_4^1 + \omega_4^2 = \varphi\,\omega_3^4 . \qquad (2.15)$$

Используя равенства (2.7), (2.12), (2.13), находим

$$\varphi = -a_{44} - 1 . \qquad (2.16)$$

Окончательно система пфаффовых уравнений конгруэнции $(CL)_{1,2}^{*Q}$ записывается в виде:

$$\omega_i^j = 0 , \quad \omega_i^3 = 0 , \quad \omega_i^4 = 0 , \quad \omega_3^4 = \omega^1 + \omega^2 , \quad \omega_4^1 = \omega_4^2 ,$$

$$\omega_4^2 = a(\omega^1 - \omega^2) , \quad \omega_4^3 = -\omega_4^1 , \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = \omega_4^1 + \omega_4^2 + (b+1)\omega_3^4 , \qquad (2.17)$$

$$\omega_i^i - \omega_3^3 = \omega^i , \quad db - b\,(2b+1)\omega_3^4 + 2\,(2b+1)\omega_4^3 = 0 \quad (b \overset{def}{=} a_{44}) .$$

Исследуя систему уравнений (2.17), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 4. Конгруэнция $(CL)_{1,2}^{*Q}$ обладает следующими свойствами: 1/ вершины A_i репера неподвижны; 2/ поверхность (A_4) вырождается в линию, касательная к которой пересекает плоскость коники C в полюсе ее характеристики относительно коники; 3/ конгруэнция (L) параболическая, торсы ее высекают на поверхности (A_3) линии, гармонически разделяющие координатную сеть вместе с линиями, высекаемыми поверхностью $(L)_C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ $dA_i = \omega_i^i A_i$.

2/ Имеем

$$dA_4 = \omega_4^4 A_4 + a\,(\omega^1 - \omega^2)\,(A_1 + A_2 - A_3) . \qquad (2.18)$$

Находя полюс характеристики плоскости коники C относительно коники, убеждаемся, что он совпадает с точкой $A_1 + A_2 - A_3$.

3/ Фокусы $sA_3 + tA_4$ луча L и торсы конгруэнции (L) определяются соответственно уравнениями

$$s^2 = 0 , \qquad (2.19)$$

$$(\omega^1 - \omega^2)^2 = 0 . \qquad (2.20)$$

Сравнивая (1.14) с (2.20), убедимся в справедливости последнего утверждения теоремы. Теорема доказана.

Список литературы

I. С к р ы д л о в а Е.В. Вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ в трехмерном проективном пространстве.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.5,Калининград,1974, с.141-158.

2. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.3,Калининград,1973,с.41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

А.В.С т о л я р о в

УСЛОВИЕ КВАДРАТИЧНОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ

I. В последнее десятилетие по проективной теории регулярных гиперполос [1] в работах Ю.И.Попова (см.[5]-[8]), Василяна М.А. (см.[2],[3]) и ряда других геометров получены существенные результаты.

В одной из наших работ по этой теории, а именно в кратком сообщении [10], приведено (без доказательства) инвариантное аналитическое условие квадратичности регулярной m-мерной гиперполосы H_m, погруженной в n-мерное проективное пространство P_n ($2 \leqslant m < n-1$); настоящая статья содержит полное доказательство этого условия, причем все построения проведены в минимально канонизированном репере первого порядка.

2. Относительно репера первого порядка уравнение регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ имеет вид (см., например, [9],[11])

$$\omega_o^n = \omega_o^v = \omega_v^n = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_o^j, \qquad \omega_i^v = M_{ij}^v \omega_o^j, \quad \omega_v^i = N_{vj}^i \omega_o^j, \tag{1}$$

$$i,j,k,\ell,s,t = 1,2,\ldots,m; \quad u,v,w = m+1,\ldots,n-1.$$

Отметим, что Λ_{ij}^n - симметрический невырожденный тензор первого порядка (оператор ∇_d действует по закону [II]):

$$\nabla_d \Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{ij}\,\omega^0_0 = \Lambda^n_{ijk}\,\omega^k_0, \tag{2}$$

$\{M^v_{ij}, \Lambda^n_{ij}\}$ – геометрический объект первого порядка, N^i_{vj} – геометрический объект 2-го порядка гиперполосы H_m, причем компоненты геометрических объектов гиперполосы связаны соотношениями

$$M^v_{[ij]} = 0, \quad \Lambda^n_{j[i} N^j_{|v|k]} = 0; \tag{3}$$

заметим, что величины Λ_{ijk} симметричны по любой паре нижних индексов.

Продолжая уравнения (2), имеем:

$$\nabla_d \Lambda^n_{ijk} + 2\Lambda^n_{ijk}\,\omega^0_0 + \Lambda^n_{(ij}\omega^0_{k)} - \Lambda^n_{(ij}\Lambda^n_{k)s}\,\omega^s_n = \Lambda^n_{ijks}\,\omega^s_0, \tag{4}$$

где по индексам в скобках проводится циклирование и

$$\Lambda^n_{ij[ks]} = \Lambda^n_{il} M^v_{j[k} N^l_{|v|s]} + \Lambda^n_{lj} M^v_{i[k} N^l_{|v|s]}. \tag{5}$$

Можно положить

$$\Lambda^n_{ijks} = \tilde{\Lambda}^n_{ijks} + \Lambda^n_{l(i} M^v_{jk)} N^l_{vs}, \tag{6}$$

где величины $\tilde{\Lambda}^n_{ijks}$ симметричны по каждой паре нижних индексов; при этом равенства (5) в силу (3) не будут нарушены.

Если Λ^{ik}_n – тензор, взаимный тензору Λ^n_{ij}, то величины $\Lambda_k \overset{def}{=} \Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{ijk}$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_d \Lambda_k + \Lambda_k\,\omega^0_0 + (m+2)(\omega^0_k - \Lambda^n_{kj}\,\omega^j_n) = \Lambda_{ik}\,\omega^k_0, \tag{7}$$

где

$$\Lambda_{[ik]} = 2 M^v_{s[i} N^s_{|v|k]}. \tag{8}$$

Совокупность величин

$$\mathcal{D}^n_{ijk} \overset{def}{=} (m+2)\Lambda^n_{ijk} - \Lambda^n_{(ij}\Lambda_{k)} \tag{9}$$

в силу (2), (4), (7) образует тензор (симметрический по любой паре нижних индексов), который по аналогии с гиперповерхностью [4] назван [3] тензором Дарбу гиперполосы. Согласно [II] обращение в нуль этого тензора есть условие касания 3-го порядка инвариантных соприкасающихся гиперквадрик (см. [9],[II])

$$\Lambda^n_{ij} x^i x^j + \frac{\Lambda_i}{m+2} x^i x^n + B^n_{uv} x^u x^v + 2 b_v x^v x^n + S_n (x^n)^2 = 2 x^0 x^n \tag{10}$$

с данной гиперполосой $H_m \subset P_n$.

В уравнениях (10) B^n_{uv} – симметрический невырожденный тензор 2-го порядка:

$$\nabla_d B^n_{uv} + B^n_{uv}\,\omega^0_0 = B^n_{uvk}\,\omega^k_0. \tag{11}$$

Тензор B^n_{uv} имеет строение (см. [11],[9])

$$B^n_{uv} = -\frac{1}{2}\left(\tilde{b}^{nw}_u b_{wv} + \tilde{b}^{nw}_v b_{wu}\right), \tag{12}$$

где $\tilde{b}^{nw}_u$ – тензор, взаимный невырожденному тензору b^v_{nu}, и

$$b^v_{nu} = b^{ij}_{nu} c^v_{ij}, \quad b^{ij}_{nu} = N^i_{vk}\Lambda^{kj}_n - a^0_v \Lambda^{ij}_n,$$

$$c^v_{ij} = M^v_{ij} - a^v_n \Lambda^n_{ij}, \quad a^0_v = \frac{1}{m} N^k_{vk}, \quad a^v_n = \frac{1}{m} M^v_{ij}\Lambda^{ij}_n, \tag{13}$$

$$b_{uv} = b^i_{uk} b^k_{vi}, \quad b^i_{vk} = b^{ij}_{nv}\Lambda^n_{jk}, \quad c^{vk}_{ni} = c^v_{ij}\Lambda^{jk}_n.$$

Компоненты b_v, S_n геометрического объекта 3-го порядка $(S_n, \Lambda_i, b_v, \Lambda^n_{ij}, B^n_{uv})$ регулярной гиперполосы имеют следующее строение (см. [9],[11]):

$$b_v = -(B^n_{uv} a^u_n + a^0_v), \quad S_n = \frac{T_n}{m(m+2)} - a^v_n b_v,$$
$$T_n = \left(\Lambda_{ij} - \frac{\Lambda_i \Lambda_j}{m+2}\right)\Lambda^{ij}_n. \tag{14}$$

Легко убедиться, что каждая из систем величин

$$\mathcal{D}^i_{vk} \overset{def}{=} b^i_{vk} + B^n_{uv} C^{ui}_{nk}, \qquad (a)$$

$$\mathcal{D}^n_{uvk} \overset{def}{=} (m+2) B^n_{uvk} - B^n_{uv} \Lambda_k \qquad (б) \qquad (15)$$

образует тензор соответственно 2-го и 3-го порядка.

3. Гиперполоса $H_m \subset P_n$ называется квадратичной [2],[3], если ее базисная поверхность V_m лежит на неподвижной гиперквадрике Q^2_{n-1}, причем семейством главных касательных гиперплоскостей гиперполосы служит семейство касательных плоскостей гиперквадрики Q^2_{n-1} в точках $A_o \in V_m$; следует заметить, что в работах [2],[3] автором условие квадратичности гиперполосы $H_m \subset P_n$ не найдено.

