МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 3

Калининград 1973

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР.

Выпуск 3

г.Калининград - 1973 год.

КУ-05126. Цена 60 коп. Тираж 500 экз. Подписано к печати 1.12.72. Формат 60х84/16. Объём 12,7 п.л. Заказ 121.

Ротапринт Клайпедского отделения Гипрорыбфлот - 235799 г. Клайпеда, Лит. ССР, ул. Минийос, 2.

ОТ РЕДАКЦИИ

Межвузовский сборник "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" издается один раз в год при Калининградском государственном университете.

Статьи, публикуемые в выпуске 3 этого сборника, посвящены следующим вопросам:

1) многообразия фигур и пар фигур в многомерных пространствах (В.М. Овчинников, Н.М. Похила, Е.А. Хляпова, В.В. Махоркин),

2) дифференцируемые отображения точечного многомерного проективного пространства в пространства пар фигур (Б.А. Андреев),

3) оснащения регулярных гиперполос многомерного проективного пространства (Ю.И. Попов, Е.И. Терентьева),

4) связности, ассоциированные с многообразиями фигур (Ю.И. Шевченко),

5) многообразия фигур и пар фигур в трехмерных пространствах (В.С. Малаховский, Ф.А. Липатова, Т.П. Новожилова, Е.А. Скрыдлова, Г.Л. Свешникова, Г.П. Ткач, Н.П. Каменский и Д.Е. Рускол),

6) групповые свойства многообразий фигур (А.К. Лапковский и В.П. Лаптинский).

Все работы докладывались на семинаре по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском университете.

Содержание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

АНДРЕЕВ Б.А.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ И НЕКОТОРЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ ПАР ФИГУР.

Продолжается изучение локального соответствия f между точечным проективным пространством P_N и пространством $R(F)$ пар фигур $F=(p,q)$, где p – точка n-мерного проективного пространства P_n, а q – не инцидентная ей гиперквадрика (см. [4]). Введено понятие основной гомографии точечного соответствия, которое затем применяется к исследованию соответствия f. Даны определения характеристических направлений различных типов, получены геометрические свойства этих направлений и связанных с ними геометрических образов. Рассматривается вопрос о применении полученных результатов к изучению отображений точечных пространств в пространства индуцируемых парой F фигур. В данной работе символ $(i,j)[k]$ означает формулу (i,j) работы $[k]$.

§ I. F_a -индикатриса.

Отображение $f: U \to R(F)$, $f(P)=(p,q)$, где $P\in U\subset P_N$ порождает точечное отображение $f_2: U\to P_n$, $f_2(P)=p$. Из (I.2) [4] получаем уравнения f_2 в неоднородных координатах в окрестности фиксированной точки P:

$$\tilde{x}^i=\Lambda^i_{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}+\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{K}}+\langle 3\rangle, \quad (i,j,k=1,\dots,n;\ \mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L}=1,\dots,N), \tag{1.1}$$

где символ $\langle k\rangle$ означает совокупность членов k-го порядка малости относительно $\tilde{X}^{\mathcal{J}}$. Семейство касательных к f_2 коллинеаций $K(P_{\mathcal{J}})$ [3] задается уравнениями:

$$\tilde{x}^i=\frac{\Lambda^i_{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}}{1-P_{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}}. \tag{1.2}$$

Определение I. Точка A, не принадлежащая F_2 – нулевому подпространству [4] называется F_2 -главной, если существует касательная к f_2 коллинеация $K(P_{\mathcal{J}})$, такая, что $K(P_{\mathcal{J}})(A)\in$ когда прямая $[PA]$ является $K(P_{\mathcal{J}})$ главной.

Из [2], §I видно, что определения и результаты, касающиеся $K(P_{\mathcal{J}})$-главных прямых, переносятся без изменений на случай отображения $P_m\to P_n$, $m>n$, если исключить из рассмотрения прямые нулевых направлений. Из (I.17) [2] получаем уравнения конуса, образованного $K(P_{\mathcal{J}})$-главными прямыми в однородных координатах:

$$\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}X^{\mathcal{J}}X^{\mathcal{K}}=2P_{\mathcal{J}}\Lambda^i_{\mathcal{K}}X^{\mathcal{J}}X^{\mathcal{K}}. \tag{1.3}$$

Теорема I. На каждой $K(P_{\mathcal{J}})$-главной прямой существует единственная F_2 -главная точка.

Доказательство. Существование очевидно. Докажем единственность. Пусть точка $\bar{A}=X^0\bar{P}+X^{\mathcal{J}}\bar{R}_{\mathcal{J}}$ определяет направление, главное для $K(P_{\mathcal{J}})$ и $K(\hat{P}_{\mathcal{J}})$; тогда имеем:

$$\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{K}}=2P_{\mathcal{J}}\Lambda^i_{\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{K}}=2\hat{P}_{\mathcal{J}}\Lambda^i_{\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}X^{\mathcal{K}}. \tag{1.4}$$

Так как F_2 -нулевые направления исключены из рассмотрения, то есть $\Lambda^i_{\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}}\neq 0$, из (I.2) заключаем, что необходимым и достаточным условием того, чтобы точка A была F_2 -главной, является равенство:

$$\hat{P}_\gamma X^\gamma = 1 . \qquad (1.5)$$

Рассмотрим на $[PA]$ точку B с неоднородными координатами $\tilde{y}^\gamma = \frac{1}{a}\tilde{X}^\gamma$ такую, что $\hat{P}_\gamma \tilde{y}^\gamma = 1$, то есть $\hat{P}_\gamma X^\gamma = a$. Из (I.4) и (I.5) получаем: $a\Lambda^i_\gamma \tilde{X}^\gamma = \Lambda^i_\varkappa \tilde{X}^\varkappa$. Следовательно, $a=1$, то есть $B \equiv A$.

Определение 2. F_2-главной точкой для F_2-нулевых направлений называется точка P .

Определение 3. F_2-индикатрисой называется множество F_2-главных точек.

Теорема 2. F_2-индикатриса лежит на F_2-характеристическом конусе[4] :

$$\Lambda^i_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2\Lambda^i_\gamma X^\gamma (X^\circ + \sigma) = 0 . \qquad (1.6)$$

Доказательство. Пусть точка $\bar{A}$ - F_2-главная. Тогда выполняется (I.3) и координаты $\bar{A}$ удовлетворяют системе (I.6) при

$$\sigma = X^\varkappa P_\varkappa - X^\circ \qquad (1.7)$$

Теорема 3. Инвариантная направляющая F_2-характеристического конуса, определяемая системой (I.6) при $\sigma = 0$, является F_2-индикатрисой.

Доказательство. Положив в (I.6) и (I.7) $\sigma = 0$ получим (I.5) и (I.3). Доказательство теперь следует из теоремы I. Из теоремы 3 вытекают следующие два утверждения.

Теорема 4. F-нулевое подпространство является касательным к F_2-индикатрисе пространством в точке P .

Теорема 5. Если F_2-главная прямая стремится к F_2-нулевой, F_2-главная точка на ней стремится к точке P .

Последняя теорема оправдывает определение 2. Используя двойственность точечного пространства P_N и пространства его гиперплоскостей, получаем геометрическую характеристику инвариантной направляющей F_3-характеристического конуса [4]. Аналогичную интерпретацию имеет направляющая F_1-характеристического конуса. F_3- и F_1 -индикатрисы задаются уравнениями (3.5) [4] при $\sigma = 0$.

§ 2. Основная гомография.

Рассмотрим точечное соответствие проективных пространств q : $\hat{P}_n \to P_n$, которое в окрестности U точки $\hat{O} \in \hat{P}_n$ представляется в виде:

$$\tilde{y}^i = a^i_j \tilde{x}^j + \frac{1}{2} b^i_{jk} \tilde{x}^j \tilde{x}^k + \langle 3 \rangle, \ (i,j,\dots = 1,\dots,n). \qquad (2.1)$$

Каждая касательная к q гомография $K(P_i)$ порождает на U инвариантную связку числовых функций:

$$\mathcal{X}(Q_i)(\tilde{x}^j) = \frac{\frac{\partial(\ln|I_{K(P_i)}| - \ln|I_q|)}{\partial \tilde{x}^i}\tilde{x}^i}{1 - Q_i \tilde{x}^i}$$

где $I_{K(P_i)}$, I_q -якобианы, соответственно, отображений $K(P_i)$ и q.

Определение 4. Касательная гомография называется основной гомографией $K(\overset{\circ}{P}_i)$, если порождаемые ею функции $\mathcal{X}(Q_i)$ принимают на U тождественно нулевые значения.

Теорема 6. Если величины Γ^k_{ij} определяют объект аффинно-евклидовой связности, индуцируемой отображением q ([2], §5), то $K(\overset{\circ}{P}_i) = K\left(\frac{1}{n+1}\Gamma_i\right)$, где $\Gamma_i = \Gamma^j_{ij}$.

Доказательство. Для объекта связности $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, индуцируемой гомографией. $K(P_i)$, имеем: $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \delta^k_i P_j + \delta^k_j P_i$, откуда $\tilde{\Gamma}_i = (n+1) P_i$. Из (5.7). [2] и определения 4 получаем: $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i$, откуда $\overset{\circ}{P}_i = \frac{1}{n+1} \Gamma_i$.

Применим введенное понятие к изучению отображения f. Пусть $f_{2/2}$-сужение f_2 на F_2- подпространство [4]. Отображение $f_{2|2}$ биективно в некоторой области ϑ F_2-подпространства, а именно, в точках, где последнее остается трансверсальным к F_2-нулевым подпространствам, найденным для этих точек. Основную гомографию для $f_{2|2}$ обозначим $f^0_{2|2}$.

Т е о р е м а 7. Гомография $f^0_{2|2}$ задается уравнениями:

$$\tilde{x}^i = \frac{\Lambda^i_\gamma \tilde{X}^\gamma}{1-\frac{1}{n+1}\overset{2}{\Gamma}_\varkappa \tilde{X}^\varkappa}, \quad \overset{2}{I}{}^\varkappa_\gamma X^\gamma = X^\varkappa, \tag{2.3}$$

где

$$\overset{2}{\Gamma}_\gamma = \overset{2}{\Gamma}{}^\varkappa_{\gamma\varkappa} \quad ([4],(3.6)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что система (2.3) задает инвариантную гомографию. Точка $\bar{A} = X^0\bar{P} + X^\gamma \bar{R}_\gamma$ лежащая, в силу (2.3) в F_2-подпространстве, отображается в точку $\bar{a} = (X^0 - \frac{1}{n+1}\overset{2}{\Gamma}_\gamma X^\gamma)\bar{p} + \Lambda^i_\gamma X^\gamma \bar{e}_i$. Если $\bar{A}$ стационарна, то $\delta\bar{a} = (\theta - \Pi^0_0)\bar{a}$, где θ -полный дифференциал. Поместим первые n вершин репера R в F_2-подпространство. Уравнения (2.3) принимают вид:

$$\tilde{x}^i = \frac{\Lambda^i_j X^j}{1-\frac{1}{n+1}\overset{2}{\Gamma}_j \tilde{X}^j}, \quad x^\alpha = 0 \ ; \ (\alpha = n+1,\dots, N) \tag{2.3'}$$

Из (2.9) [4] следует, что тогда $V^\alpha_i = 0$, откуда, используя (2.6)[4], (2.I) можно убедиться, что $\Gamma_i = \Gamma^j_{ij}$ и что Γ^k_{ij} удовлетворяют уравнениям (5.2)[2], определяя объект аффинно-евклидовой связности, присоединенной к $f_{2|2}$. Доказательство теперь следует из теоремы 6.

Объект $\{\overset{2}{\Gamma}_\gamma, \overset{2}{I}{}^\varkappa_\gamma\}$ определяет в P_N инвариантную $(n-1)$-плоскость:

$$\overset{2}{\Gamma}_\gamma X^\gamma - (n+1) X^0 = 0, \quad \overset{2}{I}{}^\varkappa_\gamma X^\gamma = X^\varkappa, \tag{2.4}$$

лежащую в F_2-подпространстве. Она называется F_2-абсолютом.

Т е о р е м а 8. F_2-абсолют является прообразом гиперплоскости π при гомографии $f^0_{2|2}$.

Доказательство следует из предыдущей теоремы.

Система уравнений:

$$\overset{2}{\Pi}{}^\varkappa_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa = 0, \quad \overset{2}{I}{}^\varkappa_\gamma X^\gamma = X^\varkappa, \tag{2.5}$$

где $\overset{2}{\Pi}{}^\varkappa_{\gamma\varkappa}$ являются компонентами введенного в [4] объекта F_2-связности, имеет нетривиальное решение лишь в специальных случаях.

Т е о р е м а 9. Чтобы система (2.5) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы F_2-абсолют имел непустое пересечение с F_2-индикатрисой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Указанное условие означает совместность системы:

$$\overset{2}{I}{}^\varkappa_\gamma X^\gamma = X^\varkappa, \quad \overset{2}{\Gamma}{}^\varkappa_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2X^\varkappa X^0, \quad \overset{2}{\Gamma}_\gamma X^\gamma - 2X^0(n+1) = 0 \ ; \tag{2.6}$$

(см.(3.12)[4]). Используя (3.8)[4], приводим второе из уравнений (2.6) к виду:

$$\overset{2}{\Pi}{}^\varkappa_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa + \frac{2}{n+1} X^\varkappa \overset{2}{\Gamma}_\gamma X^\gamma - 2X^\varkappa X^0 = 0,$$

после чего доказательство становится очевидным.

§3. $F_{2,1}$-характеристические направления.

О п р е д е л е н и е 5. Слабо $F_{2,1}$-характеристическими направлениями называются направления, являющиеся одновременно F_2- и F_1-характеристическими. Конус, образованный прямыми связки $\{P\}$ имеющими такие направления, называется слабо $F_{2,1}$-характеристическим конусом. Из (3.I),(3.5) [4] получаем его уравнения:

$$\Lambda^i_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2\Lambda^i_\gamma X^\gamma (X^\circ + \sigma) = 0, \tag{3.1}$$

$$\Lambda_{i\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2\Lambda_{i\gamma} X^\gamma (X^\circ + \rho) = 0. \tag{3.2}$$

Т ким образом,в общем случае существует $(N-2n+1)$ -параметрическое семейство слабо $F_{2,3}$-характеристических направлений.В отличие от F_2 и F_3 -характеристических конусов,конус (3.I), (3.2) имеет целый пучок инвариантных направляющих.Они задаются уравнениями (3.I),(3.2) при $\rho = k\sigma$, $k = Const \neq 1$.Две из них: $\rho = 0$ $(k=0)$ и $\sigma = 0$ $(k=\infty)$ являются пересечениями конуса (3.I),(3.2) с ,соответственно, F_3- и F_2-индикатрисами.Геометрический смысл остальных направляющих пучка $\rho = k\sigma$ становится ясным из следующей теоремы.

Т е о р е м а IO.Пусть точка $\bar{A} = (X^\circ, X^\gamma)$ лежит на направляющей,задаваемой системой (3.I),(3.2) при $\rho = k\sigma$.Тогда $k = (B, C; P, A)$,где B и C -точки пересечения прямой $[PA]$ с F_2- и F_3-индикатрисами, соответственно.

Введенное понятие слабо $F_{2,3}$-характеристических направлений является одним из обобщений понятия характеристических направлений точечного отображения $h: P_N \to P_{2n}$ на случай,когда вместо точечного пространства P_{2n} берется пространство пар фигур (здесь это нуль-пара (ρ, π)).Соответствующее отображение $f_{2,3}$: $P_N \to R(\rho, \pi)$ порождается отображением f и задается подсистемой: $\omega^i_\circ = \Lambda^i_\gamma \Omega^\gamma_\circ$, $\omega^\circ_i = \Lambda_{i\gamma} \Omega^\gamma_\circ$ системы дифференциальных уравнений (I.2)[4].Заметим, однако, что размерность конуса (3.I), (3.2) в общем случае на единицу больше размерности характеристического конуса отображения h [3].В этом смысле более точным аналогом характеристических направлений отображения h будет

другое их обобщение.

О п р е д е л е н и е 6. $F_{2,3}$-характеристическими направлениями называются направления,задаваемые уравнениями (3.I),(3.2) при $\rho = \sigma$ $(k=1)$.

Совокупность $F_{2,3}$-характеристических направлений зависит в общем случае от $N-2n$ параметров.Очевидно,любое $F_{2,3}$-характеристическое направление является слабо $F_{2,3}$-характеристическим.Направляющей $F_{2,3}$- характеристического конуса является множество общих точек пучка направляющих $\rho = k\sigma$, $k \neq 1$ слабо $F_{2,3}$-характеристического конуса.Она называется $F_{2,3}$-индикатрисой и в общем случае представляет собой алгебраическое многообразие порядка 2^{2n},являясь пересечением F_2- и F_3- индикатрис.

Т е о р е м а II.Направления,лежащие в F_1-подпространстве, являются $F_{2,3}$-характеристическими.

Это нулевые направления отображения $f_{2,3}$.Выясним геометрический смысл $F_{2,3}$-характеристических направлений.Из (3.1),(3.2) при $\rho = \sigma$ получаем для каждого i:

$$\frac{\Lambda^i_{\gamma\varkappa} \tilde{X}^\gamma \tilde{X}^\varkappa}{\Lambda^i_\varkappa \tilde{X}^\varkappa} = \frac{\Lambda_{i\gamma\varkappa} \tilde{X}^\gamma \tilde{X}^\varkappa}{\Lambda_{i\varkappa} \tilde{X}^\varkappa} = \mu, \tag{3.3}$$

где μ -величина первого порядка малости относительно $\tilde{X}^\gamma$. Аналогично (I.I),разложение отображения $f_3: P_N \to R(\pi)$ имеет вид:

$$\tilde{\xi}_i = -\Lambda_{i\gamma} \tilde{X}^\gamma - \Lambda_{i\gamma\varkappa} \tilde{X}^\gamma \tilde{X}^\varkappa + <3>. \tag{3.4}$$

Обозначив $\underset{(1)}{\tilde{x}^i}, \underset{(2)}{\tilde{x}^i}, \underset{(1)}{\tilde{\xi}_i}, \underset{(2)}{\tilde{\xi}_i}$ координаты $\tilde{x}^i$ и $\tilde{\xi}_i$,взятые с точностью до соответствующих порядков малости,получаем в силу (3.3):

$$\underset{(2)}{\tilde{x}^i} = \Lambda^i_\gamma \tilde{X}^\gamma \left(1 + \tfrac{1}{2}\mu\right), \quad \underset{(2)}{\tilde{\xi}_i} = -\Lambda_{i\gamma} \tilde{X}^\gamma \left(1 + \tfrac{1}{2}\mu\right), \tag{3.5}$$

откуда:

$$\frac{\underset{(2)}{\tilde{x}^i} - \underset{(1)}{\tilde{x}^i}}{\underset{(1)}{\tilde{x}^i}} = \frac{\underset{(2)}{\tilde{\xi}_i} - \underset{(1)}{\tilde{\xi}_i}}{\underset{(1)}{\tilde{\xi}_i}}. \tag{3.6}$$

Для направлений, не являющихся $F_{2,3}$-характеристическими, равенства (3.3) и (3.6) не выполняются. Слабая $F_{2,3}$-характеристичность обеспечивает лишь равенство левых частей соотношений (3.6) между собой, а также правых. Введем точки и гиперплоскости с координатами:

$$\bar{P}_1 = (1, \underset{(1)}{\tilde{x}^i}), \quad \bar{P}_2 = (1, \underset{(2)}{\tilde{x}^i}); \quad \bar{\pi}_1 = \{1, \underset{(1)}{\tilde{\xi}_i}\},$$

$$\bar{\pi}_2 = \{1, \underset{(2)}{\tilde{\xi}_i}\}, \quad \bar{P}_\infty = (0, \underset{(1)}{\tilde{x}^i}), \quad \bar{\pi}_\infty = \{0, \underset{(1)}{\tilde{\xi}_i}\}.$$

соответствующие точке $\bar{P}^* = (1, \tilde{X}^\gamma)$.

Т е о р е м а 12. Пусть точка $\bar{P}^*$ стремится к $\bar{P}$ вдоль слабо $F_{2,3}$-характеристической прямой. Для того, чтобы эта прямая была $F_{2,3}$-характеристической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось:

$$(P_2, P; P_1, P_\infty) = (\pi_2, \pi; \pi_1, \pi_\infty). \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы непосредственно следует из (3.6).

З а м е ч а н и е. I. Теорема справедлива и в случае, если P^* стремится к P по кривой, имеющей касание 2-го порядка с указанной прямой.

З а м е ч а н и е 2. При доказательстве оказался исключенным случай F_2 (F_3)-нулевых направлений.

Выберем в P_n невырожденную гиперквадрику β:

$$b_{ij} x^i x^j + (x^0)^2 = 0 \tag{3.8}$$

такую, чтобы гиперплоскость π являлась полярой точки P относительно β, но пересечение $\pi \cap \pi_1$ не являлось полярой прямой $[P, P_1]$. В 2-плоскости B, определяемой прямой $[P, P_1]$ и полярой пересечения:

$$\pi \cap \pi_1$$

рассмотрим пересечение гиперплоскости $\pi^* = f_3(P^*)$, поляры точки $P^* = f_2(P^*)$ относительно β, и 2-плоскости B. По построению, это пересечение является точкой. Так построенная точка A^* называется β-образом точки P^*: $A^* = \beta(P^*)$. В условиях замечания 2 справедлива:

Т е о р е м а 13. Чтобы касательная к β-образу слабо $F_{2,3}$-характеристической прямой $[PP^*]$ в точке $A^* = \beta(P^*)$ была инцидентна точке P, необходимо и достаточно, чтобы $[PP^*]$ была $F_{2,3}$-характеристической прямой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $[PP^*]$ – слабо $F_{2,3}$-характеристическая прямая, (3.5) можно записать в виде:

$$\tilde{x}^i = \ell^i (t + \tfrac{1}{2}\mu t^2) + \langle 3 \rangle, \quad \tilde{\xi}_i = \lambda_i (t + \tfrac{1}{2}\nu t^2) + \langle 3 \rangle, \tag{3.9}$$

где за t можно взять любую из $\tilde{X}^\gamma$, не равную нулю, причем $\mu = \nu$ только для $F_{2,3}$-характеристических прямых. Тогда

$$A^* = \left(at, \; b^i(1 + \tfrac{1}{2}\nu t) + c^i(1 + \tfrac{1}{2}\mu t)\right),$$

где

$$a = b_{ij} \ell^i \ell^j b^{kl} \lambda_k \lambda_l - (\lambda_i \ell^i)^2, \quad b^i = \lambda_j (\ell^j b^{ip} \lambda_p - b^{jp} \lambda_p \ell^i),$$

$$c^i = b_{jp} \ell^p (\ell^j b^{iq} \lambda_q - b^{jq} \lambda_q \ell^i),$$

$b^{ij} b_{jk} = \delta^i_k$, причем $b^i \neq k c^i$, $b^i \neq 0$, $c^i \neq 0$, $a \neq 0$ по построению. Обозначив: $\bar{Q} = (0, b^i + c^i)$, $\bar{R} = (0, c^i)$, получаем:

$$\bar{A}^* = at\bar{P} + (1 + \tfrac{1}{2}\nu t)\bar{Q} + \tfrac{1}{2}(\mu - \nu)t\bar{R}, \tag{3.10}$$

откуда легко следует утверждение теоремы.

Каждой прямой $\mathcal{L} \in \{P\}$, точки котор з имеют координаты X^{γ} объектом первого порядка отображения f ставятся в соответствие прямая ℓ (с координатами точек $x^i = \Lambda^i_{\gamma} X^{\gamma}$) и пучок гиперплоскостей λ ($\xi_i = -\Lambda_{i\gamma} X^{\gamma}$). Каждое касательное к $f_{2,3}$ отображение $K_{2,3}(P_{\gamma}, \hat{P}_{\gamma}) = (K_2(P_{\gamma}), K_3(\hat{P}_{\gamma}))$, действующее по формулам:

$$K_2(P_{\gamma}):\ \tilde{x}^i = \frac{\Lambda^i_{\gamma} \tilde{X}^{\gamma}}{1 - P_{\gamma} \tilde{X}^{\gamma}}, \qquad K_3(\hat{P}_{\gamma}):\ \tilde{\xi}_i = \frac{-\Lambda_{i\gamma} \tilde{X}^{\gamma}}{1 - \hat{P}_{\gamma} \tilde{X}^{\gamma}} \tag{3.11}$$

задает соответствия между точками прямых $\mathcal{L}$ и ℓ и между точками $\mathcal{L}$ и гиперплоскостями пучка λ. Тем самым задается множество проек ивных соответствий $\varkappa_{\mathcal{L}}(P_{\gamma}, \hat{P}_{\gamma})$ между элементами ℓ и λ.

Т е о р е м а I4. Существует корреляция $\varkappa_{\mathcal{L}}: \ell \to \lambda$, не зависящая от выбора P_{γ}, $\hat{P}_{\gamma}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим совокупность "согласованных" отображений (3.11): $P_{\gamma} = \hat{P}_{\gamma}$. Их геометрический смысл очевиден:

$$K_2^{-1}(P_{\gamma})(\pi) = K_3^{-1}(P_{\gamma})(p). \tag{3.12}$$

Найдем точки $m \in \ell$, такие, что $m \in \mu = \varkappa_{\mathcal{L}}(P_{\gamma})(m)$. Легко показать, что

$$\bar{m} = (\pm\sqrt{\Lambda_{i\gamma} \Lambda^i_{\varkappa} X^{\gamma} X^{\varkappa}},\ \Lambda^i_{\gamma} X^{\gamma}),\ \delta\bar{m} = (\pi^0_0 - \Pi^0_0 + \theta)\bar{m} \tag{3.13}$$

при любых P_{γ}. Таким образом, есть 3 точки на прямой ℓ: p, $\ell \cap \pi$, и одна из m (другая составляет с этими тремя гармоническую четверку), образы которых в пучке λ не зависит от P_{γ}. Ими проективное ото ражение $\varkappa_{\mathcal{L}}$ определяются полностью и, следовательно, не зависит от P_{γ}. Назовем $\varkappa_{\mathcal{L}}$ $\mathcal{L}$-канонической корреляцией.

З а м е ч а н и е 3. Доказательство проводилось в условиях замечания 2 и, кроме того, предполагалось $\Lambda_{i\gamma} \Lambda^i_{\varkappa} X^{\gamma} X^{\varkappa} \neq 0$. Исключим эти особые направления и при доказательстве следующей теоремы.

Т е о р е м а I6. Чтобы прямая $\mathcal{L}$ была $F_{2,3}$-характеристическая, необходимо и достаточно, чтобы с точностью до 2-го порядка малости выполнялось:

$$\varkappa \cdot f_2 = f_3 \tag{3.14}$$

для любой корреляции $\varkappa$, сужение которой на $K_2(P_{\gamma})(\mathcal{L})$ совпадает с $\varkappa_{\mathcal{L}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\varkappa_{\mathcal{L}} = K_3(P_{\gamma}) \cdot (K_2(P_{\gamma})|_{\mathcal{L}})^{-1}$, где $K_2(P_{\gamma})|_{\mathcal{L}}$ — сужение $K_2(P_{\gamma})$ на $\mathcal{L}$, то $\varkappa_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет (3.I4) с точностью до I-го порядка малости, то есть $\varkappa_{\mathcal{L}}(p_1) = \pi_1$. Пусть $\mathcal{L}$ — слабо $F_{2,3}$-характеристическая прямая, следовательно, $p_2 \in \ell$, $\pi_2 \in \lambda$. Тогда $\varkappa_{\mathcal{L}}(p_2) = \pi_2$ выполняется в том и только в том случае, когда справедливо (3.7). Если же $\mathcal{L}$ не является слабо $F_{2,3}$-характеристической прямой, то $f_2(\mathcal{L})$ имеет с ℓ только касание первого порядка, и достаточно взять такую $\varkappa$, чтобы $\varkappa \cdot f_2(\mathcal{L})$ не имело с $f_3(\mathcal{L})$ касания второго порядка и (3.I4) не выполняется.

§4. Соответствия между P_N и пространствами фигур, индуцируемых парой (p,q)

Геометрия введенного в §3 отображения $f_{2,3}$ из P_N в пространство нуль-пар $R(p,\varkappa)$ полностью охватывается геометрией отображения f. Но $f_{2,3}$ не является биективным. Однако если положить всюду $N = 2n = \dim R(p,\varkappa)$, а компоненты объектов Γ_0, $\overset{(1)}{\Gamma_1}$ и его продолжений [4] считать равными нулю, то получим теорию взаимно-однозначных соответствий f между точечным пространством P_{2N} и пространством нуль-пар. Совокупность слабо характеристических направлений такого соответствия ,как следует из (3.I), (3.2) образует в общем случае I-параметрическое семейство.Множество характеристических прямых $\rho = \sigma$ состоит как и для точечных соответствий в общем случае из 2^N прямых.Образы 2-й дифференциальной окрестности соответствия j ,построенные для фиксированной точки P ,повторяют собой то,что получается при пересечении соответствующих образов отображения f и $F_{2,3}$-подпространства.

Кроме геометрии биективных отображений в пространство нуль-пар, теория отображения f аналогичным образом включает в себя теорию соответствий между P_N и пространствами других фигур,индуцируемых парой (ρ,q) :гиперквадрик q ,гиперконусов C ,квадратичных элементов $\bar{q}$ и пар :(C,π) и $(\bar{q},\rho)$.Для получения последовательностей геометрических объектов,определяющих эти соответствия,нужно выделить систему главных форм соответствующей индуцированной фигуры,что всегда можно сделать (см.[I]стр.I90), и положить равными нулю компоненты геометрических объектов,входящих в дифференциальные уравнения отображения f ,включающие оставшиеся главные формы. N при этом предполагается равным рангу индуцированной фигуры.

Литература.

I.В.С.Малаховский,Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.(Труды геом.семинара,т.2, 1969,ВИНИТИ,с.I79-206.

2.В.В.Рыжков,Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.Геометрия,I963 (Итоги науки ВИНИТИ), М,I965,65-I07.

3.В.В.Рыжков,Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n. Труды геом.семинара,т.3,I97I,ВИНИТИ,I35-242.

4.Б.А.Андреев,О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (ρ,q) и точечным пространством."Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2,(Тр.Калининградского ун-та) I970,28-37.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

КАМЕНСКИЙ Н.П., РУСКОЛ Д.Е.

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗАДАНИЕМ МЕТРИКИ И ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА.

В трехмерном евклидовом пространстве рассмотрим двумерное многообразие, образующим элементом которого является прямая с фиксированной точкой-"фокусом".

Потребуем, чтобы множество фокусов образовало минимальную поверхность, а соответствующие прямые,"прямолинейные образующие" многообразия, являлись линиями пересечения касательной и аффинно-метрической нормальной (т.е. проходящей через аффинную и метрическую нормали) плоскостей "фокальной" поверхности. В этом случае многообразие назовем "минимальным аффинно-метрическим".

Пусть (x^1, x^2) -локальные координаты рассматриваемого многообразия,

$$g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2) \tag{1}$$

-метрический тензор фокальной поверхности,

$$\bar{e}^i = e^i(x^1, x^2) \tag{2}$$

-тензор, определяющий единичный вектор $\bar{e}$ прямолинейной образующей:

$$\bar{e} = e^i \partial_i \bar{r}$$

($\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2)$ -уравнение фокальной поверхности).

В работе найдены условия, которым должны удовлетворять тензоры (1) и (2), чтобы ими однозначно (с точностью до положения в пространстве) определялось минимальное аффинно-метрическое многообразие.

1. Известно, что метрическая и аффинная нормали к поверхности в каждой её точке совпадают тогда и только тогда, когда поверхность является поверхностью постоянной Гауссовой кривизны (см.[1]).

Если же Гауссова кривизна K поверхности не является таковой, то можно рассматривать линию пересечения аффинно-метрической нормальной и касательной плоскостей. Направление этой прямой (с точностью до знака) в свое время было нами названо "направлением поверхности, ассоциированным с метрической и аффинной нормалями" (см.[2]).

Это направление определяется тензором

$$P^i = \tilde{\pi}^{ij} \partial_j \ln|K|, \tag{3}$$

где $\tilde{\pi}^{ij}$ -тензор, взаимный со вторым тензором поверхности. Если φ -угол между метрической и аффинной нормалями минимальной поверхности,

$$t_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln|K| \tag{4}$$

- чебышевский вектор её асимптотической сети, то имеет место

$$tg^2\varphi = -\frac{1}{K} g^{ij} t_i t_j \tag{5}$$

(см. там же).

Теперь сформулированная ранее задача аналитически сводится к следующей:

Пусть задана положительно определенная квадратичная дифференциальная форма

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \tag{6}$$

и поле "направлений", определяемое контравариантным тензором

$$e^i = e^i(x^1, x^2), \tag{7}$$

удовлетворяющему соотношению

$$g_{ij} e^i e^j = 1. \tag{8}$$

Требуется найти условия, которым должны удовлетворять тензоры g_{ij} и e^i, чтобы существовала минимальная поверхность, для которой форма (6) определяет её метрику, а поле направлений e^i связано с её первым и вторым тензорами зависимостью

$$e^i = \mu \tilde{\pi}^{ij} t_j. \tag{9}$$

Решение поставленной задачи сводится к нахождению второго тензора π_{ij} поверхности из системы уравнений

$$g^{ij}\pi_{ij} = 0, \quad \pi_{ij} e^j = \mu t_i, \tag{10}$$

где μ пока произвольный скаляр. Нужно найти контравариантный, чтобы тензор π_{ij} удовлетворял условиям Гаусса

$$\varepsilon^{i\alpha}\varepsilon^{j\beta}\pi_{ij}\pi_{\alpha\beta} = \pi^{ij}\pi_{ij} = 2K \tag{11}$$

и Петерсона-Кодацци

$$\varepsilon^{j\alpha}\pi_{ij/\alpha} = 0, \tag{12}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{12} = \sqrt{g},$$

$$\varepsilon^{i\alpha}\varepsilon_{j\alpha} = \delta^i_j,$$

вертикальная черточка обозначает ковариантное дифференцирование.

Отсюда и получим интересующие нас условия.

Приступим к реализации намеченного плана.

2. В первую очередь отметим, что не любой положительно определенный тензор g_{ij} может служить метрическим тензором минимальной поверхности. Для этого необходимо должно удовлетворяться следующее условие:

$$g^{ij} t_{i|j} = -K \tag{13}$$

(Это следует из того, что для минимальной поверхности тензор $a_{ij} = \sqrt{-K}\, g_{ij}$ имеет нулевую гауссову кривизну (см. [4])).

В дальнейшем будем предполагать, что тензор g_{ij} этому условию удовлетворяет.

3. Пусть $\tilde{e}_i$ определяет векторное поле, дополнительное к данному полю e^i, то-есть

$$\tilde{e}_i = \varepsilon_{\alpha i} e^\alpha. \tag{14}$$

Тогда тензоры $e_i e_j$, $\tilde{e}_i \tilde{e}_j$, $(e_i \tilde{e}_j + \tilde{e}_i e_j)$ образуют базис в пространстве симметрических тензоров второй валентности (см., например, [5]).

Поэтому искомый тензор π_{ij} представим в виде:

$$\pi_{ij} = \rho \tilde{e}_i e_j + \sigma \tilde{e}_i \tilde{e}_j + \varkappa (e_i \tilde{e}_j + \tilde{e}_i e_j), \tag{15}$$

где $\rho, \sigma, \varkappa$ -некоторые скаляры ("координаты" π_{ij} в указанном базисе), подлежащие определению.

Используя (IO$_1$), получаем

$$\rho + \sigma = 0. \tag{16}$$

Следовательно,

$$\pi_{ij} = (\rho e_i + \varkappa \tilde{e}_i) - (\rho \tilde{e}_i - \varkappa e_i)\tilde{e}_j. \tag{17}$$

Используя (IO$_2$), получаем

$$\mu t_i = \rho e_i + \varkappa \tilde{e}_i. \tag{18}$$

Отсюда следует, что

$$\mu \tilde{t}_i = \mu\, \varepsilon^{\alpha}_{.i} t_\alpha = \rho \tilde{e}_i - \varkappa e_i. \tag{19}$$

Тогда из (17), (I8), (I9) получаем

$$\pi_{ij} = \mu (t_i e_j - \tilde{t}_i \tilde{e}_j). \tag{20}$$

Отсюда и условия (II) (уравнения Гаусса) после некоторых преобразований найдем

$$\mu^2 = -K (g^{ij} t_i t_j)^{-1}. \tag{21}$$

Обратно, если μ удовлетворяет условию (2I), то тензор (20) (в качестве 2-го основного тензора поверхности) удовлетворяет уравнению Гаусса.

Таким образом, из условия минимальности искомой поверхности и условия Гаусса второй тензор вполне определяется:

$$\pi_{ij} = \sqrt{-K}\, (g^{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta)^{-\frac{1}{2}} (t_i e_j - \tilde{t}_i \tilde{e}_j). \tag{22}$$

4. Посмотрим теперь, каким условиям должны удовлетворять тензоры g_{ij} и e^i, чтобы выполнялось также уравнение Петерсона-Кодацци.

Так как тензор π_{ij} выражается формулой (20), то уравнение (I2) принимает вид:

$$\varepsilon^{jk} \pi_{ij|k} = \mu_k (e_i \tilde{t}^k + \tilde{e}_i t^k) + \mu (e_{i|k} \tilde{t}^k + \tilde{e}_{i|k} t^k - \varepsilon^{jk} \tilde{t}_{j|k} \tilde{e}_i) = 0. \tag{23}$$

Здесь мы учли то, что t_i - потенциальное векторное поле (следовательно, его ротация равна нулю).

С другой стороны,

$$\varepsilon^{ij} \tilde{t}_{i|j} = - g^{ij} t_{i|j}.$$

Учитывая соотношение (I3), получаем

$$\varepsilon^{ij} \tilde{t}_{i|j} = K. \tag{24}$$

И уравнение (23) приводится к виду:

$$\mu_k \tilde{t}^k e_i + \mu_k t^k \tilde{e}_i + \mu (e_{i|k} \tilde{t}^k + \tilde{e}_{i|k} t^k - K \tilde{e}_i) = 0.$$

Так как векторные поля e_i, $\tilde{e}_i$ -единичные, то их ковариантные производные имеют вид (см. [3], стр. I35-I37):

$$e_{i/k} = \alpha_k \tilde{e}_i \ , \ \tilde{e}_{i/k} = -\alpha_k e_i \ ,$$

где α_k -трансверсальный вектор поля e_i. Но тензоры e_i , g_{ij} заданы.Поэтому ковариантная производная $e_{i|k}$ вектора e_i вполне определенный тензор.Следовательно, α_k тоже известно.Подставив найденные значения для $e_{i|k}$ и $\tilde{e}_{i|k}$ в последнее уравнение,равносильное уравнению (23),получим

$$(\mu_k \tilde{t}^k - \mu\alpha_k t^k) e_i + (\mu_k t^k + \mu\alpha_k \tilde{t}^k - \mu K)\tilde{e}_i = 0.$$

Это соотношение равносильно системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k t^k &= \frac{\mu_k}{\mu} \tilde{t}_k \ , \\ \alpha_k \tilde{t}^k &= K - \frac{\mu_k}{\mu} t^k . \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Отсюда находим

$$\alpha_i = -\frac{\mu}{K}\left[\mu_k \tilde{t}^k t_i + (\mu K - \mu_k t^k)\tilde{t}_i\right]. \qquad (26)$$

Проводя рассуждения в обратном порядке,получим,что из соотношения (26) следует выполнимость условия Петерсона-Кодацци для тензоров g_{ij} и π_{ij} (последний определяется формулой (20)).

