ТРУДЫ
КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск I

г.КАЛИНИНГРАД, 1970.

Т Р У Д Ы

КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР.

выпуск I.

г.Калининград. 1970.

Редактор выпуска профессор
В.С.М а л а х о в с к и й.

С о д е р ж а н и е

От редактора 3

В.С.М а л а х о в с к и й – Конгруэнции коник, порожденные расслоенной парой C_ℓ. 5

Ю.И.П о п о в – Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n. 27

Б.А.А н д р е е в – Об одном классе дифференцируемых многообразий пространств пар фигур в точечные пространства. 47

З.М.О в ч и н н и к о в – Дифференцируемое отображение пространства квадратичных элементов в точечное пространство. 54

Г.Л.С в е ш н и к о в а – Конгруэнции кривых второго порядка с двумя вырождающимися фокальными поверхностями. 61

В.В.М а х о р к и н – Некоторые типы конгруэнций коник в P_3 с плоскими фокальными поверхностями. 71

Г.П.Т к а ч – Об одном классе индуцированно расслояемых пар конгруэнций фигур в A_3. 78

Ф.А.Л и п а т о в а – Конгруэнции пар фигур в трехмерном аффинном пространстве, образованные эллипсом и точкой. 86

ОТ РЕДАКТОРА

В данном сборнике публикуются работы, выполненные на кафедре геометрии Калининградского университета в 1969 году. Сотрудники и аспиранты кафедры, а также студенты геометры старших курсов работали в этом году над проблемой построения дифференциальной геометрии многообразий некоторых классов фигур и пар фигур в трехмерном аффинном и проективном пространствах. В первом цикле из шести работ, рассматриваются многообразия фигур в проективном пространстве. В статье В.С.Малаховского введено понятие расслоения для пар конгруэнций простейших алгебраических фигур и исследованы расслояемые пары конгруэнций, образованные конгруэнцией коник и прямолинейной конгруэнцией. Ю.И.Попов рассмотрел оснащенные вырожденные гиперполосы ранга r в n-мерном проективном пространстве. Б.А.Андреев и В.М.Овчинников начали изучение дифференцируемых отображений многообразий некоторых типов нелинейных фигур в точечные многомерные пространства. Г.Л.Свешникова и В.В.Махоркин исследовали конгруэнции коник у которых несколько фокальных поверхностей вырождаются в линии и плоскости.

Во втором цикле работ исследуются двупараметрические семейства некоторых типов пар фигур в трехмерном эквиаффинном (Г.П.Ткач) и аффинном (Ф.А.Липатова) пространствах.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.

В.С.МАЛАХОВСКИЙ

КОНГРУЭНЦИИ КОНИК, ПОРОЖДЕННЫЕ РАССЛОЯЕМОЙ ПАРОЙ C_ℓ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 определены индуцированно расслояемые пары конгруэнций некоторых типов фигур. Исследованы конгруэнции коник, образующие вместе с инвариантно присоединенными к ним прямолинейными конгруэнциями расслояемую пару.

§ I. Индуцированно расслояемые пары конгруэнций фигур в P_3.

Рассмотрим в пространстве P_3 пару конгруэнций (двупараметрических семейств), образованную конгруэнцией (F_1) фигур F_1 и конгруэнцией (F_2) фигур F_2. Если F_1 и F_2 -прямые линии, то для пары конгруэнций (F_1) и (F_2) определено понятие одностороннего и двустороннего расслоения ([I], стр. 66-70). Опираясь на это понятие можно определить различные типы расслоений для пар конгруэнций некоторых классов фигур.

Определение I.I Пара фигур $F=\{F_1, F_2\}$ пространства P_3 называется k-линейно индуцирующей, если она индуцирует k и только k попарно непересекающихся прямых линий $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$. Если $k=0$, то пара F называется линейно неиндуцирующей.

Если $F=\{F_1, F_2\}$ -2-линейно индуцирующая пара, то пара конгруэнций (F_1), (F_2) индуцирует в общем случае пару прямолинейных конгруэнций (ℓ_1), (ℓ_2). Однако, если $F=\{F_1, F_2\}$ - линейно неиндуцирующая или I-линейно индуцирующая пара фигур, то пара конгруэнций (F_1) и (F_2) все же может индуцировать пару прямолинейных конгруэнций.

Рассмотрим различные типы неиндуцирующих и 1,2-линейно индуцирующих пар фигур в P_3, конгруэнции которых индуцируют пару прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ').

1). F_1 -плоскость, F_2 - не инцидентная ей точка. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является линейно неиндуцирующей. Пара конгруэнций (F_1) и (F_2) индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ'), где ℓ -прямая, проходящая через точку F_2 и характеристическую точку плоскости F_1, а ℓ' -линия пересечения плоскости F_1 с касательной плоскостью к поверхности (F_2).

2). F_1 и F_2 -точки (плоскости). Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является I-линейно индуцирующей парой, так как индуцирует одну и только одну прямую ℓ, инцидентную точкам (плоскостям) F_1, F_2. Пара конгруэнций (F_1) и (F_2) индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ'), где ℓ' -линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (F_1) и (F_2) в точках F_1, F_2 (прямая, соединяющая характеристические точки плоскостей F_1 и F_2).

3). F_1 -точка (плоскость), F_2 — не инцидентная ей прямая. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является I-линейно индуцирующей. Пусть α - плоскость (точка), инцидентная F_1 и F_2, β -касательная плоскость к поверхности F_1 (характеристическая точка плоскости F_1), m —прямая, инцидентная α и β, ℓ —прямая, инцидентная F_1 и β и сопряженная прямой m. Пара конгруэнций (F_1) и (F_2) индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (F_2).