Если гиперполоса $H_m \subset P_n$ квадратичная, то гиперквадрика Q^2_{n-1}, уравнение которой записывается в виде

$$g_{\bar{\jmath}\bar{\kappa}} x^{\bar{\jmath}} x^{\bar{\kappa}} = 0, \quad g_{\bar{\jmath}\bar{\kappa}} = g_{\bar{\kappa}\bar{\jmath}}, \quad \bar{\jmath}, \bar{\kappa} = 0,1,\dots,n,$$

является соприкасающейся гиперквадрикой в любой своей точке, то есть справедливы равенства (см. [11])

$$g_{oo} = g_{oi} = g_{ov} = 0, \quad g_{on} = -1, \quad g_{ij} = \Lambda^n_{ij}, \qquad (16)$$

и, с другой стороны, она неподвижна, а следовательно, $\nabla_d g_{\bar{\jmath}\bar{\kappa}} = \theta g_{\bar{\jmath}\bar{\kappa}}$ (см. [4]). Развернув последние уравнения с учетом равенств (16) и исключив форму $\theta = g_{in}\omega^i_o - \omega^o_o - \omega^n_n$, получим систему из конечных соотношений и дифференциальных уравнений для коэффициентов $g_{\bar{\jmath}\bar{\kappa}}$, выполнение которой является необходимым и достаточным условием вырождения поля соприкасающихся гиперквадрик в одну гиперквадрику:

$$g_{iv} = 0, \qquad (17)$$

$$\Lambda^n_{ik} N^k_{vj} + g_{uv} M^u_{ij} + g_{nv} \Lambda^n_{ij} = 0, \qquad (18)$$

$$\nabla_d \Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{ij}\omega^o_o = \Lambda^n_{(ij}\, g_{k)n}\, \omega^k_o, \qquad (19)$$

$$\nabla_d g_{uv} + g_{uv}(\omega^o_o + \omega^n_n) = g_{uv} g_{kn} \omega^k_o, \qquad (20)$$

$$dg_{in} - g_{kn}\omega^k_i + g_{in}\omega^o_o + \omega^o_i - \Lambda^n_{ik}\omega^k_n = (g_{in} g_{kn} + g_{vn} M^v_{ik} + g_{nn}\Lambda^n_{ik})\,\omega^k_o, \qquad (21)$$

$$dg_{vn} - g_{un}\omega^u_v + g_{vn}\omega^o_o - g_{vu}\omega^u_n + \omega^o_v = (g_{vn} g_{kn} + g_{sn} N^s_{vk})\,\omega^k_o, \qquad (22)$$

$$dg_{nn} - g_{nn}(\omega^n_n - \omega^o_o) - 2(g_{nk}\omega^k_n + g_{nv}\omega^v_n - \omega^o_n) = g_{nn} g_{kn}\omega^k_o. \qquad (23)$$

Заметим, что равенства (17) представляют собой условие полярной сопряженности касательной плоскости Π_m базисной поверхности V_m и характеристики Π_{n-m-1} главной касательной гиперплоскости относительно Q^2_{n-1}.

4. Предположим, что справедливы соотношения (17)-(23), то есть гиперполоса $H_m \subset P_n$ - квадратичная. Свертывая равенства (18) с тензором Λ^{ij}_n, с учетом (13) имеем

$$g_{nv} = -(g_{uv} a^u_n + a^o_v);$$

следовательно, равенства (18) теперь с учетом (13) перепишутся в виде

$$g_{uv} C^u_{ik} + b^s_{vi}\Lambda^n_{sk} = 0. \qquad (24)$$

Свертывая последние равенства с тензором b^{ik}_{nv} (см. (13)) по индексам i,k, находим $g_{uv} b^u_{nw} + b_{vw} = 0$, откуда в силу $g_{uv} = g_{vu}$ и невырожденности тензора b^u_{nw} получим

$$g_{uv} = -\frac{1}{2}(\tilde{b}^{nw}_u b_{wv} + \tilde{b}^{nw}_v b_{wu}).$$

Сравнивая последние соотношения с (12), имеем $g_{uv} = B^n_{uv}$.

7 Зак. 14409

Теперь легко заметить, что равенства (24) с учетом (13) эквивалентны равенству нулю тензора $\mathcal{D}^{\kappa}_{vi}$ (см. (15-а)).

Сравнивая (19) с уравнениями (2), находим $\Lambda^n_{ijk} = \Lambda^n_{(ij}\, g_{k)n}$, откуда $\Lambda_k = \Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{ijk} = (m+2)\, g_{kn}$, то есть $g_{kn} = \frac{\Lambda_k}{m+2}$. Следовательно, $\Lambda^n_{ijk} = \frac{1}{m+2} \Lambda^n_{(ij}\Lambda_{k)}$, что равносильно равенству нулю тензора Дарбу (см. (9)).

Аналогично, сравнивая (20) и (11), с учетом $g_{uv} = B^n_{uv}$ и $g_{kn} = \frac{\Lambda_k}{m+2}$, получим $B^n_{uvk} = B^n_{uv} \frac{\Lambda_k}{m+2}$, что равносильно равенству нулю тензора $\mathcal{D}^n_{uvk}$ (см. (15-б)).

Итак, необходимым условием квадратичности регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ является равенство нулю тензоров $\mathcal{D}^{\kappa}_{vi}$, $\mathcal{D}^n_{ijk}$, $\mathcal{D}^n_{uvk}$:

$$\mathcal{D}^{\kappa}_{vi} = \mathcal{D}^n_{ijk} = \mathcal{D}^n_{uvk} = 0. \qquad (25)$$

5. Докажем достаточность условия (25), то есть покажем, что при выполнении этого условия поле соприкасающихся гиперквадрик (10) вырождается в одну неподвижную гиперквадрику Q^2_{n-1} пространства P_n.

Для соприкасающихся гиперквадрик (10) условие (17) выполнено; соотношения (18)-(23) в силу $g_{uv} = B^n_{uv}$, $g_{kn} = \frac{\Lambda_k}{m+2}$, $g_{vn} = b_v$, $g_{nn} = S_n$ перепишутся в виде:

$$\Lambda^n_{ij} N^j_{vk} + B^n_{uv} M^u_{ik} + b_v \Lambda^n_{ik} = 0, \qquad (26)$$

$$\nabla_d \Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{ij}\, \omega^0_0 = \frac{1}{m+2} \Lambda^n_{(ij}\Lambda_{k)}\, \omega^k_0, \qquad (27)$$

$$\nabla_d B^n_{uv} + B^n_{uv}\, \omega^0_0 = B^n_{uv} \frac{\Lambda_k}{m+2}\, \omega^k_0, \qquad (28)$$

$$\nabla_d \Lambda_i + \Lambda_i\, \omega^0_0 + (m+2)\,(\omega^0_i - \Lambda^n_{ij}\, \omega^j_n) = \\ = \Big[\frac{\Lambda_i \Lambda_j}{m+2} + (m+2)\, b_v M^v_{ij} + (m+2)\, S_n \Lambda^n_{ij} \Big]\, \omega^j_0, \qquad (29)$$

$$\nabla_d b_v + b_v \omega^0_0 - B^n_{vw}\, \omega^w_n + \omega^0_v = \frac{\Lambda_k}{m+2}\, \omega^k_v + b_v \frac{\Lambda_k}{m+2}\, \omega^k_0, \qquad (30)$$

$$dS_n - S_n(\omega^n_n - \omega^0_0) - 2\Big(\frac{\Lambda_k}{m+2}\omega^k_n + b_v \omega^v_n - \omega^0_n\Big) = \frac{S_n \Lambda_k}{m+2}\, \omega^k_0. \qquad (31)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (26)-(28) удовлетворяются в силу (2), (9), (11)-(15), (25).

Покажем справедливость уравнений (29). Продифференцировав соотношения $(m+2)\Lambda^n_{ijk} - \Lambda^n_{(ij}\Lambda_{k)}$ (см. (9), (25)), с использованием (2), (4), (6), (7), находим

$$(m+2)\,(\tilde{\Lambda}^n_{ijkt} + \Lambda^n_{s(i} M^v_{jk)} N^s_{vt}) = \\ = \frac{1}{m+2}\big(2\Lambda^n_{t(i}\Lambda_j\Lambda_{k)} + \Lambda_t \Lambda^n_{(ij}\Lambda_{k)} + \Lambda^n_{(ij}\Lambda_{k)t};$$

свертывая последнее с Λ^{kt}_n, с учетом (14), имеем:

$$(m+2)\big(\Lambda^{kt}_n \tilde{\Lambda}^n_{ijkt} + M^v_{s(i} N^s_{|v|j)} + m\, a^0_v M^v_{ij}\big) = 2\Lambda_i\Lambda_j + \\ + \frac{2}{m+2}\,(\Lambda_i\Lambda_j + \Lambda^n_{ij}\Lambda^{kt}_n \Lambda_k\Lambda_t) + \Lambda^n_{ij} T_n + 2\Lambda_{ij}. \qquad (32)$$

Заметим, что из (32) непосредственно следует $\Lambda_{[ij]} = 0$, то есть с учетом (8) справедливо

$$M^v_{s[i} N^s_{|v|j]} = 0. \qquad (33)$$

С другой стороны, из дифференциальных уравнений (7) для $\Lambda_k = \Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{ijk}$ с использованием (1), (4), (6) находим

$$\Lambda_{ij} = \Lambda^{kt}_n \Lambda^n_{ktij} - \Lambda^{k\ell}_n \Lambda^{ts}_n \Lambda^n_{kti} \Lambda^n_{\ell sj} + m\Lambda^n_{si}\, a^v_n N^s_{vj} + 2M^v_{si} N^s_{vj}.$$

Исключив из последних выражений и выражений (32) величины $\Lambda^{kt}_n \tilde{\Lambda}^n_{ijkt}$ и имея в виду (33), $\mathcal{D}^n_{ijk} = 0$, находим

$$\Lambda_{ij} = \frac{\Lambda_i\Lambda_j}{m+2} + \frac{\Lambda^n_{ij} T_n}{m} + (m+2)\big(\Lambda^n_{si}\, a^v_n N^s_{vj} - a^0_v M^v_{ij}\big). \qquad (34)$$

Теперь нетрудно показать, что уравнения (29) удовлетворяются. Действительно, для этого согласно (7), (13), (14), (29)

(34) должно выполняться

$$C^{v}_{ij} B^{n}_{uv} a^{u}_{n} + \Lambda^{n}_{si} a^{v}_{n} b^{s}_{vj} = 0,$$

что справедливо в силу $\mathcal{D}^{\kappa}_{vi} = 0$ (см. (15-а), (25)).

Остается проверить справедливость уравнений (30), (31). Для этого продифференцируем внешним образом уравнения

$$\Lambda^{n}_{ij} \omega^{j}_{v} + B^{n}_{uv} \omega^{u}_{i} + b_{v} \omega^{n}_{i} = 0,$$

равносильные соотношениям (26); имея в виду (28), получим

$$(\nabla_d b_v + b_v \omega^{o}_{o} - B^{n}_{wv} \omega^{w}_{n} + \omega^{o}_{w} - \frac{1}{m+2} \Lambda_{\kappa} \omega^{\kappa}_{v} - b_v \frac{\Lambda_{\kappa} \omega^{\kappa}_{o}}{m+2}) \wedge \omega^{n}_{i} = 0,$$

откуда в силу линейной независимости форм ω^{n}_{i} и следует (30). Аналогично, продолжая уравнения (29) и имея в виду (30), убеждаемся в справедливости уравнения (31).

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а. Одновременное обращение в нуль тензоров $\mathcal{D}^{n}_{ij\kappa}$, $\mathcal{D}^{\kappa}_{vi}$, $\mathcal{D}^{n}_{uv\kappa}$ является необходимым и достаточным условием квадратичности m-мерной регулярной гиперполосы погруженной в n-мерное проективное пространство.

Согласно этой теореме, касание 3-го порядка (то есть равенство нулю тензора Дарбу $\mathcal{D}^{n}_{ij\kappa}$) соприкасающихся гиперквадрик (10) с гиперполосой $H_m \subset P_n$ не служит достаточным условием ее квадратичности (для этого требуется касание порядка выше третьего).

Список литературы

1. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос.-"Тр. семин. по векторн. и тенз. анализу", 1950, вып.8, с.197-272.