Тем самым нами доказана

Т е о р е м а. При выполнении условий (I3) и (26) существует единственная минимальная поверхность,для которой заданная квадратичная форма (6) является её метрической формой,а векторное поле (7) характеризует направление,ассоциированное с метрической и аффинной нормалями минимальной поверхности. При этом определяемое формулой (21)

$$\mu = \operatorname{ctg}\varphi ,$$

где φ - угол между аффинной и метрической нормалями.

Л и т е р а т у р а

I.Каменский Н.П.,К вопросу совпадения метрической и аффинной нормали на гиперповерхности.(Известия Вузов)"Математика",№ 3 (4), стр.I07-II0,1958.

2.Каменский Н.П.,Обобщение одной задачи для гиперповерхности в E_{n+1}.(Известия Вузов)"Математика" № 3 (34),стр.52-55,I963.

3.Норден А.П.,Теория поверхностей. М.,I956.

4.Рускол Д.Е.,Определение поверхности в трехмерном евклидовом пространстве заданием её 2-й и 4-й основных квадратичных форм. (Ученые записки Калининградского ун-та),вып.I,1969.

5.Рускол Д.Е.,К вопросу определения поверхности в трехмерном евклидовом пространстве заданием метрического тензора и средней кривизны.(Труды семинара по векторному и тензорному анализу),вып.XII,МГУ,I963.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

Лапковский А.К., Лаптинский В.Н.

К ТЕОРИИ КАСАНИЯ ПЛОСКИХ ФИГУР В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ.

В работе [I] А.Швец пришел к необходимости исследования вопроса о касании двух однопараметрических семейств подалгебр Ли. Он нашел условия касания первого и второго порядков для двух семейств подалгебр специального вида. В данной работе решается задача А.Швеца при более общих предположениях.

Пусть G линейная группа Ли, содержащая связную замкнутую подгруппу H, совпадающую со своим нормализатором, а $\underline{G}$ и $\underline{H}$ – соответствующие подалгебры Ли.

Пусть дана кривая в однородном пространстве G/H, т.е. отображение

$$\varphi:\ (-1,1) \longrightarrow G/H$$

Это отображение можно определить его лифтом, т.е. отображением $f: (-1,1) \longrightarrow G/H$ такими, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(-1,1) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\
 & G/H
\end{tikzcd}$$

коммутативна, здесь π, как обычно, естественная проекция.

I^{0}. Рассмотрим две однопараметрические системы подалгебр вида:

$$\text{I)}\ \underline{H}(t) = Ad(g(t))\,\underline{H}\,,\quad g(t) = f^{-1}(0)\,f(t)\,,\ t \in (-1,1)$$

$$\text{2)}\ \underline{H}_{\gamma}(t) = Ad(\gamma(t))\,\underline{H}(t),$$

где $\gamma(t) = \exp F(t)$, $(\ t \in (-1,1)\ ,\ F(t) \in \underline{G}\ )$ -есть некоторая кривая в G.

В настоящей работе изучается касание различных порядков систем подалгебр $\underline{H}(t)$ и $\underline{H}_{\gamma}(t)$ при произвольно фиксированном значении $t = t_0$, $t \in (-1,1)$. Случай $t_0 = 0$, $\left(\frac{d}{dt}F(t)\right)_{t=0} = 0$ рассмотрел в [I] Švec A и применил к исследованию линий в однородном пространстве. Касание нулевого порядка систем $\underline{H}(t)$ и $\underline{H}_{\gamma}(t)$ при t_0 означает, что

$$\underline{H}(t_0) = \underline{H}_{\gamma}(t_0)\,. \tag{1}$$

В силу наших предположений равенство (I) эквивалентно условию:

$$F(t_0) \in \underline{H}(t_0)\,. \tag{2}$$

В дальнейшем исследовании будем предполагать, что выполняется

$$\dot{F}(t_0) = \left(\frac{d}{dt}F(t)\right)_{t=t_0} \in \underline{H}(t_0)\,. \tag{3}$$

Для изучения касания более высоких порядков введем фиксированный базис в $\underline{H}$:

$$B = \{\ u_1, u_2, \dots, u_n\ \}\,,\quad n = \dim \underline{H}\,.$$

Используя естественные обозначения

$$Ad(g(t))B = \{\,Ad(g(t))\,u_1, \dots\ \}\,,\ [v, B] = \{[v, u_1], \dots\}\,,$$

имеем соответственно базисы в $\underline{H}(t)$, $\underline{H}_\gamma(t)$:

$$B(t)=Ad(g(t))B\,,\quad B_\gamma(t)=Ad(\gamma(t))B(t).$$

Ясно, что если $g(t)$, $\gamma(t)$ достаточное число раз дифференцируемы, то $B(t)$, $B_\gamma(t)$ также обладают этим свойством.

Наличие для систем $\underline{H}(t)$, $\underline{H}_\gamma(t)$ при $t=t_0$ касания нулевого, первого, второго порядка эквивалентно, см.[I, стр.155], существованию матриц $S(t)\in GL(n)$, удовлетворяющих соответственно соотношениям:

$$B(t_0)\cdot S(t_0)=B_\gamma(t_0), \tag{4}$$

$$\left(\frac{d}{dt}B(t)\,S(t)\right)_{t=t_0}=\left(\frac{d}{dt}B_\gamma(t)\right)_{t=t_0}, \tag{5}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}B(t)\,S(t)\right)_{t=t_0}=\left(\frac{d^2}{dt^2}B_\gamma(t)\right)_{t=t_0}. \tag{6}$$

Соотношение (4) приводится к виду

$$B(t_0)\left(\frac{d}{dt}S(t)\right)_{t=t_0}=Ad(\exp F(t_0))\{[\varphi(t_0),B(t_0)]+$$
$$+[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0))A(t_0),B(t_0)]\}. \tag{7}$$

Здесь

$$A(t_0)=\left(\frac{d}{dt}g(t)\right)_{t=t_0}\cdot g^{-1}(t_0)\,,\quad \varphi(t_0)=\exp(-F(t_0))\left(\frac{d}{dt}\exp F(t)\right)_{t=t_0}.$$

Равенство (7) эквивалентно условию:

$$(\forall v\in H(t_0))\quad \{Ad(\exp F(t_0))([\varphi(t_0),v+[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0))A(t_0),v])\in$$
$$\in\underline{H}(t_0)\} \tag{8}$$

Представив $\varphi(t_0)$ в виде ряда (см.[2, стр.112]):

$$\varphi(t_0)=\dot F(t_0)+\frac{1}{2!}[\dot F(t_0),F(t_0)]+\frac{1}{3!}[[\dot F(t_0),F(t_0)]F(t_0)]+\dots, \tag{9}$$

легко видеть, в силу (3,4), что

$$\varphi(t_0)\in H(t_0). \tag{10}$$

Таким образом, в силу (10) условие (8) эквивалентно следующему

$$\forall v\in\underline{H}(t_0)\quad \{[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0))A(t_0),v]\in\underline{H}(t_0). \tag{11}$$

Обратно, наличие условия (II) обеспечивает, см.[I, стр.157], существование равенства (7), а значит и (5).

Но условие (II) эквивалентно тому, что элементы вида $\gamma(t_0)=\exp(F(t_0))$ принадлежат, см.[I, стр.148] подгруппе $K(A(t_0))$ с алгеброй $\underline{K}(A(t_0))$ вида

$$\underline{K}(A(t_0))=\{v\mid v\in\underline{H}(t_0),\ [v,A(t_0)\in\underline{H}(t_0)\}.$$

Итак, имеет место следующая

Т е о р е м а I. Для касания первого порядка при $t=t_0$ систем подалгебр $\underline{H}(t)$, $\underline{H}_\gamma(t)$, где для $\gamma(t)$ выполнено (3), необходимо и достаточно, чтобы $F(t_0)\in K(A(t_0))$.

З а м е ч а н и е. При получении достаточных условий касания первого порядка условие (3) можно заменить некоторым ограничением на норму матриц $F(t_0)$. Действительно, из условия

$$(\forall v\in\underline{H}(t_0))\quad \{[\varphi(t_0),v]\in\underline{H}(t_0)\} \tag{12}$$

следует, что

$$\varphi(t_0)\in\underline{H}(t_0). \tag{13}$$

Обращая ряд (9), см. [2, стр.114], получим:

$$\dot F(t_0)=\varphi(t_0)+b_1[\varphi(t_0),F(t_0)]+b_2[[\varphi(t_0),F(t_0)]F(t_0)]+\dots \qquad (14)$$

Здесь коэффициенты b_n $(n=1,2,\dots)$ определяются через числа Бернулли B_n: $b_n=\frac{1}{n!}B_n$.

Сходимость ряда (14) обеспечена для матриц $F(t_0)$, не превышающих по норме некоторого числа $\tau>0$. Тогда для этих $F(t_0)$ имеем (3).

2°. Рассмотрим касание второго порядка.

Соотношение (6) после соответствующих вычислений приводится к виду:

$$B(t_0)\left(\frac{d^2}{dt^2}S(t)\right)_{t=t_0}=Ad(\exp(-F(t_0)))\{[\varphi(t_0),[\varphi(t_0),B(t_0)]]+$$
$$+[\dot\varphi(t_0),B(t_0)]+[\dot A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))\dot A(t_0),B(t_0)]+$$
$$+2[\varphi(t_0),[A(t_0),B(t_0)]+[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),[A(t_0),B(t_0)]]-$$
$$-[Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),B(t_0)]]\},\qquad (15)$$

где

$$\dot A(t_0)=\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)_{t=t_0},\quad \dot\varphi(t_0)=\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)_{t=t_0}.$$

Так как подгруппа $H(t_0)$ совпадает со своим нормализатором, то из (14) следует

$$(\forall v\in\underline{H}(t_0))\ \{([\dot A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))\dot A(t_0),v]+[\dot\varphi(t_0),v]+$$
$$+[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),[A(t_0),v]]+2[\dot\varphi(t_0),[A(t_0),v]]-$$

$$-[Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),v]]+$$
$$+[\varphi(t_0),[\varphi(t_0),v]])\in\underline{H}(t_0)\}.\qquad (16)$$

Обратно, в силу того же условия на подгруппу $\underline{H}(t_0)$ из (16) следует, см. [1, стр.157], справедливость (15), а значит и (6). Но для выполнения условия (16) достаточно, чтобы выполнялись условия (17, 18, 19):

$$(\forall v\in\underline{H}(t_0))\ \{[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))\dot A(t_0),v]+$$
$$+[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0)[A(t_0),v]-\qquad (17)$$
$$-[Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0)[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),v]]\in\underline{H}(t_0)\},$$

$$(\forall v\in\underline{H}(t_0))\ \{(2[\varphi(t_0)[A(t_0),v]]+[\varphi(t_0)[\varphi(t_0),v]])\in\underline{H}(t_0)\},\qquad (18)$$

$$\forall v\in\underline{H}(t_0)\ \{[\dot\varphi(t_0),v]\in\underline{H}(t_0)\}.\qquad (19)$$

Условие (17) эквивалентно тому, что $\exp F(t_0)$ принадлежит, см. [1, стр.148], подгруппе $K(A(t_0),\dot A(t_0))$ с алгеброй $\underline{K}(A(t_0),\dot A(t_0))$ вида:

$$\underline{K}(A(t_0),\dot A(t_0))=\{v\in K(A(t_0));[\dot A(t_0),v]-[\dot A(t_0)[\dot A(t_0),v]]\in\underline{H}(t_0)\}.$$

Для выполнения условия (18) достаточно потребовать, чтобы $\dot F(t_0)\in K(A(t_0))$, а подалгебра $\underline{K}(A(t_0))$ была идеалом в $\underline{H}(t_0)$. Действительно, тогда $\varphi(t_0)\in\underline{K}(A(t_0))$ и из тождества Якоби

$$[\varphi(t_0),[A(t_0),v]]+[v,[\varphi(t_0),A(t_0)]]+[A(t_0),[v,\varphi(t_0)]]=0$$

следует, что

$$[\varphi(t_0), [A(t_0), v]] \in \underline{H}(t_0).$$

Для изучения (18) воспользуемся, см. [3, стр. 43], интегральным представлением $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \int_0^1 \exp(-\mu F(t)) F(t) \exp(\mu F(t))\, d\mu. \qquad (20)$$

Дифференцируя (20) при $t = t_0$, получим, используя [4]:

$$\dot\varphi(t_0) = \int_0^1 \exp(-\mu F(t_0)) \ddot F(t_0) \exp(\mu F(t))\, d\mu +$$

$$+ \int_0^1 \exp(-\mu F(t_0)) [F(t_0), g(t_0, \mu)] \exp(\mu F(t_0))\, d\mu.$$

Здесь

$$\ddot F(t_0) = \left(\frac{d^2}{dt^2} F(t)\right)_{t=t_0}, \quad g(t_0, \mu) = \int_0^\mu \exp(\rho F(t_0)) \dot F(t_0) \exp(-\rho F(t_0))\, d\rho.$$

Для значений параметра $\mu: 0 \le \mu \le 1$, очевидно,

$$g(t_0, \mu) \in \underline{H}(t_0).$$

Отсюда

$$\ddot F(t_0) \in \underline{H}(t_0) \implies \dot\varphi(t_0) \in \underline{H}(t_0).$$

Итак, имеет место

Т е о р е м а 2. Для касания второго порядка при $t = t_0$ систем подалгебр $\underline{H}(t)$, $\underline{H}_\gamma(t)$ достаточно, чтобы

1) подалгебра $\underline{K}(A(t_0))$ была идеалом в $\underline{H}(t_0)$,
2) $F(t_0) \in \underline{K}(A(t_0)) \dot A(t_0))$,
3) $\dot F(t_0) \in \underline{K}(A(t_0))$, $\ddot F(t_0) \in \underline{H}(t_0)$.

Л и т е р а т у р а

1. A. Švec, Matematicky Časopis 17 (1967), №2.

2. Чеботарев Н.Г., Теория групп Ли. М.Л., 1940.

3. H. Freudenthal. Linear Lie Groups. Acad. New-York, 1962.

4. Лаптинский В.Н., ДАН БССР, 14, №12, 1970.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

Л И П А Т О В А Ф.А.

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР ФИГУР, ОБРАЗОВАННЫХ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассматривается двупараметрическое семейство T (конгруэнция пар фигур [I] C, M, где C -эллипс, а M -точка, не инцидентная плоскости эллипса, причем: I) многообразие (M) описанное точкой M образует линию, 2) характеристическая точка A_1 плоскости эллипса лежит на эллипсе. Общий случай, когда (M) - поверхность, рассмотрен в [2],[3].

Поместим начало A репера $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ в центр эллипса C, конец вектора $\bar{e}_1$ в точку A_1, конец вектора $\bar{e}_3$ в точку M, конец вектора $\bar{e}_2$ в точку A_2 эллипса так, чтобы диаметры AA_1 и AA_2 были сопряженными.

Тогда система пфаффовых и конечных уравнений пары T примет вид:

$$\begin{gathered}\omega^3=a\omega^1+b\omega^2,\ \ \omega_1^2=c\omega^1+f\omega^2,\ \ \omega_2^1=l\omega^1+h\omega^2,\\ \omega_1^3=-a\omega^1-b\omega^2,\ \ \omega_2^3=\rho\omega^1+\kappa\omega^2,\ \ \omega_3^3=s\omega^1+t\omega^2,\\ \omega_1^1=\eta\omega^1+\alpha\omega^2,\ \ \omega_2^2=\beta\omega^1+\gamma\omega^2,\ \ \omega_3^2=m_1\omega^1+m_2\omega^2,\\ \omega_3^1=q\omega^1+r\omega^2,\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}(1+q)(1+m_2)-r\,m_1=0,\\ (1+q)(b+t)-r\,(a+s)=0,\\ a\alpha+c\kappa-f\rho-b(1+\eta)-\rho=0,\end{gathered} \tag{2}$$

где ω^i, ω_i^α -компоненты деривационных формул репера R, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства:

$$\mathcal{D}\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i,\ \ \mathcal{D}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j\quad (i,j,k=1,2,3). \tag{3}$$

Анализируя системы уравнений (I),(2) убеждаемся, что пары существуют и определяются с произволом шести функций двух аргументов.

Уравнения эллипса C относительно репера R имеют вид:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1,\quad x^3=0. \tag{4}$$

Рассмотрим два подкласса пар T:

О п р е д е л е н и е. Пара T называется парой T', если

$$b=\rho=\alpha=\kappa=r=h=\gamma=t=l=0,\ q=-1,\ a=-s. \tag{5}$$

Т е о р е м а I. Пара T' существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений (I) в силу условий (5) примет вид:

$$\begin{gathered}\omega^3=a\omega^1,\ \ \omega_1^2=c\omega^1+f\omega^2,\ \ \omega_2^1=0,\\ \omega_1^3=-a\omega^1,\ \ \omega_2^3=0,\ \ \omega_3^3=-a\omega^1,\ \ \omega_1^1=\eta\omega^1,\\ \omega_2^2=\beta\omega^1,\ \ \omega_3^2=m_1\omega^1+m_2\omega^2,\ \ \omega_3^1=-\omega^1.\end{gathered} \tag{6}$$

Замыкая систему (6), получим пять квадратичных уравнений:

$$da\wedge\omega^1=0,\quad d\eta\wedge\omega^1=0,\quad d\beta\wedge\omega^1=0.$$

$$dc\wedge\omega^1+df\wedge\omega^2+[f(f+am_2-\eta)+am_2]\,\omega^1\wedge\omega^2=0, \qquad (7)$$

$$dm_1\wedge\omega^1+dm_2\wedge\omega^2+[f(m_2+1)+am_2(a+1)]\,\omega^1\wedge\omega^2=0.$$

Из систем уравнений (6) и (7) видим, что пара T' определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Точки $A_1(1,0,0)$, $A_1^*(-1,0,0)$ являются фокальными точками эллипса C пары T', причем A_1 – строенная фокальная точка. Остальные две фокальные точки эллипса C симметричны относительно диаметра $A_1A_1^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения фокусов имеем систему уравнений:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1,\quad x^3=0, \qquad (8)$$

$$x^2(1-x^1)(fx^1+1)=0.$$

Откуда следует, что фокальными точками эллипса C являются строенная точка A_1, и точки A_1^*, $F_1(-\frac{1}{f};\sqrt{\frac{f^2-1}{f^2}};0)$, $F_2(-\frac{1}{f};-\sqrt{\frac{f^2-1}{f^2}};0)$

Т е о р е м а 3. Поверхность (A) пары T' является торсом. Вдоль направлений $\omega^1=0$ коники конгруэнции (C) инцидентны одной плоскости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий поверхности (A) пары T' имеет вид: $(\omega^1)^2=0$, следовательно поверхность (A) – торс.

Так как $dx^3\equiv 0\ (mod\ \omega^1)$, то при $\omega^1=0$ коники конгруэнции (C) лежат в одной плоскости.

О п р е д е л е н и е. Пара T называется парой T'',

если

$$m_1=b=p=\alpha=c=t=s=a=f=\beta=0,\ m_2=-1. \qquad (9)$$

Т е о р е м а 4. Пара T'' существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замкнутая система уравнений, определяющая пару T'' состоит из конечных уравнений (9), пфаффовых уравнений;

$$\omega^3=0,\quad \omega_1^2=0,\quad \omega_1^3=0,\quad \omega_3^3=0,$$

$$\omega_2^1=e\omega^1+h\omega^2,\quad \omega_3^1=q\omega^1+r\omega^2,\quad \omega_2^3=k\omega^2, \qquad (10)$$

$$\omega_1^1=\eta\omega^1,\quad \omega_2^2=\gamma\omega^2,\quad \omega_3^2=-\omega^2$$

и внешних уравнений

$$de\wedge\omega^1+dh\wedge\omega^2-(e^2+h\eta+e\gamma+kq)\,\omega^1\wedge\omega^2=0.$$

$$dk\wedge\omega^2=0,\quad d\eta\wedge\omega^1=0.$$

$$d\gamma\wedge\omega^2+kq\,\omega^1\wedge\omega^2=0,$$

$$dq\wedge\omega^1+dr\wedge\omega^2+(r\eta-e-eq)\,\omega^1\wedge\omega^2=0.$$

Эта система – в инволюции и имеет решение с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 5. Точки пересечения диаметров AA_1, AA_2 с эллипсом C являются фокальными точками эллипса C, остальные два фокуса определяются точками F_5, F_6, где

$$F_5\left(-\frac{\eta+e\sqrt{e^2+\eta^2-1}}{e^2+\eta^2};\ -\frac{e+\sqrt{\eta^2(e^2+\eta^2-1)}}{e^2+\eta^2};\ 0\right),$$

$$F_6\left(-\frac{\eta-e\sqrt{e^2+\eta^2-1}}{e^2+\eta^2};\ -\frac{e-\sqrt{\eta(e^2+\eta^2-1)}}{e^2+\eta^2};\ 0\right).$$

Доказательство. Для определения координат фокусов имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (x^1)^2+(x^2)^2=1, \quad x^3=0, \\ x^1x^2(x^1\eta+ex^2+1)=0. \end{cases} \tag{12}$$

Из (I2) непосредственно следует утверждение теоремы.

Теорема 6. Поверхность (A) пары T'' является торсом, её касательная плоскость совпадает с плоскостью эллипса.

Доказательство. Уравнение асимптотических линий поверхности (A) пары T'' принимает вид: $(\omega^2)^2=0$. Следовательно, поверхность (A) - торс. Так как $(d\bar{A}\,\bar{e}_1,\bar{e}_2)=0$, то плоскость эллипса C является касательной плоскостью.

Литература

I. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геом. семинара № 2 Москва, I969.

2. Липатова Ф.А., Конгруэнции пар фигур в трехмерном аффинном пространстве, образованные эллипсом и точкой. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. I, Тр. Калининградского ун-та.

3. Липатова Ф.А., Об одном классе конгруэнций пар фигур, порожденных эллипсом и точкой. Тр. Калининградского ун-та, вып. 2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

МАЛАХОВСКИЙ В.С.

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР ФИГУР В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются вырожденные многообразия пар фигур. Дана классификация вырожденных конгруэнций линейных и квадратичных пар. Исследованы вырожденные пары конгруэнций, порожденные точками.

§ I. Общая характеристика вырожденных пар фигур.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 m-мерное многообразие простых неинцидентных пар фигур $F=[F_1,F_2]$ где $m<\min(N_1,N_2)$, N_i $(i=1,2)$ -ранг фигуры F_i (см. I, §8). Обозначим буквой h_i размерность многообразия (F_i), образованного фигурой F_i. Не умаляя общности, можно считать, что

$$h_1 \geq h_2 \tag{1.1}$$

Определение I. Многообразие $\mathfrak{M}_m$ называется невырожденным, если $h_1=h_2=m$, многообразие $\mathfrak{M}_m$ называется вырожденным многообразием первого рода, если $h_1 = m$, $0 \le h_2 < m$; многообразие $\mathfrak{M}_m$ называется вырожденным многообразием второго рода, если $h_1 < m$, $h_2 < m$.

Вырожденное многообразие первого рода характеризуется дифференцируемым отображением f многообразия (F_1) на многообразие (F_2), переводящим фигуру F_1 в ту фигуру F_2 , которая вместе с F_1 образует пару $[F_1, F_2]$. Такие многообразия мы будем обозначать символом $(F_1, F_2)_{mh_2}$.

Если задано многообразие $(F_1 F_2)_{mh_2}$, то определено расслоение многообразия (F_1) фигур F_1 на h_2-параметрическое семейство $(m-h_2)$-мерных подмногообразий.

§ 2. Классификация вырожденных конгруэнций линейных и квадратичных пар.

Пара $[F_1, F_2]$ фигур F_1, F_2 называется линейной, если F_i ($i = 1,2$)- точка, прямая или плоскость, пара $[F_1, F_2]$ называется квадратичной (сравни [2]), если F_1 -квадратичное многообразие (коника или квадрика), а F_2 -точка, прямая, плоскость или квадратичное многообразие.

Введем для фигур, входящих в линейные и квадратичные пары, специальные обозначения. Точки будем обозначать буквами P, P^* , прямые-буквами $\mathcal{L}, \mathcal{L}^*$, плоскости-буквами p, p^* , коники-буквами C, C^* , квадрики-буквами Q, Q^*.

В пространстве P_3 существуют следующие различные типы вырожденных конгруэнций линейных и квадратичных пар:

$$(PP^*)_{2,1}\ ,\ (P\mathcal{L})_{2,1}\ ,\ (\mathcal{L}P)_{2,1}\ ,\ (Pp)_{2,1}\ ,\ (\mathcal{L}\mathcal{L}^*)_{2,1}\ ,$$

$$(pP)_{2,1}\ ,\ (PC)_{2,1}\ ,\ (\mathcal{L}p)_{2,1}\ ,\ (p\mathcal{L})_{2,1}\ ,\ (CP)_{2,1}\ ,$$

$$(PQ)_{2,1}\ ,\ (\mathcal{L}C)_{2,1}\ ,\ (p\,p^*)_{2,1}\ ,\ (Cp)_{2,1}\ ,\ (QP)_{2,1}\ ,$$

$$(\mathcal{L}Q)_{2,1}\ ,\ (pC)_{2,1}\ ,\ (Cp)_{2,1}\ ,\ (Q\mathcal{L})_{2,1}\ ,\ (pQ)_{2,1}\ ,$$

$$(CC^*)_{2,1}\ ,\ (Qp)_{2,1}\ ,\ (CQ)_{2,1}\ ,\ (QC)_{2,1}\ ,\ (QQ^*)_{2,1}\ .$$

§3. Конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$.

Рассмотрим многообразие $(PP^*)_{2,1}$. Каждой точке P поверхности (P) соответствует единственная точка P^* линии (P^*), а точке P^* соответствует на поверхности (P) однопараметрическое семейство Γ_{P^*} точек P -линия.

Совместим вершину A_0 тетраэдра $\{\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3\}$ с точкой P , вершину A_3 - с точкой P^* , вершину A_1 - с точкой пересечения касательной плоскости к поверхности (P) в точке P с касательной к линии (P^*) в точке P^* , вершину A_2 - с точкой пересечения касательной плоскости к поверхности (A_1) с касательной к линии Γ_{P^*} в точке P . Матрица деривационных формул построенного канонического репера приводится к виду:

$$\begin{bmatrix} \theta_0 & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ 0 & \theta_1 & \omega^1 & \alpha\omega^1 + \omega^2 \\ \tau\omega^1 & p\omega^1 + q\omega^2 & \theta_2 & \omega^1 + \beta\omega^2 \\ 0 & \omega^1 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

где
$$\omega^1=\omega_0^1, \qquad \omega^2=\omega_0^2, \tag{3.2}$$

$$\theta_0=\frac{1}{4}\left\{(2s+u)\omega^1+(v-2p)\omega^2\right\},$$

$$\begin{aligned}
\theta_1&=\frac{1}{12}\left\{(2s-4t-u)\omega^1+(2p-v)\omega^2\right\},\\
\theta_2&=\frac{1}{12}\left\{(4t-2s-5u)\omega^1-(2p+5v)\omega^2\right\},
\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\theta_3=-\frac{1}{4}\left\{(2s-u)\omega^1-(v+2p)\omega^2\right\}.$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$ имеет вид.

$$\begin{aligned}
&\omega_0^3=0,\quad \omega_3^0=0,\quad \omega_3^2=0,\quad \omega_3^1=\omega^1,\\
&\omega_1^0=0,\quad \omega_1^2=\omega^1,\quad \omega_1^3=\alpha\omega^1+\omega^2,\\
&\omega_2^0=\tau\omega^1,\quad \omega_2^1=p\omega^1+q\omega^2,\\
&\omega_2^3=\omega^1+\beta\omega^2,\\
&\omega_0^0-\omega_3^3=s\omega^1-p\omega^2,\\
&\omega_0^0+\omega_2^2-2\omega_1^1=t\omega^1-p\omega^2,\\
&\omega_0^0+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=u\omega^1+v\omega^2.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Замыкая (3.4), получим:

$$d\alpha\wedge\omega^1+\left[u-\beta-\frac{2}{3}\alpha(p+v)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0,$$

$$\begin{aligned}
&d\beta\wedge\omega^2+\left[\alpha q-v-2p+\frac{1}{3}\beta(s+4u-2t)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
&dp\wedge\omega^1+dq\wedge\omega^2+\left[\beta+q(s-t+u)-\frac{2}{3}p(p+v)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
&d\tau\wedge\omega^1-\tau v\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
&ds\wedge\omega^1-dp\wedge\omega^2+\left[\tau-ps+1+\frac{1}{3}(pt-2pu-sv)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
&dt\wedge\omega^1-dp\wedge\omega^2+\left[3q-2-\frac{1}{3}(tv+2ps+2pu)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
&du\wedge\omega^1+dv\wedge\omega^2+\left[2(\tau-1)+\frac{1}{3}(2sv+uv-tv-pu)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Замкнутая система (3.4),(3.5)- в инволюции и определяет конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$ с произволом двух функций двух аргументов.

Рассмотрим некоторые образы, ассоциированные с конгруэнцией $(PP^*)_{2,1}$.

I) Асимптотические линии поверхности (A_0):

$$\alpha(\omega^1)^2+2\,\omega^1\omega^2+\beta(\omega^2)^2=0. \tag{3.6}$$

2) Фокальные поверхности (F_i) ($i=1,2$) и торсы прямолинейной конгруэнции (A_0A_3). Имеем:

$$\bar F_1=\bar A_3,\quad \bar F_2=\bar A_0-\bar A_3 \tag{3.7}$$

Торсам прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) соответствуют координатные линии $\omega^1=0$, $\omega^2=0$.

3) Фокальные поверхности (F_i^*) и торсы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2). Они определяются формулами

$$\bar F_1^*=\bar A_1,\quad \bar F_2^*=\beta\bar A_1-\bar A_2, \tag{3.8}$$

$$\omega^1=0,\quad \tau(\alpha\omega^1+\omega^2)=0, \tag{3.9}$$

4) Асимптотические линии на поверхности (F_2):

$$s(\omega^1)^2 + q(\omega^2)^2 = 0. \tag{3.10}$$

Т е о р е м а I. Конгруэнции $(PP^5)_{2,1}$ обладают следующими свойствами: I)Поверхность (A_1) является торсом.

2)Касательная плоскость к фокальной поверхности (F_2) содержит точки A_0, A_3.

3)Координатная сеть $\omega^1\omega^2 = 0$ сопряжена на поверхности (F_2).

§ 4. Конгруэнции K.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией K называется такая конгруэнция $(PP^5)_{2,1}$, у которой координатная сеть на поверхности (A_0) является асимптотической.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции K существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как сеть линий (3.6) конгруэнции K является координатной, то

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0. \tag{4.1}$$

Используя (3.5), получим:

$$u = 0, \quad v + 2p = 0. \tag{4.2}$$

Система квадратичных уравнений конгруэнции K запишется в виде:

$$dp\wedge\omega^1 + dq\wedge\omega^2 + [q(s-t) + \tfrac{2}{3}p^2]\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,$$

$$d\tau\wedge\omega^1 + 2p\tau\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,$$

$$ds\wedge\omega^1 + (2 + \tfrac{1}{3}ps)\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,$$

$$dt\wedge\omega^1 + (3q - \tau - 1 + \tfrac{1}{3}pt)\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,$$

$$dp\wedge\omega^2 + [1 - \tau + \tfrac{1}{3}p(2s - t)]\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0. \tag{4.3}$$

Имеем:

$$S_1 = 5, \quad q = 5, \quad S_2 = 0, \quad Q = N = 5.$$

Система уравнений, определяющая конгруэнции K, -в инволюции и имеет решение с произволом пяти функций одного аргумента.

Т е о р е м а 3. Конгруэнции K обладают следующими свойствами: I)торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) соответствуют, 2)касательная к линии (A_3) принадлежит соответствующей квадрике Ли поверхности (A_0), 3)поверхность (A_2) является фокальной поверхностью прямолинейной конгруэнции (A_1A_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) В силу (4.I) уравнения (3.9) приводятся к виду:

$$\omega^1 = 0, \quad \tau\omega^2 = 0. \tag{4.4}$$

2) Уравнение квадрики Ли поверхности (A_0) в точке A_0 имеет вид:

$$x^1x^2 - x^0x^3 - p\,x^3x^3 = 0. \tag{4.5}$$

Прямая A_1A_3, являющаяся касательной к линии (A_3) в точке A_3, принадлежит квадрике (4.5). 3)Из формул (3.8), в силу (4.I), находим:

$$\bar{A}_2 = -\bar{F}_2^{\,x}.$$

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией K_1 называется конгруэнция K, у которой касательные к линиям $\omega^2 = 0$ на поверхности (A_2) пересекают прямые A_0A_3.

Т е о р е м а 4. Конгруэнции K_1 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$(d\bar{A}_2)_{\omega^2=0} = \omega^1(\tau\bar{A}_0 + p\bar{A}_1 + \bar{A}_3) + \theta_2\bar{A}_2 \tag{4.7}$$

Условие пересечения с прямой A_0A_3 касательной к линии $\omega^2=0$ на поверхности (A_2) принимает вид:

$$p = 0. \tag{4.8}$$

Из (4.3) находим

$$\tau = 1. \tag{4.9}$$

Квадратичные уравнения конгруэнции K_1 запишутся в виде:

$$dq \wedge \omega^2 + q\,(s-t)\,\omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

$$ds \wedge \omega^1 + 2\,\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \tag{4.10}$$

$$dt \wedge \omega^1 + (3q-2)\,\omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

Следовательно,

$$S_1 = 3,\ \sigma = 3,\ S_2 = 0,\ Q = N = 3$$

Т е о р е м а 5. Конгруэнции K_1 обладают следующими свойствами: I) прямые A_0A_3 и A_1A_2 являются директрисами Вильчинского поверхности (A_0) 2) асимптотические линии $\omega^1=0$ на поверхности (A_0) принадлежат линейным комплексам, 3) Касательная плоскость к поверхности (A_2) в точке A_2 содержит точку, делящую гармонически вместе с F_2 точки A_2 и A_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Уравнения соприкасающихся линейных комплексов поверхности (A_0) имеют вид:

$$p_{12} + p_{03} = 0,\ p_{12} - p_{03} = 0 \tag{4.11}$$

Прямые A_0A_3 и A_1A_2 принадлежат обоим комплексам.

2) Имеем:

$$d(p_{12} + p_{03}) = \theta\,(p_{12} + p_{03}) \pmod{\omega^1}.$$

Следовательно, линии $\omega^1=0$ на поверхности (A_0) принадлежат линейным комплексам. 3) Имеем:

$$d\bar{A}_2 = \omega_2^2\bar{A}_2 + \omega^1(\bar{A}_0 + \bar{A}_3) + q\,\omega^2\bar{A}_1,$$

откуда следует утверждение последней части теоремы.

Л и т е р а т у р а :

I. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара ВИНИТИ, I969, 2, I8I-206.

2. Ткач Г.П. Пары конгруэнций парабол в эквиаффинном пространстве. Дифференциальная геометрия многообразий фигур (Труды Калининградского ун-та), I97I, вып. 2, 83-90 .

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

МАХОРКИН В.В.

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ МНОГООБРАЗИЙ ГИПЕРКВАДРИК

В данной работе исследуются многообразия гиперквадрик n-мерного проективного пространства. Введено понятие ассоциированных алгебраических многообразий. Рассмотрены некоторые классы многообразий. Для $(n-1)$-мерных многообразий гиперквадрик найден основной объект и доказано, в общем случае, существование 2^n фокальных поверхностей.

§I. Система дифференциальных уравнений многообразия гиперквадрик.

Определение. Многообразием $K(m,n)$ называется m-мерное подмногообразие невырожденных гиперквадрик n-мерного проективного пространства P_n.

Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $R=\{\bar{A}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma,...=0,1,...n)$. Деривационные формулы репера имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{A}_\beta, \tag{1.1}$$

где инвариантные формы ω_α^β подчинены уравнениям Маурера-Картана проективной группы:

$$\mathfrak{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta. \tag{1.2}$$

Уравнения стационарности гиперквадрики Q_{n-1}

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0 \tag{1.3}$$

имеют вид:

$$\Theta_{\alpha\beta}\equiv da_{\alpha\beta}-a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma-a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma=0, \tag{1.4}$$

где

$$\det\|a_{\alpha\beta}\|=1 \tag{1.5}$$

Из уравнения (I.5) следует тождество (см.[I])

$$a_{\alpha\beta}\Theta^{\alpha\beta}\equiv 0. \tag{1.6}$$

Система дифференциальных уравнений многообразия $K(m,n)$ запишется в виде:

$$\Theta_{\alpha\beta}=\Lambda_{\alpha\beta i}\tau^i \quad (i,j,k=1,2,...,m), \tag{1.7}$$

где формы τ^i (см.[2]) являются инвариантными формами бесконечной аналитической группы преобразований m-мерного пространства параметров S_m и подчинены следующим структурным уравнениям (см.[2]),

$$\mathfrak{D}\tau^i=\tau^k\wedge\tau_k^i, \tag{1.8}$$

$$\mathfrak{D}\tau^i_j = {}'\tau^k_j \wedge \tau^i_k + \tau^k \wedge \tau^i_{jk},$$

$$\dots\dots\dots\dots \tag{1.8}$$

$$\mathfrak{D}\tau^i_{j_1\dots j_r} = \sum_{s=1}^{r} \frac{r!}{s!(r-s)!}\,\tau^k_{(j_1\dots j_s} \wedge \tau^i_{j_{s+1}\dots j_r)k} + \tau^k \wedge \tau^i_{j_1\dots j_r k}.$$

Система уравнений (I.7) правильно продолжаема (см.[3]) и её последовательные продолжения приводят к бесконечной последовательности функций:

$$\Lambda_{\alpha\beta i_1},\ \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2},\ \dots,\ \Lambda_{\alpha\beta i_1\dots i_p},\ \dots \tag{1.9}$$

определяющих дифференциальную геометрию многообразия $K(m,n)$.

Функции (I.9) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d\Lambda_{\alpha\beta i_1} = \Lambda_{\gamma\beta i_1}\omega^\gamma_\alpha + \Lambda_{\alpha\gamma i_1}\omega^\gamma_\beta + \Lambda_{\alpha\beta j}\tau^j_{i_1} + \Lambda_{\alpha\beta i_1 j}\tau^j,$$

$$d\Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2} = \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2}\omega^\gamma_\alpha + \Lambda_{\alpha\gamma i_1 i_2}\omega^\gamma_\beta + \Lambda_{\alpha\beta j i_2}\tau^j_{i_1} +$$

$$+ \Lambda_{\alpha\beta i_1 j}\tau^j_{i_2} + \Lambda_{\alpha\beta j}\tau^j_{i_1 i_2} + \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2 j}\tau^j, \tag{1.10}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$d\Lambda_{\alpha\beta i_1\dots i_p} = \Lambda_{\gamma\beta i_1\dots i_p}\omega^\gamma_\alpha + \Lambda_{\alpha\gamma i_1\dots i_p}\omega^\gamma_\beta +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} \frac{r!}{s!(p-s)!}\Lambda_{\alpha\beta j(i_{s+1}\dots i_p}\tau^j_{i_1\dots i_s)} + \Lambda_{\alpha\beta i_1\dots i_p j}\tau^j,$$

где скобки в индексах означают симметрирование по всем индексам в них заключенным. Из уравнений (I.10) следует, что система величин:

$$(\Lambda_{\alpha\beta i_1}, \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2}, \dots, \Lambda_{\alpha\beta i_1\dots i_p}) \tag{1.11}$$

образует геометрический объект (см.[3]). Этот объект называется

фундаментальным объектом порядка p многообразия $K(m,n)$.

§2. Ассоциированные алгебраические многообразия.

Положим: $$N_p = m + \frac{m(m+1)}{2!} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p!}.$$

Рассмотрим фундаментальный объект порядка p многообразия $K(m,n)$ и обозначим:

$$F_{i_1} \equiv \Lambda_{\alpha\beta i_1} x^\alpha x^\beta,$$

$$F_{i_1 i_2} \equiv \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2} x^\alpha x^\beta, \tag{2.1}$$

$$F_{i_1\dots i_p} \equiv \Lambda_{\alpha\beta i_1\dots i_p} x^\alpha x^\beta.$$

Из (2.1) и (I.10) следует, что

$$\delta F_{i_1} = \upsilon F_{i_1} + F_j \tau^j_{i_1},$$

$$\delta F_{i_1 i_2} = \upsilon F_{i_1 i_2} + F_{j i_2}\overset{\circ}{\tau}{}^j_{i_1} + F_{i_1 j}\tau^j_{i_2} + F_j \overset{\circ}{\tau}{}^j_{i_1 i_2}, \tag{2.2}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\delta F_{i_1\dots i_p} = \upsilon F_{i_1\dots i_p} + \sum_{s=1}^{p} \frac{r!}{s!(p-s)!}\Lambda_{\alpha\beta j(i_{s+1}\dots i_p}\overset{\circ}{\tau}{}^j_{i_1\dots i_s)} x^\alpha x^\beta,$$

где υ некоторая дифференциальная I-форма, а нолик над формой означает фиксацию первичных параметров. Пусть $N_p < n$.

Система уравнений:

$$F_{i_1} = 0,\quad F_{i_1 i_2} = 0,\quad \dots,\quad F_{i_1\dots i_p} = 0 \tag{2.3}$$

определяет инвариантное алгебраическое многообразие (см.[4])

Определение. Многообразие (2.3) называется характеристическим многообразием ранга p многообразия $K(m,n)$.

Обозначим многообразие (2.3) символом ${}^{(p)}\mathfrak{h}\,(m,n)$

Имеем для $q = 1, 2, \ldots, p$

$$ {}^{(q)}\mathfrak{h}(m,n) \subset \ldots \subset {}^{(2)}\mathfrak{h}(m,n) \subset {}^{(1)}\mathfrak{h}(m,n) . \qquad (2.4) $$

Определение. Многообразием ${}^{(p)}H\,(m,n)$, ассоциированным с многообразием $K\,(m,n)$, называется m-параметрическое многообразие характеристических многообразий ранга p.

Определение. Псевдофокальным многообразием ранга p многообразия $K\,(m,n)$ или многообразием ${}^{(p)}\mathfrak{f}(m,n)$ называется алгебраическое многообразие, определяемое системой уравнений:

$$ F_{i_1}=0,\ F_{i_1 i_2}=0, \ldots, F_{i_1 \ldots i_p}=0,\ a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0 . \qquad (2.5) $$

Из определения многообразия ${}^{(q)}\mathfrak{f}\,(m,n)$ $(q = 1,2,\ldots,p)$ следует что:

$$ {}^{(q)}\mathfrak{f}(m,n) \subset \ldots \subset {}^{(2)}\mathfrak{f}(m,n) \subset {}^{(1)}\mathfrak{f}(m,n), \qquad (2.6) $$

$$ {}^{(q)}\mathfrak{f}(m,n) \subset Q_{n-1} . $$

Определение. Многообразием ${}^{(p)}F(m,n)$, ассоциированным с многообразием $K\,(m,n)$, называется m-параметрическое многообразие псевдофокальных многообразий ранга p.

§ 3. Многообразия $T\,(p,n)$ и $T\,(p,n-1)$.

Имеем:

$$ N_p = m + \frac{m(m+1)}{2!} + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p!} . $$

Определение. Многообразием $T(p,n)$ $(T(p,n-1))$ называется многообразие $K(m,n)$, у которого $N_p = n$ $(N_p = n-1)$

У таких многообразий характеристическое (псевдофокальное) многообразие в общем случае имеет своими компонентами точки (см. [4]).

В качестве примера рассмотрим многообразие $T\,(2,n-1)$. Поместим вершину A_0 репера R в нульмерную компоненту его псевдофокального многообразия ранга 2. Тогда

$$ a_{00} = 0,\ \Lambda_{00i} = 0,\ \Lambda_{00ij} = 0 . \qquad (3.1) $$

Вершины $A_1, \ldots, A_m$ расположим в касательной m-плоскости к поверхности (A_0). Имеем:

$$ \omega_0^\xi = 0\ , \ (\xi, \eta, \ldots = m+1, 2, \ldots, n) \qquad (3.2) $$

$$ a_{0k}\,\omega^k = 0, \qquad (3.3) $$

$$ \Lambda_{0ki}\,\omega^k = 0, \qquad (3.4) $$

(где $\omega^i = \omega_0^i$)

Принимая формы ω^i за независимые первичные формы получаем:

$$ a_{0i} = 0, \qquad (3.5) $$

$$ \Lambda_{ij} \equiv \Lambda_{0ij} = 0 . \qquad (3.6) $$

Из (3.5) следует:

Теорема 1. Касательная плоскость к поверхности (A_0) в точке A_0 принадлежит гиперплоскости, касательной к гиперквадрике Q_{n-1} в той же точке.

Теорема 2. Касательная плоскость к псевдофокальному многообразию ${}^{(1)}\mathfrak{f}\,(m,n)$ в точке A_0 содержит касательную плоскость к поверхности (A_0) в той же точке.

Доказательство. Система уравнений, определяющая касательную плоскость к многообразию ${}^{(1)}f(m,n)$ в точке A_0, имеет вид:

$$a_{0\xi}x^{\xi}=0\,,\quad \Lambda_{0\xi i}x^{\xi}=0. \tag{3.7}$$

Откуда непосредственно следует утверждение теоремы 2.

Следствие. На многообразии ${}^{(2)}f(m,n)$ существует в общем случае 2^n точек B_a $(a=1,\dots,2^n)$, являющихся нульмерными компонентами многообразия ${}^{(2)}f(m,n)$, причем m-мерная поверхность (B_a) касается многообразия ${}^{(1)}f(m,n)$ в точке B_a.

§ 4. Многообразие $T(1,n-1)$.

Поместим вершину A_0 репера R в одну из нульмерных компонент его псевдофокального многообразия ранга I.

Вершины $A_1,\dots,A_{n-1}$ расположим на гиперплоскости касательной к гиперповерхности (A_0), в точке A_0, вершину A_n поместим в произвольную точку пространства P_n, не принадлежащую этой гиперплоскости.

Как и в предыдущем параграфе, примем формы $\omega_0^i=\omega^i$ за независимые первичные формы.

Система уравнений многообразия $T(1,n-1)$ запишется в виде:

$$\Theta_{\alpha\beta}=\Lambda_{\alpha\beta i}\,\omega^i,\quad \omega_0^n=0, \tag{4.1}$$

причем:

$$a_{00}=0,\quad \Lambda_{00i}=0 \tag{4.2}$$

Учитывая (4.2), получим:

$$a_{0i}=0. \tag{4.3}$$

Замыкая $\omega_0^n=0$, имеем

$$\omega_i^n=b_{ij}\,\omega^j. \tag{4.4}$$

Из (4.I) с учетом (4.3) находим:

$$a_{ik}\omega^k+a_{0n}b_{ik}\omega^k=-\Lambda_{0ik}\,\omega^k. \tag{4.5}$$

Теорема 3. Касательная к гиперповерхности (A_0) гиперплоскость в точке A_0 совпадает с касательной гиперплоскостью к гиперквадрике Q_{n-1} в той же точке.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из соотношения (4.3).

Следствие. В пространстве P_n в общем случае существует 2^n гиперповерхностей, ассоциированных с многообразием $T(1,n-1)$ и касающихся всех его гиперквадрик.

§5. Основной объект многообразия $T(1,n-1)$.

Теорема 4. Фундаментальный объект первого порядка $\Gamma_1=\{a_{\alpha\beta},\Lambda_{\alpha\beta i}\}$ является основным объектом многообразия $T(1,n-1)$.

Доказательство. Зададим для компонент объекта Γ_1 следующие начальные значения:

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\,,\quad \overset{\circ}{\Lambda}_{0ij}=\delta_{ij}\,,\quad \overset{\circ}{\Lambda}_{nnj}=0,\\ \overset{\circ}{\Lambda}_{iij}=\delta_{ij}\,,\quad \overset{\circ}{\Lambda}_{00j}=-1,\quad \overset{\circ}{\Lambda}_{nij}=\delta_{ij}\,.\end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\mathring{\Lambda}_{onj} = 0, \quad \mathring{\Lambda}_{ijk} = 0 \quad (i \neq j). \qquad (5.1)$$

Такое задание начальных значений обеспечивает выполнение тождеств (I.6). Из определения основного объекта [3] следует, что надо доказать алгебраическую разрешимость дифференциальных уравнений:

$$\delta a_{\alpha\beta} = a_{\gamma\beta}\pi^{\gamma}_{\alpha} + a_{\alpha\gamma}\pi^{\gamma}_{\beta},$$
$$\delta\Lambda_{\alpha\beta i} = \Lambda_{\gamma\beta i}\pi^{\gamma}_{\alpha} + \Lambda_{\alpha\gamma i}\pi^{\gamma}_{\beta} + \Lambda_{\alpha\beta j}\mathring{\tau}^{j}_{i} \qquad (5.2)$$

относительно вторичных форм π^{β}_{α}, $\mathring{\tau}^{j}_{i}$ в окрестности точки $(\mathring{a}_{\alpha\beta}, \mathring{\Lambda}_{\alpha\beta i})$.

К системе (5.2) присоединим формальную алгебраическую систему:

$$y_{\alpha\beta} - \mathring{a}_{\gamma\beta}x^{\gamma}_{\alpha} - \mathring{a}_{\alpha\gamma}x^{\gamma}_{\beta} = 0,$$
$$z_{\alpha\beta i} - \mathring{\Lambda}_{\gamma\beta i}x^{\gamma}_{\alpha} - \mathring{\Lambda}_{\alpha\gamma i}x^{\gamma}_{\beta} - \Lambda_{\alpha\beta j}t^{j}_{i}. \qquad (5.3)$$

Г.Ф.Лаптев установил см.(3), что из того, что формальная система (5.3) разрешима относительно величин $x^{\beta}_{\alpha}, t^{j}_{i}$, следует, что система дифференциальных уравнений (5.2) алгебраически разрешима относительно форм $\pi^{\beta}_{\alpha}, \tau^{j}_{i}$ в окрестности точки $(\mathring{a}_{\alpha\beta}, \mathring{\Lambda}_{\alpha\beta i})$.

Из (5.3) находим:

$$x^{o}_{o} = \tfrac{1}{2}y_{oo}, \quad x^{i}_{i} = \tfrac{1}{2}y_{ii}, \quad x^{n}_{n} = \tfrac{1}{2}y_{nn},$$
$$x^{i}_{n} = \tfrac{1}{2}z_{nni}, \quad t^{i}_{j} = -z_{iij} \quad (i \neq j),$$
$$x^{o}_{i} = z_{nij} - z_{oij}, \quad x^{o}_{i} = y_{oi} - z_{nij} + z_{oij},$$
$$x^{o}_{n} = y_{oi} - z_{nij} + z_{oij} + \tfrac{1}{2}z_{nni} - z_{oni}, \qquad (5.4)$$
$$x^{n}_{o} = y_{on} - y_{oi} + z_{nij} - z_{oij} - \tfrac{1}{2}z_{nni} + z_{oni},$$
$$x^{n}_{i} = y_{in} - \tfrac{1}{2}z_{nni},$$
$$x^{j}_{i} = z_{nij} - z_{iij} \quad (i \neq j),$$
$$t^{i}_{j} = \tfrac{1}{2}z_{nni} - y_{oi} + z_{nij} + z_{oij} + z_{oni}.$$

Все величины x^{β}_{α}, t^{j}_{i} найдены. Теорема доказана.

Литература

I. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. "Геометрический сборник" (Труды Томского ун-та), I963, т.I68, с.28-42.

2. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. "Геометрия. I963" (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР) М., I965, с.5-64.

3. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. (Труды Московского матем. общества), I953, ГИТТЛ, М., 2, с.273-383.

4. Ходж В. и Пидо Д., Методы алгебраической геометрии. Т.I-2, ИЛ, М., I954.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

НОВОЖИЛОВА Т.П.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ПАР В A_3, ПОРОЖДЕННЫХ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается многообразие $\{CP\}_{21}$-двупараметрическое семейство (конгруэнция) пар фигур, образованных эллипсом C и точкой P, не инцидентной плоскости эллипса при условии, что многообразие (C)-конгруэнция, а многообразие (P)-линия (см.[I]). Такие многообразия мы назовем конгруэнцией F. Найдены геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией F. Исследованы аффинно-расслоенные конгруэнции [2].

§I. Теорема существования.

Обозначим буквой M_o точку пересечения касательной к линии (P) с соответствующей плоскостью эллипса. Отнесем конгруэнцию F к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где A -центр эллипса C, $\bar{e}_1=\overline{AM_o}$, $\bar{e}_3=\overline{AP}$ и вектор $\bar{e}_2$ сопряжен вектору $\bar{e}_1$ относительно эллипса C. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha,\quad d\bar{e}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\bar{e}_\beta,\quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3). \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа ω^β_α, ω^α удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma,\quad \mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta \tag{1.2}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3=0. \tag{1.3}$$

Уравнения эллипса относительно репера R записываются в виде:

$$a^2(x^1)^2+b^2(x^2)^2-1=0,\quad x^3=0,\quad a\neq 0. \tag{1.4}$$

Конгруэнция F определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\omega^3=\Gamma^3_k\omega^k,\quad \omega^3_i=\Gamma^3_{ik}\omega^k,\quad \omega^1_3=-\omega^1-\omega^3-\omega^3_3,\quad db=b_k\omega^k,\\ \omega^2_3=-\omega^2,\quad \omega^j_i=\Gamma^j_{ik}\omega^k,\quad da=a_k\omega^k,\ (i,j,k=1,2)\end{gathered} \tag{1.5}$$

и конечными соотношениями:

$$\begin{gathered}(1+\Gamma^2_{12})(1+\Gamma^1_{11}+\Gamma^3_{11}-\Gamma^3_{31})-\Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{12}+\Gamma^3_{12}-\Gamma^3_{32})=0,\\ (1+\Gamma^1_{31})(1+\Gamma^2_{12})-\Gamma^1_{32}\Gamma^2_{11}=0,\end{gathered} \tag{1.6}$$

где положено

$$\Gamma^3_{3k}=-\Gamma^1_{1k}-\Gamma^2_{2k},\quad \Gamma^1_{31}=-1-\Gamma^3_1-\Gamma^3_{31},\quad \Gamma^1_{32}=-\Gamma^3_2-\Gamma^3_{32}. \tag{1.7}$$

Из (I.5) и (I.6) следует, что конгруэнция F существует и определяется с произволом шести функций двух аргументов.

§ 2. Геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией F.

С конгруэнцией F ассоциируются следующие основные геометрические образы:

I) Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_1)$. Фокусы $\bar{F}' = \bar{A} + \lambda\bar{e}_1$ и торсы конгруэнции $(A\bar{e}_1)$ определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda^2(\Gamma^2_{11}\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{11}\Gamma^2_{12}) + \lambda[\Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{32}) - \Gamma^3_{11} - \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} - 1 - \Gamma^1_{31})] +$$
$$+ (1 + \Gamma^1_{31} - \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{21}) = 0, \qquad (2.1)$$

$$\omega^2\omega^3_1 + (\omega^1 + \omega^1_3 - \omega^1_1 - \omega^2_2)\,\omega^2_1 = 0. \qquad (2.2)$$

2) Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_2)$. Фокусы $\bar{F}'' = \bar{A} + \mu\bar{e}_2$ и торсы конгруэнции $(A\bar{e}_2)$ определяются соответственно:

$$\mu^2(\Gamma^1_{21}\Gamma^3_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{21}) + \mu[\Gamma^1_{21}(\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{32}) + \Gamma^3_{22} + \Gamma^1_{22}(1 + \Gamma^1_{31} - \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{21})] +$$
$$+ (\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{32}) = 0, \qquad (2.3)$$

$$\omega^1\omega^3_2 + (\omega^1 + \omega^1_3 - \omega^1_1 - \omega^2_2)\,\omega^1_2 = 0 \qquad (2.4)$$

3) Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_3)$. Фокусы F'''_i луча прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ и соответствующие им фокальные семейства определяются формулами:

$$\bar{F}'''_1 = \bar{A} + \bar{e}_3, \qquad \omega^2 = 0, \qquad (2.5)$$

$$\bar{F}'''_2 = \bar{A} - \frac{1}{\Gamma^1_{31}}\bar{e}_3, \qquad \omega^1 + \omega^1_3 = 0. \qquad (2.6)$$

4) Фокальные поверхности конгруэнции эллипсов (C). Уравнения для определения фокальных точек эллипса C имеют вид:

$$x^1[(ab'_1x^1 - b'_2x^2 - a^2)C_1 + (b_4x^2 - ax^1b_3)C_2] + (x^2)^2 b(C_1b_1 - C_2b_2) +$$
$$+ b^2x^2[(1 + \Gamma^2_{22}x^2)C_2 - x^2(x^2\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{21} + x^1\Gamma^2_{21}\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_2\Gamma^2_{21})] = 0, \qquad (2.7)$$

$$a^2(x^1)^2 + b^2(x^2)^2 - 1 = 0,$$

где $b'_1 = a_1 - a\Gamma^1_{11}$, $b'_2 = a^2\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{11}b^2$ $b_3 = a_2 - \Gamma^1_{12}a$,

$b_4 = a^2\Gamma^1_{22} + \Gamma^2_{12}b^2$, $C_1 = x^1\Gamma^3_{12} + x^2\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_2$,

$$C_2 = x^1\Gamma^3_{11} + x^2\Gamma^3_{21} + \Gamma^3_1.$$

5) Асимптотические линии на поверхности (A).

Уравнение асимптотических линий записывается в виде:

$$\omega^1\omega^3_1 + \omega^3\omega^3_3 + \omega^1(-d\Gamma^1_{31} - d\Gamma^1_{11} - d\Gamma^2_{21}) + \omega^2\omega^3_2 +$$
$$+ \omega^2(-d\Gamma^1_{32} - d\Gamma^1_{12} - d\Gamma^2_{22}) + (1 + \Gamma^1_{31} - \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{21})(\omega^1\omega^1_1 + \omega^3\omega^1_3 + \omega^2\omega^1_2) +$$
$$+ (\Gamma^1_{32} - \Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})(\omega^1\omega^2_1 - \omega^3\omega^2 + \omega^2\omega^2_2) = 0. \qquad (2.8)$$

5) Характеристические точки граней $(\bar{e}_1\bar{e}_3)$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Характеристической точкой грани $(\bar{e}_1\bar{e}_2)$ является точка

$$\bar{M}_1 = \bar{A} + \frac{\Gamma^3_{21}\Gamma^3_2 - \Gamma^3_1\Gamma^3_{22}}{\Gamma^3_{11}\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_{21}\Gamma^3_{12}}\bar{e}_1 + \frac{\Gamma^3_{12}\Gamma^3_1 - \Gamma^3_{11}\Gamma^3_2}{\Gamma^3_{11}\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_{21}\Gamma^3_{12}}\bar{e}_3, \qquad (2.9)$$

и грани $(\bar{e}_1\bar{e}_3)$ – точка

$$\bar{M}_2 = \bar{A} + \bar{e}_3.$$

§3. Аффинно расслояемые конгруэнции F_c.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией F_c называется конгруэнция F, если существует одностороннее аффинное расслоение от конгруэнции коник (C) к семейству плоскостей $(\bar{e}_1\bar{e}_3)$[2], $b = 1$.

Т е о р е м а I. Существуют 3 непересекающихся класса конгруэнции F_c: конгруэнции F'_c, F''_c, F'''_c определяемые с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий определения для конгруэнции F_c имеют место следующие конечные соотношения:

$$\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} = 0, \quad \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{21} = 0, \quad \Gamma^2_{12} - \Gamma^3_1 = 0,$$
$$\frac{a_1}{a}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{11} = 0. \qquad (3.1)$$

Рассмотрим случай

$$\Gamma^2_{12} = 0. \qquad (3.2)$$

Система дифференциальных уравнений (I.5), с учетом (I.6) и (3.I) принимает вид:

$$\omega_3^2 = -\omega^2, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega^3 = -(\Gamma^1_{32} + \Gamma^3_{32})\,\omega^2,$$

$$\omega_2^3 = \Gamma^3_{22}\,\omega^2, \quad \omega_1^3 = \Gamma^3_{12}\,\omega^2, \quad \omega_3^1 = -\omega^1 + \Gamma^1_{32}\,\omega^2, \tag{3.3}$$

$$\omega_3^3 = \Gamma^3_{32}\,\omega^2, \quad \omega_1^1 = \Gamma^1_{12}\,\omega^2 - \omega^1, \quad da = a_i\,\omega^i, \quad \omega_2^1 = \Gamma^1_{2i}\,\omega^i.$$

Система (3.3)- в инволюции и определяет конгруэнцию F_c' с произволом двух функций двух аргументов. Если

$$\Gamma^2_{21} = 0,$$

то соотношения (I.6) принимают вид:

$$(1 + \Gamma^2_{12})(1 + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{11} - \Gamma^3_{31}) = 0,$$

$$(1 + \Gamma^2_{12})(\Gamma^1_{31} + 1) = 0.$$

При $1 + \Gamma^2_{12} = 0$ получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\omega_1^2 = -\omega^2, \quad \omega_3^2 = -\omega^2, \quad \omega^3 = -\omega^1 - \Gamma^1_{32}\,\omega^2 - \Gamma^3_{12}\,\omega^2,$$

$$\omega_2^2 = \Gamma^2_{22}\,\omega^2, \quad \omega_2^1 = \Gamma^1_{2i}\,\omega^i, \quad \omega_1^1 = \Gamma^1_{1i}\,\omega^i, \quad \omega_1^3 = \Gamma^3_{1i}\,\omega^i, \tag{3.3$'$}$$

$$\omega_2^3 = \Gamma^3_{2i}\,\omega^i, \quad da = a_i\,\omega^i, \quad \omega_3^1 = \Gamma^1_{3i}\,\omega^i$$

и соотношения:

$$\Gamma^1_{21} = -\Gamma^3_{21}, \quad \frac{a_1}{a} + 2\Gamma^3_{11} = 0,$$

$$\Gamma^1_{31} = -\Gamma^3_{31}, \quad \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{11} = 0, \tag{3.4}$$

определяющие конгруэнцию F_c'' с произволом двух функций двух аргументов, и при

$$\Gamma^1_{31} = -1, \quad 1 + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{11} - \Gamma^3_{31} = 0$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\omega_3^1 = -\omega^2, \quad \omega^3 = -\Gamma^3_{31}\,\omega^1 - (\Gamma^3_{32} + \Gamma^1_{32})\,\omega^2,$$

$$\omega_1^2 = \Gamma^3_{31}\,\omega^2, \quad \omega_3^1 = -\omega^1 + \Gamma^1_{32}\,\omega^2, \quad \omega_2^2 = \Gamma^2_{22}\,\omega^2, \tag{3.5}$$

$$\omega_1^1 = \Gamma^1_{1i}\,\omega^i, \quad \omega_2^1 = \Gamma^1_{2i}\,\omega^i, \quad \omega_1^3 = \Gamma^3_{1i}\,\omega^i, \quad \omega_2^3 = \Gamma^3_{2i}\,\omega^i, \quad da = a_i\,\omega^i$$

и соотношения

$$1 + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{11} - \Gamma^3_{31} = 0, \quad \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{21} = 0,$$

$$\frac{a_1}{a}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{11} = 0,$$

определяющие конгруэнцию F_c''' с произволом двух функций двух аргументов. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Конгруэнция F_c' обладает следующими свойствами: I) поверхность (M_o) конгруэнции F_c' вырождается в линию. Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_1)$ вырождается в линейчатую поверхность, 2) одно семейство торсов прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_2)$ соответствует семейству торсов прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ и соответствует семейству координатных линий $\omega^2 = 0$; 3) прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_3)$ есть параболическая конгруэнция со сдвоенным фокусом в точке P, 4) огибающие семейства плоскостей $(\bar{e}_1\bar{e}_2)$ и $(\bar{e}_1\bar{e}_3)$ являются торсами. Их прямолинейные образующие определяются соответственно уравнениями:

$$x^3 = 1, \quad x^2 = 0, \tag{3.6}$$

$$x^1 = \frac{\Gamma^1_{32} + \Gamma^3_{32}}{\Gamma^3_{12}} - \frac{\Gamma^3_{22}}{\Gamma^3_{12}}\,x^2, \quad x^3 = 0, \tag{3.7}$$

5) одно семейство асимптотических линий на поверхности (A) соответствует семейству координатных линий $\omega^2 = 0$,

6) вдоль направления $\omega^2 = 0$ все коники конгруэнции (C) принадлежат одной плоскости,

7) две фокальные точки конгруэнции эллипсов (C) есть точки пересечения эллипса C с характеристикой плоскости $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Доказательство. I) Из (I.I) и (3.2) следует, что

$$d\bar{M}_0 = \omega^2 [\bar{e}_2 + \Gamma^1_{12}\bar{e}_1 + (\Gamma^3_{12} - \Gamma^1_{32} - \Gamma^3_{32})\bar{e}_3],$$

$$d\bar{A} = \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2 - (\Gamma^1_{32} + \Gamma^3_{32})\omega^2\bar{e}_3,$$

$$d\bar{e}_2 = \omega^1_2\bar{e}_1 + \Gamma^3_{12}\omega^2\bar{e}_3.$$

Следовательно (M_0)-линия и прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_1)$ вырождается в линейчатую поверхность.

Справедливость свойств 2), 3), 4), 5) непосредственно вытекает соответственно из формул (3.2), (2.4), (2.6); (3.2), (2.5), (2.6); (3.2), (2.9), (2.IO); (3.2), (2.8).

6) Из (I.I) и (3.2) следует, что все изменения векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ вдоль направления $\omega^2 = 0$ происходят в плоскости $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, т.е. плоскость коники остается неподвижной.

7) Система уравнений для определения фокальных точек конгруэнции эллипсов (C) распадается на две подсистемы:

$$\begin{cases} x^1\Gamma^3_{12} + x^2\Gamma^3_{22} - \Gamma^1_{32} - \Gamma^3_{32} = 0, \\ a^2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0; \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} -a(a_1 + a)(x^1)^2 + x^1x^2a^2\Gamma^3_{21} + (x^2)^2 + a^2x^1 = 0, \\ a^2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Учитывая (3.7), получаем: фокальные точки конгруэнции эллипсов (C) (3.8) есть точки пересечения эллипса C с характеристикой плоскости $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Теорема доказана.

Литература

1. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. (Данный сборник), с.

2. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. (Данный сборник), с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3
1973

ОВЧИННИКОВ В.М.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В МНОГООБРАЗИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

В работе [I] изучалось дифференцируемое отображение $\varphi_{k,n}$ поверхности S_k проективного пространства P_n в многообразие $(k, k, n)^2$ квадратичных элементов [2]. В этой статье исследуется локально биективное соответствие $\varphi_{n-1,n}$ между гиперповерхностью S_{n-1} и многообразием $(n-1, n-1, n)^2$ квадратичных элементов пространства P_n. Устанавливается связь геометрических объектов соответствия с фундаментальными объектами гиперповерхности

§I. Общая характеристика соответствия $\varphi_{n-1,n}$.

Локально-биективное соответствие

$$\varphi_{n-1,n}: \quad S_{n-1} \longrightarrow (n-1, n-1, n)^2$$

относительно полярно-ассоциированного репера ([I], стр.40) определяется системой уравнений Пфаффа:

$$\omega^n_{n+1} = 0, \quad \omega^n_i = \Lambda_{ij}\omega^j, \quad \theta_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta,i}\,\omega^i,$$
$$\omega_\alpha = b_{\alpha i}\,\omega^i, \qquad \omega^\ell_n = C^\ell_{nj}\,\omega^j, \tag{1.1}$$

$$P_{in,j} + a_{ik} C^k_{nj} + a_{nn}\Lambda_{ij} = 0,$$
$$\det \| b_{ji} \| \neq 0, \tag{1.2}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n; \;\; i, j, k, \ell = 1, 2, \ldots, n-1)$$

причем уравнения

$$\omega^n_{n+1} = 0 \tag{1.3}$$

этой системы определяет гиперповерхность S_{n-1}.

Уравнения квадратичного элемента q в полярно-ассоциированном репере приводятся к виду:

$$(x^n)^2 + 2a_{ij}x^i x^j = 0, \tag{1.4}$$

$$x^{n+1} = 1 \tag{1.5}$$

Продолжения системы (I.I) дадут следующие уравнения

$$\omega^n_i = \Lambda_{ij}\omega^j \tag{1.6}$$

$$dC^\ell_{nj} = C^\ell_{ni}\,\omega^i_j + C^\ell_{nj}(\omega^n_n - \omega^{n+1}_{n+1}) - C^i_{nj}\,\omega^\ell_i + C^\ell_{njk}\,\omega^k \tag{1.7}$$

$$d\Lambda_{ik} = \Lambda_{ij}\,\omega^j_k + \Lambda_{jk}\,\omega^j_i - \Lambda_{ik}(\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^n_n) + \Lambda_{ikj}\,\omega^j, \tag{1.8}$$

$$d\Lambda_{ik\ell} = \Lambda_{ikj}\,\omega^j_\ell - \Lambda_{ik\ell}(2\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^n_n) + \Lambda_{jk\ell}\,\omega^j_i +$$
$$+ \Lambda_{ij\ell}\,\omega^j_k + \Lambda_{ik\ell p}\,\omega^p, \tag{1.9}$$

$$dP_{\alpha\beta,i} = -P_{\alpha\beta,i}\,\omega^{n+1}_{n+1} + P_{\alpha\beta,j}\,\omega^j_i + P_{\alpha\gamma,i}\,\omega^\gamma_\beta - \frac{2}{n}P_{\alpha\beta,i}\,\omega^\gamma_\gamma +$$
$$+ P_{\gamma\beta,i}\,\omega^\gamma_\alpha + P_{\alpha\beta,ij}\,\omega^j, \tag{1.10}$$

$$d b_{\alpha i} = -2 b_{\alpha i}\,\omega^{n+1}_{n+1} + b_{\alpha j}\,\omega^{j}_{i} + b_{\beta i}\,\omega^{\beta}_{\alpha} + b_{\alpha i j}\,\omega^{j}. \qquad (1.11)$$

§ 2. Поля фундаментальных объектов гиперповерхности в полярно-ассоциированном репере.

Найдем основные фундаментальные объекты гиперповерхности S_{n-1} в полярно-ассоциированном репере. Дифференцируя тождества

$$\Lambda^{ki}\Lambda_{ij} = \delta^{k}_{j} \qquad (2.1)$$

с учетом уравнений (1.8), получаем:

$$d\Lambda^{ki} + \Lambda^{ji}\omega^{k}_{j} + \Lambda^{kj}\omega^{i}_{j} - \Lambda^{ki}(\omega^{n}_{n} + \omega^{n+1}_{n+1}) + \Lambda^{ij}\Lambda^{kp}\Lambda_{pj\ell}\,\omega^{\ell} = 0. \qquad (2.2)$$

Система величин $\{\Lambda^{ki}\}$ образует контравариантный симметрический тензор. Тензоры $\{\Lambda_{ij}\}$, $\{\Lambda^{ij}\}$ являются основными двухвалентными тензорами второго порядка гиперповерхности S_{n-1}. Получим теперь основные тензоры третьего порядка.

Обозначим

$$\tilde{b}_{k} = \Lambda^{ij}\Lambda_{ijk}. \qquad (2.3)$$

Дифференцируя (2.3) с использованием уравнений (1.9) и (2.2), находим:

$$d\tilde{b}_{k} = -\tilde{b}_{k}\,\omega^{n+1}_{n+1} + \tilde{b}_{\ell}\,\omega^{\ell}_{k} + \overset{*}{b}_{\ell k}\,\omega^{k} \qquad (2.4)$$

Система величин $\{\tilde{b}_{k}\}$ образует линейный геометрический объект третьего порядка, называемый чебышевским вектором [4].

Величины

$$\tilde{b}^{i} = \Lambda^{ik}\tilde{b}_{k} \qquad (2.5)$$

образуют тензор, а величина

$$\hat{b} = \tilde{b}^{i}\tilde{b}_{i} \qquad (2.6)$$

-относительный инвариант, так как

$$d\tilde{b}^{i} = -\tilde{b}^{j}\omega^{i}_{j} + \tilde{b}^{i}\omega^{n}_{n} + \overset{*}{b}{}^{i}_{\ell}\,\omega^{\ell}, \qquad (2.7)$$

$$d\hat{b} = \hat{b}(\omega^{n}_{n} - \omega^{n+1}_{n+1}) + \hat{b}_{i}\,\omega^{i}. \qquad (2.8)$$

Обозначим

$$\tilde{b}_{ijk} = (n+1)\Lambda_{ijk} - \Lambda_{(ij}\tilde{b}_{k)}. \qquad (2.9)$$

Дифференцируя (2.9) с учетом (1.9) и (2.4), получим:

$$d\tilde{b}_{ijk} = \tilde{b}_{ij\ell}\,\omega^{\ell}_{k} + \tilde{b}_{i\ell k}\,\omega^{\ell}_{j} + \tilde{b}_{\ell jk}\,\omega^{\ell}_{i} - \tilde{b}_{ijk}(\omega^{n}_{n} + 2\omega^{n+1}_{n+1}) + \tilde{b}_{ijk\ell}\,\omega^{\ell}. \qquad (2.10)$$

Система величин $\{\tilde{b}_{ijk}\}$ образует трижды ковариантный симметрический тензор, называемый тензором Дарбу гиперповерхности S_{n-1}. Для трехмерного случая, т.е. при $n = 3$ уравнение

$$\tilde{b}_{ijk}\,\omega^{i}\omega^{j}\omega^{k} = 0 \qquad (2.11)$$

определяет уравнение линий Дарбу на поверхности S_2. Тензор Дарбу $\{\tilde{b}_{ijk}\}$ аполярен дважды контравариантному тензору ([4], стр. 352), т.е.

$$\Lambda^{ij}\tilde{b}_{ijk} = 0. \qquad (2.12)$$

Основные фундаментальные тензоры второго и третьего порядков $\{\Lambda^{ij}\}$, $\{\tilde{b}_{ijk}\}$ охватывают следующие тензоры третьего порядка

$$b_{ij}^{k}=\Lambda^{k\ell}\tilde{b}_{\ell ij}\,,\qquad b_{k}^{ij}=\Lambda^{ip}\Lambda^{jq}\tilde{b}_{pqk}\,,$$

$$\tilde{b}^{ijk}=\Lambda^{ip}\Lambda^{jq}\Lambda^{k\ell}\tilde{b}_{pq\ell}\,,\quad \tilde{b}_{ij}=\Lambda^{\ell\ell_1}\Lambda^{pq}\tilde{b}_{\ell pi}\tilde{b}_{\ell_1 qj}\,. \qquad (2.13)$$

которые удовлетворяют, соответственно, дифференциальным уравнениям:

$$d b_{ij}^{k}=b_{pj}^{k}\omega_i^p+b_{ip}^{k}\omega_j^p-b_{ij}^{p}\omega_p^k-b_{ij}^{k}\omega_{n+1}^{n+1}+b_{ij\ell}^{k}\omega^{\ell},$$

$$d b_{k}^{ij}=b_{p}^{ij}\omega_k^p-b_{k}^{pj}\omega_p^i-b_{k}^{ip}\omega_p^j+b_{k}^{ij}\omega_n^n+b_{k\ell}^{ij}\omega^{\ell}, \qquad (2.14)$$

$$d\tilde{b}^{ijk}=-\tilde{b}^{ij\ell}\omega_\ell^k-\tilde{b}^{i\ell k}\omega_\ell^j-\tilde{b}^{\ell jk}\omega_\ell^i+\tilde{b}^{ijk}(\omega_{n+1}^{n+1}+2\omega_n^n)+b_{\ell}^{ijk}\omega^{\ell},$$

$$d\tilde{b}_{ij}=\tilde{b}_{i\ell}\omega_j^{\ell}+\tilde{b}_{\ell j}\omega_i^{\ell}-2\tilde{b}_{ij}\omega_{n+1}^{n+1}+\tilde{b}_{ij\ell}\omega^{\ell}.$$

Рассмотрим величину

$$b_0=\Lambda^{ij}\tilde{b}_{ij}\,. \qquad (2.15)$$

Так как

$$d b_0=(\omega_n^n-\omega_{n+1}^{n+1})b_0+\overset{*}{b}_{0\ell}\,\omega^{\ell}, \qquad (2.16)$$

то величина b_0 является относительным инвариантом третьего порядка. В случае $n=3$ условие

$$b_0=0 \qquad (2.17)$$

является характеристическим признаком линейчатой поверхности. Пучок инвариантно присоединенных к гиперповерхности S_{n-1} полей соприкасающихся гиперквадрик в точке A_{n+1} имеет вид:

$$\Lambda_{ij}x^i x^j+2\tilde{\ell}_k x^k x^r-2x^n x^{n+1}+(\hat{b}+\sigma b_0)(x^n)^2=0\,. \qquad (2.18)$$

В случае $n=3$ из пучка (2.18) при $\sigma=0$ выделяется квадрика Ли поверхности S_2.

Уравнения ассоциированного подпространства имеют вид:

$$x^n=0\,,\quad x^{n+1}=0\,. \qquad (2.19)$$

Линию на гиперповерхности S_{n-1} зададим системой

$$\omega^i=\Omega x^i\,,\quad \Omega\neq 0\,, \qquad (2.20)$$

где величины x^i удовлетворяют условиям:

$$dx^i=-x^i\omega_{n+1}^{n+1}-x^j\omega_j^i+\vartheta x^i\,, \qquad (2.21)$$

обеспечивающим относительную инвариантность [3] системы форм

$$\Theta^{\hat{i}}=\frac{x^{\hat{i}}}{x^{n-1}}\,\omega^{n-1}-\omega^{\hat{i}}\qquad(\hat{i}=1,2,\dots,n-2)\,, \qquad (2.22)$$

где ϑ -некоторая форма Пфаффа, являющаяся полным дифференциалом. Смещению (2.20) в ассоциированном подпространстве (2.19) соответствует точка

$$P=x^i A_i\,. \qquad (2.23)$$

Тогда

$$dP=(dx^i+x^j\omega_j^i)A_i+x^i\Lambda_{ij}\omega^j A_n+x^i b_{ij}\omega^j A_{n+1}\,. \qquad (2.24)$$

При условии

$$\Lambda_{ij}\, x^i x^j = 0 \tag{2.25}$$

касательная TP к линии (P) принадлежит касательной плоскости α_{n-2} к гиперповерхности S_{n-1} в точке A_{n-1}. Касательные $T\overset{(\omega)}{A}_{n+1}$, соответствующие смещениям (2.20), которые удовлетворяют уравнению

$$\Lambda_{ij}\, \omega^i \omega^j = 0, \tag{2.26}$$

образуют в пересечении с ассоциированным подпространством при условии (2.25 $(n-3)$ -мерную квадрику

$$x^n = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad \Lambda_{ij}\, x^i x^j = 0. \tag{2.27}$$

Точки, принадлежащие конусу (2-25) и бесконечно близкому к нему, при некотором смещении,

$$\omega^1 : \omega^2 : \dots : \omega^{n-1} \tag{2.28}$$

удовлетворяют системе:

$$\Lambda_{ij}\, x^i x^j = 0, \; \Lambda_{ij}\, x^i x^j + d(\Lambda_{ij}\, x^i x^j) = 0,$$

или

$$\Lambda_{ij}\, x^i x^j = 0, \; \Lambda_{ij\ell}\, \omega^\ell x^i x^j - 2\Lambda_{ij}\, C^i_{nk}\, x^n x^k - 2\Lambda_{ij}\, \omega^i x^{n+1} x^j = 0.$$

Таким образом, каждому смещению (2.28) в ассоциированном подпространстве соответствует $(n-4)$ -мерная алгебраическая поверхность:

$$x^n = 0, \quad x^{n+1} = 0, \; \Lambda_{ij}\, x^i x^j = 0, \; \Lambda_{ij\ell}\, x^i x^j x^\ell = 0. \tag{2.29}$$

Алгебраическая $(n-3)$ -мерная поверхность третьего порядка, проходящая через (2.29) и аполярная [5] квадрике (2.27), определяется системой:

$$x^n = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad \tilde{b}_{ij\ell}\, x^i x^j x^\ell = 0. \tag{2.30}$$

Таким образом, тензор Дарбу $\{\tilde{b}_{ij\ell}\}$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (2.10), определяет в ассоциированном подпространстве алге

ве алгебраическую $(n-4)$ -мерную поверхность (2.30).