2. В а с и л я н М.А. Квадратичные гиперполосы ранга n-2 в проективном пространстве P_n.-"ДАН АрмССР", 1970, 50, № 4, с.193-197.

3. В а с и л я н М.А. Проективная теория многомерных гиперполос.-"Изв. АН Арм.ССР, Матем.", 1971, т.6, № 6, с.477--481.

4. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований.-"Тр. Моск. матем. о-ва", 1953, т.2, с.275-382.

5. П о п о в Ю.И. Сферические гиперполосы многомерного проективного пространства P_n.-"Учен.зап. Калинингр. ун-та", 1968, вып.1, с.27-57.

6. П о п о в Ю.И. К теории оснащенной регулярной гиперполосы в многомерном проективном пространстве.-"Учен.зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В.И.Ленина", 1970, № 374, т.I, с.102--117.

7. П о п о в Ю.И. Введение инвариантного оснащения на регулярной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n.-"Учен.зап. Моск. гос. заочн. пед. ин-та", 1971, вып.30, с.286-296.

8. П о п о в Ю.И. Теория оснащенных регулярных гиперполос с ассоциированной связностью многомерного проективного пространства.-В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.81-96.

9. С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы.-"Изв. вузов. Матем.", 1975, № 10, с.97-99.

10. С т о л я р о в А.В. Условие квадратичности регулярной гиперполосы.-"Изв. вузов. Матем.", 1975, № 11, с.106-108.

11. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения -мерных линейных элементов.-"Итоги науки и техники. Серия "Проблемы геометрии", 1975, т.7, с.117-151. (Ин-т научн. информ. АН СССР).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

Т.П.Ф у н т и к о в а

ТОРСОВЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(LP)_{2,1}$

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(LP)_{2,1}$ пар фигур $\{L,P\}$, где L -прямая, P -точка [1].Каждой точке P линии (P) соответствует одномерное многообразие $(L)_P$ прямых L прямолинейной конгруэнции (L).

В данной работе продолжается исследование торсовых конгруэнций $(LP)_{2,1}$, начатое в [2].Рассматриваются конгруэнции, у которых линейчатая поверхность $(L)_P$ является конической поверхностью.

§ I. Конгруэнции $(LP)_{2,1}$

Присоединим к каждой паре фигур $\{L,P\}$ конгруэнции $(LP)_{2,1}$ подвижный репер $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ следующим образом: вершину A репера поместим в ту точку луча L, в которой касательная плоскость к линейчатой поверхности $(L)_P$ параллельна касательной $\tilde\ell$ линии (P) в соответствующей точке P (в том случае, когда поверхность $(L)_P$ -торс, точка A является точкой ребра возврата), конец вектора $\bar e_1$ совместим с точкой P, вектор $\bar e_2$ направим параллельно $\tilde\ell$, а вектор $\bar e_3$ - по лучу L и пронормируем соответствующим образом. Конгруэнции $(LP)_{2,1}$ определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\omega_1^1+\omega^1=0,\quad \omega^3+\omega_1^3=0,\quad \omega^1=b\theta,\quad \omega^2=k\omega_3^1+\ell\theta,\quad \omega_2^1=a\theta,$$
$$\omega_2^3=c\theta,\quad \omega_3^2=m\theta+\omega_3^1,\quad \omega_2^2=n\omega_3^1+s\theta,\quad \omega^3=p\omega_3^1+q\theta, \tag{1}$$

где $\theta=\omega^2+\omega_1^2$; ω^i,ω_j^i -компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства и условию эквиаффинности, и существуют с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $(LP)_{2,1}$ обладают следующими свойствами: I/ касательная плоскость к фокальной поверхности прямолинейной конгруэнции $(A,\bar e_2)$, описанной точкой $\bar F_2=\bar A-\frac{\ell}{a}\bar e_2$, проведенная в точке F_2, содержит соответствующий луч L; 2/касательная плоскость к торсу $c\ell\theta-a\omega^3=0$ прямолинейной конгруэнции $(A,\bar e_2)$ вдоль луча $\{A,\bar e_2\}$ параллельна соприкасающейся плоскости линии (P) в точке P; 3/аффинные нормали линейчатой поверхности $(L)_P$, взятые вдоль луча L, принадлежат плоскости $\{A,\bar e_3,\bar e_1+\bar e_2\}$; 4/если соприкасающаяся плоскость линии (P) проходит через точку A, то поверхность (A) -линейчатая, а все образующие линейчатой поверхности $(L)_P$ пересекают неподвижную прямую; 5/конгруэнции $(LP)_{2,1}$, у которых точка A является фокальной точкой луча прямолинейной конгруэнции $(A,\bar e_2)$, обладают тем свойством, что существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A,\bar e_1)$ к многообразию плоскостей $(A,\bar e_2,\bar e_3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/ Так как

$$d\bar F_2=(\omega^2-\frac{\ell}{a}\omega_2^2)\bar e_2+(\omega^3-\frac{\ell}{a}\omega_2^3)\bar e_3-d(\frac{\ell}{a})\bar e_2,$$

то касательная плоскость к поверхности (F_2) определяется векторами $\bar{e}_2, \bar{e}_3$ и содержит луч L.

2/Имеем $(d\bar{A})_{c\ell\theta - a\omega^3 = 0} = \theta\ell(\bar{e}_1 + \frac{c}{a}\bar{e}_3) + \omega^2\bar{e}_2$,

т.е. касательная плоскость к торсу $c\ell\theta - a\omega^3$ прямолинейной конгруэнции вдоль луча $\{A, \bar{e}_2\}$ определяется точкой A и векторами $\bar{e}_2$, $a\bar{e}_1 + c\bar{e}_3$. Так как соприкасающаяся плоскость α линии (P) в точке P определяется точкой P и векторами

$$d\bar{P} = \theta\bar{e}_2, \quad d^2\bar{P} = \theta(a\bar{e}_1 + c\bar{e}_3) + (\ldots)\bar{e}_2,$$

то упомянутые в теореме плоскости параллельны.

3/Асимптотические линии поверхности $(L)_p$ задаются уравнением

$$\omega_3^1[2\kappa dt + \omega_3^1(\kappa p - 2tn\kappa - t^2 n + t^2\kappa - t\bar{\kappa})] = 0.$$

Направляющий вектор аффинной нормали к поверхности $(L)_p$ в точке $\bar{A} + t\bar{e}_3$ имеет вид:

$$\bar{\eta} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \left[t\frac{n}{\kappa} - t + \frac{\bar{\kappa}}{2\kappa}\right]\bar{e}_3. \qquad (2)$$

Из (2) непосредственно следует справедливость данного свойства.

4/Соприкасающаяся плоскость линии (P) в точке P проходит через точку A, если $c = 0$. Учитывая это условие в уравнениях (1), получаем $p = 0$. Следовательно,

$$(d\bar{A})_{\theta=0} = \kappa\bar{e}_2, \quad (d\bar{e}_3)_{\theta=0} = n\bar{e}_2,$$

т.е. поверхность (A) является линейчатой поверхностью с образующей $\{A, \bar{e}_2\}$, и все лучи линейчатой поверхности $(L)_p$ пересекают неподвижную вдоль направления $\theta = 0$ прямую $\{A, \bar{e}_2\}$.

5/Точка A является фокальной точкой луча прямолинейной

конгруэнции $(A, \bar{e}_2)$ при условии $\ell = 0$. Учитывая это условие в системе уравнений (1), получаем $\kappa a - q = 0$. При найденных соотношениях условия аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_1)$ к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \quad \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0$$

тождественно удовлетворяются. Теорема доказана.

§ 2. Конгруэнции N

Рассмотрим конгруэнции $(LP)_{2,1}$, удовлетворяющие следующим условиям: 1/линейчатая поверхность $(L)_p$ является конической поверхностью; 2/фокальные точки лучей прямолинейных конгруэнций $(A, \bar{e}_3), (A, \bar{e}_2)$ совпадают соответственно с точками

$$\bar{F}_3 = \bar{A} + \bar{e}_3, \quad \bar{F}_2 = \bar{A} + \bar{e}_2, \qquad m = 1.$$

Назовем такие конгруэнции конгруэнциями N. Аналитически условия 1 и 2 записываются в виде следующих соотношений:

$$\ell - \ell = 1, \quad \ell + a = 0, \quad p = 0, \quad \kappa = 0. \qquad (3)$$

Учитывая (3) в системе дифференциальных уравнений (1), находим

$$a - s + n - 2 = 0, \quad q + c + an = 0, \quad n(\ell + n) = 0. \qquad (4)$$

Рассмотрим случай $\ell + n = 0$, $n \neq 0$. Тогда последовательно продолжая систему уравнений (1),(4), получаем следующие соотношения:

$$c = a = q = \ell = 0, \quad \ell = -1, \; m = 1, \; n = 1, \; s = -1, \; \kappa = p = 0. \quad (5)$$

В силу условий (5) система дифференциальных уравнений конгруэнции N имеет следующий вид:

$$\omega^1 = \omega_1^1 = \omega^3 = \omega_1^3 = \omega_2^1 = \omega_2^3 = 0\,, \quad \omega^2 = -\theta\,,$$
$$\omega_3^2 = \theta + \omega_3^1\,, \quad \omega_2^2 = \omega_3^1 - \theta \quad (\theta = \omega^2 + \omega_1^2). \tag{6}$$

Анализируя систему (6), приходим к заключению, что конгруэнции N существуют с произволом девяти постоянных.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции N обладают следующими свойствами: I/ линии (P) и (A) являются прямыми; 2/ точка $\bar{M} = \bar{A} + \frac{1}{2}\bar{e}_1$ -стационарная точка конгруэнции; 3/ торсы прямолинейной конгруэнции (L) высекают на фокальной поверхности (F_3) сопряженную сеть плоских линий; 4/ фокальная поверхность (F_3) является квадрикой, а именно, однополостным гиперболоидом с центром в точке M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/ Так как
$$(d\bar{P}) = d(\bar{A} + \bar{e}_1) = \theta\bar{e}_2\,, \; d\bar{A} = -\theta\bar{e}_2\,, \; d\bar{e}_2 = 2\theta\bar{e}_2\,,$$
то линии (P) и (A) -прямые. 3/ Стационарность точки M следует из того, что
$$d\bar{M} = d(\bar{A} + \tfrac{1}{2}\bar{e}_1) = -\theta\bar{e}_2 + \tfrac{1}{2}(2\theta\bar{e}_2) = 0\,.$$
3/ Торсы прямолинейной конгруэнции (L) задаются уравнением $\theta \cdot \omega_3^1 = 0$. Основная квадратичная форма поверхности (F_3) имеет вид $\varphi = \theta^2 + (\omega_3^1)^2$., т.е. линии $\theta = 0$, $\omega_3^1 = 0$ сопряжены на поверхности (F_3). Эти линии являются плоскими, так как
$$(d\bar{F}_3)_{\omega_3^1=0} = \theta\bar{e}_3\,, \; (d\bar{e}_3)_{\omega_3^1=0} = \theta(\bar{e}_2 + \bar{e}_3), \; d(\bar{e}_2 + \bar{e}_3)_{\omega_3^1=0} = \theta\bar{e}_3;$$
$$(dF_3)_{\theta=0} = \omega_3^1(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3), \; d(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3)_{\theta=0} = (\bar{e}_1 - \bar{e}_3 + 2\bar{e}_2)\omega_3^1, \; d(\bar{e}_1 - \bar{e}_3 + 2\bar{e}_2)_{\theta=0} = (\bar{e}_1 - \bar{e}_3 + 3\bar{e}_2)\omega_3^1$$
Линия $\theta = 0$ инцидентна плоскости $(F_3, \bar{e}_1 - \bar{e}_3, \bar{e}_2)$, а линии $\omega_3^1 = 0$ -плоскости $(F_3, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

4/ Точка F_3 инцидентна инвариантной квадрике

$$Q = -2(x^1)^2 - (x^3)^2 + 2x^2x^3 - 4x^1x^3 + 2x^1 + 2x^3 - 1 = 0\,,$$
центром которой является точка M. Теорема доказана.