Тензор $\{\tilde{b}_{ij}\}$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (2.14-4), определяет в ассоциированном подпространстве $(n-3)$-мерную невырожденную квадрику

$$x^n = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad \tilde{b}_{ij}\, x^i x^j = 0. \tag{2.31}$$

Рассматриваем общий случай, когда

$$\det \| \tilde{b}_{ij} \| \neq 0. \tag{2.32}$$

Квадрика (2.31) является ассоциированной квадрикой относительно (2.30) и (2.27). Рассмотрим системы величин

$$C^k = \tilde{b}^{ijk}\, \tilde{b}_{ij}, \quad C_i = \Lambda_{ij}\, C^j,$$

где

$$dC^k = -C^\ell \omega^k_\ell + C^k (2\omega^n_n - \omega^{n+1}_{n+1}) + \tilde{C}^k_\ell\, \omega^\ell,$$

$$dC_i = C_\ell \omega^\ell_i - 3C_i\, \omega^n_n + \tilde{C}_{i\ell}\, \omega^\ell.$$

Точка

$$C = c^k A_k \tag{2.33}$$

является инвариантной, так как

$$\delta C = (2\pi_n^n$$

Инвариантная точка C является A -точкой [5] ассоциированного подпространства относительно невырожденной квадрики (2.31) и алгебраической $(n-3)$ -мерной поверхности в ассоциированном подпростанстве

$$\tilde{b}^{ijk} X_i X_j X_k = 0, \qquad (2.34)$$

где X_i -тангенциальные координаты. Вектор $\{C_i\}$ задает в ассоциированном подпространстве $(n-3)$ -мерное линейное подпространство, полярно-сопряженное точке (2.33) относительно квадрики (2.27) и определяемое системой:

$$x^n = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad C_i x^i = 0 \qquad (2.35)$$

§ 3. Некоторые геометрические объекты отображения $\varphi_{n-1,n}$.

Тензоры

$$\{b_{ij}\}, \{b^{ij}\}, \{b_{ijk}\}, \{\Lambda_{ij}\}, \{\Lambda^{ij}\},$$

удовлетворяющие системе (I.7)-(I.II), охватывают следующие тензоры третьего порядка

$$b^*_i = b_{ijk} b^{jk}, \quad b^*_{ijk} = b_{ijk} - \frac{1}{n+1}(b^*_i b_{jk} + b^*_j b_{ik} + b^*_k b_{ij}),$$

$$b^*_{il} = b^*_{ijk} b^*_{lpq} b^{jp} b^{kq}, \quad C^{ijk} = b^*_{lpq} b^{li} b^{pj} b^{qk}, \qquad (3.1)$$

$$\tilde{c}^i = c^{ijk} b^*_{jk}, \quad p_i = \tilde{c}^j \Lambda_{ij}, \quad \tilde{c}_i = b_{ij} \tilde{c}^j, \quad p^j = \tilde{c}_i \Lambda^{ij}, \qquad (3.1)$$

которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&db^*_i = -b^*_i \omega^{n+1}_{n+1} + b^*_l \omega^l_i + \tilde{b}_{il} \omega^l,\\
&db^*_{ijk} = b^*_{ijl} \omega^l_k + b^*_{ilk} \omega^l_j + b^*_{ljk} \omega^l_i - 3 b^*_{ijk} \omega^{n+1}_{n+1} + \tilde{b}_{ijkl} \omega^l,\\
&db^*_{il} = b^*_{ij} \omega^j_l + b^*_{jl} \omega^j_i - 2 b^*_{il} \omega^{n+1}_{n+1} + b^*_{ilp} \omega^p,\\
&dC^{ijk} = -C^{ijl} \omega^k_l - C^{ilk} \omega^j_l - C^{ljk} \omega^i_l + 3 C^{ijk} \omega^{n+1}_{n+1} + C^{ijk}_l \omega^l,\\
&d\tilde{c}^i = -\tilde{c}^j \omega^i_j + \tilde{c}^i \omega^{n+1}_{n+1} + \tilde{c}^i_j \omega^j,\\
&dp_i = p_j \omega^j_i - p_i \omega^n_n + p_{il} \omega^l,\\
&d\tilde{c}_i = \tilde{c}_j \omega^j_i - \tilde{c}_i \omega^{n+1}_{n+1} + \tilde{c}_{il} \omega^l,\\
&dp^j = -p^i \omega^j_i + p^j \omega^n_n + p^j_l \omega^l.
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

Из уравнения (2.24) следует, что касательная TP к линии (P) принадлежит гиперплоскости $x^{n+1} = 0$ при условии

$$b_{ij} x^i x^j = 0. \qquad (3.3)$$

Совокупность точек (2.23) пересечения ассоциированного подпространства (2.19) с TA_{n+1} таких, что TP принадлежит гиперплоскости $x^{n+1} = 0$, образует в (2.19) квадрику

$$x^n = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad b_{ij} x^i x^j = 0. \qquad (3.4)$$

Точки, принадлежащие конусу (3.3) и бесконечно близкому к нему при смещении (2.20) удовлетворяют уравнению

$$b_{ij}x^ix^j=0,\quad b_{ij}x^ix^j+d(b_{ij}x^ix^j)=0, \qquad (3.5)$$

или

$$b_{ij}x^ix^j=0,\quad b_{ijk}\omega^k x^ix^j-2b_{ij}C^i_{nk}\omega^k x^n x^j-2b_{ij}x^{n+1}x^j\omega^i=0.$$

Таким образом, смещению (2.20) в подпространстве (2.19) соответствует (n-4)-мерная алгебраическая поверхность

$$x^n=0,\ x^{n+1}=0,\ b_{ij}x^ix^j=0,\ b_{ijk}x^ix^jx^k=0. \qquad (3.6)$$

Алгебраические (n-3)-мерные поверхности, проходящие через (n-4)-мерные поверхности (3.6), определяются уравнениями:

$$x^n=0,\ x^{n+1}=0,\ (b_{ijk}+c_ib_{jk}+c_jb_{ik}+c_kb_{ij})x^ix^jx^k=0 \qquad (3.7)$$

где c_i -некоторые параметры.

Среди поверхностей (3.7) ищем такие, которые аполярны квадрике (3.4). Имеем

$$c_i=-\frac{b^*_i}{n+1}$$

Алгебраическая (n-3)-мерная поверхность третьего порядка в подпространстве (2.19), проходящая через (3.6) и аполярная квадрике (3.4), определяется системой:

$$x^n=0,\ x^{n+1}=0,\ b^*_{ijk}x^ix^jx^k=0 \qquad (3.8)$$

Тензор $\{b^*_{i\ell}\}$ определяет в подпространстве (2.19) (n-3)-мерную квадрику

$$x^n=0,\ x^{n+1}=0,\ b^*_{i\ell}x^ix^\ell=0, \qquad (3.9)$$

которая является ассоциированной квадрикой относительно (3.8) и (3.4). Точки

$$\mathcal{L}=\tilde{c}^iA_i,\quad \tilde{P}=p^jA_j \qquad (3.10)$$

являются инвариантными, так как

$$\delta\mathcal{L}=\pi^{n+1}_{n+1}\mathcal{L},\quad \delta\tilde{P}=\pi^n_n\tilde{P} \qquad (3.11)$$

Точка $\mathcal{L}$ является A-точкой [5] ассоциированного подпространства относительно квадрик (3.8) и (3.9). Нормализация гиперповерхности S_{n-1} индуцирует на ней аффинную связность без кручения [6]. Формы

$$\tilde{\omega}^j_i=\omega^j_i-\delta^j_i\,\omega^{n+1}_{n+1} \qquad (3.12)$$

на гиперповерхности S_{n-1} определяют инвариантную аффинную связность без кручения. Тензор кривизны этой связности имеет вид:

$$R^j_{ik\ell}=2\Lambda_{ik}C^j_{n\ell}+2\delta^j_\ell b_{ik}-2\delta^j_i b_{k\ell}. \qquad (3.13)$$

Осуществляя в (3.13) свертку по индексам j и i, получим выражение тензора Риччи оснащенной гиперповерхности S_{n-1}:

$$R_{k\ell}=\Lambda_{ik}C^i_{n\ell}+b_{\ell k}-(n-1)b_{k\ell} \qquad (3.14)$$

Условие

$$b_{j\ell}=\frac{1}{n}\Lambda_{ij}C^i_{n\ell} \qquad (3.15)$$

означает, что аффинная связность без кручения на гиперповерхности S_{n-1} станет эквиаффинной.

Литература

1. Овчинников В.М., Дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2, (Труды Калининградского ун-та), 1971, 38-42.

2. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в – мерном проективном пространстве. "Геом. сборник", вып.3. (Труды Томского ун-та), т.168, 1963, 28-42.

3. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия оснащенных многообразий фигур. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", (Труды Калининградского ун-та), вып.2, 1971, с.5-19.

4. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия многообразий фигур. (Труды Московского математического общества), ГИТТЛ, М., 1953, т.2, с.275-383.

5. Ивлев Е.Т., К геометрии интерпретации операции свертывания некоторых тензоров. "Материалы итоговой научной конф. по математике и механике за 1970г."(Из-во Томского ун-та), ч.I, 1971, с.121-123.

6. Норден А.П., Пространства аффинной связности, М-Л, 1950.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

Ю.И.ПОПОВ

ТЕОРИЯ ОСНАЩЕННЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ГИПЕРПОЛОС С АССОЦИИРОВАННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.

В n-мерном проективном пространстве P_n изучаются оснащенные регулярные m-мерные гиперполосы Γ_m $(n>m)$ с ассоциированной связностью. Найдены дифференциальные уравнения гиперполосы и условия их интегрируемости. Доказаны теоремы о возможности погружения базисной поверхности B_m гиперполосы Γ_m в подпространство $P_{n'}$ пространства P_n. Естественным образом определена связность гиперполосы, порожденная её оснащением.

§ I. Оснащенная регулярная гиперполоса с ассоциированной связностью.

С оснащенной гиперполосой $H(\Gamma_m)$ естественным образом ассоциируется четырехсоставное многообразие $X_{n(m)}$, базой которого служит базисная поверхность B_m гиперполосы Γ_m, а локальными многообразиями являются центроаффинные пространства $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{n-m-1}, A_{n+1}$. Допустимыми преобразованиями координатных систем в локальных многообразиях $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{n-m-1}, A_{n+1}$

будем считать соответственно следующие преобразования:

$$\xi^{1'} = \psi_1^{1'}(x^i)\xi^1, \qquad \psi_1^{1'} = \psi_1^{1'}(x^i) \neq 0. \tag{1.1}$$

$$\eta^{0'} = \varphi_0^{0'}(x^i)\eta^0, \qquad \varphi_0^{0'} = \varphi_0^{0'}(x^i) \neq 0. \tag{1.2}$$

$$\theta^{\sigma'} = \chi_\lambda^{\sigma'}(x^i)\,\theta^\lambda, \qquad \det\|\chi_\lambda^{\sigma'}(x^i)\| \neq 0. \tag{1.3}$$

$$y^{\alpha'} = a_\alpha^{\alpha'}(x^i)\,y^\alpha, \qquad \det\|a_\alpha^{\alpha'}(x^i)\| \neq 0.^{*)} \tag{1.4}$$

Здесь $x^1, x^2, \ldots, x^m$ – координаты точки M базисного многообразия B_m, а $\psi_1^{1'}(x^i), \varphi_0^{0'}(x^i), \chi_\lambda^{\sigma'}(x^i), a_\alpha^{\alpha'}(x^i)$ – произвольные непрерывные функции, дифференцируемые достаточное число раз.

Каждая оснащенная гиперполоса $N(\Gamma_m)$ индуцирует в составном многообразии $X_{n(m)}$ объект связности Π_i, состоящий из псевдосвязностей

$$\Pi_{\beta i}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial M^\gamma}{\partial x^i} = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha M_{,i}^\gamma, \tag{1.5}$$

$$\Pi_{1i}^1 = M_{1,i}^\alpha P_\alpha^1 + \Pi_{\beta i}^\alpha M_1^\beta P_\alpha^1 = M_{1;i}^\alpha P_\alpha^1 = -M_1^\alpha P_{\alpha;i}^1, \tag{1.6}$$

$$\Pi_{0i}^0 = X_{0,i}^\alpha T_\alpha^0 + \Pi_{\beta i}^\alpha X_0^\beta T_\alpha^0 = X_{0;i}^\alpha T_\alpha^0 = -X_0^\alpha T_{\alpha;i}^0, \tag{1.7}$$

$$\Pi_{\lambda i}^\sigma = X_{\lambda,i}^\alpha T_\alpha^\sigma + \Pi_{\beta i}^\alpha X_\lambda^\beta T_\alpha^\sigma = X_{\lambda;i}^\alpha T_\alpha^\sigma = -X_\lambda^\alpha T_{\alpha;i}^\sigma, \tag{1.8}$$

соответствующих локальным многообразиям $A_{n+1}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_{n-m-1}$ и аффинной связности базисного пространства

$$\Pi_{ij}^k = M_{1;ij}^\alpha N_\alpha^{1k} - 2M_{1;(i}^\alpha \delta_{j)}^k P_\alpha^1. \tag{1.9}$$

---

*) В работе употребляется следующая схема использования индексов: $i, j, k, \ell \ldots = 1, 2, \ldots, m$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n+1$; $\lambda, \varkappa, \sigma, \pi = 1, 2, \ldots, n-m-1$

где $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ – связность локального многообразия A_{n+1}, а символ ";" обозначает ковариантное дифференцирование тензоров составного многообразия $X_{n(m)}$ относительно связности $\Pi_{\beta i}^\alpha$.

Оснащенную гиперполосу $N(\Gamma_m)$, с которой ассоциируется четырехсоставное многообразие $X_{n(m)}$, назовем гиперполосой с ассоциированной связностью (компоненты $\Pi_{\beta i}^\alpha$ не равны тождественно нулю) и будем обозначать через $X(\Gamma_m)$.

Связность Π_i индуцирует в составном многообразии $X_{n(m)}$ тензоры

$$R_{ijk}^k = -\Pi_{i\underline{j};\underline{k}}^k - \Pi_{i\underline{j}}^s \Pi_{s\underline{k}}^k, \quad R_{0jk}^0 = -\Pi_{0\underline{j};\underline{k}}^0.$$

$$R_{\lambda ij}^\sigma = -\Pi_{\lambda\underline{j};\underline{k}}^\sigma - \Pi_{\lambda\underline{j}}^\varkappa \Pi_{\varkappa\underline{k}}^\sigma, \quad R_{1jk}^1 = -\Pi_{1\underline{j};\underline{k}}^1. \tag{1.10}$$

$$R_{\beta ij}^\alpha = -\Pi_{\beta\underline{j};\underline{k}}^\alpha - \Pi_{\beta\underline{j}}^\gamma \Pi_{\gamma\underline{k}}^\alpha,^{*)}$$

которые называются тензорами кривизны, соответствующими пространствам $B_m, \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_{n-m-1}, \mathcal{L}_1, A_{n+1}$. Пользуясь связностью Π_i, можно дифференцировать тензоры составного многообразия $X_{n(m)}$. Для ковариантного дифференцирования относительно связности Π_i имеют место обобщенные тождества Риччи. Например, для тензора $A_{\lambda 1 i}^{\alpha 0}$ эти тождества имеют вид:

$$A_{\lambda 1 i[jk]}^{\alpha 0} = R_{\lambda jk}^\sigma A_{\sigma 1 i}^{\alpha 0} + R_{1jk}^1 A_{\lambda 1 i}^{\alpha 0} + R_{ijk}^k A_{\lambda 1 k}^{\alpha 0} - R_{\beta jk}^\alpha A_{\lambda 1 i}^{\beta 0} - R_{0jk}^0 A_{\lambda 1 i}^{\alpha 0}. \tag{1.11}$$

Тензоры кривизны (1.10) обладают следующими свойствами:

---

*) См. [3], стр. 105.

$$R^h_{ijk} + R^h_{kij} + R^h_{jki} = 0, \qquad R^h_{ijk|s} + R^h_{iks|j} + R^h_{isj|k} = 0,$$

$$R^o_{oij|k} + R^o_{ojk|i} + R^o_{oki|j} = 0, \quad R^1_{1ij|k} + R^1_{1jk|i} + R^1_{1ki|j} = 0, \tag{1.12}$$

$$R^\varkappa_{\lambda ij|k} + R^\varkappa_{\lambda jk|i} + R^\varkappa_{\lambda ki|j} = 0, \quad R^\alpha_{\beta ij|k} + R^\alpha_{\beta jk|i} + R^\alpha_{\beta ki|j} = 0.$$

Условия интегрируемости уравнений $a^{\alpha o}_{\lambda i|j} = b^{\alpha o}_{\lambda ij}$ имеют такой же вид, как и при обычном ковариантном дифференцировании

$$a^{\alpha o}_{\lambda i|[jk]} = b^{\alpha o}_{\lambda i[j|k]}. \tag{1.13}$$

С каждой точкой M^α_1 базисной поверхности B_m гиперполосы $X(\Gamma_m)$ связываем контравариантный репер $M^\alpha_1, X^\alpha_o, M^\alpha_{1|i}, X^\alpha_\sigma$ и взаимный ему ковариантный репер $P^1_\alpha, T^o_\alpha, N^{1k}_\alpha, T^\lambda_\alpha$:

	P^1_α	T^o_α	N^{1k}_α	T^λ_α
M^α_1	1	0	0	0
X^α_o	0	1	0	0
$M^\alpha_{1\|i}$	0	0	δ^k_i	0
X^α_σ	0	0	0	δ^λ_σ

(1.14)

Нормаль I-го рода в данной точке M^α_1 гиперполосы $X(\Gamma_m)$ определяется тензорами $X^\alpha_o, X^\alpha_\lambda$, а нормаль второго рода тензором

$$M^\alpha_{1\|i} = M^\alpha_{1,i} + \Pi^\alpha_{\beta i} M^\beta_1 - \Pi^1_{1i} M^\alpha_1 = M^\alpha_{1|i} - \Pi^1_{1i} M^\alpha_1.$$

§ 2. Основные уравнения гиперполосы $X(\Gamma_m)$ и условия их интегрируемости.

Учитывая (I.5)-(I.9),(I.I4), по аналогии с §3 работы [I], получаем:

$$M^\alpha_{1|ij} = p_{ij} M^\alpha_1 + b^o_{1ij} X^\alpha_o + b^\lambda_{1ij} X^\alpha_\lambda, \tag{2.1}$$

$$X^\alpha_{o|i} = m^1_{oi} M^\alpha_1 + n^\lambda_{oi} X^\alpha_\lambda + m^{1h}_{oi} M^\alpha_{1|h}. \tag{2.2}$$

$$X^\alpha_{\lambda|i} = m^1_{\lambda i} M^\alpha_1 + m^{1h}_{\lambda i} M^\alpha_{1|h}. \tag{2.3}$$

Эти уравнения называются основными дифференциальными уравнениями оснащенной регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m)$ с ассоциированной связностью, а тензоры $p_{ij}, b^o_{1ij}, b^\lambda_{1ij}, m^1_{oi}, n^\lambda_{oi}, m^{1h}_{oi}, m^1_{\lambda i}, m^{1h}_{\lambda i}$ – основными тензорами гиперполосы $X(\Gamma_m)$.

Тензор

$$b^o_{1ij} = -M^\alpha_{1;i} T^o_{\alpha;j} = -M^\alpha_{1|i} T^o_{\alpha|j} = M^\alpha_{1|ij} T^o_\alpha \tag{2.4}$$

называется главным фундаментальным тензором регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m)$, причем $r = rang\,\|b^o_{1ij}\| = m$.

Условия интегрируемости основных дифференциальных уравнений (2.I)-(2.3) имеют следующий вид:

$$R^\alpha_{\beta ij} = 0, \quad (\alpha \neq \beta), \tag{2.5'}$$

$$R^1_{1ij} - R^\alpha_{\alpha ij} = p_{i\underline{j}}. \tag{2.5}$$

(по α не суммировать)

$$b^{0}_{1i\underline{j}} = 0, \tag{2.6}$$

$$b^{\lambda}_{1i\underline{j}} = 0, \tag{2.7}$$

$$R^{h}_{ijk} + \delta^{h}_{i} R^{1}_{1jk} - \delta^{1}_{i} R^{\alpha}_{\alpha jk} = p_{i\underline{j}}\,\delta^{h}_{\underline{k}} + b^{0}_{1i\underline{j}}\, m^{1h}_{0\underline{k}} + b^{\lambda}_{1i\underline{j}}\, m^{1h}_{\lambda\underline{k}}\ , \tag{2.8}$$

$$b^{0}_{1i\underline{j}|\underline{k}} = 0, \tag{2.9}$$

$$b^{\lambda}_{1i\underline{j}|\underline{k}} + b^{0}_{1i\underline{j}}\, n^{\lambda}_{0\underline{k}} = 0, \tag{2.10}$$

$$p_{i\underline{j}|\underline{k}} + b^{0}_{1i\underline{j}}\, m^{1}_{0\underline{k}} + b^{\lambda}_{1i\underline{j}}\, m^{1}_{\lambda\underline{k}} = 0, \tag{2.11}$$

$$R^{0}_{0ij} - R^{\alpha}_{\alpha ij} = m^{1h}_{0\underline{i}}\, b^{0}_{1h\underline{j}}\,. \tag{2.12}$$

$$m^{1}_{0\underline{i}|\underline{j}} + n^{\lambda}_{0\underline{i}}\, m^{1}_{\lambda\underline{j}} + m^{1h}_{0\underline{i}}\, p_{h\underline{j}} = 0, \tag{2.13}$$

$$n^{\lambda}_{0\underline{i}|\underline{j}} + m^{1h}_{0\underline{i}}\, b^{\lambda}_{1h\underline{j}} = 0, \tag{2.14}$$

$$m^{1}_{\lambda\underline{i}|\underline{j}} + m^{1h}_{\lambda\underline{i}}\, p_{h\underline{j}} = 0, \tag{2.15}$$

$$m^{1}_{0\underline{i}}\,\delta^{h}_{\underline{j}} + n^{\lambda}_{0\underline{i}}\, m^{1h}_{\lambda\underline{j}} + m^{1h}_{0\underline{i}|\underline{j}} = 0, \tag{2.16}$$

$$R^{\sigma}_{\lambda ij} - R^{\alpha}_{\alpha ij}\,\delta^{\sigma}_{\lambda} = m^{1h}_{\lambda\underline{i}}\, b^{\sigma}_{1h\underline{j}}\,. \tag{2.17}$$

$$m^{1h}_{\lambda\underline{i}}\, b^{0}_{1h\underline{j}} = 0, \tag{2.18}$$

$$m^{1}_{\lambda\underline{i}}\,\delta^{h}_{\underline{j}} + m^{1h}_{\lambda\underline{i}|\underline{j}} = 0. \tag{2.19}$$

Имеют место следующие предложения:

Т е о р е м а [2.I]. Если $m \neq 2$, то

1) соотношение (2.5) является следствием (2.6)-(2.8),

2) соотношение (2.II) является следствием (2.8)-(2.I0),(2.I6), (2.I9),

3) соотношение (2.I3) является следствием (2.6)-(2.8),(2.I2), (2.I4),(2.I6),(2.I9),

4) соотношение (2.I5) является следствием (2.8),(2.I7)-(2.I9).

Т е о р е м а [2.2]. Если ранг тензора b^{0}_{1ij} больше двух, то условие (2.I2) есть следствие условий (2.8),(2.9),(2.I8), а условие (2.I4) есть следствие условий (2.7)-(2.I0) и (2.I7).

Рассмотрим для примера доказательство предложения 4), [2.I].

Продифференцируем соотношение (2.I9) по k и запишем триады, циклируя по i, j, k. Затем, сложив полученные равенства и принимая во внимание лемму [2.I] работы [I], §4, находим, что

$$m^{1h}_{\lambda i|\underline{j}|\underline{k}} + m^{1h}_{\lambda j|\underline{k}|\underline{i}} + m^{1h}_{\lambda k|\underline{i}|\underline{j}} + m^{1}_{\lambda\underline{i}|\underline{k}}\,\delta^{h}_{j} + m^{1}_{\lambda\underline{k}|\underline{j}}\,\delta^{h}_{i} + m^{1}_{\lambda\underline{j}|\underline{i}}\,\delta^{h}_{k} = 0\,.$$

Воспользовавшись тождествами Риччи (I.II), перепишем это выражение таким образом:

$$S^{1h}_{\lambda ijk} + S^{1h}_{\lambda jki} + S^{1h}_{\lambda kij} + m^{1}_{\lambda\underline{i}|\underline{k}}\,\delta^{h}_{j} + m^{1}_{\lambda\underline{k}|\underline{j}}\,\delta^{h}_{i} + m^{1}_{\lambda\underline{j}|\underline{i}}\,\delta^{h}_{k} = 0, \tag{2.20}$$

где

$$S^{1h}_{\lambda ijk} = m^{1h}_{\sigma i} R^{\sigma}_{\lambda jk} - m^{1h}_{\lambda i} R^{1}_{1jk} - m^{1s}_{\lambda i} R^{h}_{sjk} =$$

$$= m^{1h}_{\sigma i} R^{\sigma}_{\lambda jk} - m^{1s}_{\lambda i}\left(R^{h}_{sjk} + \delta^{h}_{s} R^{1}_{1jk}\right).$$

Пользуясь (2.8),(2.I7), получим

$$S^{1h}_{\lambda ijk} = m^{1h}_{\sigma i} m^{1s}_{\lambda \underline{j}} b^{\sigma}_{1s\underline{k}} - m^{1s}_{\lambda i} p_{s\underline{j}} \delta^{h}_{\underline{k}} - m^{1s}_{\lambda i} m^{1h}_{o\underline{k}} b^{o}_{1s\underline{j}} -$$

$$- m^{1s}_{\lambda i} m^{1h}_{\sigma \underline{k}} b^{\sigma}_{1s\underline{j}}. \qquad (2.21)$$

Наконец, подставляя значение $S^{1h}_{\lambda ijk}$ (2.2I) в (2.20) и учитывая лемму [2.I] работы [2], §4, а также (2.I8), приходим к следующему соотношению

$$m^{1}_{\lambda \underline{i}|\underline{k}} \delta^{h}_{j} + m^{1}_{\lambda \underline{k}|\underline{j}} \delta^{h}_{i} + m^{1}_{\lambda \underline{i}|\underline{i}} \delta^{h}_{k} +$$

$$+ m^{1s}_{\lambda \underline{i}} p_{s\underline{k}} \delta^{h}_{j} + m^{1s}_{\lambda \underline{k}} p_{s\underline{j}} \delta^{h}_{i} + m^{1s}_{\lambda \underline{j}} p_{s\underline{i}} \delta^{h}_{k} = 0$$

или

$$\delta^{h}_{j}(m^{1}_{\lambda \underline{i}|\underline{k}} + m^{1s}_{\lambda \underline{i}} p_{s\underline{k}}) + \delta^{h}_{i}(m^{1s}_{\lambda \underline{k}} p_{s\underline{j}} + m^{1}_{\lambda \underline{k}|\underline{j}}) + \delta^{h}_{k}(m^{1}_{\lambda \underline{j}|\underline{i}} + m^{1s}_{\lambda \underline{j}} p_{s\underline{i}}) = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание лемму [2.2] работы [1], §4, приходим к (2.I5).

Таким образом, имеет место следующая основная теорема:

Т е о р е м а [2.3]. Оснащенная регулярная m-мерная гиперполоса с ассоциированной связностью $X(\Gamma_m)$ проективного пространства P_n определяется с точностью до проективного преобразования заданием в составном многообразии $X_{n(m)}$ объекта связности $\Pi_i \{\Pi^{h}_{ij}, \Pi^{\alpha}_{\beta i}, \Pi^{1}_{1i}, \Pi^{o}_{oi}, \Pi^{\chi}_{\lambda i}\}$ и тензоров $p_{ij}, b^{o}_{1ij}, b^{\lambda}_{1ij}, m^{1}_{oi}, n^{\lambda}_{oi}, m^{1h}_{oi}, m^{1}_{\lambda i}, m^{1h}_{\lambda i}$, удовлетворяющих в общем случае условиям (2.5)′-(2.I9) и, если $\tau = rang \| b^{o}_{1ij} \| > 2$, условиям (2.6)-(2.I0),(2.I6)-(2.I9),(2.5)′.

Не все основные тензоры оснащенной регулярной гиперполосы

являются независимыми. Так из соотношений (2.8) и (2.5),(2.I0), (2.I9),(2.II) при $m \neq 1$ находим, что

$$m^{1h}_{ok} = \frac{1}{m-1} b^{1ij}_{o} (R^{h}_{ijk} + \delta^{h}_{i} p_{\underline{j}\underline{k}} + \delta^{h}_{\underline{j}} p_{i\underline{k}} + b^{\lambda}_{1i\underline{k}} m^{1h}_{\lambda \underline{j}}),$$

$$n^{\lambda}_{ok} = \frac{1}{m-1} \cdot b^{1ij}_{o} b^{\lambda}_{1i\underline{k}|\underline{j}}, \qquad (2.22)$$

$$m^{1}_{\lambda i} = \frac{1}{m-1} \cdot m^{1h}_{\lambda \underline{h}|\underline{i}},$$

$$m^{1}_{ok} = \frac{1}{m-1} b^{1ij}_{o} \cdot p_{i\underline{k}|\underline{j}} + \frac{1}{(m-1)^2} b^{1ij}_{o} b^{\lambda}_{1ij} m^{1h}_{\lambda \underline{k}|\underline{h}} + \frac{1}{(m-1)^2} b^{1ij}_{o} b^{\lambda}_{1ik} \cdot m^{1h}_{\lambda \underline{h}|\underline{j}}.$$

Следовательно,

Т е о р е м а [2.4]. Оснащенная регулярная m-мерная гиперполоса с ассоциированной связностью $X(\Gamma_m)$ (где $m \neq 1$) проективного пространства P_n определяется с точностью до проективного преобразования заданием в составном многообразии $X_{n(m)}$ объекта связности Π_i и тензоров $p_{ij}, b^{o}_{1ij}, b^{\lambda}_{1ij}, m^{1h}_{\lambda i}$, удовлетворяющих условиям (2.5)′-(2.I9), а при $\tau = rang \| b^{o}_{1ij} \| > 2$ - условиям (2.5)′(2.6)-(2.I0),(2.I6)-(2.I9), где тензоры $m^{1h}_{ok}, n^{\lambda}_{ok}, m^{1}_{\lambda i}, m^{1}_{ok}$ определяются из соотношений (2.22).

По тензорам b^{λ}_{1ij} и n^{λ}_{oi} можно определить погружена ли базисная поверхность гиперполосы $X(\Gamma_m)$ в $P_{n'} \subset P_n$, где $n' < n$.

Т е о р е м а [2.5]. Для того, чтобы базисная поверхность оснащенной регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m) \subset P_n$ лежала в $P_{m+p} \subset P_n$ (где $m+p < n$), необходимо и достаточно, чтобы при произвольном оснащении существовала такая система координат в N_{n-m}, в которой

$$b^{\chi_2}_{1ij} = 0, \quad n^{\chi_2}_{oi} = 0, \quad \Gamma^{\rho_2}_{\chi_2 i} = 0, \qquad (2.23)$$

где

$$\varkappa_1 = 1, 2, \ldots, p-1; \quad \rho_2, \varkappa_2 = p, p+1, \ldots, n-m-1.$$

Доказательство этого предложения совершенно аналогично доказательству теоремы [4.7] работы [I], §4.

Как следствие этой теоремы имеем предложение:

Т е о р е м а [2.6]. Для того, чтобы базисная поверхность оснащенной регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m)$ была выгнута в P_{m+1}, необходимо и достаточно, чтобы при произвольном оснащении существовала такая система координат в N_{n-m}, в которой

$$b^{\lambda}_{1ij} = 0, \quad n^{\lambda}_{0i} = 0 \qquad (2.24)$$

Выясним геометрический смысл связности Π^{k}_{ij}, определяемой соотношением (I.5).

Пусть a^i -произвольный ненулевой вектор базисного многообразия оснащенной гиперполосы. Поставим этому вектору в соответствие точку $A^{\alpha}_1 = a^i M^{\alpha}_{1|i}$, принадлежащую нормали второго рода. Легко видеть, что коллинеарным векторам соответствует одна и та же точка, поэтому её называют нормальной точкой [3], § 105, соответствующей направлению вектора a^i. Верно и обратное предложение.

Рассмотрим параллельное перенесение произвольного направления a^i, заданного в некоторой точке M^{α}_1 базисной поверхности, в бесконечно близкую точку $\widetilde{M}^{\alpha}_1$:

$$\delta a^i = a^i_{|j}\, dx^j = \lambda a^i \qquad (2.25)$$

Используя основные уравнения (2.1), покажем, что при параллельном переносе a^i (2.25) точка $\delta A^{\alpha}_1 = A^{\alpha}_{1|i}\, dx^i$ представляет собой

линейную комбинацию точек $A^{\alpha}_1, M^{\alpha}_1, X^{\alpha}_0, X^{\alpha}_{\lambda}$

$$\delta A^{\alpha}_1 = (a^i M^{\alpha}_{1|i})_{|j}\, dx^j = a^i_{|j}\, dx^j M^{\alpha}_{1|i} + a^i dx^j M^{\alpha}_{1|ij} =$$

$$= \lambda A^{\alpha}_1 + a^i dx^j p_{ij} M^{\alpha}_1 + b^{0}_{1ij} a^i dx^j X^{\alpha}_0 + b^{\lambda}_{1ij} a^i dx^j X^{\alpha}_{\lambda},$$

то есть бесконечно малое смещение нормальной точки A^{α}_1, соответствующей направлению a^i, происходит в плоскости $P_{n-m-1}\{M^{\alpha}_1, X^{\alpha}_0, X^{\alpha}_{\lambda}, A^{\alpha}_1\}$, содержащей нормаль I-го рода N_{n-m}.

Таким образом, связность Π^{k}_{ij} является внутренней связностью первого рода, оснащенной гиперполосы в смысле А.П.Нордена [3], § 56.

§ 3. Двойственная теория гиперполосы $X(\Gamma_m)$.

Оснащенная регулярная гиперполоса является образом, который сам себе двойственен, причем точке M^{α}_1 базисной поверхности соответствует главная касательная гиперплоскость T^{0}_{α}, а касательной плоскости T_m базисной поверхности соответствует характеристика P_{n-m-1} семейства главных гиперплоскостей, так как T_m определяется точками $M^{\alpha}_1, M^{\alpha}_{1|i}$, а P_{n-m-1} определяется гиперплоскостями $T^{0}_{\alpha}, T^{0}_{\alpha|i}$. Двойственным образом $(n-m-2)$-мерной плоскости, определяемой точками X^{α}_{λ}, является $(m+1)$-мерная плоскость, определяемая гиперплоскостями T^{λ}_{α}, а для нормали I-го рода $(X^{\alpha}_0, X^{\alpha}_{\lambda}, M^{\alpha}_1)$ двойственным образом является нормаль 2-го рода $(T^{0}_{\alpha}, T^{\lambda}_{\alpha}, P^{1}_{\alpha})$. Итак, точкам $M^{\alpha}_1, X^{\alpha}_0, X^{\alpha}_{\lambda}, M^{\alpha}_{1|i}$, которые определяют контравариантный репер, соответствует в двойственной теории гиперполосы гиперплоскости T^{0}_{α}, P^{1}_{α}, T^{λ}_{α}, $T^{0}_{\alpha|i}$, определяющие ковариантный репер.

Нормаль I-го рода гиперполосы $X(\Gamma_m)$ аналитически может быть задана при помощи коэффициентов связности Π^{0}_{0i}, $\Pi^{\alpha}_{\beta i}$. В самом деле, гиперплоскости $T^{0}_{\alpha|i}=T^{0}_{\alpha,i}+\Pi^{0}_{0i}T^{0}_{\alpha}-\Pi^{\beta}_{\alpha i}T^{0}_{\beta}$ линейно независимы и определяют нормаль I-го рода. Верно и обратное предложение.

Основные уравнения оснащенной регулярной гиперполосы, двойственные уравнениям (2.I)-(2.3), имеют вид:

$$T^{0}_{\alpha\{ij} = \tilde{p}_{ij}T^{0}_{\alpha} + b^{0}_{1ij}P^{1}_{\alpha} + b^{0}_{\lambda ij}T^{\lambda}_{\alpha}. \tag{3.1}$$

$$P^{1}_{\alpha|i} = \tilde{m}^{1k}_{0i}T^{0}_{\alpha|k} - m^{1}_{0i}T^{0}_{\alpha} - m^{1}_{\lambda i}T^{\lambda}_{\alpha} \tag{3.2}$$

$$T^{\lambda}_{\alpha|i} = \tilde{m}^{\lambda k}_{0i}T^{0}_{\alpha|k} - n^{\lambda}_{0i}T^{0}_{\alpha}, \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ij} &= b^{0}_{1ki}\, m^{1k}_{0j}, \\ b^{0}_{\lambda ij} &= m^{1k}_{\lambda j}\, b^{0}_{1ki}, \\ \tilde{m}^{1k}_{0i} &= b^{1kl}_{0}\, p_{li}, \\ \tilde{m}^{\lambda k}_{0i} &= b^{\lambda}_{1li}\, b^{1lk}_{0}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

а знак " $\{$ " означает дифференцирование относительно объекта связности F_i двойственного Π_i.

Объект связности F_i состоит из аффинной связности

$$F^{k}_{ij} = T^{0}_{\alpha,ij}S^{\alpha k}_{0} - 2T^{0}_{\alpha,(i}X^{\alpha}_{|0|}\delta^{k}_{j)} \tag{3.5}$$

двойственной Π^{k}_{ij} и псевдосвязностей

$$\begin{aligned} F^{0}_{0i} &= -\Pi^{0}_{0i}, \\ F^{1}_{1i} &= -\Pi^{1}_{1i}, \\ F^{\varkappa}_{\lambda i} &= -\Pi^{\varkappa}_{\lambda i}, \\ F^{\alpha}_{\beta i} &= -\Pi^{\alpha}_{\beta i}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Так как псевдосвязность F^{1}_{1i} двойственна Π^{0}_{0i}, F^{0}_{0i} -двойственна Π^{1}_{1i}, а $F^{\alpha}_{\beta i}$ -двойственна $\Pi^{\alpha}_{\beta i}$, то формула дифференцирования относительно связности F_i имеет следующий вид:

$$A^{\alpha 0}_{\lambda 1i|j} = A^{\alpha 0}_{\lambda 1i,j} - F^{0}_{0j}A^{\alpha 0}_{\lambda 1i} - F^{\alpha}_{\beta j}A^{\beta 0}_{\lambda 1i} + F^{\varkappa}_{\lambda j}A^{\alpha 0}_{\varkappa 1i} + $$
$$+ F^{1}_{1j}A^{\alpha 0}_{\lambda 1i} + F^{k}_{ij}A^{\alpha 0}_{\lambda 1k}. \tag{3.7}$$

Из неё вытекает, что

$$A^{\alpha 0}_{\lambda 1\{j} = A^{\alpha 0}_{\lambda 1,j} + \Pi^{0}_{0j}A^{\alpha 0}_{\lambda 1} + \Pi^{\alpha}_{\beta j}A^{\beta 0}_{\lambda 1} - \Pi^{1}_{1j}A^{\alpha 0}_{\lambda 1} - \Pi^{\varkappa}_{\lambda j}A^{\alpha 0}_{\varkappa 1} = A^{\alpha 0}_{\lambda 1|j}. \tag{3.8}$$

В силу (3.8) в уравнениях (3.2) и (3.3) вместо знака " $\{$ " стоит знак " $|$ ".

Условия интегрируемости системы уравнений (3.I)-(3.3) имеют следующий вид:

$$R^{\alpha}_{\beta ij} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{3.9'}$$

$$R^{\alpha}_{\alpha ij} - R^{0}_{0ij} = \tilde{p}_{ij}, \text{ (по } \alpha \text{ не суммировать)} \tag{3.9}$$

$$b^{0}_{1[ij]} = 0, \tag{3.10}$$

$$b^{0}_{\lambda i \underline{j}} = 0, \tag{3.11}$$

$$\widetilde{R}^{h}_{ijk} - R^{0}_{0jk}\delta^{h}_{i} + \delta^{h}_{i} R^{\alpha}_{\alpha jk} = \widetilde{p}_{i\underline{j}}\delta^{h}_{\underline{k}} + b^{0}_{1i\underline{j}}\widetilde{m}^{1h}_{0\underline{k}} + b^{0}_{\lambda i\underline{j}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{0\underline{k}}, \tag{3.12}$$

$$b^{0}_{1i\underline{j}\{\underline{k}} = 0, \tag{3.13}$$

$$b^{\lambda}_{1ij\{\underline{k}} - b^{0}_{1i\underline{j}} m^{1}_{\lambda \underline{k}} = 0, \tag{3.14}$$

$$\widetilde{p}_{i\underline{j}\{\underline{k}} - b_{1i\underline{j}} m^{1}_{0\underline{k}} - b^{0}_{\lambda i\underline{j}} n^{\lambda}_{0\underline{k}} = 0, \tag{3.15}$$

$$R^{1}_{1ij} - R^{\alpha}_{\alpha ij} = b^{0}_{1h\underline{i}}\widetilde{m}^{1h}_{0\underline{j}}, \tag{3.16}$$

$$\widetilde{m}^{1k}_{0\underline{i}}\widetilde{p}_{kj} - m^{1}_{0\underline{i}\{\underline{j}} + m^{1}_{\lambda\underline{i}} n^{\lambda}_{0\underline{j}} = 0, \tag{3.17}$$

$$\widetilde{m}^{1h}_{0\underline{i}} b^{0}_{\lambda hj} - m^{1}_{\lambda\underline{i}\{\underline{j}} = 0, \tag{3.18}$$

$$\widetilde{m}^{\lambda h}_{0\underline{i}} p_{h\underline{j}} - n^{\lambda}_{0\underline{i}\{\underline{j}} = 0, \tag{3.19}$$

$$\widetilde{m}^{1h}_{0\underline{i}\{\underline{j}} - m^{1}_{0\underline{i}}\delta^{h}_{\underline{j}} - m^{1}_{\lambda\underline{i}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{0\underline{j}} = 0, \tag{3.20}$$

$$R^{\varkappa}_{\lambda ij} - \delta^{\varkappa}_{\lambda} R^{\alpha}_{\alpha ij} = b^{0}_{\varkappa h\underline{i}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{0\underline{j}}, \tag{3.21}$$

$$\widetilde{m}^{\lambda h}_{0\underline{i}} b^{0}_{1h\underline{j}} = 0, \tag{3.22}$$

$$\widetilde{m}^{\lambda h}_{0\underline{i}\{\underline{j}} - n^{\lambda}_{0\underline{i}}\delta^{h}_{\underline{j}} = 0. \tag{3.23}$$

Аналогично, как это было рассмотрено в §2, показывается, что

а) условия (3.9), (3.15), (3.17), (3.19) являются следствиями остальных, если $m \neq 2$,

б) и если ранг тензора b^{0}_{1ij} больше двух, то условие (3.16) является следствием условий (3.12)-(3.19), (3.22), а условие (3.18) является следствием (3.11)-(3.14), (3.21).

Имеют место следующие основные теоремы, двойственные теоре[мам] [2.3] и [2.4]:

Т е о р е м а [3.1]. Оснащенная регулярная m-мерная гиперполоса с ассоциированной связностью $X(\Gamma_m)$ проективного пространства P_n определяется с точностью до проективного преобразования заданием в составном многообразии $X_{n(m)}$ объекта связности $F_i\{F^{h}_{ij}, F^{\alpha}_{\beta i}, F^{1}_{1i}, F^{0}_{0i}, F^{\varkappa}_{\lambda i}\}$ и тензоров $\widetilde{p}_{ij}, b^{0}_{1ij}, b^{\lambda}_{\lambda ij}, m^{1}_{0i}, m^{1}_{\lambda i}, \widetilde{m}^{1h}_{0i}, n^{\lambda}_{0i}, \widetilde{m}^{\lambda h}_{0i}$, удовлетворяющих в общем случае условиям (3.9)′-(3.23), а при $\tau > 2$ – условиям (3.10)-(3.14), (3.20)-(3.23), (3.9)′.

Т е о р е м а [3.2]. Оснащенная регулярная m-мерная гиперполоса с ассоциированной связностью $X(\Gamma_m)$ (где $m \neq 1$) проективного пространства P_n определяется с точностью до проективного преобразования заданием в составном многообразии $X_{n(m)}$ объекта связности F_i и тензоров $b^{0}_{1ij}, \widetilde{p}_{ij}, b^{0}_{\lambda ij}, \widetilde{m}^{\lambda h}_{0i}$, удовлетворяющих условиям (3.9)′-(3.23), а при $\tau > 2$ – условиям (3.9)′, (3.10)-(3.14), (3.20)-(3.23), где

$$\widetilde{m}^{1h}_{0k} = \frac{1}{m-1}\cdot b^{1ij}_{0}\left(\widetilde{R}^{h}_{ijk} + \delta^{h}_{i}\widetilde{p}_{\underline{j}\underline{k}} + \delta^{h}_{\underline{j}}\widetilde{p}_{i\underline{k}} - b^{0}_{\lambda i\underline{j}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{0\underline{k}}\right),$$

$$m^{1}_{\lambda k} = \frac{1}{m-1}\cdot b^{1ij}_{0} b^{0}_{\lambda i\underline{k}\{\underline{j}},$$

$$m^{\lambda}_{0k} = \frac{1}{m-1}\cdot \widetilde{m}^{\lambda h}_{0\underline{h}\{\underline{k}},$$

$$\widetilde{m}^{1}_{0k} = \frac{1}{m-1}\cdot b^{1ij}_{0}\widetilde{p}_{i\underline{k}\{\underline{j}} + \frac{1}{(m-1)^2}\cdot\left(b^{1ij}_{0} b^{0}_{\lambda ij}\widetilde{m}^{\lambda h}_{0\underline{k}\{\underline{h}} + b^{1ij}_{0} b^{0}_{\lambda i\underline{k}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{0\underline{h}\{\underline{j}}\right).$$

Связность F^{k}_{ij} является внутренней связностью 2-го рода, оснащенной регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m)$. Таким образом, используя соответствующее предложение А.П.Нордена [3], §62, мы приходим к выводу, что связности Π^{k}_{ij} и F^{k}_{ij} сопряжены относительно главного фундаментального тензора b^{o}_{1ij}.

Литература:

[1]. Атанасян Л.С., К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства. "Ученые зап. МГПИ им. В.И.Ленина, 1957, 108, вып.2, с.3-44.

[2]. Попов Ю.И., К теории оснащенной гиперполосы в многомерном проективном пространстве. "Уч.зап. МГПИ им. В.И.Ленина, 1970, 374, том.I, с.102-117.

[3]. Норден А.П., Пространства аффинной связности. ГИТТЛ, 1950.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

ПОХИЛА М.М.

О ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ МНОГООБРАЗИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В n-мерном проективном пространстве рассматриваются $(n-1)$-мерные пары многообразий (Φ_1), (Φ_2) квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 [3] с несовпадающими гиперплоскостями τ_1, τ_2. Через A_0 и A_n обозначаются полюса $(n-2)$-плоскости τ пересечения гиперплоскостей τ_1 и τ_2 относительно Φ_1 и Φ_2.

Пара многообразий (Φ_1), (Φ_2) называется парой $V_{n-1,n}$ если точки A_0 и A_n не инцидентны $(n-2)$-плоскости τ.

Для пары $V_{n-1,n}$ построено инвариантное оснащение гиперповерхностей (A_0) и (A_n), найдены и охарактеризованы различные инвариантные точки, прямые $(n-1)$, $(n-2)$ и $(n-3)$-мерные плоскости. В случае пар $V^{o}_{n-1,n}$, у которых A_0 и A_n являются характеристическими точками гиперплоскостей τ_1 и τ_2, найдены пучки соприкасающихся гиперповерхностей (A_0) и (A_n).

Рассматриваемые в работе индексы принимают следующие значения

$$a, b, c = 0, 1, \dots, n-1, n \, ; \qquad i, j, k = 1, 2, \dots, n-2, n-1 \, ;$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, n-2, n-1 \, ; \qquad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n-1, n .$$

§ 1. Дифференциальные уравнения пары $V_{n-1,n}$.

Присоединим к паре $V_{n-1,n}$ подвижной репер $R=\{A_\alpha\}$, расположив вершины A_i в $(n-2)$-плоскости τ. Уравнения квадратичных элементов Φ_1 и Φ_2 принимают вид:

$$(x^0)^2 + a_{ij} x^i x^j = 0, \quad x^n = 0, \tag{1.1}$$

$$(x^n)^2 + A_{ij} x^i x^j = 0, \quad x^0 = 0, \tag{1.2}$$

где

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0, \quad \det(A_{ij}) \neq 0. \tag{1.3}$$

Так как совокупность гиперплоскостей $\tau_2\,(\tau_1)$ зависит от $(n-1)$-го параметра, то между формами $\omega^0_\lambda\,(\omega^n_\lambda)$ существует одна и только одна линейная зависимость.

Теорема 1. Для того, чтобы характеристическая точка $K_2(K_1)$ гиперплоскости $\tau_2\,(\tau_1)$ была инцидентна $(n-2)$-плоскости τ необходимо и достаточно, чтобы формы $\omega^0_i\,(\omega^n_i)$ были линейно зависимы.

Доказательство. Точка

$$M = x^\lambda A_\lambda \tag{1.4}$$

тогда и только тогда является характеристической точкой гиперплоскости τ_2, когда на паре $V_{n-1,n}$ выполняется уравнение

$$x^\lambda \omega^0_\lambda = 0, \tag{1.5}$$

левая часть которого не обращается в нуль тождественно. При $x^n=0$ и только при этом условии возникает линейная зависимость между формами ω^0_i.

Аналогично доказывается утверждение теоремы для характеристической точки гиперплоскости τ_1.

Следствие. Выберем, как и в [4], формы $\omega^0_i = \omega_i$ за базисные. Из рассмотрения исключены пары $V_{n-1,n}$, для которых характеристическая точка K_2 гиперплоскости τ_2 инцидентна $(n-2)$-плоскости τ пересечения гиперплоскостей τ_1 и τ_2.

Система дифференциальных уравнений пары $V_{n-1,n}$ запишется в виде:

$$\omega^0_n = a^j_n \omega_j, \quad \omega^\lambda_0 = \Gamma^{\lambda j}_0 \omega_j, \quad \omega^i_n = \Gamma^{ij}_n \omega_j, \quad \omega^n_i = \Gamma^{nj}_i \omega_j,$$

$$\nabla a_{ij} + 2 a_{ij}\omega^0_0 = b^k_{ij}\omega_k, \quad \nabla A_{ij} + 2A_{ij}\omega^n_n = B^k_{ij}\omega_k, \tag{1.6}$$

где

$$b^k_{ij} = b^k_{ji}, \quad B^k_{ij} = B^k_{ji} \tag{1.7}$$

Система величин

$$\Gamma = \{a_{ij}, A_{ij}, a^i_n, \Gamma^{\lambda i}_0, \Gamma^{nj}_i, \Gamma^{ij}_n, b^k_{ij}, B^k_{ij}\} \tag{1.8}$$

образует основной фундаментальный объект [2] пары $V_{n-1,n}$ (см. [4]).

Продолжая (1,6), получим систему дифференциальных уравнений локального фундаментального объекта Γ:

$$\delta a_{ij} = a_{kj}\pi^k_i + a_{ik}\pi^k_j - 2a_{ij}\pi^0_0, \tag{1.9}$$

$$\delta A_{ij} = A_{kj}\pi^k_i + A_{ik}\pi^k_j - 2A_{ij}\pi^n_n, \tag{1.10}$$

$$\delta a^i_n = -a^j_n \pi^i_j + a^i_n \pi^n_n, \tag{1.11}$$

$$\delta\Gamma^{ni}_0 = -\Gamma^{nj}_0\pi^i_j + \Gamma^{ni}_0(2\pi^0_0 - \pi^n_n), \tag{1.12}$$

$$\delta\Gamma^{ij}_0 = -\Gamma^{kj}_0\pi^i_k - \Gamma^{ik}_0\pi^j_k + 2\Gamma^{ij}_0\pi^0_0, \tag{1.13}$$

$$\delta\Gamma^{ij}_{n} = -\Gamma^{kj}_{n}\pi^{i}_{k} - \Gamma^{ik}_{n}\pi^{j}_{k} + \Gamma^{ij}_{n}(\pi^{0}_{0} + \pi^{n}_{n}), \tag{1.14}$$

$$\delta\Gamma^{nj}_{i} = \Gamma^{nj}_{k}\pi^{k}_{i} - \Gamma^{nk}_{i}\pi^{j}_{k} + \Gamma^{nj}_{i}(\pi^{0}_{0} - \pi^{n}_{n}), \tag{1.15}$$

$$\delta b^{k}_{ij} = b^{k}_{\ell j}\pi^{\ell}_{i} + b^{k}_{i\ell} - b^{\ell}_{ij}\pi^{k}_{\ell} - b^{k}_{ij}\pi^{0}_{0}, \tag{1.16}$$

$$\delta B^{k}_{ij} = B^{k}_{\ell j}\pi^{\ell}_{i} + B^{k}_{i\ell}\pi^{\ell}_{j} - B^{\ell}_{ij}\pi^{k}_{\ell} - B^{k}_{ij}(2\pi^{n}_{n} - \pi^{0}_{0}) \tag{1.17}$$

Из уравнений (I.9)-(I.17) следует, что каждая из систем величин

$$\{a_{ij}\},\ \{A_{ij}\},\ \{a^{i}_{n}\},\ \{\Gamma^{ni}_{0}\}, \tag{1.18}$$

$$\{\Gamma^{ij}_{0}\},\ \{\Gamma^{ij}_{n}\},\ \{\Gamma^{nj}_{i}\},\ \{b^{k}_{ij}\},\ \{B^{k}_{ij}\}$$

образует тензор. Обозначим:

$$\Gamma_0 = \Gamma^{ni}_{i},\quad \Gamma_1 = \det(\Gamma^{ij}_{0}), \tag{1.19}$$

$$\Gamma_2 = \det(\Gamma^{ij}_{n}),\quad \Gamma_3 = \det(\Gamma^{nj}_{i}).$$

Используя (I.13)-(I.15), находим

$$\delta\Gamma_0 = \Gamma_0(\pi^{0}_{0} - \pi^{n}_{n}),\quad \delta\Gamma_1 = 2\Gamma_1[(n-1)\pi^{0}_{0} - \pi^{i}_{i}], \tag{1.20}$$

$$\delta\Gamma_2 = \Gamma_2[(n-1)(\pi^{0}_{0} + \pi^{n}_{n}) - 2\pi^{i}_{i}],\quad \delta\Gamma_3 = \Gamma_3(\pi^{0}_{0} - \pi^{n}_{n})(n-1)$$

Следовательно величины $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ являются относительными инвариантами пары $V_{n-1,n}$. Исключая из рассмотрения пары $V_{n-1,n}$, у которых характеристическая точка K_1 гиперплоскости τ_1 инцидентна (n-2)-плоскости τ, имеем

$$\Gamma_3 \neq 0,$$

условие $\Gamma_0 = 0$ означает, что проективное преобразование $\overset{*}{x}{}^{j} = \rho\Gamma^{nj}_{i}x^{i}$ (n-2)-плоскости τ является преобразованием W [1].

В следующем параграфе рассмотрены пары $V_{n-1,n}$ у которых $A_0 \neq K_1$ и $A_n \neq K_2$.

§ 2. Геометрические образы, ассоциированные с парой $V_{n-1,n}$.

Точки A_0 и A_n, ассоциированные с парой $V_{n-1,n}$, описывают в общем случае гиперповерхности (A_0) и (A_n). Таким образом, каждая из систем форм $\{\omega^{\lambda}_{0}\}$ и $\{\omega^{\alpha}_{n}\}$ содержит (n-1) линейно независимых форм.

Рассмотрим (n-2)-мерные плоскости η_1 и η_2, определяемые линейно независимыми системами точек

$$C^{i} = \Gamma^{ji}_{0}A_{j} + \Gamma^{ni}_{0}A_{n},\quad \mathcal{D}^{i} = a^{i}_{n}A_{0} + \Gamma^{ji}_{n}A_{j}. \tag{2.1}$$

Так как

$$\delta C^{i} = C^{k}(-\pi^{i}_{k} + 2\delta^{i}_{k}\pi^{0}_{0}),\quad \delta\mathcal{D}^{i} = \mathcal{D}^{k}[-\pi^{i}_{k} + \delta^{i}_{k}(\pi^{0}_{0} + \pi^{n}_{n})], \tag{2.2}$$

то (n-2)-плоскости η_1 и η_2 инвариантно присоединены к паре $V_{n-1,n}$.

Т е о р е м а 2. (n-2)-плоскость η_1 (η_2) является плоскостью пересечения гиперплоскости τ_2 (τ_1) с касательной гиперплоскостью ξ_1 (ξ_2) гиперповерхности (A_0) $((A_n))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя деривационные формулы репера R находим

$$dA_0 = \omega^{0}_{0}A_0 + \omega_i C^{i},\quad dA_n = \omega_i\mathcal{D}^{i} + \omega^{n}_{n}A_n \tag{2.3}$$

Из формул (2.3) непосредственно вытекает утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. (n-2)-плоскость η_1 (η_2) является нормалью второго рода гиперповерхности (A_0) $((A_n))$.

Т е о р е м а 3. Равенство нулю относительного инварианта Γ_1 (Γ_2) характеризует инцидентность точки A_n (A_0) касательной гиперплоскости

$\epsilon_1(\epsilon_2)$ к гиперповерхности $(A_0)((A_n))$.

Доказательство. Так как касательная гиперплоскость ϵ_1 к гиперповерхности (A_0) определяется точками A_0, $C^1_1, \dots, C^{n-1}$, то для инцидентности точки A_n гиперплоскости ϵ_1 должно выполняться условие

$$(A_0, C^1, \dots, C^{n-1}, A_n) = 0. \tag{2.4}$$

Учитывая в (2.4) формулы (2.1), получим $\Gamma_1 = 0$.

Аналогично доказывается другая часть теоремы. Исключая из рассмотрения случай инцидентности точки $A_n(A_0)$ гиперплоскости $\epsilon_1(\epsilon_2)$, мы будем считать в дальнейшем, что

$$\Gamma_1 \neq 0, \quad \Gamma_2 \neq 0 \tag{2.5}$$

Элементы матриц (a^{ij}), (A^{ij}), (Γ^0_{ij}), (Γ^n_{ij}), (Γ^i_{nj}), обратных матрицам (a_{ij}), (A_{ij}), (Γ^{ij}_0), (Γ^{ij}_n), (Γ^{nj}_i), удовлетворяют следующим системам дифференциальных уравнений:

$$\delta a^{ij} = -a^{lj}\pi^i_l - a^{il}\pi^j_l + 2a^{ij}\pi^0_0, \tag{2.6}$$

$$\delta A^{ij} = -A^{lj}\pi^i_l - A^{il}\pi^j_l + 2A^{ij}\pi^n_n. \tag{2.7}$$

$$\delta\Gamma^0_{ij} = \Gamma^0_{lj}\pi^l_i + \Gamma^0_{il}\pi^l_j - 2\Gamma^0_{ij}\pi^0_0, \tag{2.8}$$

$$\delta\Gamma^n_{ij} = \Gamma^n_{lj}\pi^l_i + \Gamma^n_{il}\pi^l_j - \Gamma^n_{ij}(\pi^0_0 + \pi^n_n), \tag{2.9}$$

$$\delta\Gamma^i_{nj} = \Gamma^i_{nl}\pi^l_j - \Gamma^l_{nj}\pi^i_l - (\pi^0_0 - \pi^n_n)\Gamma^i_{nj} \tag{2.10}$$

Из (2.6)-(2.10) непосредственно следует, что каждая система величин $\{a^{ij}\}$, $\{A^{ij}\}$, $\{\Gamma^0_{ij}\}$, $\{\Gamma^n_{ij}\}$, $\{\Gamma^i_{nj}\}$ образует тензор.

Теорема 4. Пара $V_{n-1,n}$ тогда и только тогда является

парой $V^0_{n-1,n}$, когда тензоры $\{a^i_n\}$ и $\{\Gamma^{ni}_0\}$ - нулевые.

Доказательство. Характеристические точки K_1 и K_2 гиперплоскостей τ_1 и τ_2 определяются формулами

$$K_1 = A_0 - \Gamma^{nk}_0\Gamma^i_{nk}A_i, \quad K_2 = -a^i_n A_i + A_n \tag{2.11}$$

Так как

$$\det(\Gamma^i_{nk}) \neq 0, \tag{2.12}$$

то характеристическим признаком совпадения точек K_1 и K_2 с A_0 и A_n является обращение в нуль тензоров Γ^{ni}_0 и a^i_n.

Обозначим

$$c^{ij} = \Gamma^{ij}_0 + a^i_n\Gamma^{nj}_0, \quad d^{ij} = \Gamma^{ij}_n + \Gamma^{nl}_0\Gamma^i_{nl}a^j_n,$$

$$C = \det(c^{ij}), \quad \mathcal{D} = \det(d^{ij}) \tag{2.13}$$

Используя (1.11)-(1.14) и (2.10) находим:

$$\delta c^{ij} = -c^{kj}\pi^i_k - c^{ik}\pi^j_k + 2c^{ij}\pi^0_0,$$

$$\delta d^{ij} = -d^{kj}\pi^i_k - d^{ik}\pi^j_k + d^{ij}(\pi^0_0 + \pi^n_n), \tag{2.14}$$

$$\delta C = 2C[(n-1)\pi^0_0 - \pi^i_i], \quad \delta\mathcal{D} = \mathcal{D}[(n-1)(\pi^0_0 + \pi^n_n) - 2\pi^i_i].$$

Теорема 5. Для того, чтобы характеристическая точка $K_2(K_1)$ гиперплоскости $\tau_2(\tau_1)$ была инцидентна гиперплоскости $\epsilon_1(\epsilon_2)$ касательной к гиперповерхности $(A_0)((A_n))$ необходимо и достаточно обращение в нуль относительного инварианта $C(\mathcal{D})$.

Доказательство. Так как касательная гиперплоскость ϵ_1 к гиперповерхности (A_0) определяется точками $A_0, C^1, \dots, C^{n-1}$, то для инцидентности точки K_2 гиперплоскости ϵ_1 должно выполнятьоя условие

$$(A_0, C^1, \dots, C^{n-1}, K_2) = 0 \qquad (2.15)$$

Учитывая в (2.15) формулы (2.I) и (2.II), получим $C = 0$.

Аналогично доказывается другая часть теоремы.

Пусть

$$\mathcal{M}_1 = \Gamma_0^{nk} a_n^\ell \Gamma_{nk}^i \Gamma_{i\ell}^n A_0 + \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^i A_i .$$

$$(2.16)$$

$$\mathcal{M}_2 = a_n^i A_i + a_n^\ell \Gamma_0^{nk} \Gamma_{\ell k}^0 A_n .$$

Т е о р е м а 6. Прямая A_0K_1 (A_nK_2) пересекает гиперплоскость ξ_2 (ξ_1), касательную к гиперповерхности (A_n) $((A_0))$, в точке $\mathcal{M}_1$ $(\mathcal{M}_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (2.I) и (2.II) находим:

$$\mathcal{M}_1 = \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^\ell \Gamma_{\ell i}^0 \mathcal{D}^i, \quad M_1 = (\Gamma_0^{nk} a_n^\ell \Gamma_{nk}^i \Gamma_{i\ell}^n + 1) A_0 - K_1 ,$$

$$(2.17)$$

$$\mathcal{M}_2 = a_n^j \Gamma_{ji}^0 C^i , \quad M_2 = (a_n^i \Gamma_0^{nj} \Gamma_{ij}^0 + 1) A_n - K_2 .$$

Из (2.17) непосредственно следует

$$\mathcal{M}_1 \equiv A_0 K_1 \cap \xi_2 , \quad M_2 \equiv A_n K_2 \cap \xi_1 . \qquad (2.18)$$

Обозначим

$$\rho_1 = \Gamma_0^{nk} a_n^\ell \Gamma_{nk}^i \Gamma_{i\ell}^n , \quad \rho_2 = a_n^i \Gamma_0^{nj} \Gamma_{ij}^0 . \qquad (2.19)$$

Так как $\delta\rho_1 = 0$, $\delta\rho_2 = 0$, то ρ_1 и ρ_2 -абсолютные инварианты. Равенство $\rho_1 = -1$ $(\rho_2 = -1)$ характеризует совпадение точки с точкой K_1 (точки M_2 с точкой K_2); равенство $\rho_1 = 0$ $(\rho_2 = 0)$ означает совпадение точки M_1 с точкой $P_1 \equiv A_0K_1 \cap \tau$ (точки M_2 с точкой $P_2 \equiv A_nK_2 \cap \tau$); равенство $\rho_1 = 1$ $(\rho_2 = 1)$

означает, что точка M_1 (M_2) совпадает с точкой $\mathcal{L}_1$ $(\mathcal{L}_2)$ гармонически сопряженной с K_1 (K_2) относительно точек A_0 и P_1 (A_n и P_2).

Пусть

$$\tau_1 = a_{ij} a_n^i \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^j , \quad \tau_2 = A_{ij} a_n^i \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^j \qquad (2.20)$$

а $\tilde{\Phi}_1$, $\tilde{\Phi}_2$ — $(n-3)$-мерные квадрики, определяемые соответственно уравнениями

$$a_{ij} x^i x^j = 0 , \quad x^0 = 0 , \quad x^n = 0 ,$$

$$(2.21)$$

$$A_{ij} x^i x^j = 0 , \quad x^0 = 0 , \quad x^n = 0 .$$

Используя (I.9)-(I.I2) и (2.I0), находим

$$\delta\tau_1 = (\pi_n^n - \pi_0^0)\tau_1 , \quad \delta\tau_2 = (\pi_0^0 - \pi_n^n)\tau_2 . \qquad (2.22)$$

Равенство нулю относительного инварианта τ_1 (τ_2) означает, что точки P_1 и P_2 гармонически сопряжены относительно $\tilde{\Phi}_1$ $(\tilde{\Phi}_2)$.

Каждая из точек $A_n, K_2, P_2, \mathcal{L}_2$ (если они отличны от M_2) определяют оснащение гиперповерхности (A_0). Аналогично, каждая точка $A_0, K_1, P_1, \mathcal{L}_1$ (если они отличны от M_1) определяют оснащение гиперповерхности (A_n).

Рассмотрим линейные подпространства

$$x^0 - a_{ij} \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^i x^j = 0 , \quad x^n = 0 ; \qquad (2.23)$$

$$A_{ij} \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^i x^j = 0 , \quad x^0 = 0 ; \qquad (2.24)$$

$$A_{ij} a_n^i x^j - x^n = 0 , \quad x^0 = 0 ; \qquad (2.25)$$

$$a_{ij}\Gamma^{mk}_{0}\Gamma^{i}_{mk}x^{j}=0, \quad x^{0}=0, \quad x^{n}=0; \tag{2.26}$$

$$a_{ij}a^{i}_{n}x^{j}=0, \quad x^{0}=0, \quad x^{n}=0; \tag{2.27}$$

$$A_{ij}a^{i}_{n}x^{j}=0, \quad x^{0}=0, \quad x^{n}=0; \tag{2.28}$$

Используя условия

$$dx^{a}=-x^{b}\omega^{a}_{b}+\theta x^{a} \tag{2.29}$$

стационарности точки в P_n и уравнения (1.9)-(1.12),(2.10) убеждаемся, что каждое из этих линейных подпространств инвариантно. $(n-2)$-плоскости (2.23),(2.24),(2.25) являются полярами соответственно точки K_1 относительно Φ_1, точки P_1 относительно Φ_2, точки K_2 относительно Φ_2. $(n-3)$-плоскости (2.26),(2.27),(2.28) являются полярами соответственно точки P_1 относительно Φ_1, точки P_2 относительно Φ_1, точки P_2 относительно Φ_2.

§ 3. Характеристика некоторых тензоров пары $V_{n-1,n}$ с помощью преобразования W.

Пусть $m^{k}_{j}=a_{ij}\Gamma^{ik}_{0}$. Так как матрицы (a_{ij}) и (Γ^{ik}_{0}) невырождены, то матрица (m^{k}_{j}) -невырождена и, следовательно, тензор m^{k}_{j} определяет проективное преобразование

$$\overset{*}{x}^{k}=\rho m^{k}_{j}x^{j} \tag{3.1}$$

$(n-2)$-плоскости τ. Это преобразование является проективным преобразованием W [1], если абсолютный инвариант $m=m^{i}_{i}$ обращается в нуль, то есть если тензоры a_{ij} и Γ^{ij}_{0} аполярны.

Аналогично тензоры

$$\tilde{m}^{k}_{j}=a_{ij}\Gamma^{ik}_{n}, \quad \mu^{k}_{j}=A_{ij}\Gamma^{ik}_{0}, \quad \tilde{\mu}^{k}_{j}=A_{ij}\Gamma^{ik}_{n} \tag{3.2}$$

определяют проективные преобразования $(n-2)$-плоскости τ:

$$\overset{*}{x}^{k}=\rho\tilde{m}^{k}_{j}x^{j}, \quad \overset{*}{x}^{k}=\rho\mu^{k}_{j}x^{j}, \quad \overset{*}{x}^{k}=\rho\tilde{\mu}^{k}_{j}x^{j}, \tag{3.3}$$

являющиеся преобразованиями W в том случае, если относительные инварианты

$$\tilde{m}=\tilde{m}^{i}_{i}; \quad \mu=\mu^{i}_{i}, \quad \tilde{\mu}=\tilde{\mu}^{i}_{i} \tag{3.4}$$

нулевые, то есть тензоры a_{ij} и Γ^{ij}_{n}, A_{ij} и Γ^{ij}_{0}, A_{ij} и Γ^{ij}_{n} аполярны.

Пусть X -точка $(n-2)$-плоскости τ, t -поляра точки X относительно квадрики $\tilde{\Phi}_1$. $\overset{*}{X}$ -полюс $(n-3)$-плоскости t относительно квадрики $\tilde{\Phi}_2$. Проективное преобразование

$$\overset{*}{x}^{k}=\rho' a_{ij}A^{ik}x^{j} \tag{3.5}$$

отображающее точку X в точку $\overset{*}{X}$, является преобразованием W тогда и только тогда, когда тензоры a_{ij} и A^{ij} аполярны. Аналогично, аполярность тензоров a^{ij} и A_{ij} означает, что преобразование, обратное к (3.5), является преобразованием W. Можно строить инвариантные $(n-3)$-мерные квадрики (гиперквадрики $(n-2)$-плоскости τ) с помощью рассмотрения проективных преобразований инвариантных прямых (например, прямой A_0A_n) пары $V_{n-1,n}$, требуя чтобы эти преобразования были преобразованиями W (инволютивными).

Точке $P=x^{i}A_{i}$ $(n-2)$-плоскости τ ставим в соответствие её поляру относительно Φ_1 (или Φ_2), определяемую тензором $a_i=a_{ij}x^{j}$. Рассмотрим теперь смещение пары фигур (Φ_1,Φ_2) вдоль линии

$$\omega_i=a_i\theta \tag{3.6}$$

где θ -параметрическая форма, $D\theta=\theta\wedge\theta_1$. Пусть

$$Y = y^0 A_0 + y^n A_n \qquad (3.7)$$

любая точка прямой A_0A_n. При смещении вдоль линии (3.6) точка Y описывает кривую, касательная к которой пересекает $(n-2)$-плоскость в точке

$$Z = (y^0\Gamma_0^{ij} + y^n \Gamma_n^{ij})\, a_j A_i . \qquad (3.8)$$

Касательная к линии, описанной точкой Z пересекает прямую A_0A_n в точке

$$\overset{*}{Y} = (y^0\Gamma_0^{ij}+y^n\Gamma_n^{ij})\, a_i a_j A_0 + (y^0\Gamma_0^{kj}+y^n\Gamma_n^{kj})\Gamma_k^{ni}\, a_i a_j A_n . \qquad (3.9)$$

Таким образом точке $P=x^iA_i$ $(n-2)$-плоскости τ ставится в соответствие проективное преобразование прямой A_0A_n, преобразующее точку Y в точку $\overset{*}{Y}$. Это преобразование является преобразованием W (инволюцией), если $(n-3)$-плоскость

$$a_i x^i = 0, \quad x^0 = 0, \quad x^n = 0 \qquad (3.10)$$

инцидентна квадратичному многообразию

$$(\Gamma_0^{ij}+\Gamma_k^{ni}\Gamma_n^{kj})\, a_i a_j = 0 . \qquad (3.11)$$

Точка $P=x^iA_i$ при этом должна быть инцидентна инвариантно присоединенной к паре $V_{n-1,n}$ $(n-3)$-мерной квадрике

$$(\Gamma_0^{ij}+\Gamma_k^{ni}\Gamma_n^{kj})\, a_{i\ell}\, a_{jm}\, x^\ell x^m = 0 , \quad x^0 = 0, \quad x^n = 0 \qquad (3.12)$$

Аналогично строятся поля других инвариантно присоединенных к паре $V_{n-1,n}$ $(n-3)$-мерных квадрик. Величины

$$\Gamma_0^0 = \Gamma_0^{ij}\Gamma_{ij}^0 , \quad \Gamma_0^n = \Gamma_0^{ij}\Gamma_{ij}^n , \quad \Gamma_n^0 = \Gamma_{ij}^0\Gamma_n^{ij} , \quad \Gamma_n^n = \Gamma_n^{ij}\Gamma_{ij}^n \qquad (3.13)$$

являются относительными инвариантами пары $V_{n-1,n}$, равенство нулю которых означает, что соответствующие проективные преобразования $(n-2)$-плоскости τ являются преобразованиями W.

§ 4. Пары $V^0_{n-1,n}$.

Определение. Парой $V^0_{n-1,n}$ многообразий квадратичных элементов будем называть такую пару $V_{n-1,n}$, для которой точки A_0 и A_n являются характеристическими точками гиперплоскостей τ_1 и τ_2 (совпадают с точками K_1 и K_2).

Так как точки A_0, A_n пары $V^0_{n-1,n}$ являются характеристическими точками гиперплоскостей τ_1, τ_2, то

$$\omega_n^0 = 0 , \quad \omega_0^n = 0 . \qquad (4.1)$$

Замыкая уравнения (4.1), находим

$$\Gamma_n^{ij} = \Gamma_n^{ji} , \quad \Gamma_0^{i\ell}\Gamma_i^{nk} = \Gamma_0^{ik}\Gamma_i^{n\ell} . \qquad (4.2)$$

Рассмотрим поле гиперквадрик

$$\mu_{ab}\, x^a x^b = 0 , \quad \mu_{ab} = \mu_{ba} . \qquad (4.3)$$

Условия инвариантности поля Σ записываются в виде:

$$d\mu_{ab} = \mu_{cb}\,\omega_a^c + \mu_{ac}\,\omega_b^c + \theta\mu_{ab} + \mu_{ab}^i\,\omega_i . \qquad (4.4)$$

При фиксированных первичных параметрах уравнения (4.4) принимают вид:

$$\delta\mu_{00} = \mu_{00}\,(2\pi_0^0 + \theta) , \qquad (4.5)$$

$$\delta\mu_{0i} = \mu_{0i}\,(\pi_0^0 + \theta) + \mu_{0j}\,\pi_i^j , \qquad (4.6)$$

$$\delta\mu_{0n} = \mu_{0n}\,(\pi_0^0 + \pi_n^n + \theta) , \qquad (4.7)$$

$$\delta\mu_{ij} = \mu_{kj}\,\pi_i^k + \mu_{ik}\,\pi_j^k + \mu_{ij}\,\theta , \qquad (4.8)$$

$$\delta\mu_{in} = \mu_{kn}\,\pi_i^k + \mu_{in}\,(\pi_n^n + \theta) , \qquad (4.9)$$

$$\delta\mu_{nn} = \mu_{nn}\,(2\pi_n^n + \theta) . \qquad (4.10)$$

Соотношения $\mu_{oo}=0$, $\mu_{oi}=0$ характеризуют касание гиперквадрики (4.3) с гиперповерхностью (A_o). Не умаляя общности, можно считать $\mu_{on}=-1$. Уравнения (4.8),(4.9),(4.10) приводятся к виду:

$$\delta\mu_{ij}=\mu_{kj}\pi^k_i+\mu_{ik}\pi^k_j-\mu_{ij}(\pi^o_o+\pi^n_n), \tag{4.11}$$

$$\delta\mu_{in}=\mu_{kn}\pi^k_i-\mu_{in}\pi^o_o, \tag{4.12}$$

$$\delta\mu_{nn}=\mu_{nn}(\pi^n_n-\pi^o_o). \tag{4.13}$$

Требуя чтобы гиперквадрика (4.3) имела касание второго порядка с гиперповерхностью (A_o)(была соприкасающейся), получим:

$$\mu_{ij}=\Gamma^{nk}_i\Gamma^o_{jk}. \tag{4.14}$$

Обозначим

$$b_i=b^j_{ij}, \quad b^i=\Gamma^{ij}_n b_j, \quad B_i=B^j_{ij},$$
$$\hat{B}^i=A^{ij}B_j, \quad \tilde{B}_i=a_{ij}\hat{B}^j, \quad \tilde{B}^i=\Gamma^{ij}_n\tilde{B}_j, \tag{4.15}$$

и

$$\hat{b}_1=b_i b^i, \quad \hat{b}_2=B_i\hat{B}^i, \quad \hat{b}_3=\tau_1,$$
$$\hat{b}_4=\tilde{m}, \quad \hat{b}_5=\Gamma^o_n. \tag{4.16}$$

Пусть $\sigma,\tilde{\sigma},\sigma_\varepsilon$, $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ (ε=1,2,3,4,5)-произвольные абсолютные инварианты пары $V^o_{n-1,n}$. Уравнения

$$-2x^o x^n+\Gamma^{nk}_i\Gamma^o_{jk}x^i x^j+2b_i x^i x^n+\hat{b}_\varepsilon\sigma_\varepsilon(x^n)^2=0, \tag{4.17}$$

$$-2x^o x^n+\Gamma^{nk}_i\Gamma^o_{jk}x^i x^j+2\tilde{B}_i x^i x^n+\hat{b}_\varepsilon\tilde{\sigma}_\varepsilon(x^n)^2=0, \tag{4.18}$$

$$2x^o x^n-\Gamma^{nk}_i\Gamma^o_{jk}x^i x^j-2\sigma b_i x^i x^n=0, \tag{4.19}$$

$$2x^o x^n-\Gamma^{nk}_i\Gamma^o_{jk}x^i x^j-2\tilde{\sigma}\tilde{B}_i x^i x^n=0. \tag{4.20}$$

(по ε не суммировать!) определяют пучки инвариантных соприкасающихся (с гиперповерхностью (A_o)) гиперквадрик. В пучках (4.19),(4.20) содержится гиперквадрика

$$2x^o x^n-\Gamma^{nk}_i\Gamma^o_{jk}x^i x^j=0, \tag{4.21}$$

соприкасающаяся с гиперповерхностью (A_o) в точке A_o и касающаяся гиперповерхности (A_n) в точке A_n. В случае, если пара $V^o_{n-1,n}$ не имеет отличного от нуля относительного инварианта, удовлетворяющего уравнению

$$\delta X=X(\pi^n_n-\pi^o_o), \tag{4.22}$$

все инвариантно присоединенные к паре $V^o_{n-1,n}$, гиперквадрики, соприкасающиеся с гиперповерхностью (A_o) в точке A_o, проходят через точку A_n.