Основываясь на приведенных свойствах конгруэнции N, можно сказать, что для построения данной конгруэнции достаточно задать произвольный однополостный гиперболоид, определяемый девятью постоянными величинами.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.41-49.

2. Ф у н т и к о в а Т.П. Безынтегральное представление одного класса вырожденных конгруэнций $(LP)_{2,1}$.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8. Калининград, 1977, с.110-117.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

Е.А.Хляпова

КОНГРУЭНЦИИ T_1

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются специальные типы конгруэнций φ_2, порожденных центральной коникой F_1 и точкой F_2, не инцидентной плоскости коники F_1 – конгруэнции T_1. Доказано, что существует два и только два класса конгруэнций T_1: конгруэнции T_{11} и конгруэнции T_{12}. Свойства конгруэнций T_{11} подробно изучались в работе [3]. В данной работе основное внимание уделяется исследованию поверхности (F_2) некоторого подкласса T'_{11} конгруэнции T_{11}. Доказано, что директрисами Вильчинского поверхности (F_2) конгруэнции являются аффинная нормаль этой поверхности в точке F_2 и несобственная прямая касательной плоскости поверхности (F_2) в этой же точке. В этом случае соответствующая линейная конгруэнция расслаивается на однопараметрическое семейство пучков прямых, коллинеарных касательной плоскости поверхности (F_2) в точке F_2 и имеющих центр, инцидентный аффинной нормали этой поверхности в точке F_2.

§ I. Конгруэнции T_{11} и T_{12}

Отнесем конгруэнцию φ_2 к подвижному реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$, начало A которого совмещено с точкой F_2, концы E_α векторов $\bar{e}_\alpha$ расположены на конике F_1 таким образом, что прямые E_1E_2, CE_3, где C – центр коники F_1, являются сопряженными диаметрами коники F_1, причем прямая E_1E_2 коллинеарна касательной плоскости поверхности (F_2) в точке F_2.

Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции φ_2 и уравнения коники F_1 имеют соответственно вид:

$$\omega^3=\Gamma^3_i\omega^i,\quad \omega^\beta_\alpha=\Gamma^\beta_{\alpha i}\,\omega^i,\quad \Gamma^3_1=\Gamma^3_2\,; \qquad (1)$$
$$(x^1)^2+(x^2)^2-x^1-x^2=0,\quad x^1+x^2+x^3=1,$$

где ω^α, ω^β_α – компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, $\omega^1\wedge\omega^2\neq 0$, $i,j,k=1,2$.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнция φ_2 называется конгруэнцией T_1, если выполнены следующие условия: 1/ прямолинейные конгруэнции (AE_3) и (E_1E_2) двусторонне расслояемы [1]; 2/ прямолинейная конгруэнция (AE_i) и конгруэнция координатных плоскостей $(A,\bar{e}_j,\bar{e}_3)$ (здесь и в дальнейшем $i\neq j$) односторонне аффинно расслояемы [2]; 3/ поверхность (E_i) является огибающей плоскостей $(A,\bar{e}_i,\bar{e}_3)$; 4/ на индикатрисе вектора $\bar{e}_i$ касательная вдоль линии $\omega^j=0$ коллинеарна плоскости $(A,\bar{e}_j,\bar{e}_3)$.

Условия, характеризующие конгруэнции T_1, аналитически записываются в виде:

$$\omega^j_i=-\omega^j, \qquad (2)$$
$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{22}=0, \qquad (3)$$
$$\omega^i\wedge\omega^i_i=0,\quad \omega^k\wedge\omega^3_k=0,\quad \omega^3_i\wedge\omega^j_3=0, \qquad (4)$$

$$\omega^1\wedge\omega^1_3+\omega^2\wedge\omega^2_3=0\,,\quad \omega^3_i\wedge\omega^i_3+(-1)^i\,\omega^1\wedge\omega^2=0$$

$$\omega^3\wedge\omega^i_3+(-1)^{i+1}\,\omega^1\wedge\omega^2=0\,, \tag{4}$$

(здесь и в дальнейшем по i и j не суммировать!)

или, используя систему уравнений (2), в виде:

$$\Gamma^1_{12}=0\,,\ \Gamma^2_{21}=0\,,\ \Gamma^3_{21}=\Gamma^3_{12}\,,\ \Gamma^3_{11}\Gamma^2_{32}-\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{32}=0\,,$$

$$\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{32}-\Gamma^3_{22}\Gamma^1_{31}=0,\ \Gamma^1_{32}=\Gamma^2_{31}\,,\ \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{32}-\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{31}=1\,, \tag{5}$$

$$\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{32}-\Gamma^3_{22}\Gamma^1_{32}=-1,\quad \Gamma^3_1\,(\Gamma^1_{32}-\Gamma^1_{31})=-1\,,$$

$$\Gamma^3_1\,(\Gamma^2_{32}-\Gamma^1_{32})=1\,.$$

Анализируя системы (4) и (5), получаем

$$\omega^1_1=0\,,\quad \omega^2_2=0\,,\quad \Gamma^2_{32}=\Gamma^1_{31}\,, \tag{6}$$

$$\Gamma^1_{31}\,(\Gamma^3_{11}-\Gamma^3_{22})=0. \tag{7}$$

Т е о р е м а. Существует два и только два класса конгруэнций T_1 : конгруэнции T_{11} ($\Gamma^1_{31}=0$), определяемые с произволом одной функции двух аргументов, и конгруэнции T_{12} ($\Gamma^1_{31}\neq 0\,,\Gamma^3_{11}=\Gamma^3_{22}$), определяемые с произволом одной функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (7) возникает две альтернативы:

1/ $\Gamma^1_{31}=0\,,$ (8) 2/ $\Gamma^3_{11}=\Gamma^3_{22}\,,\Gamma^1_{31}\neq 0$ (9)

(случай $\Gamma^1_{31}=0,\Gamma^3_{11}=\Gamma^3_{22}$ дает подкласс конгруэнций T_{11}).

1/Замкнутая система уравнений Пфаффа конгруэнции T_{11}

записывается в виде:

$$\omega^3=a\,(\omega^1+\omega^2)\,,\quad \omega^1_1=\omega^2_2=0\,,\quad \omega^2_1=-\,\omega^2,\ \omega^3_1=a\,\omega^1,$$

$$\omega^1_2=-\,\omega^1,\ \omega^3_2=-\,a\,\omega^2,\ a\,\omega^1_3=-\,\omega^2,\ a\,\omega^2_3=-\,\omega^1, \tag{10}$$

$$\omega^3_3=b_k\,\omega^k,\quad da=-\,a\,\omega^3_3\,,\quad db_k\wedge\omega^k=0\,,$$

где $a=\Gamma^3_1\,,\ b_i=\Gamma^3_{3i}\,.$

Система уравнений (10) в инволюции и определяет конгруэнции T_{11} с произволом одной функции двух аргументов.

2/Обозначая

$$\Gamma^3_1=a\,,\ \Gamma^3_{12}=b\,,\ A=\frac{b}{a(2b+a)}\,,\ B=\frac{a+b}{a(2b+a)}\,,$$

запишем систему уравнений Пфаффа конгруэнции T_{12} в виде:

$$\omega^3=a\,(\omega^1+\omega^2)\,,\quad \omega^1_1=\omega^2_2=0\,,\quad \omega^2_1=-\,\omega^2,\ \omega^1_2=-\,\omega^1,$$

$$\omega^3_1=-\,(a+b)\,\omega^1+b\,\omega^2,\ \omega^3_2=b\,\omega^1-(a+b)\,\omega^2, \tag{11}$$

$$\omega^1_3=A\,\omega^1-B\,\omega^2,\ \omega^2_3=-B\,\omega^1+A\,\omega^2,\ \omega^3_3=\Gamma^3_{3k}\,\omega^k,$$

причем $b\neq 0$ (12),

так как по условию $\Gamma^1_{31}\neq 0$.

Замыкание системы уравнений (11) дает:

$$\Omega_1\wedge(\omega^1+\omega^2)=0,\ \Omega_1\wedge\omega^1-\Omega_2\wedge(\omega^2-\omega^1)+b\,\omega^1\wedge\omega^2=0,$$

$$\Omega_1\wedge\omega^2-\Omega_2\wedge(\omega^1-\omega^2)-b\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\ \Omega_3\wedge\omega^1-\Omega_4\wedge\omega^2-$$

$$-A\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\ \Omega_4\wedge\omega^1-\Omega_3\wedge\omega^2-A\,\omega^1\wedge\omega^2=0\,, \tag{13}$$

где

$$\Omega_1=da+a\,\omega^3_3\,,\quad \Omega_2=db+b\,\omega^3_3\,,$$

$$\Omega_3=dA-A\,\omega^3_3\,,\quad \Omega_4=dB-B\,\omega^3_3\,.$$

Из системы (13) имеем:

$$\Omega_1 = \alpha\,(\omega^1 + \omega^2). \tag{14}$$

Складывая почленно (4) и (5) уравнения системы (13), получаем

$$\Omega_3 - \Omega_4 = \beta\,(\omega^1 + \omega^2), \tag{15}$$

которое, с учетом (14), приводится к виду:

$$\Omega_2 = \frac{(2b+a)^2}{2}\,(\beta - \alpha)\,(\omega^1 + \omega^2). \tag{16}$$

Подставляя уравнения (14) и (16) в оставшиеся квадратичные уравнения системы (13), получаем

$$\alpha = \frac{ab}{2b+a}, \quad \beta = \frac{2b^2 + ab\,(2b+a)}{(2b+a)^3}. \tag{17}$$

Следовательно, учитывая (17) в (14) и в (16), имеем:

$$\Omega_1 = \frac{ab}{2b+a}\,(\omega^1 + \omega^2), \quad \Omega_2 = \frac{b^2}{2b+a}\,(\omega^1 + \omega^2) \tag{18}$$

Замыкание уравнений (18) дает:

$$\frac{ab}{2b+a}\,\omega_3^3 \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0, \quad \frac{b^3}{(2b+a)^2}\,\omega_3^3 \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0,$$

или

$$\frac{ab}{2b+a}\,(\Gamma_{31}^3 - \Gamma_{32}^3) = 0, \quad \frac{b^3}{(2b+a)^2}\,(\Gamma_{31}^3 - \Gamma_{32}^3) = 0. \tag{19}$$

Так как из (12) $b \neq 0$, то из уравнения (19) имеем:

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{32}^3. \tag{20}$$

Следовательно, замкнутая система уравнений Пфаффа конгруэнции T_{12} имеет вид:

$$\omega^3 = a\,(\omega^1 + \omega^2), \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^2 = -\omega^2, \quad \omega_2^1 = -\omega^1,$$

$$\omega_1^3 = -(a+b)\,\omega^1 + b\,\omega^2, \quad \omega_2^3 = b\,\omega^1 - (a+b)\,\omega^2, \quad \omega_3^1 = A\,\omega^1 - B\,\omega^2,$$

$$\omega_3^2 = -B\,\omega^1 + A\,\omega^2, \quad \omega_3^3 = \Gamma_{31}^3\,(\omega^1 + \omega^2), \quad da = a^2 A\,(\omega^1 + \omega^2) - a\,\omega_3^3,$$

$$db = abA\,(\omega^1 + \omega^2) - b\,\omega_3^3, \quad d\Gamma_{31}^3 \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0 \tag{21}$$

Система уравнений (21) в инволюции и определяет конгруэнции T_{12} с произволом одной функции одного аргумента. Таким образом, теорема доказана.

§ 2. Конгруэнции T_{11}'

О п р е д е л е н и е. Конгруэнция T_{11} называется конгруэнцией T_{11}', если касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_3$ коллинеарна плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Аналитически условие, выделяющее конгруэнции T_{11}' из конгруэнций T_{11}, записывается в виде:

$$b_1 = b_2 = 0. \tag{21}$$

Учитывая эти соотношения в (10), убеждаемся, что система уравнений Пфаффа конгруэнции T_{11}'

$$\omega^3 = a\,(\omega^1 + \omega^2), \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^2 = -\omega^2, \quad \omega_1^3 = -a\omega^1,$$

$$\omega_2^1 = -\omega^1, \quad \omega_2^3 = -a\omega^2, \quad a\,\omega_3^1 = -\omega^2, \quad a\,\omega_3^2 = -\omega^1, \quad \omega_3^3 = 0,$$

$$da = 0$$

вполне интегрируема.

Т е о р е м а. Фокальные точки коники F_1 конгруэнции (F_1) тогда и только тогда являются неопределенными, когда касательная плоскость поверхности (A) в точке A делит пополам отрезок, заключенный между центром C коники F_1 и точкой E_3.

Доказательство. Касательная плоскость поверхности (A) в точке A делит пополам отрезок CE_3 тогда и только тогда, когда

$$a=1.$$

Уравнения для определения координат фокальных точек коники F_1 записываются в виде:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-x^1-x^2=0, \quad x^1+x^2+x^3=1,$$

$$(a-1)(x^1-x^2)\,(2\,(a+1)\big((x^1)^2+(x^2)^2\big)-2\,(a^2-2a-1)\,x^1x^2+$$
$$+(a^2-4a-4)\,(x^1+x^2)+(a+1)(3-a)\big)=0.$$

Следовательно, фокальные точки коники F_1 не определены тогда и только тогда, когда

$$a=1,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Соприкасающиеся линейные комплексы асимптотических линий поверхности (A)

В [3] для конгруэнции T_{11} найдены аффинная нормаль поверхности (A), асимптотические линии и касательные к асимптотическим линиям на этой поверхности.

Перейдем к новому реперу $\{A,\bar{A}_\alpha\}$, выбирая в качестве базисных векторов направляющие векторы $\bar{A}_3$ аффинной нормали поверхности (A) и $\bar{A}_i$ – касательных к асимптотическим линиям на этой же поверхности. Имеем:

$$\bar{A}_1=\bar{e}_1+a\bar{e}_3\,,\quad \bar{A}_2=\bar{e}_2+a\bar{e}_3\,,\quad \bar{A}_3=\bar{e}_1+\bar{e}_2\,.$$

Деривационные формулы нового репера $\{A,\bar{A}_\alpha\}$ имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^k\bar{A}_k,\quad d\bar{A}_1=-\omega^1\bar{A}_2-\omega^2\bar{A}_3,$$
$$d\bar{A}_2=-\omega^1\bar{A}_3-\omega^2\bar{A}_1,\quad d\bar{A}_3=-\omega^k\bar{A}_k.$$

Соприкасающийся линейный комплекс асимптотической линии поверхности (A) есть предельное положение линейного комплекса

$$b^{01}p^{23}+b^{02}p^{31}+b^{03}p^{12}+b^{12}p^{03}+b^{31}p^{02}+b^{23}p^{01}=0,$$

где p^{ab} $(a,b=0,1,2,3)$ – плюккеровы координаты прямой, проведенной через пять близких касательных данной асимптотической линии при стремлении всех их к касательной этой линии в точке A [4].

Соприкасающийся линейный комплекс асимптотической линии $\omega^1=0$ поверхности (A) имеет уравнение

$$p^{03}-p^{12}=0,$$

а асимптотической линии $\omega^2=0$ – уравнение

$$p^{03}+p^{12}=0.$$

Из пучка

$$(1+\lambda)\,p^{03}+(1-\lambda)\,p^{12}=0 \qquad (22)$$

линейных комплексов выделим специальный линейный комплекс, коэффициенты которого удовлетворяют условию Плюккера

$$b^{01}b^{23}+b^{02}b^{31}+b^{03}b^{12}=0,$$

которое для (22) принимает вид:

$$(1+\lambda)(1-\lambda)=0$$

или

$$\lambda=1\ ,\ \lambda=-1\ .$$

Т е о р е м а. Аффинная нормаль поверхности (A) в точке A и несобственная прямая касательной плоскости поверхности (A) в этой же точке являются директрисами Вильчинского.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\lambda=-1$ плюккеровы координаты первой директрисы Вильчинского имеют вид:

$$p^{03}=-2\ ,$$

остальные координаты равны нулю.

Следовательно, первая директриса Вильчинского задается в репере $\{A,\bar{A}_\alpha\}$ точкой $A\,(0,0,0)$ и вектором $\bar{A}_3\ (0,0,1)$, который коллинеарен аффинной нормали поверхности (A) в точке A.

При $\lambda=1$: $p^{12}=2$, остальные координаты равны нулю, т.е. вторая директриса Вильчинского задается двумя несобственными точками $(0,1,0,0)$ и $(0,0,1,0)$, принадлежащими касательной плоскости поверхности (A) в точке A.

В этом случае соответствующая линейная конгруэнция расслаивается на однопараметрическое семейство пучков прямых, коллинеарных касательной плоскости поверхности (A) в точке A и имеющих центр, инцидентный аффинной нормали этой поверхности в точке A.

Список литературы

1. Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций. М.-Л., ГИТТЛ, 1956.

2. Т к а ч Г.П. Аффинно расслояемые пары многообразий фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. Тезисы докладов 5-й Всесоюзной межвузовской конференции по геометрии Самарканд. 1972, с. 215.

3. Х л я п о в а Е.А. Об одном классе конгруэнций пар фигур, порожденных центральной коникой и точкой. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 4. Калининград, 1974, с. 186-192.

4. Ш и р о к о в П.А. и Ш и р о к о в а А.П. Аффинная дифференциальная геометрия. М., Физматгиз, 1959.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

В.Н.Худенко

О ФОКАЛЬНЫХ ОБРАЗАХ МНОГООБРАЗИЙ МНОГОМЕРНЫХ КВАДРИК

В работе изучаются фокальные образы h-мерного многообразия $(h, h, n)^2_p$ p-мерных квадрик Q_p [3]. Введено понятие фокально-невырожденного многообразия многомерных квадрик. Показано, что фокальными точками обладает коника только фокально невырожденного многообразия $(n-1, n-1, n)^2_1$. Доказано, что число фокальных точек совпадает с числом функций, определяющих такое многообразие, и что каждая фокальная точка является сдвоенной.

Рассмотрим многообразие $(h, h, n)^2_p$ квадрик Q_p в n-мерном проективном пространстве, где

$$h < n.$$

Согласно результатам работы [3] уравнения квадрики Q_p и система дифференциальных уравнений многообразия $(h, h, n)^2_p$ записываются соответственно в виде:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \qquad x^a = 0, \quad \det(a_{\alpha\beta}) = 1, \tag{1}$$

$$\omega^{n+1}_\xi = \Gamma^{n+1\, i}_\xi \omega_i, \qquad \omega^{\hat a}_\alpha = \Gamma^{\hat a i}_\alpha \omega_i, \qquad \Theta_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\alpha\beta} \omega_i, \tag{2}$$

где

$$\omega_i \overset{def}{=} \omega^{n+1}_i,$$

$$\Theta_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta - a_{\beta\gamma}\omega^\gamma_\alpha + \frac{2}{p+2} a_{\alpha\beta}\omega^\gamma_\gamma.$$

Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p+2;$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, h; \quad a = p+3, p+4, \ldots, n+1;$$

$$\hat a = p+3, p+4, \ldots, n; \quad \xi = h+1, h+2, \ldots, p+2.$$

Фокальным многообразием квадрики Q_p принято называть множество точек квадрики Q_p, которые одновременно инцидентны смежной квадрике. Следовательно, система уравнений

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0, \qquad d\{a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta\} = 0, \quad dx^a = 0 \tag{3}$$

задает фокальное многообразие квадрики $Q_p \in (h, h, n)^2_p$. Система (3) приводится к виду

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0, \qquad \Gamma^i_{\alpha\beta}\omega_i x^\alpha x^\beta = 0, \qquad \Gamma^{\hat a i}_\alpha \omega_i x^\alpha = 0, \quad (\Gamma^i_\xi x^\xi + x^i)\omega_i = 0. \tag{4}$$

Теперь, по аналогии с классическими исследованиями в трехмерных пространствах (см. например, [1]), будем исключать независимые базисные формы ω_i из уравнений, содержащих эти формы.

О п р е д е л е н и е. Многообразия $(h, h, n)^2_p$ квадрик Q_p, для которых выполняются соотношения

$$\exists i_0 \le h, \quad \det(\Gamma^{i_0}_{\alpha\beta}) \ne 0;$$
$$\forall \hat{a} \le n, \ \forall i \le h, \quad \operatorname{rang}(\Gamma^{\hat{a}i}_{\alpha}) \ne 0; \tag{5}$$
$$\operatorname{rang}(\Gamma^{i}_{\xi}) \ne 0,$$

называются фокально невырожденными многообразиями квадрик Q_p. В дальнейшем будем рассматривать лишь фокально-невырожденные многообразия.