Рассмотрим точки

$$Q=A_n+b^i A_i, \quad \tilde{Q}=A_n+\tilde{B}^i A_i \tag{4.23}$$

Так как $Q\in\xi_1$, $\tilde{Q}\in\xi_1$ и $\delta Q=\pi^n_n C$, $\delta\tilde{Q}=\pi^n_n\tilde{Q}$, то эти точки определяют оснащение гиперповерхности (A_o). Пучки нормалей первого рода гиперповерхности (A_o) образованы прямыми проходящими через точку A и точки

$$A_n+\rho b^i A_i, \quad A_n+\tilde{\rho}\tilde{B}^i A_i. \tag{4.24}$$

где $\rho, \tilde{\rho}$ —абсолютные инварианты пары $V^o_{n-1,n}$.

Прямая A_0A_n, определяющая тривиальное оснащение гиперповерхности (A_0), содержится в этих пучках. Инвариантно присоединенные к паре $V^0_{n-1,n}$ пучки определяются соответственно системами уравнений (пучки нормалей второго рода гиперповерхности (A_0))

$$x^0-(\sigma b^i\Gamma^{nk}_i\Gamma^0_{jk}+b_j)x^j=0,\ x^n=0\ ; \tag{4.25}$$

$$x^0-(\tilde\sigma\tilde B^i\Gamma'^{nk}_i\Gamma^0_{jk}+b_j)x^j=0,\ x^n=0\ . \tag{4.26}$$

Инвариантные пучки соприкасающихся гиперквадрик гиперповерхности (A_n) и её оснащение строится аналогично. Можно показать, что если все инвариантно присоединенные к паре $V^0_{n-1,n}$ соприкасающиеся гиперквадрики гиперповерхности (A_0) в точке A_0 содержат точку A_n, то и все инвариантно присоединенные к паре $V^0_{n-1,n}$ соприкасающиеся гиперквадрики гиперповерхности (A_n) в точке A_n содержат точку A_0.

Величины $\rho_1, \rho_2, \Gamma_1, \Gamma_0$ являются инвариантами пары $V^0_{n-1,n}$. Условие $\rho_1=0$ $(\rho_2=0)$ означает, что $M_1\equiv P_1$ $(M_2\equiv P_2)$, условие $\Gamma_1=0$ характеризует принадлежность точки A_n гиперплоскости ξ_1; условие $\Gamma_0=0$ $(m=0)$ означает, что проективные преобразования $\overset{*}{x}{}^j=\rho\Gamma^{nj}_i x^i$ $(\overset{*}{x}{}^j=\rho\, m^j_i x^i)$ $(n-2)$-плоскости τ являются преобразованиями W.

Литература

1. Е.Т.И в л е в, Материалы итоговой научной конференции по математике и механике за 1970г. I. Томск, 1971, 121-123.

2. Г.Ф.Л а п т е в, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Московского матем. общества, т.2, 275-383, ГИТТЛ, М., 1953.

3. В.С.М а л а х о в с к и й, Тр. Томского ун-та, 1963, 168, 28-42.

4. М.М.П о х и л а, Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Калининград 1971, 2, 55-62.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 3 1973

С В Е Ш Н И К О В А Г.Л.

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции кривых второго порядка с одной вырождающейся фокальной поверхностью (F). Построены канонические реперы конгруэнций, для которых поверхность (F) – линия и точка. Решена задача расслоения для случая вырождения фокальной поверхности (F) в точку.

§I. Конгруэнции коник с одной фокальной поверхностью, вырождающейся в линию.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $\mathfrak{J}$ называется конгруэнция кривых второго порядка (коник), обладающая следующими свойствами:

1) существуют две невырождающиеся фокальные поверхности S_i $(i,j,k=1,2)$, не являющиеся огибающими плоскостей коник,

2) существует фокальная поверхность (F), вырождающаяся в линию, причем касательная ℓ к линии (F) не инцидентна плоскости коники,

3) фокальные линии на поверхностях S_i не соответствуют друг другу.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{J}$ к реперу $R=\{\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3,\bar{A}_4\}$, поместив вершины A_i в фокальные точки коники, описывающие поверхности S_i, вершину A_3 — в полюс прямой A_1A_2 относительно коники, вершину A_4 - вне плоскости коники. Единичную точку E прямой A_1A_2 расположим на прямой A_3F, где

$$\bar{F}=\bar{A}_1+\bar{A}_2-\sqrt{2}\,\bar{A}_3 \tag{1.1}$$

-фокус, описывающий вырождающуюся в линию фокальную поверхность.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\bar{A}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4), \tag{1.2}$$

причем формы Пфаффа ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства:

$$\mathcal{D}\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma \tag{1.3}$$

Так как фокальные линии на поверхностях (A_i) не соответствуют, то формы

$$\omega^4_i=\omega_i \tag{1.4}$$

можно принять за независимые первичные формы конгруэнции $\mathcal{J}$.

Уравнения коники и система уравнений конгруэнции $\mathcal{J}$ при соответствующей нормировке вершин репера приводятся к виду:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0. \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\omega^j_i=\Gamma^{ji}_i\,\omega_i, \quad \omega^3_i=\Gamma^{3k}_i\,\omega_k, \quad \omega^i_3=\Gamma^{ik}_3\,\omega_k, \quad \omega^4_3=\Gamma^{4k}_3\,\omega_k, \\ \omega^i_i-\omega^3_3+\omega^i_j+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^3_1+\omega^3_2-2\,\omega^i_3)=\alpha_i\,(\omega_1+\omega_2-\sqrt{2}\,\omega^4_3)\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Система (1.6) определяет конгруэнции $\mathcal{J}$ с произволом пяти функций двух аргументов.

Дальнейшую канонизацию репера осуществляем так, чтобы

$$\alpha_1=\alpha_2=0, \quad \Gamma^{21}_1+\Gamma^{12}_2=0 \tag{1.7}$$

При этом вершина A_4 репера становится четвертой гармонической к фокусу F относительно точек пересечения с прямой ℓ касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i.

§2. Конгруэнции $\mathcal{J}_1$.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $\mathcal{J}_1$ называется конгруэнция $\mathcal{J}$, обладающая следующими свойствами:

1) прямая A_3A_4 является линией пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i,

2) точка A_3 совпадает с характеристической точкой плоскости коники, поверхность (A_3) не вырождается в точку,

3) фокальная сеть $\omega_1\omega_2=0$ является асимптотической сетью на поверхностях (A_i).

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $\mathcal{J}_1$ существуют и определяются с точностью до проективных преобразований с произволом одной постоянной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая условия определения конгруэнции $\mathcal{J}_1$, можно привести систему конечных и пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{J}_1$ к виду:

$$\Gamma^{12}_3(\Gamma^{31}_1+\Gamma^{32}_1+\Gamma^{31}_2+\Gamma^{32}_2)=0, \tag{2.1}$$

$$\sqrt{2}\,\Gamma_3^{12}\left(\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32}\right)+\Gamma_4^{32}-\Gamma_4^{31}=0. \tag{2.1}$$

$$\omega_i^j=\omega_3^4=0,\quad \omega_i^i-\omega_3^3+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega_1^3+\omega_2^3-2\omega_3^i\right)=0,$$

$$\omega_3^i=\Gamma_3^{12}\,\omega_j,\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\,\omega_k, \tag{2.2}$$

$$\omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\,\omega_k,\quad \omega_4^i=\Gamma_3^{12}\left(\Gamma_j^{3i}\,\omega_i-\Gamma_j^{3j}\,\omega_j\right).$$

Осуществляя продолжение системы

$$\omega_3^i=\Gamma_3^{12}\,\omega_j, \tag{2.2'}$$

получаем уравнение Пфаффа

$$d\ln\Gamma_3^{12}+\omega_3^3-\omega_4^4=\sqrt{2}\left(\omega_1^3+\omega_2^3-\omega_3^1-\omega_3^2\right), \tag{2.3}$$

замыкание которого даст конечное соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(3\Gamma_2^{32}-3\Gamma_1^{31}+\Gamma_1^{32}-\Gamma_2^{31}\right)+\Gamma_4^{32}-\Gamma_4^{31}=0. \tag{2.4}$$

Так как поверхность (A_3) не вырождается в точку, то можно так пронормировать вершины репера, чтобы

$$\Gamma_3^{12}=1. \tag{2.5}$$

Полагая

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_4^{32}-\Gamma_4^{31}\right)=\Gamma, \tag{2.6}$$

из соотношений (2.1), (2.4) находим

$$\Gamma_1^{32}=-\Gamma_1^{31}-\Gamma,\quad \Gamma_2^{31}=\Gamma-\Gamma_1^{31},\quad \Gamma_2^{32}=\Gamma_1^{31}. \tag{2.7}$$

Уравнения третьей строки системы (2.2) запишутся в виде:

$$\omega_1^3=\Gamma_1^{31}\omega_1-\left(\Gamma_1^{31}+\Gamma\right)\omega_2,\quad \omega_2^3=\left(\Gamma-\Gamma_1^{31}\right)\omega_1+\Gamma_1^{31}\omega_2, \tag{2.8}$$

$$\omega_4^1=\left(\Gamma-\Gamma_1^{31}\right)\omega_1-\Gamma_1^{31}\omega_2,\quad \omega_4^2=-\Gamma_1^{31}\omega_1-\left(\Gamma_1^{31}+\Gamma\right)\omega_2.$$

Систему (2.8) можно заменить эквивалентной ей системой:

$$\omega_1^3-\omega_4^2=2\Gamma_1^{31}\omega_1,\quad \omega_2^3-\omega_4^1=2\Gamma_1^{31}\omega_2, \tag{2.9}$$

$$\omega_4^1-\omega_4^2+\omega_1^3+\omega_2^3=2\Gamma\omega_1,\quad \omega_4^1-\omega_4^2-\omega_1^3-\omega_2^3=2\Gamma\omega_2. \tag{2.10}$$

Замыкая уравнения (2.9) и (2.10), получим систему двух пфаффовых уравнений:

$$d\Gamma_1^{31}+\Gamma_1^{31}\left(\omega_3^3-\omega_4^4\right)+\omega_4^3=0, \tag{2.11}$$

$$d\Gamma+\sqrt{2}\left[(\Gamma)^2+\Gamma_1^{31}\right](\omega_1-\omega_2)-\Gamma_4^{31}\omega_1+\Gamma_4^{32}\omega_2=0 \tag{2.12}$$

и квадратичное уравнение:

$$\left[5(\Gamma)^2+\sqrt{2}\left(\Gamma_4^{31}+\Gamma_4^{32}\right)-4\Gamma_1^{31}\right]\omega_1\wedge\omega_2+d\Gamma_4^{32}\wedge\omega_2-d\Gamma_4^{31}\wedge\omega_1=0 \tag{2.13}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k$, получим квадратичное уравнение

$$d\Gamma_4^{31}\wedge\omega_1+d\Gamma_4^{32}\wedge\omega_2+\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\Gamma_4^{31}+\Gamma_4^{32}\right)-2\right]\Gamma\,\omega_1\wedge\omega_2=0. \tag{2.14}$$

Учитывая (2.6) в уравнении (2.12), из уравнений (2.13) и (2.14) получаем уравнение Пфаффа

$$2d\Gamma_4^{31}+[2(\Gamma_4^{32})^2-(\Gamma_4^{31})^2-\Gamma_4^{31}\Gamma_4^{32}+4\sqrt{2}\,\Gamma_4^{31}-8\Gamma_1^{31}]\,\omega_1+$$

$$+[(\Gamma_4^{32})^2+4(\Gamma_4^{31})^2+2\sqrt{2}\,\Gamma_4^{32}-5\Gamma_4^{31}\Gamma_4^{32}-4\Gamma_1^{31}]\,\omega_2=0, \tag{2.15}$$

замыканием которого являтся конечное соотношение

$$(\Gamma_4^{32}-\Gamma_4^{31})[\sqrt{2}(\Gamma_4^{32}+\Gamma_4^{31})-4\Gamma_1^{31}]=0. \tag{2.16}$$

Пусть

$$\Gamma_4^{32}-\Gamma_4^{31}=0. \tag{2.17}$$

Тогда из (2.I2) получаем

$$\sqrt{2}\,\Gamma_1^{31}-\Gamma_4^{31}=0 \tag{2.18}$$

и уравнение (2.II) принимает вид

$$d\Gamma_1^{31}=0. \tag{2.19}$$

Значит,

$$\Gamma_1^{31}=\mathrm{Const}. \tag{2.20}$$

Обозначим

$$\Gamma_1^{31}=\gamma. \tag{2.21}$$

Так как при $\gamma=0$ поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются, а этот случай исключен из рассмотрения по определению конгруэнции $\mathcal{T}$ то $\gamma\neq 0$.

Матрица компонент деривационных формул канонического репера рассматриваемого класса конгруэнций запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_2-\omega_1) & 0 & \gamma(\omega_1-\omega_2) & \omega_1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_1-\omega_2) & -\gamma(\omega_1-\omega_2) & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_1+\omega_2) & 0 \\ -\gamma(\omega_1+\omega_2) & -\gamma(\omega_1+\omega_2) & \sqrt{2}\gamma(\omega_1+\omega_2) & \frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_1+\omega_2) \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

При условии

$$\sqrt{2}\,(\Gamma_4^{32}+\Gamma_4^{31})-4\Gamma_1^{31}=0 \tag{2.23}$$

получаем подкласс конгруэнций, характеризуемых матрицей (2.22). Следовательно, (2.22) является матрицей компонент деривационных формул канонического репера конгруэнции $\mathcal{T}_1$.

Анализируя уравнения, определяющие конгруэнции $\mathcal{T}_1$, убеждаемся в справелливости теоремы I.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{T}_1$ имеют пять невырождающихся фокальных поверхностей. Фокальная поверхность (F) является прямой линией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из системы уравнений

$$\begin{gathered} (x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0, \quad x^k\omega_k=0, \\ x^1x^3(\omega_3^2-\omega_1^3)+x^2x^3(\omega_3^1-\omega_2^3)+x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)=0 \end{gathered} \tag{2.24}$$

для определения фокальных поверхностей конгруэнции $\mathcal{T}_1$, кроме фокусов A_i и F, находим фокусы:

$$\begin{gathered} \bar{F}_1=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\sqrt{2}\bar{A}_3, \quad \bar{F}_2=\bar{A}_1+\left(\frac{m}{2\gamma^2}-1\right)\bar{A}_2-\frac{m}{\sqrt{2}\gamma}\bar{A}_3, \\ \bar{F}_3=\bar{A}_1+\left(\frac{n}{2\gamma^2}-1\right)\bar{A}_2-\frac{n}{\sqrt{2}\gamma}\bar{A}_3, \end{gathered} \tag{2.25}$$

где

$$m=1+\sqrt{1-4\gamma^2}, \quad n=1-\sqrt{1-4\gamma^2}. \tag{2.26}$$

Используя матрицу (2.22), убеждаемся, что фокальные поверхности (F_1), (F_2), (F_3) не вырождаются, а фокальная поверхность (F) представляет собой прямую, проходящую через точку A_4.

С конгруэнцией $\mathcal{J}_1$ естественно ассоциируются четыре прямолинейных конгруэнции $(A_1A_2), (A_3A_4), (F_1A_4), (PT)$.

Фокусы E и E^* луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются формулами

$$\bar{E} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2, \quad \bar{E}^* = \bar{A}_1 - \bar{A}_2. \tag{2.27}$$

Так как поверхность (A_4) вырождается в прямую линию, то точка A_4 является фокусом лучей A_3A_4 и F_1A_4 прямолинейных конгруэнций (A_3A_4) и (F_1A_4). Обозначив буквами P и T вторые фокусы лучей этих конгруэнций и используя матрицу (2.22), находим

$$\bar{P} = 2\gamma\bar{A}_3 + \bar{A}_4. \tag{2.28}$$

$$\bar{T} = \sqrt{2}\gamma\bar{F}_1 + \bar{A}_4. \tag{2.29}$$

Т е о р е м а 3. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_iA_4), (A_3A_4), (F_1A_4), (PT), присоединенных к конгруэнции $\mathcal{J}_1$, соответствуют. Фокусы луча A_1A_2 гармонически делят точки A_1 и A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь матрицей (2.22), убеждаемся, что уравнения торсов указанных прямолинейных конгруэнций совпадают и записываются в виде:

$$(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2 = 0. \tag{2.30}$$

Из формул (2.27) для фокусов прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) следует, что

$$(A_1A_2; EE^*) = -1. \tag{2.31}$$

О п р е д е л е н и е. Линии

$$\omega_j + (-1)^j\omega_i = 0, \tag{2.32}$$

соответствующие торсам прямолинейной конгруэнции (A_1A_2), называются линиями $\mathcal{L}_i$ на поверхности.

Т е о р е м а 4. Касательные к линии $\mathcal{L}_2$ на поверхностях $(A_1), (A_2), (P), (E)$ конгруэнции $\mathcal{J}_1$ пересекаются в точке A_4. Касательные к линии $\mathcal{L}_1$ на поверхностях (A_1) и (A_2) пересекаются в точке P, а на поверхностях (P) и (E) - в точке E^*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из рассмотрения равенств:

$$(d\bar{A}_i)_{\omega_1-\omega_2=0} = \omega_i\bar{A}_4, \quad (d\bar{P})_{\omega_1-\omega_2=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_1+\omega_2)\bar{A}_4,$$
$$(d\bar{E})_{\omega_1-\omega_2=0} = (\omega_1+\omega_2)\bar{A}_4, \tag{2.33}$$

$$(d\bar{A}_i)_{\omega_1+\omega_2=0} = -\sqrt{2}\,\omega_i\bar{A}_i + \omega_i\bar{P}, \quad (d\bar{P})_{\omega_1+\omega_2=0} = 2\gamma\omega_2\bar{E}^*,$$
$$(d\bar{E})_{\omega_1+\omega_2=0} = \sqrt{2}\,\omega_2\bar{E}^*. \tag{2.34}$$

Т е о р е м а 5. Асимптотические линии на поверхностях (A_i), $(E), (A_3), (F_1), (P)$ соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, асимптотические линии на данных поверхностях определяются одним и тем же уравнением:

$$\omega_1\omega_2 = 0 \tag{2.35}$$

Т е о р е м а 6. Каждая из поверхностей (A_i) и (A_3) конгруэнции $\mathcal{J}_1$ является одной и той же линейчатой квадрикой

$$\mathcal{G} \equiv x^1x^2 - x^3x^4 + \gamma(x^4)^2 = 0 \tag{2.36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки A_i и A_3 лежат на квадрике $\mathcal{Y}$. Дифференцируя (2.36) с помощью уравнений стационарности точки

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha + \theta x^\alpha, \quad \alpha, \beta = 1,2,3,4, \tag{2.37}$$

убеждаемся, что $\mathcal{Y}$ -инвариантная квадрика. Прямые $A_i A_3$ являются её прямолинейными образующими.

Т е о р е м а 7. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4), ассоциированные с конгруэнцией $\mathcal{I}_1$, образуют двусторонне расслояемую пару [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя матрицу (2.22), убеждаемся, что условия двустороннего расслоения прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4)

$$\omega_i^3 \wedge \omega_3^j + \omega_i \wedge \omega_4^j = 0, \quad \omega_3^i \wedge \omega_i^3 - \omega_4^j \wedge \omega_j = 0,$$
$$\omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2 = 0 \tag{2.38}$$

тождественно удовлетворяются.

§ 3. Конгруэнции K.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией K называется конгруэнция кривых второго порядка с одной вырождающейся в точку фокальной поверхностью, обладающая следующими свойствами:

1) существуют по крайней мере две невырождающиеся фокальные поверхности S_1 и S_2, не являющиеся огибающими плоскостей коник,

2) фокальные линии на фокальных поверхностях S_i не соответствуют друг другу,

3) существует расслоение от конгруэнции коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) [2].

Отнесем конгруэнцию K к реперу $R = \{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4\}$, помещая вершины A_1 и A_2 в фокальные точки коники, описывающие поверхности S_1 и S_2, вершину A_3 - в полюс прямой A_1A_2 относительно коники, вершину A_4 - в точку пересечения касательных плоскостей к поверхностям $(A_1), (A_2), (A_3)$.

Единичную точку $\bar{E} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$ на прямой A_1A_2 выбираем так, чтобы неподвижный фокус

$$\bar{F} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 - \sqrt{2}\,\bar{A}_3$$

был инцидентен прямой A_3E.

Т е о р е м а 8. Конгруэнции K существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений Пфаффа, определяющая конгруэнции K, имеет вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{1k}\omega_k,$$
$$\omega_3^2 = \lambda\omega_3^1, \quad \omega_4^2 = \lambda\omega_4^1, \quad \omega_3^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1 + \omega_2),$$
$$\omega_4^1 = \Gamma_4^{1k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \tag{3.1}$$
$$\omega_1^1 - \omega_3^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3 + \omega_2^3 - 2\omega_3^1) = 0, \quad \omega_2^2 - \omega_1^1 = \sqrt{2}(\lambda - 1)\omega_3^1,$$

причем

$$\Gamma_4^{11} = \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_3^{11}\Gamma_2^{32}, \quad \Gamma_4^{12} = \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} - \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}. \tag{3.2}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения

$$\omega_3^2 = \lambda\omega_3^1, \quad \omega_4^2 = \lambda\omega_4^1, \tag{3.3}$$

получаем пфаффово уравнение

$$d\lambda + \sqrt{2}\,\lambda(\lambda-1)\,\omega_3^1 = 0\,, \tag{3.4}$$

замыкание которого тождественно равно нулю. Продолжая систему (3.I), убеждаемся, что полученная замкнутая система - в инволюции и определяет решение с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 9. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4), ассоциированные с конгруэнцией K, односторонне расслояемы (от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4)). Двустороннего расслоения этих прямолинейных конгруэнций не существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя уравнения, определяющие конгруэнции K, убеждаемся, что условия расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4)

$$\omega_i^3\wedge\omega_3^j + \omega_i\wedge\omega_4^j = 0\,, \tag{3.5}$$

$$\omega_1^3\wedge\omega_3^1 + \omega_1\wedge\omega_4^1 - \omega_2^3\wedge\omega_3^2 - \omega_2\wedge\omega_4^2 = 0$$

тождественно удовлетворяются.

Расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяется уравнениями:

$$\omega_4^1\wedge\omega_1^3 + \omega_4^2\wedge\omega_2^3 = 0\,,\quad \omega_3^1\wedge\omega_1 + \omega_3^2\wedge\omega_2 = 0\,, \tag{3.6}$$

$$\omega_3^1\wedge\omega_1^3 + \omega_3^2\wedge\omega_2^3 - \omega_4^1\wedge\omega_1 - \omega_4^2\wedge\omega_2 = 0$$

Из этой системы получаем

$$\Gamma_3^{12} = \lambda\,\Gamma_3^{11}\,,\quad \Gamma_4^{12} = \lambda\,\Gamma_4^{11}\,. \tag{3.7}$$

Тогда

$$\omega_3^1\wedge\omega_4^1 = 0 \tag{3.8}$$

и прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) вырождается, что противоречит определению конгруэнции K.

Т е о р е м а IO. Торсы одного семейства прямолинейных конгруэнций (A_1A_4), (A_2A_4), ассоциированных с конгруэнцией K, соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, уравнение

$$\omega_4^1 = 0 \tag{3.9}$$

определяет одно семейство торсов каждой из прямолинейных конгруэнций (A_1A_4) и (A_2A_4).

Л и т е р а т у р а.

I. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М., I956.

2. Малаховский В.С., Конгруэнции коник, порожденные расслояемой парой C_e. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. I, (Труды Калининградского университета), I970, стр. 5-26.

СКРЫДЛОВА Е.В.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР ФИГУР В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В трехмерном проективном пространстве рассмотрено многообразие $\{CP\}_{21}$ [2]-двупараметрическое семейство (конгруэнция) пар фигур (CP), где C-коника, а P-точка, не инцидентная плоскости коники, при условии, что семейство (C)-конгруэнция, а (P)-линия. Построен канонический репер многообразия $\{CP\}_{21}$. Решена задача расслоения от конгруэнции коник C к прямолинейной конгруэнции, ассоциированной с многообразием $\{CP\}_{21}$, рассмотрен один из подклассов данного многообразия.

§ 1. Система дифференциальных уравнений многообразия $\{CP\}_{21}$.

Отнесем многообразие $\{CP\}_{21}$ к реперу $R=\{\bar A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, где A_4-текущая точка кривой (P), A_3-точка пересечения касательной к линии (P) с плоскостью коники C (предполагается, что A_3 не инцидентна конике), A_1 и A_2 -точки коники C, полярно сопряженные точке A_3 относительно этой коники.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar A_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar A_\beta, \tag{1}$$

причем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\,\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и условию эквипроективности:

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0. \tag{3}$$

Уравнения коники C и система уравнений Пфаффа многообразия $\{CP\}_{21}$ при соответствующей нормировке вершин репера запишутся в виде:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0;\qquad x^4=0, \tag{4}$$

$$\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k;\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k;\quad \omega_3^i=\lambda^i\omega_4^3;$$

$$\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k;\quad \omega_4^i=0;\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k; \tag{5}$$

$$2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=a^k\omega_k \qquad (i,j,k=1,2).$$

Здесь и в дальнейшем $\omega_i=\omega_i^4$, $i\neq j$, и по этим индексам суммирование не производится.

Единичную точку $\bar E=\bar A_1+\bar A_2$ прямой A_1A_2 располагаем в касательной плоскости к поверхности (A_3). Последнюю нормировку вершин A_α осуществляем так, чтобы

$$\lambda^1=\lambda^2=1. \tag{6}$$

§ 2. Многообразие $\{CP\}_{21}^{\circ}$.

Определение. Многообразием $\{CP\}_{21}^{\circ}$ назовем многообразие $\{CP\}_{21}$, которое обладает следующими свойствами:

I) существует одностороннее расслоение от конгруэнции коник C к прямолинейной конгруэнции (EA_4) [1], 2) поверхность (E) является плоскостью.

Т е о р е м а I. Многообразие $\{CP\}^{\circ}_{21}$ существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений Пфаффа многообразия $\{CP\}^{\circ}_{21}$ имеет вид:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k; \quad \omega_1^3 = \Gamma_1^{3k}\omega_k; \quad \omega_2^3 = b\,\omega_1^3;$$

$$\omega_3^i = \omega_4^3; \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k; \quad \omega_4^i = 0; \tag{7}$$

$$\omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k; \quad 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = a^k\omega_k;$$

$$\omega_4^4 + \omega_1^1 - 2\omega_3^3 = \mu\,\omega_4^3 - \omega_1^2; \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0,$$

причем, в силу условий I), 2), выполняются следующие конечные соотношения:

$$(1+b)(\Gamma_2^{11}\Gamma_1^{32} - \Gamma_2^{12}\Gamma_1^{31}) - \Gamma_4^{31} = 0,$$

$$(1+b)(\Gamma_1^{21}\Gamma_1^{32} - \Gamma_1^{22}\Gamma_1^{31}) + \Gamma_4^{32} = 0,$$

$$\Gamma_4^{31}[(1+b)\Gamma_1^{32} - \Gamma_3^{42}] - \Gamma_4^{32}[(1+b)\Gamma_1^{31} - \Gamma_3^{41}] = 0, \tag{8}$$

$$(1+b)[(a^1 + \Gamma_1^{21})\Gamma_1^{32} - (a^2 + \Gamma_1^{22})\Gamma_1^{31}] + \Gamma_4^{31} = 0,$$

$$(1+b)[(a^1 + \Gamma_2^{11})\Gamma_1^{32} - (a^2 + \Gamma_2^{12})\Gamma_1^{31}] - \Gamma_4^{32} = 0,$$

$$1 + b \neq 0.$$

Из анализа систем (7), (8) следует, что многообразие $\{CP\}^{\circ}_{21}$

существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Поверхность (E) является плоскостью, совпадающей с (A_3). Эта плоскость является соприкасающейся к линии (P).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из формул:

$$d\bar{A}_3 = \omega_4^3\bar{E} + \omega_3^3\bar{A}_3 + \omega_3^4\bar{A}_4, \tag{9}$$

$$d\bar{E} = (\omega_2^2 + \omega_1^2)\bar{E} + (1+b)\omega_1^3\bar{A}_3 + (\omega_1 + \omega_2)\bar{A}_4, \tag{10}$$

$$d[\bar{E}\bar{A}_3\bar{A}_4] = (\omega_2^2 + \omega_1^2)[\bar{E}\bar{A}_3\bar{A}_4], \tag{11}$$

$$d^2\bar{A}_4 = (\omega_4^3)^2\bar{E} + (\dots)\bar{A}_3 + (\dots)\bar{A}_4. \tag{12}$$

Т е о р е м а 3. Огибающая поверхность плоскостей $(A_1A_2A_4)$ является фокальной для прямолинейной конгруэнции (A_1A_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическая точка $\bar{M}$ грани $(A_1A_2A_4)$ определяется формулой:

$$\bar{M} = b\bar{A}_1 - \bar{A}_2, \tag{13}$$

фокальные поверхности $\bar{F} = s\bar{A}_1 + t\bar{A}_2$ конгруэнции (A_1A_2) находятся из уравнения:

$$(s + bt)(\Gamma_1^{32}s - \Gamma_1^{31}t) = 0. \tag{14}$$

Координаты точки $\bar{M}$ удовлетворяют уравнению (14), откуда и следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 4. Пары прямолинейных конгруэнций (A_iA_3), (EA_4) односторонне расслояемы в направлении от (A_iA_3) к (EA_4).

Доказательство. Условия одностороннего расслоения имеют вид:

$$(1+b)(\Gamma_1^{21}\Gamma_1^{32}-\Gamma_1^{22}\Gamma_1^{31})+\Gamma_4^{32}=0,$$

$$(1+b)(\Gamma_2^{11}\Gamma_1^{32}-\Gamma_2^{12}\Gamma_1^{31})-\Gamma_4^{31}=0, \tag{15}$$

$$\Gamma_4^{31}\left[(1+b)\Gamma_1^{32}-\Gamma_3^{42}\right]-\Gamma_4^{32}\left[(1+b)\Gamma_1^{31}-\Gamma_3^{41}\right]=0.$$

Для многообразия $\{CP\}_{21}^{\circ}$ они выполняются в силу соотношений (8).

§ 3. Характеристическое многообразие $\{CP\}_{21}^{\circ}$.

Определение. Характеристическим многообразием $\{CP\}_{21}^{\circ}$ называется многообразие $\{CP\}_{21}^{\circ}$, у которого A_3 является характеристической точкой плоскости коники C.

Для характеристического многообразия $\{CP\}_{21}^{\circ}$ имеет место тождество:

$$\omega_3^4=0, \tag{16}$$

тогда система уравнений Пфаффа, определяющая многообразие, принимает вид: $\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k$; $\omega_i^3=b_i\omega_4^3$; $\omega_3^i=\omega_4^3$;

$$\omega_3^4=\omega_4^i=0;\quad \omega_4^3=c(\omega_1+\omega_2);\quad \omega_1^1-\omega_2^2-\omega_1^2+\omega_2^1=0; \tag{17}$$

$$2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=a(\omega_1+\omega_2);\quad \omega_4^4+\omega_1^1-2\omega_3^3=\mu\omega_4^3-\omega_1^2,$$

причем справедливы соотношения:

$$(b_i+b_j)(\Gamma_i^{ij}-\Gamma_i^{ji})-1=0,$$

$$b_1+b_2\neq 0,\qquad c\neq 0 \tag{18}$$

Анализируя систему (17) с учетом соотношений (18), убеждаемся в том, что характеристическое многообразие $\{CP\}_{21}^{\circ}$ существует и

определяется с произволом семи функций одного аргумента.

Теорема 5. Поверхности (A_3) и (E), ассоциированные с характеристическим многообразием $\{CP\}_{21}^{\circ}$, вырождаются в плоские кривые.

Доказательство. Имеем:

$$d\bar{A}_3=\omega_4^3\bar{E}+\omega_3^3\bar{A}_3, \tag{19}$$

$$d\bar{E}=(\omega_1^1+\omega_2^1)\bar{E}+(\omega_1+\omega_2)\left[c(b_1+b_2)\bar{A}_3+\bar{A}_4\right]. \tag{20}$$

Так как для любого натурального n

$$(d^n\bar{A}_3\bar{E}\bar{A}_3\bar{A}_4)=0;\quad (d^n\bar{E}\,\bar{E}\bar{A}_3\bar{A}_4)=0, \tag{21}$$

то линии (A_3) и (E) – плоские.

Теорема 6. Прямолинейная конгруэнция (EA_4) вырождается в линейчатую поверхность.

Доказательство. Имеем:

$$d[\bar{E}\bar{A}_4]=(\omega_1^1+\omega_2^1+\omega_4^4)[\bar{E}\bar{A}_4]+\omega_4^3\{(b_1+b_2)[\bar{A}_3\bar{A}_4]+[\bar{E}\bar{A}_3]\}. \tag{22}$$

Отсюда следует, что для характеристического многообразия $\{CP\}_{21}^{\circ}$ мы имеем расслоение от конгруэнции коник C не к прямолинейной конгруэнции, а к линейчатой поверхности (EA_4) [3].

Теорема 7. Одно семейство торсов прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_iA_3), (A_iA_4) соответствует.

Доказательство. Уравнения торсов конгруэнций (A_1A_2), (A_iA_3), (A_iA_4) имеют соответственно вид:

$$(b_2\omega_1-b_1\omega_2)(\omega_1+\omega_2)=0, \tag{23}$$

$$\omega_i(\omega_j+\omega_i)=0. \tag{24}$$

$$\omega_i^j\ (\omega_j + \omega_i) = 0, \qquad (25)$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Литература

I.Малаховский В.С.,Конгруэнции коник,порожденные расслояемой парой C_2 ."Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (Труды Калининградского ун-та),вып.I,1970,с.5-26.

2.Малаховский В.С.,О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.Данный сборник.

3.Похила М.М.,Пары многообразий квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве (случай пары с общими гиперплоскостями)."Дифференциальная геометрия многообразий фигур"(Труды Калининградского ун-та),вып.2,1971,с.43-54.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3
1973

ТЕРЕНТЬЕВА Е.И.

ИНВАРИАНТНОЕ ОСНАЩЕНИЕ ($n-2$)-МЕРНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ Γ_{n-2} ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n.

В работе [7] рассмотрено инвариантное оснащение (n-2)-мерной гиперполосы Γ_{n-2} проективного пространства P_n, при построении которого используются две вырожденные гиперповерхности V_{n-1}^{n-2} и $\tilde{V}_{n-1}^{n-2}$, ассоциированные с данной гиперполосой Γ_{n-2}.

В настоящей работе строится инвариантное оснащение регулярной гиперполосы Γ_{n-2} проективного пространства P_n с помощью ассоциированной с данной гиперполосой ($n-2$)-вырожденной гиперповерхности V_{n-1}^{n-2} [2] и связанной гиперполосы $\bar{\Gamma}_{n-2}$ [4]. При исследовании применяется аналитический аппарат и терминология,введенная в работах[I]-[4].

Во всей работе используется следующая схема индексов:

$$i, j, k, p, \tau, s = 2, \ldots, n-1;$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n+1; \quad \vartheta, \eta = 2, 3, \ldots, n.$$

По всем индексам,встречающимся дважды сверху и снизу,предполагается суммирование. Символы „$/$", „$//$", „$;$" и „$\int$" вводятся для обозначения ковариантного дифференцирования относительно соответствующих связностей $\Gamma_i, \bar{\Gamma}_i, \check{\Gamma}_i$ связанных гиперполос Γ_{n-2}, $\check{\Gamma}_{n-2}$([4];[3], §4) и связности $\tilde{\Gamma}$, гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}.

Индексы, участвующие в альтернировании отмечаются чертой снизу. Например, $2\varphi_{[ij]} = \varphi_{\underline{ij}}$.

С каждой точкой M^α_1 базисной поверхности гиперполосы Γ_{n-2} связаны два репера: ковариантный — $M^\alpha_1, M^\alpha_{1/i}, X^\alpha_0, X^\alpha_n$ и контравариантный — $P^1_\alpha, T^0_\alpha, T^0_{\alpha/i}, T^n_\alpha$, причем нормаль первого рода задается точками X^α_n, X^α_0 или гиперплоскостями N^{1K}_α, а нормаль второго рода точками $M^\alpha_{1/i}$ [3], §I.

Основные дифференциальные уравнения оснащенной регулярной гиперполосы $N(\Gamma_{n-2})$ имеют вид:

$$M^\alpha_{1/ij} = p_{ij} M^\alpha_1 + b^0_{1ij} X^\alpha_0 + b^n_{1ij} X^\alpha_n, \qquad (1)$$

$$X^\alpha_{0/i} = m^1_{0i} M^\alpha_1 + m^{1K}_{0i} M^\alpha_{1/K} + n^n_{0i} X^\alpha_n, \qquad (2)$$

$$X^\alpha_{n/i} = m^1_{ni} M^\alpha_1 + m^{1K}_{ni} M^\alpha_{1/K}, \qquad (3)$$

где тензоры $p_{ij}, b^0_{1ij}, b^n_{1ij}, m^1_{0i}, m^1_{0K}, n^n_{0i}, m^1_{ni}, m^{1K}_{ni}$ называются основными фундаментальными тензорами этой гиперполосы.