Очевидно, что для исключения форм ω_i (при выполнении условий (5)) необходимо, чтобы число этих форм совпадало с числом уравнений, содержащих эти формы. Следовательно, приходим к равенству

$$n - p = h .$$

Если параметры n, p, h удовлетворяют равенству (6), то фокальное многообразие квадрики $Q_p \in (h, h, n)^2_p$ задается системой уравнений:

$$\det \begin{vmatrix} \Gamma^{i}_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} \\ \Gamma^{ai}_{\alpha} x^{\alpha} \\ \Gamma^{i}_{\xi} x^{\xi} + x^{i} \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$
$$a_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \quad x^{a} = 0 .$$

Особый интерес представляет случай, когда фокальное многообразие имеет нулевую размерность, т.е. квадрика $Q_p \in (h, h, n)^2_p$ обладает фокальными точками. Тогда система (7) должна задавать алгебраическое многообразие нулевой размерности. Таким образом, мы придем к соотношению

$$p = 1 . \tag{8}$$

Объединяя (6) и (8), получим

$$p = 1, \ h = n - 1 .$$

Следовательно, каждая коника Q_1 фокально-невырожденного многообразия $(n-1, n-1, n)^2_1$ обладает фокальными точками. Остается выяснить вопрос о числе этих точек. Очевидно, что степень первого уравнения системы (7) при выполнении условий (9) равна n. Следовательно, порядок алгебраического многообразия, определяемого системой (7), равен $2n$.

Таким образом доказана следующая теорема

Т е о р е м а 1. Каждая коника Q_1 фокально-невырожденного многообразия $(n-1, n-1, n)^2_1$ обладает $2n$ фокальными точками.

Заметим, что при $n = 3$ коника $Q_1 \in (2,2,3)^2_1$, по теореме 1, будет иметь шесть фокальных точек, что является известным фактом дифференциальной геометрии конгруэнций коник в P_3.

Если $n = 4$, то коника $Q_1 \in (3,3,4)^2_1$ имеет по теореме 1 восемь фокальных точек, что совпадает с результатами работ [2]-[3].

Имеет место следующая

Т е о р е м а 2. Число функций, определяющих фокальноневырожденное многообразие $(n-1, n-1, n)^2_1$ коник Q_1, совпадает с числом фокальных точек коники Q_1 этого многообразия.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой 1 работы [3]. Имеем:

$$S_k = C^2_{p+2} + (p+2)(n-p-1) - k - 1 . \tag{10}$$

Соотношение (10) приводится к виду

$$S_{n-1} = C^2_4 + 3(n-2) - (n-1) - 1 . \tag{10'}$$

Окончательно получим

$$S_{n-1} = 2n . \tag{11}$$

В силу теоремы 1 S_{n-1} совпадает с числом фокальных точек коники Q_1 фокально-невырожденного многообразия $(n-1, n-1, n)^2_1$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Каждая из $2n$ фокальных точек коники Q_1 фокально-невырожденного многообразия $(n-1, n-1, n)^2_1$ является сдвоенной фокальной точкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$p = 1 , \quad k = n-1 .$$

Рассмотрим систему (7), состоящую в данном случае из n уравнений. Первое уравнение системы (7) имеет степень n, второе-квадратичное, остальные-линейные уравнения.

Степень квадратичного уравнения не может понизиться, так как

$$\det(a_{\alpha\beta}) = 1 .$$

Следовательно, при каком-либо вырождении понизится лишь степень первого уравнения системы (7). Если степень первого уравнения понизится на единицу, то степень всей системы, а, следовательно, и число фокальных точек, будет равняться $2n - 2$. При понижении степени первого уравнения на два, число фокальных точек будет $2n - 4$ и так далее.

Таким образом, каждая фокальная точка является сдвоенной, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций. М.-Л., ГИТТЛ, 1950.

2. Х у д е н к о В.Н. О многообразиях квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве.-"Liet. mat. rinkinys." "Литовский математический сборник", 1975, №2, с.148-149.

3. Х у д е н к о В.Н. О многообразиях многомерных квадрик проективного пространства.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 8, Калининград, 1977, с.126-134.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

Ю.И.Шевченко

ОБ ОСНАЩЕНИЯХ МНОГООБРАЗИЙ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено многообразие плоскостей. Введено понятие ассоциированного расслоения-главного расслоения, базой которого является само многообразие, а типовым слоем- подгруппа стационарности плоскости. Доказано, что оснащение Бортолотти позволяет задать связность в ассоциированном расслоении. Это расслоение содержит расслоение проективных реперов, для которого определяющая роль оснащения Бортолотти известна.

Аналогичный результат получен относительно сильного аффинного оснащения невырожденного многообразия центрированных плоскостей. Показано, что сильное аффинное оснащение можно представить в двух эквивалентных геометрических формах.

Работа выполнена методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева с применением предложенного им способа задания связностей в главных расслоениях.

§I. Оснащение Бортолотти многообразия плоскостей

Отнесем N -мерное проективное пространство P_N к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{J}'}\}$, инфинитезимальные перемещения которого

определяются формулами

$$dA_{\mathcal{J}'} = \theta^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'} A_{\mathcal{K}'} \quad (\mathcal{I}', \mathcal{J}', \mathcal{K}' = 0, 1, \ldots, N),$$

причем формы Пфаффа $\theta^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\theta^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'} = \theta^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{J}'} \wedge \theta^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'}.$$

В качестве инвариантных форм проективной группы $GP(N,R)$ будем рассматривать формы

$$\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} = \theta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} - \delta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \theta^0_0, \quad \omega^{\mathcal{J}} = \theta^{\mathcal{J}}_0,$$

$$\omega_{\mathcal{J}} = \theta^0_{\mathcal{J}} \quad (\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 1, \ldots, N),$$

которые удовлетворяют структурным уравнениям (см. [1]-[3]):

$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} = \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} + (\delta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \omega_{\mathcal{J}} + \delta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} \omega_{\mathcal{K}}) \wedge \omega^{\mathcal{J}},$$

$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}} = \omega^{\mathcal{K}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}, \quad \mathcal{D}\omega_{\mathcal{J}} = \omega^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}.$$

В проективном пространстве P_N рассмотрим τ -мерное многообразие B_τ $(1 \le \tau < (m+1)(N-m))$ m-мерных плоскостей L_m $(1 \le m < N)$. Произведем специализацию подвижного репера $\{A_0, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершины $A_0, A_1, \ldots, A_m$ на плоскость L_m; здесь и в дальнейшем индексы принимают значения:

$$a, b, c = 1, \ldots, m; \quad \alpha, \beta, \gamma = m+1, \ldots, N$$

Система дифференциальных уравнений многообразия B_τ в параметрической форме имеет вид:

$$\omega^\alpha = \Lambda^\alpha_i \theta^i, \qquad \omega^\alpha_a = \Lambda^\alpha_{ai} \theta^i, \tag{1}$$

где формы Пфаффа θ^i, заданные в некоторой области τ -мерного пространства параметров S_τ [4], удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j \quad (i, j = N+1, \ldots, N+r). \qquad (2)$$

Продолжая систему уравнений (1), получим

$$\nabla \Lambda^\alpha_i - \Lambda^\alpha_{ai}\,\omega^a = \Lambda^\alpha_{ij}\,\theta^j, \quad \nabla \Lambda^\alpha_{ai} - \Lambda^\alpha_i\,\omega_a = \Lambda^\alpha_{aij}\,\theta^j,$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla \Lambda^\alpha_{ai} = d\Lambda^\alpha_{ai} - \Lambda^\alpha_{aj}\,\theta^j_i - \Lambda^\alpha_{bi}\,\omega^b_a + \Lambda^\beta_{ai}\,\omega^\alpha_\beta .$$

Система функций $\Lambda = (\Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ai})$ является фундаментальным объектом первого порядка многообразия B_r относительно прямого произведения двух групп-подгруппы стационарности плоскости L_m и линейной группы с инвариантными формами

$$\bar{\theta}^i_j = \theta^i_j \big|_{\theta^i = 0} .$$

Обозначим через S число инвариантных форм проективной группы $GP(N,R)$, являющихся вторичными в рассматриваемом репере нулевого порядка, тогда

$$S = N^2 - Nm + m^2 + N + m .$$

С многообразием B_r ассоциируется главное расслоение $G_S\,(B_r)$ со структурными уравнениями (2) и следующими:

$$\mathcal{D}\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + \theta^i \wedge \omega^a_i , \qquad (3)$$

$$\mathcal{D}\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + (\delta^a_b\,\omega_c + \delta^a_c\,\omega_b) \wedge \omega^c + \theta^i \wedge \omega^a_{bi} , \qquad (4)$$

$$\mathcal{D}\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b + \theta^i \wedge \omega_{ai} , \qquad (5)$$

$$\mathcal{D}\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \delta^\alpha_\beta\,\omega_a \wedge \omega^a + \theta^i \wedge \omega^\alpha_{\beta i} ,$$

$$\mathcal{D}\omega_\alpha = \omega^a_\alpha \wedge \omega_a + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta ,$$

$$\mathcal{D}\omega^a_\alpha = \omega^b_\alpha \wedge \omega^a_b + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^a_\beta + \omega_\alpha \wedge \omega^a ,$$

где

$$\omega^a_i = \Lambda^\alpha_i\,\omega^a_\alpha , \qquad \omega^a_{bi} = \Lambda^\alpha_{bi}\,\omega^a_\alpha - \delta^a_b\,\Lambda^\alpha_i\,\omega_\alpha ,$$

$$\omega_{ai} = \Lambda^\alpha_{ai}\,\omega_\alpha , \qquad \omega^\alpha_{\beta i} = -\Lambda^\alpha_{ai}\,\omega^a_\beta - \Lambda^\gamma_i\,(\delta^\alpha_\beta\,\omega_\gamma + \delta^\alpha_\gamma\,\omega_\beta)$$

Базой главного расслоения $G_S\,(B_r)$ является многообразие B_r (точнее-область пространства параметров S_r), а типовым слоем — S-членная подгруппа стационарности G_S плоскости L_m. Ассоциированное расслоение $G_S(B_r)$ содержит расслоение проективных реперов (2)-(5) с той же базой, типовым слоем которого является проективная группа $GP(m,R) \subset G_S \subset GP(N,R)$, действующая на плоскости L_m. В свою очередь расслоение проективных реперов содержит каноническое расслоение со структурными уравнениями (2),(3), введенное Ю.Г.Лумисте [2],[3].