При изменении оснащения гиперполосы Γ_{n-2} тензоры N^{1K}_α и $M^\alpha_{1/i}$ изменяются следующим образом:

$$\bar{N}^{1K}_\alpha = N^{1K}_\alpha - \psi^{1K}_0 T^0_\alpha \; ; \quad M^\alpha_{1//i} = M^\alpha_{1/i} + h_i M^\alpha_1. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что тензоры ψ^{1K}_0 и h_i определяют соответственно новые нормали первого и второго рода гиперполосы Γ_{n-2}. Главный фундаметальный тензор b^0_{1ij} гиперполосы Γ_{n-2} не изменяется при изменении оснащения, а компоненты объекта связности Γ_i преобразуются по формулам:

$$\bar{\Gamma}^1_{1i} = \Gamma^1_{1i} - h_i, \quad \bar{\Gamma}^0_{0i} = \Gamma^0_{0i} + \psi^{1K}_0 b^0_{1Ki}, \quad \bar{\Gamma}^n_{ni} = \Gamma^n_{ni}, \qquad (5)$$

$$\bar{\Gamma}^K_{ij} = \Gamma^K_{ij} + h_i \delta^K_j + h_j \delta^K_i - b^0_{1ij} \psi^{1K}_0. \qquad (6)$$

§ I. (n-2)-вырожденная гиперповерхность V^{n-2}_{n-1}, ассоциированная с данной гиперполосой.

О п р е д е л е н и е I. Гиперповерхность V^{n-2}_{n-1}, вложенная в проективное пространство P_n, называется вырожденной гиперповерхностью ранга $(n-2)$, если она состоит из ∞^{n-2} одномерных плоских образующих.

С регулярной гиперполосой Γ_{n-2} естественным образом ассоциируется $(n-2)$-вырожденная гиперповерхность V^{n-2}_{n-1}, плоскими образующими которой являются характеристики $\Pi_1\{M^\alpha_1, X^\alpha_n\}$ гиперполосы Γ_{n-2} в соответствующих точках M^α_1 базисной поверхности B_{n-2}. Следовательно, имеем

$$M^\alpha_{1/n} = \psi_1 X^\alpha_n + \lambda_n M^\alpha_1. \qquad (1.1)$$

Главные касательные гиперплоскости T^0_α гиперполосы Γ_{n-2} суть касательные гиперплоскости ассоциированной гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}. Для регулярной гиперполосы Γ_{n-2} и гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} имеют место соотношения:

$$\tilde{\Gamma}^1_{1i} = \Gamma^1_{1i}, \qquad (1.2)$$

$$\tilde{\Gamma}^1_{1n} = -\lambda_n, \quad \tilde{\Gamma}^0_{0i} = \Gamma^0_{0i}, \qquad (1.3)$$

$$\tilde{P}^1_\alpha = P^1_\alpha + \psi^1_n T^n_\alpha, \qquad (1.4)$$

$$\tilde{N}^{1n}_\alpha = \psi^1 T^n_\alpha, \quad \tilde{N}^{1K}_\alpha = N^{1K}_\alpha, \qquad (1.5)$$

$$\tilde{b}^{0}_{1ij} = b^{0}_{2ij}. \qquad (1.6)$$

Докажем, например, справедливость соотношения (I.2). Так как для гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} выполняется условие $\tilde{P}^{1}_{\alpha} M^{\alpha}_{1/ij} = 0$, то

$$\tilde{P}^{1}_{\alpha} M^{\alpha}_{1/i} = \tilde{P}^{1}_{\alpha} M^{\alpha}_{1,i} - \tilde{\Gamma}^{1}_{1i} M^{\alpha}_{1} \tilde{P}^{1}_{\alpha} = 0. \qquad (1.7)$$

С другой стороны для регулярной гиперполосы Γ_{n-2} имеем равенства:

$$\tilde{P}^{1}_{\alpha} M^{\alpha}_{1/i} = \tilde{P}^{1}_{\alpha} M^{\alpha}_{1,i} - \Gamma^{1}_{1i} M^{\alpha}_{1} \tilde{P}^{1}_{\alpha} = 0. \qquad (1.8)$$

Сравнивая (I.7) и (I.8), получаем

$$\tilde{\Gamma}^{1}_{1i} = \Gamma^{1}_{1i}.$$

В дальнейшем рассматриваем для гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} только κ-оснащения [2].

В силу теоремы (2.I) работы [2] следует, что κ-оснащения гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} индуцируют $(n-2)$-мерную поверхность $\check{B}_{n-2}$, принадлежащую гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}, и соответствующую поверхности B_{n-2}. Поверхность $\check{B}_{n-2}$ определяется точками (I.I).

§2. Связанные гиперполосы Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$.

О п р е д е л е н и е 2. Две проективно оснащенные гиперполосы Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие называются связанными, если в соответствующих точках они имеют общие нормали первого и второго рода.

С данной гиперполосой Γ_{n-2} связываем гиперполосу $\check{\Gamma}_{n-2}$, базисная поверхность $\check{B}_{n-2}$ которой образована точками (I.I), а главные касательные гиперплоскости те же, что и у гиперполосы Γ_{n-2}.

Сформулируем тензорный признак связанных гиперполос Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$, доказательство которого аналогично доказательству теоремы (2.I) работы [4]:

Т е о р е м а I. Для того, чтобы характеристические точки

$$M^{\alpha}_{1/n} = \psi_1 X^{\alpha}_{n} + \lambda_n M^{\alpha}_{1}$$

определяли базисную поверхность $\check{B}_{n-2}$ гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$, необходимо и достаточно, чтобы тензоры ψ_1 и λ_n удовлетворяли условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{1/i} - s^{n}_{1} m^{1}_{ni} \psi_1 = 0, \\ &\lambda_{n/i} - \lambda_n s^{n}_{1} m^{1}_{ni} + \psi_1 m^{1}_{ni} = 0, \\ &|e^{\kappa}_{i}| = |\lambda_n \delta^{\kappa}_{i} + \psi_1 m^{1\kappa}_{ni}| \neq 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

где

$$\check{\Gamma}^{1}_{1i} = \Gamma^{1}_{1i} + s^{n}_{1} m^{1}_{ni} \quad (\text{См. } (2.12), \S 2, [4]).$$

О п р е д е л е н и е 3. Нормаль второго рода гиперполосы Γ_{n-2}, индуцированную κ-оснащением гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} и удовлетворяющую условиям (2.I), назовем индуцированной нормалью второго рода W_{n-3} этой гиперполосы.

Из этого определения следует, что индуцированная нормаль второго рода W_{n-3} гиперполосы Γ_{n-2} и точка $M^{\alpha}_{1/n}$ определяют нормаль второго рода $\mathcal{O}_{n-2}\{M^{\alpha}_{1/n}; M^{\alpha}_{1/n;i}\}$ гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} в данной точке M^{α}_{1}. $(n-2)$-мерную плоскость $\mathcal{O}_{n-2}$ назовем индуцированной нормалью второго рода $(n-2)$-вырожденной гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}.

В дальнейшем исключаем из рассмотрения случай, когда $(n-2)$-вырожденная ассоциированная гиперповерхность V^{n-2}_{n-1} являются конической [2], т.е. когда тензор $m^{1\kappa}_{ni}$ удовлетворяет условиям:

$$m^{1k}_{ni} = b^1_n \delta^k_i \quad , \text{ где } \quad b^1 = -\psi^1 \lambda_n . \qquad (2.2)$$

В этом случае базисная поверхность $\check{B}_{n-2}$ гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$ вырождается в точку, а оснащение гиперполосы Γ_{n-2} есть центрально вынужденное [3].

Главные фундаментальные тензоры гиперполос Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$ связаны соотношением:

$$\check{b}^{\circ}_{1ij} = e^k_i \, b^{\circ}_{1kj} . \qquad (2.3)$$

Отсюда видно, что гиперполоса $\check{\Gamma}_{n-2}$, связанная с регулярной гиперполосой Γ_{n-2}, регулярна.

Как следует из теоремы (I), не существует гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$, связанной с данной регулярной гиперполосой Γ_{n-2}, если тензоры λ_n, ψ_1 не удовлетворяют, по крайней мере, одному из трех условий (2.I), ([4] §1).

§3. Инвариантное оснащение регулярной гиперполосы Γ_{n-2}.

Задачу построения инвариантного оснащения регулярной гиперполосы Γ_{n-2} начнем с рассмотрения полувнутреннего оснащения этой гиперполосы [6], т.е. когда чебышевский тензор $\check{K}_i$ гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$ равен нулю.

Переход от одного полувнутреннего оснащения гиперполосы Γ_{n-2} к другому характеризуется равенством

$$h_i = \psi^{1k}_{\circ} b^{\circ}_{1ki} . \qquad (3.1)$$

Из (3.I), (4) следует, что при полувнутреннем оснащении гиперполосы Γ_{n-2} каждой нормали второго рода ставится в соответствие единственная нормаль первого рода этой гиперполосы и наоборот.

Для связанных гиперполос Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$ имеют место следующие теоремы:

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы оснащение гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$ было полувнутренним, необходимо и достаточно, чтобы

$$e^k_{p/i} \, \tilde{\tilde{e}}^p_k = K_i \, , \text{ где } \quad e^k_i \, \tilde{\tilde{e}}^i_s = \delta^k_s \qquad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. теоремы (2) проводится совершенно аналогично предложению (I.4) работы [4].

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы оснащения связанных гиперполос Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$ были полувнутренними, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$e^k_{p/i} \, \tilde{\tilde{e}}^p_k = -\psi^{1k}_{\circ} b^{\circ}_{1ki} + h_i . \qquad (3.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. <u>Необходимость</u>. При изменении оснащения гиперполосы Γ_{n-2} чебышевский тензор K_i этой гиперполосы меняется по формуле:

$$\bar{K}_i = K_i + \psi^{1k}_{\circ} b^{\circ}_{1ki} - h_i . \qquad (3.4)$$

Так как новое оснащение гиперполосы Γ_{n-2} полувнутреннее, следовательно, из (3.4) имеем:

$$K_i = h_i - \psi^{1k}_{\circ} b^{\circ}_{1ki} \qquad (3.5)$$

С другой стороны, при полувнутреннем оснащении гиперполосы тензор K_i, в силу теоремы (2), имеет строение (3.2). Сравнивая соотношения (3.2) и (3.5), получаем (3.3).

<u>Достаточность</u>. Пусть выполняются условия (3.3). Тогда для гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$ тензор $K_i = e^k_{p/i} \, \tilde{\tilde{e}}^p_k$. То есть в силу теоремы (2) оснащение гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$ полувнутреннее. Из соотношения (3.3) и теоремы (2) для гиперполосы Γ_{n-2} получаем, что тензор $K_i = h_i - \psi^{1k}_{\circ} b^{\circ}_{1ki}$. Значит оснащение гиперполосы Γ_{n-2} полу-

внутреннее. Теорема доказана.

Перейдем к построению инвариантного оснащения гиперполосы Γ_{n-2}. При полувнутреннем оснащении нормаль второго рода W_{n-3} гиперполосы Γ_{n-2} инварианта в силу условий (2.1), следовательно, ей соответствует единственная инвариантная нормаль первого рода $\overset{*}{W}_2$ этой гиперполосы, определяемая тензором:

$$\psi^{1\tau}_{i} = -e^{\kappa}_{p/i}\tilde{e}^{p}_{\kappa}\, b^{1i\tau}_{0}, \text{ где } b^{0}_{1is}\, b^{1\tau s}_{0} = \delta^{\tau}_{i}. \qquad (3.6)$$

Поставим следующую задачу: выделить в инвариантной нормали первого рода $\overset{*}{W}_2$ регулярной гиперполосы Γ_{n-2} прямую $\mathfrak{A}_1$, внутренним образом связанную с данной гиперполосой.

При построении инвариантного оснащения $\{W_2, W_{n-3}\}$ гиперполосы Γ_{n-2} мы рассматривали только κ-оснащения ассоциированной $(n-2)$-вырожденной гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}, т.е.

$$K_{n} = 0. \qquad (3.7)$$

Из соотношений (1.6) и строения чебышевских тензоров гиперполосы Γ_{n-2} и гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} вытекает, что

$$\tilde{K}_i - K_i = 0. \qquad (3.8)$$

Условия (3.7) и (3.8) характеризуют полувнутреннее Δ-оснащение $\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_{n-2}\}$ гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} [2]. Далее требуем, чтобы для этого полувнутреннего Δ-оснащения $\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_{n-2}\}$ гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} выполнялись соотношения:

$$\begin{aligned} Q^{1}_{0n} = 0, \quad \gamma^{1}_{0\eta} = 0, \\ |m_{ij}| \neq 0, \quad |\ell_{nn}| \neq 0, \end{aligned} \qquad (3.9)$$

причем строение тензоров $Q^{1}_{0n}, \gamma^{1}_{0\eta}, m_{ij}, \ell_{nn}$ такое же как и строение соответствующих тензоров $Q_{0s_2}, \gamma^{1}_{0s}, m_{s_1\tau_1}, \ell_{s_2\tau_2}$ в работах [2], [5].

Условия (3.9) определяют инвариантную прямую $\mathfrak{A}_1$ в инвариантной нормали первого рода W_2 гиперполосы Γ_{n-2}, являющейся внутренней нормалью первого рода $\mathfrak{A}_1$ гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}.

Таким образом, получаем следующую геометрическую характеристику инвариантного оснащения регулярной $(n-2)$-мерной гиперполосы Γ_{n-2}: инвариантная нормаль второго рода W_{n-3} регулярной гиперполосы Γ_{n-2} является пересечением касательных плоскостей T_{n-2} и $\overset{*}{T}_{n-2}$ в соответствующих точках базисных поверхностей B_{n-2} и $\check{B}_{n-2}$ гиперполос Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$. Инвариантная нормаль первого рода W_2 гиперполосы Γ_{n-2} есть прямая сумма образующей Π_1 (характеристики гиперполосы Γ_{n-2}) гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} и её инвариантной нормали первого рода $\mathfrak{A}_1$.

Литература.

1. Атанасян Л.С., К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства. (Уч.зап.МГПИ им.ЛЕНИНА), т.168, 1957, вып.2, с.3-44.

2. Атанасян Л.С. и Воронцов Н.С., Построение инвариантного оснащения τ-вырожденной гиперповерхности многомерного проективного пространства. (Уч.зап.МГПИ им.ЛЕНИНА), т.243, 1965, с.5-28.

3. Попов Ю.И., К теории оснащенной гиперполосы в многомерном проективном пространстве. (Уч.зап.МГПИ им.ЛЕНИНА), т.I, №374, 1970, с.102-117.

4. Попов Ю.И., Гиперполосы многомерного проективного пространства с общим оснащением. (Уч.зап.МГПИ им.ЛЕНИНА), т.I, №374, 1970, с.118-129.

5. Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (Труды Калининградского ун-та), вып.I, 1970, с.27-47

6. Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на регулярной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства, (Уч. зап. МГЗПИ), вып. 30, 1971, с. 286-296.

7. Васильян М.А., Об инвариантном оснащении гиперполосы Γ_{n-2}. (Доклады Академии Наук АССР), т. 40, №2, 1970.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

Т К А Ч Г.П.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АФФИННО РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР В ТРЕХМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

По аналогии с расслоением пар конгруэнций фигур в проективном [I] и центроаффинном [2] пространствах вводится понятие односторонне аффинно расслояемых и расслояемых пар конгруэнций фигур в эквиаффинном пространстве A_3.

§I. Канонический репер пары T.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются пары T конгруэнций фигур F_1 и F_2, где F_1 -парабола, а $F_2 \equiv B$ - точка, не инцидентная плоскости параболы. Из рассмотрения исключается случай, когда касательная плоскость α_B к поверхности (B) касается параболы F_1 или параллельна плоскости параболы. Обозначим буквами m -линию пересечения плоскости α_B с плоскостью параболы, ℓ' -касательную к параболе, параллельную прямой m, A -точку касания прямой ℓ' с параболой, M_0 -точку пересечения прямой m диаметра параболы, проходящего через A; ℓ -прямую BM_0.

Отнесем пару T к реперу $R_T = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = \overline{AM}_0$, $\bar{e}_3 = \overline{AB}$, $\bar{e}_2$ направлен по прямой ℓ'.

Деривационные формулы репера R_T имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3) \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \qquad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и соотношению

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0, \tag{1.3}$$

вытекающему из условия

$$(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) = 1, \tag{1.4}$$

характеризующего эквиаффинную группу преобразований.

Уравнения параболы относительно репера R_T примут вид:

$$(x^2)^2 - 2px^1 = 0, \quad x^3 = 0 \tag{1.5}$$

Исключая случай параллельности прямой AB касательной плоскости к поверхности (A), примем формы Пфаффа ω^1, ω^2 за независимые. Система пфаффовых уравнений пары T примет вид:

$$\omega^3 = \Gamma_k^3 \omega^k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_{ik}^3 \omega^k, \quad \omega_3^i = \Gamma_{3k}^i \omega^k, \quad \omega_i^j = \Gamma_{ik}^j \omega^k,$$

$$d\ln p - \omega_1^1 + 2\omega_2^2 = p_k \omega^k, \quad \omega^1 + \omega^3 + \omega_3^1 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \quad (i,j,k = 1,2) \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i, j суммирование не производится.

Обозначим:

$$\vartheta = \omega^1 + \omega^3 + \omega_1^1 + \omega_1^3, \quad \Omega = \omega_2^1 + \omega_2^3. \tag{1.7}$$

Замыкая систему (I.6), находим:

$$\Delta\Gamma_k^3 \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta\Gamma_{ik}^3 \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta\Gamma_{3k}^i \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta\Gamma_{jk}^i \wedge \omega^k = 0,$$

$$\Delta\Gamma_{1k}^1 \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta p_k \wedge \omega^k = 0, \quad (\omega^1 + \omega_3^1) \wedge \vartheta + (\omega^2 + \omega_3^2) \wedge \Omega = 0, \tag{1.8}$$

где

$$\Delta\Gamma_i^3 = d\Gamma_i^3 + \Gamma_i^3 (B^* - 2\Gamma_{ij}^i - \Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{ij}^3 \omega^j,$$

$$\Delta\Gamma_{ii}^3 = d\Gamma_{ii}^3 + \Gamma_{ii}^3 (B^* - 3\Gamma_{ij}^i - \Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{ii}^j \Gamma_{jj}^3 \omega^j,$$

$$\Delta\Gamma_{ji}^3 = d\Gamma_{ji}^3 + \Gamma_{ji}^3 [B^* - 2(\Gamma_{ij}^i + \Gamma_{jj}^j)]\omega^j + \Gamma_{ji}^i \Gamma_{ij}^3 \omega^j,$$

$$\Delta\Gamma_{3i}^i = d\Gamma_{3i}^i + \Gamma_{3i}^i (B^* - \Gamma_{ij}^i - \Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{3i}^j \Gamma_{jj}^i \omega^j,$$

$$\Delta\Gamma_{3i}^j = d\Gamma_{3i}^j + \Gamma_{3i}^j (B^* + 2\Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{3i}^i \Gamma_{ij}^j \omega^j,$$

$$\Delta\Gamma_{ji}^i = d\Gamma_{ji}^i + \Gamma_{ji}^i (B^* - \Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{ji}^3 \Gamma_{3j}^i \omega^j,$$

$$\Delta\Gamma_{ii}^j = d\Gamma_{ii}^j + \Gamma_{ii}^j (B^* - 2\Gamma_{ij}^i + \Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{ii}^3 \Gamma_{3j}^j \omega^j,$$

$$\Delta\Gamma_{1i}^1 = d\Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{1i}^1 (B^* - \Gamma_{ij}^i)\omega^j + (\Gamma_{1i}^2 \Gamma_{2j}^1 + \Gamma_{1i}^3 \Gamma_{3j}^1)\omega^j,$$

$$\Delta p_i = dp_i + p_i (B^* - \Gamma_{ij}^i)\omega^j + (\Gamma_{3i}^1 \Gamma_{1j}^3 - 2\Gamma_{3i}^2 \Gamma_{2j}^3 + 3\Gamma_{2i}^1 \Gamma_{1j}^2)\omega^j,$$

$$B^* = \Gamma_{ji}^i - \Gamma_i^3 \Gamma_{3j}^i + \Gamma_j^3 \Gamma_{3i}^i.$$

Из (I.6) и (I.8) непосредственно следует, что пары T существуют и определяются с произволом восьми функций двух аргументов.

§ 2. Основные геометрические образы, ассоциированные с парой T.

1. Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_i)$.

Фокусы

$$\bar{F}_i = \bar{A} + \lambda_i \bar{e}_i \tag{2.1}$$

и торсы прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_i)$ определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda_i^2(\Gamma^j_{ii}\Gamma^3_{ij} - \Gamma^j_{ij}\Gamma^3_{ii}) + \lambda_i(\Gamma^j_{ii}\Gamma^3_j - \Gamma^j_{ij}\Gamma^3_i - \Gamma^3_{ii}) - \Gamma^3_i = 0. \tag{2.2}$$

$$\omega^j\omega^3_i - \omega^3\omega^j_i = 0. \tag{2.3}$$

2. Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_3)$.

Фокусы

$$\bar{F}_3 = \bar{A} + \lambda_3\bar{e}_3 \tag{2.4}$$

и торсы прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda_3^2(\Gamma^1_{31}\Gamma^2_{32} - \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{31}) + \lambda_3(\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32}) + 1, \tag{2.5}$$

$$\omega^1\omega^2_3 - \omega^2\omega^1_3 = 0. \tag{2.6}$$

. Прямолинейная конгруэнция $(B\,\bar{e}_1 - \bar{e}_3)$.

Фокусы

$$\bar{F}^* = \bar{A} + \bar{e}_3 + \lambda^*(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) \tag{2.7}$$

и торсы прямолинейной конгруэнции $(B\,\bar{e}_1 - \bar{e}_3)$ определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda^*\{\lambda^*[(1+\Gamma^3_1+\Gamma^1_{11}+\Gamma^3_{11})(\Gamma^2_{12}-\Gamma^2_{32}) - (\Gamma^3_2+\Gamma^1_{12}+\Gamma^3_{12})(\Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{31})] +$$
$$+ (1+\Gamma^2_{32})(1+\Gamma^3_1+\Gamma^1_{11}+\Gamma^3_{11}) - \Gamma^2_{31}(\Gamma^3_2+\Gamma^1_{12}+\Gamma^3_{12})\} = 0, \tag{2.8}$$

$$\vartheta(\omega^2 + \omega^2_3) = 0. \tag{2.9}$$

4. Огибающая (M_i) плоскостей $(\bar{e}_j\,\bar{e}_3)$.

Если поверхность (M_i) не является торсом, то

$$\bar{M}_i = \bar{A} + \frac{1}{\Delta_i}(\Gamma^i_{3j}\bar{e}_j - \Gamma^i_{jj}\bar{e}_3), \tag{2.10}$$

где

$$\Delta_i = \Gamma^i_{jj}\Gamma^i_{3i} - \Gamma^i_{ji}\Gamma^i_{3j} \neq 0. \tag{2.11}$$

Если поверхность (M_i) - торс, то $\Delta_i = 0$ и характеристика поверхности имеет направление:

$$\bar{K} = \Gamma^i_{3j}\bar{e}_j - \Gamma^i_{jj}\bar{e}_3 = \lambda(\Gamma^i_{3i}\bar{e}_j - \Gamma^i_{ji}\bar{e}_3). \tag{2.12}$$

5. Огибающая (M_3) плоскостей $(\bar{e}_1\,\bar{e}_2)$ (плоскостей парабол).

Если поверхность (M_3) не является торсом, то

$$\bar{M}_3 = \bar{A} - \frac{1}{\Delta_3}[(\Gamma^3_1\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_2\Gamma^3_{21})\bar{e}_1 + (\Gamma^3_2\Gamma^3_{11} - \Gamma^3_1\Gamma^3_{12})\bar{e}_2], \tag{2.13}$$

где

$$\Delta_3 = \Gamma^3_{11}\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_{12}\Gamma^3_{21} \neq 0. \tag{2.14}$$

6. Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции.

Определяющая их система уравнений имеет вид:

$$(x^2)^2 - 2p x^1 = 0, \quad x^3 = 0, \quad x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + \omega^3 = 0,$$
$$(x^2)^2\omega_2^2 + x^1x^2\omega_1^2 + x^2(\omega^2 - p\omega_2^1) + x^1(dp - p\omega_1^1) - p\omega^1 = 0. \tag{2.15}$$

§ 3. Аффинно расслоенные пары конгруэнций фигур.

Пусть имеется двупараметрическое семейство (конгруэнция) $(\mathcal{L})$ плоских кривых $\mathcal{L}$ и m-параметрическое семейство H_m пучков α параллельных плоскостей ($m=0,1,2$).

Определение 1. Будем говорить, что существует одностороннее аффинное расслоение от конгруэнции $(\mathcal{L})$ к семейству H_m, если 1) задано отображение φ, ставящее в соответствие каждой кривой $\mathcal{L}$ конгруэнции $(\mathcal{L})$ единственный пучок $\alpha = \varphi(\mathcal{L})$ семейства H_m, причем кривая $\mathcal{L}$ не инцидентна плоскости пучка α. 2) к конгруэнции $(\mathcal{L})$ можно присоединить однопараметрическое семейство Σ поверхностей так, чтобы касательные плоскости к каждой поверхности семейства Σ в точках пересечения с кривой $\mathcal{L}$ конгруэнции $(\mathcal{L})$ содержались в соответствующем пучке семейства H_m.

Определение 2. Пара T называется парой T_1, если существует одностороннее аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ к семейству плоскостей α_B.

Теорема. Пары T_1 существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.

Доказательство. Условия одностороннего аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ к семейству плоскостей α_B, с учетом (1.8), приводятся к виду:

$$\vartheta \wedge \omega^1 + \Omega \wedge \omega^2 = 0 \tag{3.1}$$

Присоединяя (3.1) к уравнениям Пфаффа (1.6) и квадратичным уравнениям (1.8) и исследуя полученную систему убеждаемся в справедливости теоремы.

Определение 3. Пара T называется парой T_2, если существует одностороннее аффинное расслоение от конгруэнции (F_1) к семейству плоскостей α_B.

Теорема. Пары T_2 существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Доказательство. Условия одностороннего аффинного расслоения от конгруэнции (F_1) к семейству плоскостей α_B приводятся к виду:

$$\omega_1^2 \wedge \Omega - \omega_1^3 \wedge \vartheta = 0,$$
$$(d\ln p - \omega_1^1 + 2\omega_2^2 - \omega_1^3) \wedge \Omega - 2\omega_2^3 \wedge \vartheta = 0,$$
$$\omega^2 \wedge \Omega - \omega^3 \wedge \vartheta = 0, \tag{3.2}$$
$$(\omega^1 + \omega^3) \wedge \Omega = 0,$$
$$(\omega^2 + \omega_3^2) \wedge \Omega + (\omega^1 + \omega_3^1) \wedge \vartheta = 0$$

Учитывая (1.6), имеем:

$$\Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^3) - \Gamma_{12}^2(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^3) - \Gamma_{11}^3(\Gamma_2^3 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^3) + \Gamma_{12}^3(1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^3) = 0,$$
$$(p_1 - \Gamma_{11}^3)(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^3) - (p_2 - \Gamma_{12}^3)(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^3) - 2\Gamma_{21}^3(\Gamma_2^3 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^3) + 2(1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^3)\Gamma_{22}^3 = 0,$$
$$\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^3 + \Gamma_1^3(\Gamma_2^3 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^3) - \Gamma_2^3(1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^3) = 0,$$
$$(1 + \Gamma_1^3)(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^3) - \Gamma_2^3(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^3) = 0,$$
$$\Gamma_{31}^2(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^3) - (1 + \Gamma_{32}^2)(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^3) + (1 + \Gamma_{31}^1)(\Gamma_2^3 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^3) - \Gamma_{32}^1(1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^3) = 0,$$

Пары T_2 определяются уравнениями Пфаффа (I.6), квадратичными уравнениями (I.8) и конечными соотношениями (3.3). Система в инволюции и имеет решение с произволом четырех функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е 4. Пара T называется расслояемой, если существуют односторонние аффинные расслоения от прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ и от конгруэнции (F_1) к двупараметрическому семейству плоскостей α_B.

Т е о р е м а. Расслояемые пары T существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система квадратичных уравнений, определяющих расслояемые пары T, запишется в виде:

$$\begin{gathered}(d\ln p-\omega_1^1+2\omega_2^2-\omega_1^3)\wedge\Omega-2\omega_2^3\wedge v=0,\\ \omega_3^2\wedge\Omega+\omega_3^1\wedge v=0,\quad \omega^2\wedge\Omega+\omega^1\wedge v=0,\\ \omega_1^2\wedge\Omega-\omega_1^3\wedge v=0,\\ (\omega^1+\omega^3)\wedge\Omega=0,\quad (\omega^1+\omega^3)\wedge v=0\end{gathered} \tag{3.4}$$

Так как плоскости α_B образуют двупараметрическое семейство, то

$$v\wedge\Omega\neq 0 \tag{3.5}$$

Из последних двух уравнений системы (3.4) имеем:

$$\omega^1+\omega^3=0. \tag{3.6}$$

Замыкая уравнение (3.6), получим квадратичное уравнение

$$\omega^1\wedge v+\omega^2\wedge\Omega=0, \tag{3.7}$$

которое входит в систему (3.4).

Разрешая (3.7) по лемме Картана, получим:

$$\begin{gathered}v=\omega_1^1+\omega_1^3=a_1\omega^1+b\,\omega^2,\\ \Omega=\omega_2^1+\omega_2^3=b\,\omega^1+a_2\,\omega^2.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Учитывая (3.5) и (3.8), имеем

$$a_1a_2-b^2\neq 0. \tag{3.9}$$

Расслояемые пары T определяются уравнениями Пфаффа:

$$\begin{gathered}\omega^1+\omega^3=0,\quad \omega_3^1-\omega_1^1-\omega_2^2=0,\quad \omega_i^1=a_i\omega^i+b\,\omega^j-\omega_i^3,\\ \omega_i^3=\Gamma_{ik}^3\omega^k,\quad \omega_1^2=\Gamma_{1k}^2\omega^k,\quad \omega_3^i=\Gamma_{3k}^i\omega^k,\ d\ln p-\omega_1^1+2\omega_2^2=p_k\omega^k,\end{gathered} \tag{3.10}$$

квадратичными уравнениями:

$$\begin{gathered}\Delta\Gamma_{ik}^3\wedge\omega^k=0,\quad \Delta\Gamma_{3k}^i\wedge\omega^k=0,\quad \Delta\Gamma_{1k}^2\wedge\omega^k=0,\\ \Delta p_k\wedge\omega^k=0,\quad \Delta a_i\wedge\omega^i+\Delta b\wedge\omega^j=0\end{gathered} \tag{3.11}$$

и конечными соотношениями:

$$\begin{gathered}(p_1-\Gamma_{11}^3)a_2-(p_2-\Gamma_{12}^3+2\Gamma_{21}^3)b+2\Gamma_{22}^3a_1=0,\\ \Gamma_{11}^2a_2-(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^3)b+\Gamma_{12}^3a_1=0,\\ \Gamma_{31}^2a_2-(\Gamma_{32}^2-\Gamma_{31}^1)b-\Gamma_{32}^1a_1=0.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Замкнутая система (3.I0), (3.II), (3.I2) - в инволюции. Произвол существования расслояемых пар T - четыре функции двух аргументов.

Т е о р е м а. Поверхность (A) расслояемой пары T является фокальной поверхностью конгруэнции (F_1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.6), убеждаемся, что координаты точки A обращают в тождество уравнение (2.I5) при $\omega^1 = 0$. Следовательно, A -фокальная поверхность конгруэнции парабол, а $\omega^1 = 0$ - её фокальное семейство.

Л и т е р а т у р а

I. Малаховский В.С., Труды геометрического семинара ВИНИТИ, М., I97I, 3, I93-220.

2. Л.И. Магазинников, Центроаффинно-расслояемые пары конгруэнций. "Геометрический сборник", вып.5 (Труды Томского ун-та), т. I8I, I965, 43-56.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

Х Л Я П О В А Е.А.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПАР ФИГУР В A_n.

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается многообразие пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 -центральный квадратичный элемент, а F_2 - k-плоскость, не инцидентная гиперплоскости квадратичного элемента.

Такая пара фигур называется центральной квадратичной парой [3]. Найден основной фундаментальный объект данного многообразия. Рассмотрены некоторые частные классы многообразия $\{2,I,3\}$.

§ I. Система дифференциальных уравнений многообразия $\{h,k,n\}$.

О п р е д е л е н и е. Многообразием $\{h,k,n\}$ называется многообразие центральных квадратичных пар [3] n-мерного аффинного пространства, у которых k-плоскости F_2 образуют h-параметрическое семейство, а многообразие центральных квадратичных элементов, входящих в пару, является многообразием $(h,h,n)^2$ [I]

I Рассмотрим общий случай, когда $k > 1$. Исследование многообразий $\{h,k,n\}$ осуществляется в частично-канонизированном репере. Вершина A репера совмещается с центром квадратичного элемента, векторы $\bar{e}_{\hat{i}}$ располагаются в его гиперплоскости, причем векторы $\bar{e}_{\hat{a}}$ параллельны линии пересечения к-плоскости F_2 с гиперплоскостью квадратичного элемента, а вектор $\bar{e}_n$ располагается вне гиперплоскости квадратичного элемента, параллельно F_2.

Индексы, встречающиеся в работе, принимают следующие значения:

$$\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 1, 2, \ldots, h\,; \quad a, b, c = h+1, \ldots, n\,; \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n;$$

$$\hat{i}, \hat{j} = 1, \ldots, n-k\,; \quad \hat{a}, \hat{b} = n-k+1, \ldots, n; \quad i, j, k = 1, \ldots, n-1;$$

$$\hat{i}', \hat{j}' = 1, \ldots, n-k-1\,; \quad \hat{a}', \hat{b}' = n-k+1, \ldots n-1; \quad \hat{\alpha}, \hat{\beta} = h+1, \ldots, n-k;$$

$$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} = n-k+1, \ldots, h\,; \quad a', b' = h+1, \ldots, n-1\,; \quad a'', b'' = h+1, \ldots, n-2;$$

$$i', j' = 1, \ldots, n-2.$$

Инфинитезимальное перемещение репера определяется формулами:

$$d\bar{A} = \omega^{\alpha} \bar{e}_{\alpha}\,, \quad d\bar{e}_{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\beta} \bar{e}_{\beta}\,, \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^{α}, ω_{α}^{β} удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha} = \omega^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\alpha}\,; \quad \mathcal{D}\omega_{\alpha}^{\beta} = \omega_{\alpha}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\beta}. \tag{1.2}$$

Уравнения центрального квадратичного элемента F_1 и к-плоскости F_2 принимают соответственно вид:

$$a_{ij} x^i x^j - 1 = 0\,, \quad x^n = 0\,, \quad \det(a_{ij}) \neq 0\,, \tag{1.3}$$

$$x^{\hat{i}} = c^{\hat{i}} \tag{1.4}$$

Система дифференциальных уравнений многообразия $\{h, k, n\}$ имеет вид

$$\omega^{a} = \Lambda_{\mathcal{I}}^{a} \omega^{\mathcal{I}}\,; \quad \omega_{i}^{n} = \Lambda_{i,\mathcal{I}}^{n} \omega^{\mathcal{I}}\,; \quad \omega_{\hat{a}}^{\hat{i}} = \Lambda_{\hat{a},\mathcal{I}}^{\hat{i}} \omega^{\mathcal{I}}\,;$$

$$\theta^{\hat{i}} = \Lambda_{\mathcal{I}}^{\hat{i}} \omega^{\mathcal{I}}\,; \quad \theta_{ij} = \Lambda_{ij\mathcal{I}} \omega^{\mathcal{I}}, \tag{1.5}$$

где

$$\theta_{ij} = da_{ij} - a_{kj} \omega_{i}^{k} - a_{ik} \omega_{j}^{k}\,,$$

$$\theta^{\hat{i}} = dc^{\hat{i}} + c^{\hat{j}} \omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}. \tag{1.6}$$

Замыкая систему (I.5), получим:

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{I}}^{a} \wedge \omega^{\mathcal{I}} = 0\,; \quad \Delta\Lambda_{i,\mathcal{I}}^{n} \wedge \omega^{\mathcal{I}} = 0; \quad \Delta\Lambda_{\hat{a},\mathcal{I}}^{\hat{i}} \wedge \omega^{\mathcal{I}} = 0;$$

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{I}}^{\hat{i}} \wedge \omega^{\mathcal{I}} = 0\,; \quad \Delta\Lambda_{ij,\mathcal{I}} \wedge \omega^{\mathcal{I}} = 0, \tag{1.7}$$

где

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{I}}^{a} = \nabla\Lambda_{\mathcal{I}}^{a} - \Lambda_{\mathcal{J}}^{a} \Lambda_{\mathcal{I}}^{b} \omega_{b}^{\mathcal{J}} - \omega_{\mathcal{I}}^{a}\,,$$

$$\Delta\Lambda_{i,\mathcal{I}}^{n} = \nabla\Lambda_{i,\mathcal{I}}^{n} - \Lambda_{i,\mathcal{J}}^{n} \Lambda_{\mathcal{I}}^{b} \omega_{b}^{\mathcal{J}}\,,$$

$$\Delta\Lambda_{\hat{a},\mathcal{I}}^{\hat{i}} = \nabla\Lambda_{\hat{a},\mathcal{I}}^{\hat{i}} - \Lambda_{\hat{a},\mathcal{J}}^{\hat{i}} \Lambda_{\mathcal{I}}^{b} \omega_{b}^{\mathcal{J}}\,,$$

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{I}}^{\hat{i}} = \nabla\Lambda_{\mathcal{I}}^{\hat{i}} - \Lambda_{\mathcal{J}}^{\hat{i}} \Lambda_{\mathcal{I}}^{b} \omega_{b}^{\mathcal{J}} - c^{\hat{j}} \Lambda_{\hat{a},\mathcal{I}}^{\hat{i}} \omega_{\hat{j}}^{\hat{a}}\,,$$

$$\Delta\Lambda_{ij,\mathcal{I}} = \nabla\Lambda_{ij,\mathcal{I}} - \Lambda_{ij,\mathcal{J}} \Lambda_{\mathcal{I}}^{b} \omega_{b}^{\mathcal{J}} - (a_{\hat{a}'j} \Lambda_{i,\mathcal{I}}^{n} + a_{i\hat{a}'} \Lambda_{j,\mathcal{I}}^{n}) \omega_{n}^{\hat{a}'}.$$

Так как гиперплоскости квадратичного элемента F_1 и к-плоскости F_2 образуют h-параметрические семейства, то ранги матриц

$$C = (\Lambda_{i,\mathcal{I}}^{n})\,, \quad \mathcal{D} = (\Lambda_{\hat{a},\mathcal{I}}^{\hat{i}}) \tag{1.9}$$

равны h.

Здесь индекс J определяет строку, а пара индексов $(\hat a,\hat i)$ – столбец матрицы $\mathcal{D}$.