Связность в главном расслоении $G_S\,(B_r)$ задается [5],[6] с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = (\Gamma^a_i, \Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma_{\alpha i}, \Gamma^a_{\alpha i})$$

на базе B_r:

$$\nabla \Gamma^a_i - \Gamma^a_{bi}\,\omega^b + \omega^a_i = \Gamma^a_{ij}\,\theta^j,$$

$$\nabla \Gamma^a_{bi} + \delta^a_b\,(\Gamma_{ci}\,\omega^c - \Gamma^c_i\,\omega_c) + \Gamma_{bi}\,\omega^a - \Gamma^a_i\,\omega_b + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{bij}\,\theta^j,$$

$$\nabla \Gamma_{ai} + \Gamma^b_{ai}\,\omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij}\,\theta^j,$$

$$\nabla \Gamma^\alpha_{\beta i} + \delta^\alpha_\beta\,(\Gamma_{ai}\,\omega^a - \Gamma^a_i\,\omega_a) + \omega^\alpha_{\beta i} = \Gamma^\alpha_{\beta ij}\,\theta^j,$$

$$\nabla \Gamma_{\alpha i} + \Gamma^a_{\alpha i}\,\omega_a + \Gamma^\beta_{\alpha i}\,\omega_\beta - \Gamma_{ai}\,\omega^a_\alpha = \Gamma_{\alpha ij}\,\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma^a_{\alpha i}-\Gamma^a_{bi}\,\omega^b_\alpha+\Gamma^\beta_{\alpha i}\,\omega^a_\beta-\Gamma^a_i\,\omega_\alpha+\Gamma_{\alpha i}\,\omega^a=\Gamma^a_{\alpha ij}\,\theta^j.$$

Теорема. Оснащение Бортолотти [9] многообразия B_τ позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_S(B_\tau)$.

Доказательство. Оснащение Бортолотти многообразия B_τ состоит в присоединении к каждой плоскости L_m $(N-m-1)$-мерной плоскости P_{N-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L_m. Плоскость P_{N-m-1} зададим системой точек

$$B_\alpha=A_\alpha+\lambda^a_\alpha A_a+\lambda_\alpha A_0,$$

причем

$$\nabla\lambda^a_\alpha+\lambda_\alpha\,\omega^a+\omega^a_\alpha=\lambda^a_{\alpha i}\,\theta^i,$$

$$\nabla\lambda_\alpha+\lambda^a_\alpha\,\omega_a+\omega_\alpha=\lambda_{\alpha i}\,\theta^i.$$

Оснащение Бортолотти определяется полем квазитензора $\lambda=(\lambda^a_\alpha,\lambda_\alpha)$ на базе B_τ. Фундаментальный объект первого порядка Λ и оснащающий квазитензор λ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma^a_i=\lambda^a_\alpha\Lambda^\alpha_i,\qquad \Gamma_{ai}=\lambda_\alpha\Lambda^\alpha_{ai},\tag{6}$$

$$\Gamma^a_{bi}=\lambda^a_\alpha\Lambda^\alpha_{bi}-\delta^a_b\,\Lambda^\alpha_i\,\lambda_\alpha,\tag{7}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta i}=-\Lambda^\alpha_{ai}\lambda^a_\beta-\Lambda^\gamma_i\,(\delta^\alpha_\beta\lambda_\gamma+\delta^\alpha_\gamma\lambda_\beta),$$

$$\Gamma_{\alpha i}=-\lambda_\beta M^\beta_{\alpha i},\quad \Gamma^a_{\alpha i}=-\lambda^a_\beta M^\beta_{\alpha i},$$

где

$$M^\beta_{\alpha i}=\lambda^a_\alpha\Lambda^\beta_{ai}+\lambda_\alpha\Lambda^\beta_i.$$

Замечание 1. Главное расслоение, ассоциированное с пространством произвольных фигур, ввел В.С.Малаховский [7, с.196]. В случае многообразия Грассмана некоторые главные расслоения рассматривались И.В.Близникене [8].

Замечание 2. Охват объекта проективной связности $(\Gamma^a_i,\Gamma^a_{bi},\Gamma_{ai})\subset\Gamma$ по формулам (6),(7) осуществлен Ю.Г.Лумисте [2, с.21].

§ 2. Сильное аффинное оснащение невырожденного многообразия центрированных плоскостей

В проективном пространстве P_N рассмотрим τ-параметрическое многообразие B^*_τ $(1\le\tau\le N)$ m-мерных центрированных плоскостей L^*_m $(1\le m<N)$. Многообразие B^*_τ является наиболее общим невырожденным многообразием простых $(N-m)$-инцидентных пар фигур [7]: плоскости и принадлежащей ей точки. Произведем специализацию подвижного репера $\{A_0,A_a,A_\alpha\}$, помещая вершину A_0 в центр плоскости L^*_m, а вершины A_a — на плоскость L^*_m. Система дифференциальных уравнений многообразия B^*_τ имеет вид:

$$\omega^a=\Lambda^a_i\,\theta^i,\ \omega^\alpha=\Lambda^\alpha_i\,\theta^i,\ \omega^\alpha_a=\Lambda^\alpha_{ai}\,\theta^i\quad(i,j=1,\dots,\tau).\tag{1}$$

Продолжая систему уравнений (1), получим

$$\nabla\Lambda^a_i+\Lambda^\alpha_i\,\omega^a_\alpha=\Lambda^a_{ij}\,\theta^j,\quad \nabla\Lambda^\alpha_i=\Lambda^\alpha_{ij}\,\theta^j,$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{ai}-\Lambda^\alpha_i\,\omega_a=\Lambda^\alpha_{aij}\,\theta^j.$$

Система функций $\Lambda = (\Lambda^a_i, \Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ai})$ является фундаментальным объектом первого порядка многообразия B^*_τ. Пусть

$$S^* = N(N+1) - m(N-m).$$

С многообразием B^*_τ ассоциируется главное расслоение $G_{S^*}(B^*_\tau)$ со структурными уравнениями

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j, \tag{2}$$

$$\mathcal{D}\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \theta^i \wedge \omega^a_{bi}, \tag{3}$$

$$\mathcal{D}\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b + \theta^i \wedge \omega_{ai}, \tag{4}$$

$$\mathcal{D}\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \theta^i \wedge \omega^\alpha_{\beta i},$$

$$\mathcal{D}\omega^a_\alpha = \omega^b_\alpha \wedge \omega^a_b + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^a_\beta + \theta^i \wedge \omega^a_{\alpha i},$$

$$\mathcal{D}\omega_\alpha = \omega^a_\alpha \wedge \omega_a + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta,$$

где

$$\omega^a_{bi} = \Lambda^\alpha_{bi}\omega^a_\alpha - \delta^a_b(\Lambda^\alpha_i \omega_\alpha + \Lambda^c_i \omega_c) - \Lambda^a_i \omega_b,$$

$$\omega_{ai} = \Lambda^\alpha_{ai}\omega_\alpha, \quad \omega^a_{\alpha i} = -\Lambda^a_i \omega_\alpha,$$

$$\omega^\alpha_{\beta i} = -\Lambda^\alpha_{ai}\omega^a_\beta - \Lambda^\alpha_i \omega_\beta - \delta^\alpha_\beta(\Lambda^\gamma_i \omega_\gamma + \Lambda^a_i \omega_a).$$

Базой главного расслоения $G_{S^*}(B^*_\tau)$ является многообразие B^*_τ, а слоем - S^*-членная подгруппа стационарности G_{S^*} центрированной плоскости L^*_m. Ассоциированное расслоение $G_{S^*}(B^*_\tau)$ содержит, в частности, расслоение коаффинных (центропроективных) реперов (2)-(4) с той же базой, слоем которого является коаффинная группа $GA^*(m, R) \subset G_{S^*} \subset G_S$, действующая в центрированной плоскости L^*_m.

Связность в главном расслоении $G_{S^*}(B^*_\tau)$ задается с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = (\Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^a_{\alpha i}, \Gamma_{\alpha i})$$

на базе B^*_τ:

$$\nabla\Gamma^a_{bi} + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{bij}\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma_{ai} + \Gamma^b_{ai}\omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij}\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma^\alpha_{\beta i} + \omega^\alpha_{\beta i} = \Gamma^\alpha_{\beta ij}\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma^a_{\alpha i} - \Gamma^a_{bi}\omega^b_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha i}\omega^a_\beta + \omega^a_{\alpha i} = \Gamma^a_{\alpha ij}\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma_{\alpha i} + \Gamma^\beta_{\alpha i}\omega_\beta + \Gamma^a_{\alpha i}\omega_a - \Gamma_{ai}\omega^a_\alpha = \Gamma_{\alpha ij}\theta^j.$$

Т е о р е м а. Сильное аффинное оснащение [2] многообразия B^*_τ позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_{S^*}(B^*_\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Под сильным аффинным оснащением многообразия B^*_τ будем понимать присоединение к каждой центрированной плоскости L^*_m следующих геометрических образов: 1/ $(N-m-1)$-мерной плоскости P_{N-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^*_m; 2/ $(m-1)$-мерной плоскости P_{m-1}, принадлежащей плоскости L^*_m и не проходящей через ее центр. Плоскости, указанные в пунктах 1/, 2/, определяются системами точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A_0, \quad B_a = A_a + \lambda_a A_0,$$

причем

$$\nabla\lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i}\theta^i, \quad \nabla\lambda_a + \omega_a = \lambda_{ai}\theta^i,$$

$$\nabla\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\theta^i.$$

Фундаментальный объект первого порядка Λ и оснащающий квазитензор $\lambda = (\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda_a)$ позволяют охватить компоненты объекта связности по формулам:

$$\Gamma^a_{bi} = \Lambda^\alpha_{bi}\lambda^a_\alpha - \delta^a_b\Lambda^\alpha_i\lambda_\alpha - M^c_i(\delta^a_b\lambda_c + \delta^a_c\lambda_b),$$

$$\Gamma_{ai} = \Lambda^\alpha_{ai}\lambda_\alpha - \lambda_a\lambda_b M^b_i,$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta i} = \delta^\alpha_\beta(\Lambda^\gamma_i\lambda^a_\gamma\lambda_a - M_i) - \Lambda^\alpha_{ai}\lambda^a_\beta - \Lambda^\alpha_i\lambda_\beta,$$

$$\Gamma^a_{\alpha i} = -\mu_\alpha\Lambda^a_i - \lambda^b_\alpha\lambda^a_\beta(\Lambda^\beta_{bi} + \lambda_b\Lambda^\beta_i),$$

$$\Gamma_{\alpha i} = \lambda_a\lambda_b\lambda^b_\alpha M^a_i - \mu_\beta\lambda^a_\alpha\Lambda^\beta_{ai} - \lambda_\alpha M_i,$$

где

$$M^a_i = \Lambda^a_i - \Lambda^\alpha_i\lambda^a_\alpha, \quad M_i = \Lambda^a_i\lambda_a + \Lambda^\alpha_i\lambda_\alpha,$$

$$\mu_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda^a_\alpha\lambda_a.$$

П р е д л о ж е н и е. Сильное аффинное оснащение многообразия B^*_r можно представить в другой геометрической форме, а именно, к каждой центрированной плоскости L^*_m присоединить: а/ $(N-m)$-мерную плоскость P_{N-m}, пересекающую плоскость L^*_m лишь в ее центре; б/ гиперплоскость P_{N-1}, не проходящую через центр плоскости L^*_m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Плоскости, указанные в пунктах а/, б/, зададим уравнениями

$$x^a - \lambda^a_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^0 - \lambda_a x^a - \mu_\alpha x^\alpha = 0,$$

причем

$$\nabla\mu_\alpha - \lambda_a\omega^a_\alpha + \omega_\alpha = \mu_{\alpha i}\Theta^i.$$

Плоскость P_{N-m} натянута на плоскость P_{N-m-1} и центр плоскости L^*_m, а гиперплоскость P_{N-1} – на плоскости P_{N-m-1}, P_{m-1}. Обратно, гиперплоскость P_{N-1} высекает на плоскости P_{N-m} подплоскость P_{N-m-1}, а на плоскости L^*_m – подплоскость P_{m-1}.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр.Моск.матем.о-ва", 1953, т.2, с.275-382.

2. Л у м и с т е Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях.-"Учен.зап.Тартуск. ун-та", вып.177, 1965, с.6-41.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей.-"Матем.сб.", 1973, т.91, № 2, с.211-233.

4. О с т и а н у Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей.-"Тр.геометрического семинара", 1969, т.2, с.247-262.

5. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства.-"Тр.4-го Всесоюзного матем.съезда", т.2, Л., Изд-во "Наука", 1964, с.226-233.

6. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-Тр. геометрического семинара, 1973, т.4, с.7-68.

7. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.- "Тр.геометрич.семинара", 1969, т.2, с.179-206.

8. Б л и з н и к е н е И.В. О геометрии полунеголономной конгруэнции первого рода.-"Тр.геометрич.семинара", 1971, т.3, с.125-148.

9. B o r t o l o t t i E. Connessioni nelle varietá luogo di spazi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81-89.

С е м и н а р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском государственном университете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 25 мая 1977 г.

Ниже приводится план работы семинара с 19 октября 1977 года по 24 мая 1978

19.10.1977г. В.С.М а л а х о в с к и й.Дифференциальная геометрия многообразий квадрик в обобщенных пространствах.

26.10.1977г.Ю.И.П о п о в.К теории оснащенных гиперполос.

2.11.1977г. В.Н.Х у д е н к о. О многообразиях многомерных квадрик в P_n.

16.11.1977г. Ю.И.Ш е в ч е н к о.Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве.

23.11.1977г. Е.В.С к р ы д л о в а. О вырожденных конгруэнциях,порожденных коникой и прямой.

30.11.1977г. Г.Л.С в е ш н и к о в а. О конгруэнциях коник с характеристической точкой плоскости коники,инцидентной конике.

7.12.1977г. В.В.М а х о р к и н.Многообразия гиперквадрик n-мерного проективного пространства.

14.12.1977г.Б.А.А н д р е е в. О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и многообразием гиперквадрик аффинного пространства.

21.12.77г.Т.П.Ф у н т и к о в а. Торсовые вырожденные конгруэнции.

8.12.78г.Е.А.Х л я п о в а. Конгруэнции T_1,

15.2.78г. Л.Г.К о р с а к о в а. Пары $\mathfrak{D}$.

22.2.1978г. Е.П.С о п и н а.Многообразия центральных гиперквадрик в A_n.

1.3.1978г. Е.А.М и т р о ф а н о в а.Многообразия параболоидов в A_n.

15.3.1978г.О.П.К и р ь я н о в а.Сети на невырожденных гиперполосах в P_n.

22.3.1978г.И.И.Ф и л ь ч и н а.Оснащенные вырожденные гиперполосы в P_n.

29.3.1978г. Л.Б.П е р е п е л к и н а.Оснащенные регулярные гиперполосы в P_n.

5.4.1978г. Т.Ю.М о р о з о в а.Многообразия гиперцилиндров в A_n.

12.4.1978г. Т.В.А н д р е е в а. Многообразия пар фигур в P_n,порожденных прямой и гиперквадрикой.

17.5.1978г. Н.П.Б е з с м е р т н а я.Многообразия центральных квадратичных элементов в A_n.

24.5.1978г. И.Я.Н е в м и р и ч. Об одном классе конгруэнций квадрик со специальными свойствами фокальных поверхностей.

УДК 513.73

Некоторые вопросы геометрии ∇ -сопряженных сетей. А б р а м о в А.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.9,Калининград ,1978,с.5-10.

Рассмотрены ∇ -сопряженные сети на 3-поверхности V_3 евклидова пространства E_5.Найдены геометрические свойства поверхности V_3 .

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и многообразием $R_n(Q)$ гиперквадрик аффинного пространства. А н д р е е в Б.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.9,Калининград,1978,с.11-19.

Изучается локальное биективное отображение точечного $(n+1)$ -мерного проективного пространства P_{n+1} в специальное многообразие эллипсоидов $R_n(Q)$ n-мерного аффинного пространства.Во 2-й дифференциальной окрестности построены и геометрически охарактеризованы инвариантные алгебраические многообразия,с помощью которых определяются характеристические прямые отображения φ и индуцируемых им отображений.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

О некоторых дифференциально-геометрических структурах, ассоциированных с оснащенным распределением линейных элементов проективного пространства.Б а л а з ю к Т.Н. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.9,Калининград,1978,с.20-25.

В многомерном проективном пространстве рассматриваются дифференциально - геометрические структуры,ассоциированные с оснащенным распределением линейных элементов.

Библиография: 8 названий.

УДК 513.73

К решению одной обратной задачи нормализации. Б р а з е в и ч М.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.9,Калининград,1978,с.26-39.

Решается обратная задача внутреннего оснащения неголономного комплекса,т.е. по заданной нормализации многообразия Грассмана $Gr(1,3)$ восстанавливаются инвариантные корреляции на этом многообразии.Дана геометрическая характеристика ряда корреляций.

Библиография: 12 названий.

УДК 513.73

Связности,индуцируемые оснащениями гиперповерхности V_{n-1} в евклидовом пространстве E_n.В е л и ч к и н В.Н. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.9,Калининград,1978,с.40-44.

Рассматриваются специальные оснащения гиперповерхности V_{n-1} в евклидовом пространстве E_n ,индуцирующие на ней различные аффинные связности:эквиаффинную,вейлеву,риманову. Найдены необходимые и достаточные условия на выбор таких оснащений.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Пары $\mathcal{D}$.К о р с а к о в а Л.Г."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.9.Калининград,1978,с.45-53.

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются пары $\mathcal{D}$ конгруэнций коник C_1 и C_2 ,не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей,причем коники C_1 и C_2 имеют две общие точки пересечения с прямой ℓ .

Библиография: 4 названия.

УДК 513.73

Поверхности, нормали которых ортогонально пересекают линию. М а л а х о в с к и й В.С. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.9, Калининград, 1978, с.54-59.

В трехмерном евклидовом пространстве рассматривается поверхность, все нормали которой ортогонально пересекают линию. Дано приложение метода внешних форм и подвижного репера к установлению характеристического признака такой поверхности.

Библиография: I название.

УДК 513.73

Многообразия гиперквадрик n-мерного проективного пространства и их фокальные многообразия. М а х о р к и н В.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.9. Калининград, 1978, с.60-64.

Исследуются многообразия гиперквадрик n-мерного проективного пространства, их фокальные многообразия, а также ассоциированные с ними конструкции. Осуществлена канонизация репера и дана его геометрическая характеристика.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

О некоторых видах пар θ конгруэнций. Р е д о з у б о в а О.С. "Дифференциальная геометрия многоооразий фигур". Вып.9. Калининград, 1978, с.64-71.

Рассмотрены такие пары θ конгруэнций, соответствующие прямые которых проходят через фокусы конгруэнции общих перпендикуляров.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

Инвариантные квадратичные формы и отображения поверхностей. Р ы б а к о в В.Н. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.9, Калининград, 1978, с.72-78.

Рассматриваются специальные классы отображений поверхностей в E_3 с использованием инвариантных квадратичных форм.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Об одном классе конгруэнций кривых второго порядка с невырождающимися фокальными поверхностями. С в е ш н и к о в а Г.Л., Е р м а к о в а Н.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.9, Калининград, 1978, с.79-84.

В трехмерном проективном пространстве исследуются конгруэнции кривых второго порядка (коник) с характеристической точкой плоскости коники, принадлежащей этой конике.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

О вырожденных конгруэнциях, порожденных коникой и прямой. С к р ы д л о в а Е.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.9, Калининград, 1978, с.85-92.

В трехмерном проективном пространстве рассматривается особый тип конгруэнций $(CL)_{1,2}$. Построен геометрически фиксированный репер и указаны некоторые свойства конгруэнций.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

О фокальных образах многообразий многомерных квадрик. Х у д е н к о В.Н. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.9, Калининград, 1978, с. 118-123.

Изучаются фокальные образы многообразия $(k, k, n)_p^2$ p -мерных квадрик. Доказано, что фокальными точками обладает лишь коника многообразия $(n-1, n-1, n)_1^2$. Показано, что число фокальных точек совпадает с числом функций, определяющих такое многообразие.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве. Ш е в ч е н к о Ю.И. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.9, Калининград, 1978, с. 124-133.

В многомерном проективном пространстве рассмотрено многообразие плоскостей. Доказано, что оснащение Бортолотти позволяет задать связность в ассоциированном расслоении.

Библиография: 9 названий.

УДК 513.73

Условие квадратичности регулярной гиперполосы. С т о л я р о в А.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.9, Калининград, 1978, с. 93-101.

В работе находится инвариантное аналитическое условие квадратичности m -мерной регулярной гиперполосы, погруженной в n-мерное проективное пространство. Доказано, что это условие представляет собой обращение в нуль трех тензоров 2-го и 3-го порядков гиперполосы.

Библиография: 11 названий.

УДК 513.73

Торсовые вырожденные конгруэнции $(LP)_{2,1}$. Ф у н т и к о в а Т.П. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.9, Калининград, 1978, с. 102-107.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(LP)_{2,1}$ пар фигур $[L, P]$, где L - прямая, P -точка.

Библиография: 1 название.

УДК 513.73

Конгруэнции T_1 . Х л я п о в а Е.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.9, Калининград, 1978, с. 108-117.

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются специальные типы конгруэнций φ_2 , порожденных центральной коникой E_1 и точкой F_1 , не инцидентной плоскости коники конгруэнции. Найдены и геометрически охарактеризованы директрисы Вильчинского.

Библиография: 4 названия.

Дифференциальная геометрия многообразий фигур

ВЫПУСК 9

Темплан 1978, поз. 138

Редактор В. И. Васильева. Техн. редактор Н. Д. Шишкова.
Корректор С. А. Сахарова.

Подписано к печати 2/III-1978 г. Формат бумаги $60\times90^1/_{16}$. Сорт бумаги офсетная № 1,80 г/м. Усл. печ. л. 9. Уч.-изд. л. 8,75. КУ 01097. Заказ 14409.
Тираж 500 экз. Цена 1 р. 05 коп.

Калининградский государственный университет,
г. Калининград, обл., ул. Университетская, 2.

Типография издательства «Калининградская правда»,
г Калининград, обл., ул. Карла Маркса, 18.

Цена 1 р. 05 к.