Т е о р е м а. Фундаментальный объект первого порядка является основным объектом многообразия (h,ℓ,n).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения основного объекта [2] следует, что нужно доказать алгебраическую разрешимость системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\overset{0}{\theta}_{ij}=0;\quad \overset{0}{\theta}{}^{\hat i}=0;\quad \overset{0}{\Delta}\Lambda^{a}_{\mathcal{J}}=0;\\ &\overset{0}{\Delta}\Lambda^{n}_{i,\mathcal{J}}=0,\quad \overset{0}{\Delta}\Lambda^{\hat i}_{\hat a,\mathcal{J}}=0,\quad \overset{0}{\Delta}\Lambda^{\hat i}_{\mathcal{J}}=0,\quad \overset{0}{\Delta}\Lambda_{ij,\mathcal{J}}=0 \end{aligned}\right\}\qquad (1.10)$$

локального фундаментального объекта

$$\Gamma_2=\{a_{ij};\, c^{\hat i};\, \Lambda^{a}_{\mathcal{J}};\, \Lambda^{n}_{i,\mathcal{J}};\, \Lambda^{\hat i}_{\hat a,\mathcal{J}};\, \Lambda^{\hat i}_{\mathcal{J}};\, \Lambda_{ij,\mathcal{J}}\}$$

первого порядка относительно всех вторичных форм.

Здесь нолик над формой Пфаффа означает фиксацию первичных параметров. Так как система дифференциальных уравнений (I.10) вполне интегрируема, то начальные значения компонент фундаментального объекта Γ_2 можно задавать произвольно, учитывая (I.9).

Выделим три возможных случая:

1). $h=n-\ell$; 2). $h<n-k$; 3). $h>n-\ell$.

Для всех этих случаев начальные значения компонент $a_{ij};\Lambda_{a'a',1};\Lambda^{n}_{J\mathcal{J}}$ зададим одинаково:

$$\bar a_{ij}=\delta^{j}_{i},\quad \bar\Lambda_{a'a',1}=\hat a';\quad \Lambda^{n}_{J\mathcal{J}}=\delta^{\mathcal{J}}_{J}.$$

Значения же остальных компонент для каждого из этих случаев будем задавать следующим образом:

I) $\bar\Lambda^{\mathcal{J}}_{nJ}=J$, остальные начальные значения компонент положим равными нулю.

2) $\bar\Lambda^{\mathcal{J}}_{nJ}=J$, $\bar\Lambda^{n}_{\hat a',1}=1$, $\bar\Lambda_{22,1}=2$, остальные компоненты равны нулю.

3) $\bar\Lambda^{n}_{\hat a,1}=1$, $\Lambda^{\hat i}_{2a}=1$, $\Lambda^{\hat i}_{n\hat i}=\hat i$, остальные компоненты равны нулю.

К системе (I.10) присоединим формальную алгебраическую систему:

$$\begin{aligned} &Y_{ij}=a_{kj}\pi^{k}_{i}+a_{ik}\pi^{k}_{j},\\ &Y^{\hat i}=-c^{\hat j}\pi^{\hat i}_{\hat j},\\ &Y^{a}_{\mathcal{J}}=-\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{a}_{b}+\Lambda^{a}_{\varkappa}\pi^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\Lambda^{a}_{\mathcal{J}}\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{\mathcal{J}}_{b}+\pi^{a}_{\mathcal{J}},\\ &Y^{n}_{i,\mathcal{J}}=\Lambda^{n}_{j,\mathcal{J}}\pi^{j}_{i}+\Lambda^{n}_{i,\varkappa}\pi^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\Lambda^{n}_{i,\mathcal{J}}\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{\mathcal{J}}_{b},\\ &Y^{\hat i}_{\hat a,\mathcal{J}}=-\Lambda^{\hat j}_{\hat a,\mathcal{J}}\pi^{\hat i}_{\hat j}+\Lambda^{\hat i}_{\hat b,\mathcal{J}}\pi^{\hat b}_{\hat a}+\Lambda^{\hat i}_{\hat a,\varkappa}\pi^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\Lambda^{\hat i}_{\hat a,\mathcal{J}}\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{\mathcal{J}}_{b}, \end{aligned}\qquad (1.11)$$

$$\begin{aligned} &Y^{\hat i}_{\mathcal{J}}=-\Lambda^{\hat j}_{\mathcal{J}}\pi^{\hat i}_{\hat j}+\Lambda^{\hat i}_{\varkappa}\pi^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\Lambda^{\hat i}_{\mathcal{J}}\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{\mathcal{J}}_{b}+c^{\hat j}\Lambda^{\hat i}_{\hat a,\mathcal{J}}\pi^{\hat a}_{\hat j},\\ &Y_{ij,\mathcal{J}}=\Lambda_{kj,\mathcal{J}}\pi^{k}_{i}+\Lambda_{ik,\mathcal{J}}\pi^{k}_{j}+\Lambda_{ij,\varkappa}\pi^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\\ &\qquad+\Lambda_{ij,\mathcal{J}}\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{\mathcal{J}}_{b}+(a_{\hat a' j}\Lambda^{n}_{i,\mathcal{J}}+a_{i\hat a'}\Lambda^{n}_{j,\mathcal{J}})\pi^{\hat a'}_{n}. \end{aligned}\qquad (1.11)$$

Из (I.II) находим:

$$\begin{aligned} &1).\ \pi^{a'}_{\mathcal{J}}=-Y^{a'}_{\mathcal{J}};\ \pi^{n}_{n}=Y^{1}_{n,1};\ (\mathcal{J}-J)\pi^{\mathcal{J}}_{J}=Y^{\mathcal{J}}_{nJ},\\ &\pi^{a'}_{n}=\tfrac{1}{2}Y_{a'a',1}-\tfrac{1}{2}\hat a' Y_{11}-\tfrac{1}{2}\hat a' Y_{a'a'},\\ &(\hat b'-\hat a')\pi^{b'}_{a'}=Y_{a'b',1}-\hat a' Y_{a'b'}-\pi^{b'}_{n}-\pi^{a'}_{n};\\ &2).\ (\hat\beta-\hat\alpha)\pi^{\beta}_{\alpha}=Y_{\alpha\beta,1}-\hat\alpha Y_{\alpha\beta} \end{aligned}\qquad (1.12)$$

и все уравнения системы (I.I2)

$$3).\ (\hat i-\hat j)\pi^{\hat j}_{\hat i}=Y^{\hat j}_{n,\hat i},\quad \pi^{\varkappa}_{\hat i}=Y_{\hat i\varkappa}.$$

и все уравнения системы (I.I2), кроме третьего.

Здесь по индексам $J,\mathcal{J},a',b',\alpha,\beta,\hat i,\hat j$ суммирование не производится.

Если формальная система (I.II) алгебраически разрешима относительно всех вторичных форм [2], то система дифференциальных уравнений (I.7), (I.8) разрешима относительно вторичных форм в окрестности точки

$$(\overset{0}{a}_{ij};\ \overset{0}{c}{}^{\hat i};\ \overset{0}{\Lambda}{}^{n}_{\mathcal{J}};\ \overset{0}{\Lambda}{}^{n}_{i,\mathcal{J}};\ \overset{0}{\Lambda}{}^{\hat i}_{\hat a,\mathcal{J}};\ \overset{0}{\Lambda}{}^{\hat i}_{\mathcal{J}};\ \overset{0}{\Lambda}_{ij,\mathcal{J}}).$$

Так как в каждом из трех случаев все вторичные формы найдены, то теорема доказана.

§ 2. Многообразия $(h,1,n)$.

Для многообразия $(h,1,n)$ репер строим следующим образом: вершину A репера помещаем в центр квадратичного элемента

F_1. векторы $\bar e_i$ располагаем в его гиперплоскости так, что конец вектора $\bar e_{n-1}$ совмещается с точкой пересечения прямой F_2 с гиперплоскостью квадратичного элемента, а вектор $\bar e_n$ параллелен прямой F_2.

Система дифференциальных уравнений многообразия $\{k,1,n\}$ имеет вид:

$$\omega^a=\Lambda^a_\gamma\omega^\gamma;\quad \omega^{\hat i}_n=\Lambda^{\hat i}_{n,\gamma}\omega^\gamma;\quad \omega^n_{\hat i}=\Lambda^n_{\hat i,\gamma}\omega^\gamma;$$
$$\omega^{\hat i}_{n-1}=\Lambda^{\hat i}_{n-1,\gamma}\omega^\gamma;\quad \theta_{ij}=\Lambda_{ij,\gamma}\omega^\gamma, \tag{2.1}$$

где θ_{ij} определяется формулами (1.6). Замыкая систему (2.1), получаем

$$\Delta\Lambda^a_\gamma\wedge\omega^\gamma=0;\quad \Delta\Lambda^{\hat i}_{n,\gamma}\wedge\omega^\gamma=0;\quad \Delta\Lambda^n_{\hat i,\gamma}\wedge\omega^\gamma=0;$$
$$\Delta\Lambda^{\hat i}_{n-1,\gamma}\wedge\omega^\gamma=0;\quad \Delta\Lambda_{ij,\gamma}\wedge\omega^\gamma=0, \tag{2.2}$$

где

$$\Delta\Lambda^a_\gamma=d\Lambda^a_\gamma-\Lambda^a_\gamma\omega^\gamma_\gamma+\Lambda^{b''}_\gamma\omega^a_{b''}-\Lambda^a_\gamma\Lambda^{a''}_\gamma\omega^\gamma_{a''}+\Lambda^n_\gamma\omega^a_n-\omega^a_\gamma,$$
$$\Delta\Lambda^{\hat i}_{n,\gamma}=d\Lambda^{\hat i}_{n,\gamma}-\Lambda^{\hat i}_{n,\gamma}\omega^\gamma_\gamma+\Lambda^{\hat j}_{n,\gamma}\omega^{\hat i}_{\hat j}-\Lambda^{\hat i}_{n\gamma}\Lambda^{b''}_\gamma\omega^\gamma_{b''},$$
$$\Delta\Lambda^n_{\hat i,\gamma}=d\Lambda^n_{\hat i,\gamma}-\Lambda^n_{\hat i,\gamma}\omega^\gamma_\gamma-\Lambda^n_{\hat j,\gamma}\omega^{\hat j}_{\hat i}-\Lambda^n_{\hat i\gamma}\Lambda^{b''}_\gamma\omega^\gamma_{b''},$$
$$\Delta\Lambda^{\hat i}_{n-1,\gamma}=d\Lambda^{\hat i}_{n-1,\gamma}-\Lambda^{\hat i}_{n-1,\gamma}\omega^\gamma_\gamma+\Lambda^{\hat i'}_{n-1,\gamma}\omega^{\hat i}_{\hat i'}+\Lambda^{\hat i}_{n-1,\gamma}\Lambda^{b''}_\gamma\omega^\gamma_{b''},$$
$$\Delta\Lambda_{ij,\gamma}=\nabla\Lambda_{ij,\gamma}-\Lambda_{ij,\gamma}\Lambda^{b''}_\gamma\omega^\gamma_{b''}.$$

Т е о р е м а. Фундаментальный объект

первого порядка является основным объектом многообразия $\{k,1,n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начальные значения компонент фундаментального объекта Γ_1 зададим следующим образом:

$$\tilde a_{ij}=\delta^j_i;\quad \tilde\Lambda^n_{\gamma\gamma}=\delta^\gamma_\gamma;\quad \tilde\Lambda_{\gamma\varkappa,\gamma}=\delta^\varkappa_\gamma;\quad \tilde\Lambda_{a''a'',1}=a''.$$

Тогда

$$\hat\pi^a_\gamma=-y^a_\gamma;\quad \hat\pi^\gamma_\gamma=\frac12 y_{\gamma\gamma};\quad \hat\pi^{a''}_{a''}=-\frac12 y_{a''a''};$$
$$\pi^n_n=\frac12 y_{nn};\quad \hat\pi^\gamma_{a''}=y_{\gamma a''}+y^{a''}_\gamma,\quad \hat\pi^\gamma_\varkappa=y_{\gamma\varkappa,1};$$
$$(b''-a'')\hat\pi^{b''}_{a''}=y_{a''b'',1}-a''y_{a''b''}.$$

По индексам a'', b'', γ суммирование не производится.

§3. Пары $\mathcal{L}$.

Многообразие $\{2,1,3\}$, заданное в эквиаффинном пространстве, назовем парой $\mathcal{L}$. Продолжим канонизацию репера, построенного в §2, таким образом, что вектор $\bar e_1$ будет сопряжен вектору $\bar e_2$, конец $\bar e_1$ принадлежит центральной конике F_1.

Уравнения коники F_1, входящей в пару, записываются в виде:

$$(x^1)^2+a(x^2)^2=1,\quad x^3=0. \tag{3.1}$$

Так как пространство эквиаффинное, то

$$\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3=0. \tag{3.2}$$

Система дифференциальных уравнений, определяющих пару $\mathcal{L}$, имеет вид:

$$\omega^3=\Gamma^3_{\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}};\quad \omega^{\alpha}_{\mathcal{J}}=\Gamma^{\alpha}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}};\quad \omega^{\mathcal{J}}_3=\Gamma^{\mathcal{J}}_{3\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}};\quad da=\Gamma_{\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}} \qquad (3.3)$$

Замыкая систему (3.3), получаем

$$\Delta\Gamma^3_{\mathcal{J}}\wedge\omega^{\mathcal{J}}=0;\ \Delta\Gamma^{\alpha}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}\wedge\omega^{\mathcal{J}}=0;\ \Delta\Gamma^{\mathcal{J}}_{3\mathcal{J}}\wedge\omega^{\mathcal{J}}=0;\ \Delta\Gamma_{\mathcal{J}}\wedge\omega^{\mathcal{J}}=0, \qquad (3.4)$$

где

$$\Delta\Gamma^3_{\mathcal{J}}=d\Gamma^3_{\mathcal{J}}+(\Gamma^3_{\varkappa}B^{\varkappa}_{x\mathcal{J}}-\Gamma^3_{x})\omega^{x}+\Gamma^3_{\mathcal{J}}\,\omega^3_3,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}=d\Gamma^{\alpha}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}+\Gamma^{\alpha}_{\mathcal{J}\varkappa}B^{\varkappa}_{x\mathcal{J}}\omega^{x}+\Gamma^{\beta}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}\,\omega^{\alpha}_{\beta}, \qquad (3.5)$$

$$\Delta\Gamma^{\mathcal{J}}_{3\mathcal{J}}=d\Gamma^{\mathcal{J}}_{3\mathcal{J}}+\Gamma^{\mathcal{J}}_{3\varkappa}B^{\varkappa}_{x\mathcal{J}}\omega^{x}-\Gamma^{\mathcal{J}}_{\alpha\mathcal{J}}\,\omega^{\alpha}_3,$$

$$\Delta\Gamma_{\mathcal{J}}=d\Gamma_{\mathcal{J}}+\Gamma_{\varkappa}B^{\varkappa}_{x\mathcal{J}}\omega^{x},\qquad B^{\varkappa}_{x\mathcal{J}}=\Gamma^{\varkappa}_{x\mathcal{J}}+\Gamma^3_{x}\Gamma^{\varkappa}_{3\mathcal{J}}.$$

Замкнутая система (3.3),(3.4) — в инволюции и определяет пары $\mathcal{L}$ с произволом 10 функций двух аргументов.

Обозначим через ℓ' прямую, проходящую через точку A параллельно вектору $\bar{e}_1$, а через α — плоскость $\{\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$.

О п р е д е л е н и е. Пара $\mathcal{L}$ называется парой $\mathcal{L}_0$, если
1) существует аффинное расслоение от конгруэнции коник (F_1) к семейству плоскостей (α), [4].
2) прямолинейные конгруэнции (ℓ) и (ℓ') образуют одностороннее расслояемую пару от (ℓ) к (ℓ') [5].
3) точка A является характеристической точкой грани $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$
4) $\Gamma^1_{12}=0$.

Т е о р е м а. Пары $\mathcal{L}_0$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия, характеризующие пару $\mathcal{L}_0$

имеют вид:

$$\Gamma^3_1=\Gamma^3_2=\Gamma^1_{31}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{32}=\Gamma^2_{31}=\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=0.$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21} \qquad (3.6)$$

Анализируя исходную систему (3.3) и полученные соотношения (3.6), убеждаемся в справедливости теоремы.

Условия для нахождения фокальных точек коники F_1, входящей в пару $\mathcal{L}_0$, имеют вид

$$(x^1)^2+a(x^2)^2=1,\quad x^3=0;$$

$$b(x^1)^2x^2+c\,x^1(x^2)^2+d(x^2)^3+\ell x^1x^2=0, \qquad (3.7)$$

где

$$b=2(\Gamma^1_{11}\Gamma^3_{22}-a\Gamma^3_{11}\Gamma^2_{12});\quad c=2a\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{11}+\Gamma^3_{11}(\Gamma_2-2a\Gamma^2_{22});$$

$$d=\Gamma^3_{22}(2a\Gamma^2_{21}-\Gamma_1);\quad \ell=2(\Gamma^3_{22}-a\Gamma^3_{11}).$$

Т е о р е м а. Точки $E_1(1,0,0)$ и $E_2(-1,0,0)$, пересечения ребра $\{A\bar{e}_1\}$ репера с коникой F_1 являются её фокальными точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы непосредственно следует из (3.7).

Т е о р е м а. Формы Пфаффа ω^1 и ω^2 являются полными дифференциалами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.6), получаем

$$\mathcal{D}\omega^1=0,\quad \mathcal{D}\omega^2=0.$$

О п р е д е л е н и е. Пара $\mathcal{L}_0$ называется парой $\mathcal{L}_0'$, если

$$\Gamma_1=2a\Gamma^2_{21}. \qquad (3.8)$$

Учитывая уравнение (3.8) и системы (3.6) и (3.3) убеждаемся, что пары $\mathcal{L}_0'$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а. Точки $N_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{a}}, 0\right)$ и $N_2\left(0, -\frac{1}{\sqrt{a}}, 0\right)$ пересечения ребра $\{A\vec{e}_2\}$ репера с коникой F_1, входящей в пару $\mathcal{L}_0'$, являются её фокальными точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия (3.8) коэффициент последнего уравнения системы (3.7) обращается в нуль. Таким образом теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Две оставшиеся фокальные точки коники F_1 определяются из системы уравнений:

$$(x^1)^2 + a(x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \quad bx^1 + cx^2 + \ell = 0 \qquad (3.9)$$

Л и т е р а т у р а

1. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве, Труды геометрического семинара, 2, 1969, ВИНИТИ

2. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. (Труды Московского матем. общества), 2, 1953, ГИТТЛ.

3. Ткач Г.П., Пары конгруэнций парабол в эквиаффинном пространстве, Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 2 (Тр. Калининградского ун-та), 1971.

4. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно-расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. Настоящий сборник.

5. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1956

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

ШЕВЧЕНКО Ю.И.

КЛАССЫ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ.

В n-мерном аффинном пространстве рассмотрены N-параметрические многообразия пар плоскостей, с помощью которых произведена классификация аффинных связностей. Показано, что специальная точечная аффинная связность (введенная в работе) обобщает индуцированную связность $(N=m)$ и классическую связность $(N=\kappa)$.

Пусть в n-мерное аффинное пространство погружено N-параметрическое многообразие пар плоскостей $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_\kappa, \mathcal{L}_m')$, где $\mathcal{L}_\kappa$ - центрированная κ-плоскость, $\mathcal{L}_m'$ - m-плоскость. Ограничимся рассмотрением таких пар плоскостей, для которых

$$\mathcal{L}_\kappa \not\subset \mathcal{L}_m' \qquad (1)$$

и плоскости $\mathcal{L}_\kappa$, $\mathcal{L}_m$ имеют ровно

$$p = \dim(\mathcal{L}_\kappa \cap \mathcal{L}_m') \qquad (2)$$

общих несобственных точек (линейно независимых).

Многообразие пар плоскостей $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_\kappa, \mathcal{L}_m')$ будем называть:

1) точечным, если $p = 0$,

2) линейным, если $p > 0$,

3) специальным, если $n + p - \kappa - m = 0$.

4) общим, если $n+p-k-m>0$,

5) вырожденным, если $\mathcal{L}'_m \subset \mathcal{L}_k$, либо если $m=0$.

Рассмотрим общее линейное многообразие $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_k, \mathcal{L}'_m)$. Вершину A репера $\{A, \bar{e}_u, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_a, \bar{e}_i\}$ поместим в центр $\mathcal{L}_k$, векторы $\bar{e}_u$ направим параллельно $\mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}'_m$, $\bar{e}_\alpha$ расположим в плоскости $\mathcal{L}_k$, $\bar{e}_a$ – параллельно плоскости $\mathcal{L}'_m$.

Деривационные формулы репера примут вид:

$$
\begin{aligned}
d\bar{A} &= \omega^u \bar{e}_u + \omega^\alpha \bar{e}_\alpha + \omega^a \bar{e}_a + \omega^i \bar{e}_i ,\\
d\bar{e}_u &= \omega^v_u \bar{e}_v + \omega^\alpha_u \bar{e}_\alpha + \omega^a_u \bar{e}_a + \omega^i_u \bar{e}_i ,\\
d\bar{e}_\alpha &= \omega^u_\alpha \bar{e}_u + \omega^\beta_\alpha \bar{e}_\beta + \omega^a_\alpha \bar{e}_a + \omega^i_\alpha \bar{e}_i ,\\
d\bar{e}_a &= \omega^u_a \bar{e}_u + \omega^\alpha_a \bar{e}_\alpha + \omega^b_a \bar{e}_b + \omega^i_a \bar{e}_i ,\\
d\bar{e}_i &= \omega^u_i \bar{e}_u + \omega^\alpha_i \bar{e}_\alpha + \omega^a_i \bar{e}_a + \omega^j_i \bar{e}_j ,
\end{aligned} \tag{3}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&u, v = 1, 2, \ldots, p; \quad \alpha, \beta = p+1, \ldots, k;\\
&a, b, c = k+1, \ldots, k+m-p; \quad i, j = k+m-p+1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Уравнения общего линейного многообразия $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_k, \mathcal{L}'_m)$ запишутся в виде:

$$
\begin{aligned}
&\omega^\alpha_u = \Lambda^\alpha_{u\gamma}\theta^\gamma, \quad \omega^a_u = \Lambda^a_{u\gamma}\theta^\gamma,\\
&\omega^i_u = \Lambda^i_{u\gamma}\theta^\gamma, \quad \omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha\gamma}\theta^\gamma,\\
&\omega^i_\alpha = \Lambda^i_{\alpha\gamma}\theta^\gamma, \quad \omega^\alpha_a = \Lambda^\alpha_{a\gamma}\theta^\gamma,
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega^i_a = \Lambda^i_{a\gamma}\theta^\gamma, \quad \omega^u = \Lambda^u_\gamma \theta^\gamma,\\
&\omega^\alpha = \Lambda^\alpha_\gamma \theta^\gamma, \quad \omega^a = \Lambda^a_\gamma \theta^\gamma, \quad \omega^i = \Lambda^i_\gamma \theta^\gamma,
\end{aligned} \tag{5}
$$

где

$$
\mathcal{D}\theta^\gamma = \theta^\varkappa \wedge \theta^\gamma_\varkappa \quad (\gamma, \varkappa = 1, \ldots, N). \tag{6}
$$

Продолжая систему (5), получим:

$$
\begin{aligned}
&\nabla\Lambda^\alpha_{u\gamma} + \Lambda^i_{u\gamma}\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{u\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,\\
&\nabla\Lambda^a_{u\gamma} + \Lambda^i_{u\gamma}\omega^a_i = \Lambda^a_{u\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,\\
&\nabla\Lambda^i_{u\gamma} = \Lambda^i_{u\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,\\
&\nabla\Lambda^a_{\alpha\gamma} - \Lambda^a_{u\gamma}\omega^u_\alpha + \Lambda^i_{\alpha\gamma}\omega^a_i = \Lambda^a_{\alpha\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,\\
&\nabla\Lambda^i_{\alpha\gamma} - \Lambda^i_{u\gamma}\omega^u_\alpha = \Lambda^i_{\alpha\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,\\
&\nabla\Lambda^\alpha_{a\gamma} - \Lambda^\alpha_{u\gamma}\omega^u_a + \Lambda^i_{a\gamma}\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{a\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,\\
&\nabla\Lambda^i_{a\gamma} - \Lambda^i_{u\gamma}\omega^u_a = \Lambda^i_{a\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,\\
&\nabla\Lambda^u_\gamma + \Lambda^\alpha_\gamma\omega^u_\alpha + \Lambda^a_\gamma\omega^u_a + \Lambda^i_\gamma\omega^u_i = \Lambda^u_{\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,\\
&\nabla\Lambda^\alpha_\gamma + \Lambda^i_\gamma\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,\\
&\nabla\Lambda^a_\gamma + \Lambda^i_\gamma\omega^a_i = \Lambda^a_{\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,\\
&\nabla\Lambda^i_\gamma = \Lambda^i_{\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где, например,

$$\nabla \Lambda^{\alpha}_{\sigma} = d\Lambda^{\alpha}_{\sigma} - \Lambda^{\alpha}_{\varkappa}\theta^{\varkappa}_{\sigma} + \Lambda^{\beta}_{\sigma}\omega^{\alpha}_{\beta}.$$

Из деривационных формул (3) видно, что формы

$$\omega^{\alpha},\ \omega^{i},\ \omega^{\beta}_{\alpha},\ \omega^{i}_{\alpha},\ \omega^{\alpha}_{u},\ \omega^{i}_{u} \tag{8}$$

определяют смещение $\mathcal{L}_{\kappa}$ без учета компонент, параллельных плоскости $\mathcal{L}'_{m}$. Эти формы (8) мы будем называть формами сверхсвязности. Формы сверхсвязности (8) образуют относительно инвариантную [1] систему форм Пфаффа.

Зададим оснащение в смысле Г.Ф.Лаптева [3] общего линейного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{L}_{\kappa}, \mathcal{L}'_{m})$:

$$\nabla \Gamma^{\alpha}_{i} + \omega^{\alpha}_{i} = \Gamma^{\alpha}_{i\sigma}\theta^{\sigma},$$

$$\nabla \Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i} + \delta^{\gamma}_{\beta}\omega^{\alpha}_{i} = \Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i\sigma}\theta^{\sigma},$$

$$\nabla \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{u}_{\beta} = \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma\sigma}\theta^{\sigma}, \tag{9}$$

$$\nabla \Gamma^{\alpha u}_{\beta i} + \Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i}\omega^{u}_{\gamma} - \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{i} = \Gamma^{\alpha u}_{\beta i\sigma}\theta^{\sigma}.$$

Теперь можно определить формы общей линейной аффинной связности ($O\Lambda$ -связности):

$$\tilde{\omega}^{\alpha} = \omega^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i}\omega^{i},$$

$$\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} - \Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i}\omega^{i}_{\gamma} - \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{u} - \Gamma^{\alpha u}_{\beta i}\omega^{i}_{u} \tag{10}$$

Эти формы удовлетворяют уравнениям:

$$\mathfrak{D}\tilde{\omega}^{\alpha} = \tilde{\omega}^{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} + \tfrac{1}{2}T^{\alpha}_{\sigma\varkappa}\theta^{\sigma}\wedge\theta^{\varkappa},$$

$$\mathfrak{D}\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \tilde{\omega}^{\gamma}_{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} + \tfrac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\sigma\varkappa}\theta^{\sigma}\wedge\theta^{\varkappa}, \tag{11}$$

где "тензор" кручения имеет вид

$$\tfrac{1}{2}T^{\alpha}_{\sigma\varkappa} = \Lambda^{a}_{\sigma}\Lambda^{\alpha}_{a\varkappa} + \Lambda^{u}_{\sigma}\Lambda^{\alpha}_{u\varkappa} + \Lambda^{i}_{\sigma}\Gamma^{\alpha}_{i\varkappa} -$$

$$-\Gamma^{\alpha}_{i}(\Lambda^{\beta}_{\sigma}\Lambda^{i}_{\beta\varkappa} + \Lambda^{a}_{\sigma}\Lambda^{i}_{a\varkappa} + \Lambda^{u}_{\sigma}\Lambda^{i}_{u\varkappa}) + \tag{12}$$

$$+(\Lambda^{\beta}_{\sigma} - \Gamma^{\beta}_{i}\Lambda^{i}_{\sigma})(\Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i}\Lambda^{i}_{\gamma\varkappa} + \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma}\Lambda^{\gamma}_{u\varkappa} + \Gamma^{\alpha u}_{\beta i}\Lambda^{i}_{u\varkappa}),$$

а "тензор" кривизны

$$\tfrac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\sigma\varkappa} = \Lambda^{a}_{\beta\sigma}\Lambda^{\alpha}_{a\varkappa} - \Gamma^{\alpha u}_{\beta i}(\Lambda^{\gamma}_{u\sigma}\Lambda^{i}_{\gamma\varkappa} + \Lambda^{a}_{u\sigma}\Lambda^{i}_{a\varkappa}) -$$

$$-\Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i}\Lambda^{a}_{\gamma\sigma}\Lambda^{i}_{a\varkappa} - \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma}\Lambda^{a}_{u\sigma}\Lambda^{\gamma}_{a\varkappa} +$$

$$+\Lambda^{i}_{\gamma\sigma}\Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i\varkappa} + \Lambda^{\gamma}_{u\sigma}\Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma\varkappa} + \Lambda^{i}_{u\sigma}\Gamma^{\alpha u}_{\beta i\varkappa} -$$

$$-\Gamma^{\gamma\eta}_{\beta i}\Gamma^{\alpha\xi}_{\gamma j}\Lambda^{i}_{\xi\sigma}\Lambda^{j}_{\eta\varkappa} - \Gamma^{\gamma u}_{\beta\eta}\Gamma^{\alpha v}_{\gamma\xi}\Lambda^{\eta}_{u\sigma}\Lambda^{\xi}_{v\varkappa} -$$

$$-\Gamma^{\gamma u}_{\beta i}\Gamma^{\alpha v}_{\gamma j}\Lambda^{i}_{u\sigma}\Lambda^{j}_{v\varkappa} + 2\Gamma^{\gamma}_{\beta}{}^{[\eta}_{i}\Gamma^{|\alpha|}_{|\gamma|}{}^{v]}_{\xi}\Lambda^{i}_{\eta\sigma}\Lambda^{\xi}_{v\varkappa} +$$

$$+2\Gamma^{\gamma}_{\beta}{}^{[\eta}_{i}\Gamma^{|\alpha|}_{|\gamma|}{}^{v]}_{j}\Lambda^{i}_{\eta\sigma}\Lambda^{j}_{v\varkappa} + 2\Gamma^{\gamma}_{\beta}{}^{[u}_{\eta}\Gamma^{|\alpha|}_{|\gamma|}{}^{v]}_{j}\Lambda^{\eta}_{u\sigma}\Lambda^{j}_{v\varkappa}, \tag{13}$$

причем в правых частях выражений "тензоров" $T^{\alpha}_{\sigma\varkappa}$ и $R^{\alpha}_{\beta\sigma\varkappa}$ произведено альтернирование по индексам $\sigma, \varkappa$.

Заметим, что объект (9) охватывается фундаментальным объектом первого порядка общего линейного многообразия $\mathcal{M}(\mathcal{L}_{\kappa}, \mathcal{L}'_{m})$ в предположении существования относительного инварианта $I = I(\Lambda^{i}_{u\sigma})$

(см. [4]),для которого

$$dI = I[p(n+p-k-m)\theta^{\gamma}_{\gamma} + N(n+p-k-m)\omega^{u}_{u} - pN\omega^{i}_{i}] + I_{\gamma}\theta^{\gamma}. \qquad (14)$$

в) В этом случае можно ввести тензор $V^{u\gamma}_{i}$,связанный с тензором $\Lambda^{i}_{u\gamma}$ следующими соотношениями:

$$V^{u\gamma}_{i}\Lambda^{i}_{u\varkappa} = p(n+p-k-m)\,\delta^{\gamma}_{\varkappa},$$

$$V^{u\gamma}_{i}\Lambda^{i}_{v\gamma} = N(n+p-k-m)\,\delta^{u}_{v}, \qquad (15)$$

$$V^{u\gamma}_{i}\Lambda^{j}_{u\gamma} = pN\,\delta^{j}_{i}$$

Тогда можно положить:

$$\Gamma^{\alpha}_{i} = \frac{1}{pN} V^{u\gamma}_{i}\Lambda^{\alpha}_{u\gamma}\,;\quad \Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i} = \delta^{\gamma}_{\beta}\Gamma^{\alpha}_{i},$$

$$\Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma} = \frac{1}{N(n+p-k-m)}\,\delta^{\alpha}_{\gamma} V^{u\gamma}_{i}\Lambda^{i}_{\beta\gamma}. \qquad (16)$$

$$\Gamma^{\alpha u}_{\beta i} = \frac{1}{p-k}\,\Gamma^{\gamma u}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{i}.$$

Аналогичным образом рассматривается общее линейное вырожденное многообразие и соответствующая ему ОЛВ -связность,а также многообразия:

I) специальное точечное (СТ -связность),

2) специальное линейное (СЛ-связность)и специальное линейное вырожденное (СЛВ -связность),

3)общее точечное (ОТ -связность) и общее точечное вырожденное (ОТВ-связность).

Классификацию полученных аффинных связностей можно представить в виде:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{СТ} & \\
\text{СЛ} \arrow[ur] \arrow[d] & & \text{ОТ} \arrow[ul] \arrow[d] \\
\text{СЛВ} & \text{ОЛ} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[d] & \text{ОТВ} \\
 & \text{ОЛВ} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

где стрелка указывает на то,что выражения "тензоров" кручения и кривизны одной связности можно получить из соответствующих выражений другой,если в них опустить все члены,в которых по одному из индексов u, a, i производится суммирование.

Рассмотрим два важных класса специальной точечной аффинной связности (СТ-связности):

I) $N = m$.

Примем формы ω^{α} за независимые,тогда уравнения (5) можно записать в виде:

$$\omega^{a}_{\alpha} = \Lambda^{a}_{\alpha b}\,\omega^{b},\quad \omega^{\alpha}_{a} = \Lambda^{\alpha}_{ab}\,\omega^{b},\quad \omega^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{b}\,\omega^{b}. \qquad (17)$$

Уравнения (II) примут вид:

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha} = \omega^{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta} + \frac{1}{2}T^{\alpha}_{ab}\,\omega^{a}\wedge\omega^{b},$$

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma} + \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta ab}\,\omega^{a}\wedge\omega^{b}, \qquad (18)$$

где

$$T^{\alpha}_{ab} = 2\Lambda^{\alpha}_{[ab]},\qquad R^{\alpha}_{\beta ab} = 2\Lambda^{c}_{\beta[a}\Lambda^{\alpha}_{|c|b]}. \qquad (19)$$

Из уравнений (I8) видно,что мы получили индуцированную связность [2].

2) $N = k$.

Примем формы ω^{α} за независимые,тогда:

$$\omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha\beta}\,\omega^\beta,\quad \omega^\alpha_a = \Lambda^\alpha_{a\beta}\,\omega^\beta,\quad \omega^a = \Lambda^a_\alpha\,\omega^\alpha. \tag{20}$$

Уравнения (II) примут вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\omega^\alpha &= \omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta + \tfrac{1}{2}T^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\beta\wedge\omega^\gamma, \\ \mathfrak{D}\omega^\alpha_\beta &= \omega^\gamma_\beta\wedge\omega^\alpha_\gamma + \tfrac{1}{2}R^\alpha_{\beta\gamma\eta}\,\omega^\gamma\wedge\omega^\eta, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$T^\alpha_{\beta\gamma} = 2\Lambda^a_{[\beta}\Lambda^\alpha_{|a|\gamma]},\quad R^\alpha_{\beta\gamma\eta} = 2\Lambda^a_{\beta[\gamma}\Lambda^\alpha_{|a|\eta]} \tag{22}$$

Из уравнений (2I) видно, что мы получили классическую аффинную связность.

Л и т е р а т у р а

I. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия оснащенных многообразий фигур. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (Труды Калининградского ун-та), 1971, вып. 2, с. 5-19.

2. Лумисте Ю.Г., Инвариантные оснащения конгруэнции плоскостей аффинного пространства. Изв. Вузов "Математика", №6, 1965, с. 93-102

3. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. (Труды Московского математического общества), ГИТТЛ, М., 1953, 2, с. 275-383.

4. Остиану Н.М., Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве. (Труды геом. семинара ВИНИТИ), т. 2, 1969, с. 247-262.

С е м и н а р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур

при Калининградском университете.

В предыдущем выпуске освещена работа семинара до 5 мая 1971г. Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 20 октября 1971 года по 17 мая 1972 года.

20.X.1971г. М а л а х о в с к и й В.С., Касательно-оснащенные многообразия фигур.

27.X.1971г. Ш е в ч е н к о Ю.И., Классификация аффинных связностей.

3.XI.1971г. А н д р е е в Б.А., О дифференциальной геометрии соответствий между точечным пространством и пространством нуль-пар.

10.XI.1971г. М а х о р к и н В.В., Некоторые типы многообразий гиперквадрик.

17.XI.1971г. П о п о в Ю.И., Теория оснащенных регулярных гиперполос с ассоциированной связностью многомерного проективного пространства.

24.XI.1971г. Т к а ч Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.

1.XII.1971г. Н о в о ж и л о в а Т.П., Вырожденные конгруэнции квадратичных пар в A_3, порожденных эллипсом и точкой.

17.XII.1971. И в л е в Е.Т. (Томск), Дифференциальная геометрия обобщенных эквипараметрических многообразий, связанных с многомерной поверхностью.

18.XII.1971г. И б л е в Е.Т.(Томск),Геометрическая интерпретация операции свертывания некоторых симметрических тензоров.

29.XII.1971г. Л а п к о в с к и й А.К. (г.Могилев),Касание фигур в однородном пространстве линейной группы.

?.I.1972г. Б о ч и л л о Г.П.(Томск),Некоторые вопросы проективной дифференциальной геометрии многообразий,элементы которых двойственны самим себе.

10.2.1972г. Х л я п о в а Е.А.,Дифференциальная геометрия многообразий центральных квадратичных пар фигур в A_n.

23.2.1972г. М а л а х о в с к и й В.С.,К геометрии оснащенных многообразий.

1.3.1972г.С в е ш н и к о в а Г.Л.,Конгруэнции кривых второго порядка с вырождающимися фокальными поверхностями.

15.3.1972г. Ш е в ч е н к о Ю.И.,Пути параллелизма конгруэнции гиперцилиндров.

22.3.1972г. С к р ы д л о в а Е.В.,Вырожденные конгруэнции пар фигур в P_3,образованные коникой и точкой.

29.3.1972г. О в ч и н н и к о в В.М.,Дифференцируемое отображение многомерной поверхности в многообразие квадратичных элементов.

5.4.1972г. Г р и ц е н к о В.А.,Некоторые вопросы дифференциальной геометрии многообразий квадратичных элементов.

12.4.1972г. К о р с а к о в а Л.Г.,Пара конгруэнций коник в P_3,касающихся линии пересечения их плоскостей.

19.4.1972г. К а ш е н к о Н.М.,Конгруэнции пар фигур в P_3, образованные коникой и прямой,пересекающей её и неинцидентной плоскости коники.

26.4.1972г. П о х и л а М.М.,Об инвариантном построении геометрии пар многообразий квадратичных элементов в P_n.

3.5.1972г. Х у д е н к о В.Н.,Конгруэнции пар фигур в P_3, образованные квадрикой и прямой.

10.5.1972г. Т е р е н т ь е в а Е.И.,Инвариантное оснащение $(n-2)$-мерной регулярной гиперполосы Γ_{n-2} проективного пространства P_n.

17.5.1972г. Л у м и с т е Ю.Г.(г.Тарту),Связности в теории многообразий фигур.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Цена 60 коп.

„Ритас" 903-73