4). F_1 -коника, F_2 -точка, не инцидентная плоскости коники. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ -линейно неиндуцирующая. Пара конгруэнций (F_1), (F_2) индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ), (ℓ'), где ℓ -прямая, проходящая через точку F_2 и характеристическую точку M плоскости коники, а ℓ' —поляра характеристической точки M относительно коники.

5). F_1 -коника, F_2 -прямая, неинцидентная плоскости коники. Пусть M -точка пересечения прямой F_2 с плоскостью коники. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ -2 -линейно индуцирующая. Она индуцирует прямую F_2 и поляру ℓ' точки M относительно коники.

6). F_1 и F_2 -коники, не инцидентные одной плоскости. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является 2-линейно индуцирующей. Она индуцирует прямую ℓ, инцидентную плоскостям коник, и прямую ℓ', инцидентную полюсам прямой ℓ относительно коник.

7). F_1 -квадрика, F_2 -не инцидентная ей точка. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является линейно неиндуцирующей. Пусть α -поляра точки F_2 относительно квадрики F_1, M -характеристическая точка поляры α. Пара конгруэнций $(F_1),(F_2)$ индуцирует пару прямолинейных конгруэнций $(\ell),(\ell')$, где ℓ - прямая, проходящая через точки F_2 и M, а ℓ' -полярно сопряженная ей (относительно квадрики F_1) прямая.

8). F_1-квадрика, F_2 -не инцидентная ей прямая. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является 2-линейно индуцирующей. Она индуцирует, кроме прямой F_2, прямую ℓ, полярно сопряженную прямой F_2 относительно квадрики F_1.

О п р е д е л е н и е I.2. Пара конгруэнций $(F_1),(F_2)$ называется индуцированно расслояемой, если она индуцирует двусторонне расслояемую пару прямолинейных конгруэнций.

Для всех отмеченных выше типов пар конгруэнций фигур можно ввести понятие индуцированного расслоения.

О п р е д е л е н и е I.3. Пусть F_1 -произвольная одномерная фигура (линия), а F_2 -прямая. Пара конгруэнций (F_1), (F_2) называется односторонне расслояемой (от конгруэнции (F_1) к конгруэнции (F_2)), если к конгруэнции (F_1) можно присоединить однопараметрическое семейство Σ поверхностей так, чтобы касательные плоскости к каждой поверхности семейства Σ в точках пересечения с линией F_1 конгруэнции (F_1)

содержали соответствующую прямую F_2 конгруэнции (F_2).

Аналогично можно ввести понятие расслоения для пар конгруэнций некоторых других типов фигур пространства P_3.

§ 2. Расслояемые пары C_ℓ.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R \equiv \{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{A}_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4), \tag{2.1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \tag{2.2}$$

Рассмотрим в P_3 пару C_ℓ конгруэнций, образованную конгруэнцией (C) коник C типа $(2.2.3)^2$ [2] и конгруэнцией (ℓ) прямых ℓ, не инцидентных плоскостям коник и не имеющих с кониками общих точек. Пусть M — точка пересечения прямой ℓ с плоскостью коники C, ℓ' — поляра точки M относительно коники. Помещая вершины A_i $(i,j,k = 1,2)$ репера R в точки пересечения прямой ℓ' с коникой, вершину A_3 — в точку M, вершину A_4 — на прямой ℓ, приведем (при надлежащей нормировке вершин A_α) уравнения коники C к виду:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$\omega_i^4 = \omega_i. \tag{2.4}$$

Система дифференциальных уравнений пары C_ℓ запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \\ &\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k\omega_k \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Пара C_ℓ индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ').

Теорема I.I. Индуцированно расслояемые пары C_ℓ существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Доказательство. В силу (2.5) условия двустороннего расслоения (I ,стр.69) прямолинейных конгруэнций (ℓ), (ℓ') принимают вид :

$$\Gamma_4^{ii}=\Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij}-\Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii}, \quad \Gamma_4^{ij}=\Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{jj}-\Gamma_3^{ji}\Gamma_j^{3j}, \quad \Gamma_3^{21}=\Gamma_3^{12} \tag{2.6}$$

Система (2.5),(2.6) имеет решение с произволом пяти функций двух аргументов.

Определение 2.I. Пара C_ℓ называется расслояемой или парой C'_ℓ ,если существуют одностороннее расслоение от конгруэнции (C) к конгруэнции (ℓ) и одностороннее расслоение от конгруэнции (ℓ) к конгруэнции (ℓ').

Произвольную точку N коники (2.3) можно определить с помощью параметра σ посредством уравнения

$$\bar{N}=\bar{A}_1+\frac{1}{2}\sigma^2\bar{A}_2+\sigma\bar{A}_3 \tag{2.7}$$

Так как касательная плоскость к поверхности $(N)\in\Sigma$ (определение I.3) инцидентна прямой $\ell\equiv A_3A_4$,то

$$(d\bar{N}\,\bar{N}\,\bar{A}_3\bar{A}_4)=0 \tag{2.8}$$

Учитывая (2.7),получаем :

$$\sigma d\sigma=\frac{1}{4}\sigma^4\omega_2^1+\frac{1}{2}\sigma^3\omega_3^1+\frac{1}{2}\sigma^2(\omega_1^1-\omega_2^2)-\sigma\omega_3^2-\omega_1^2 \tag{2.9}$$

Дифференцируя это уравнения внешним образом с использованием (2.9), получим для σ уравнение шестой степени :

$$m_J \sigma^J = 0 \quad (J = 0, 1, \ldots, 6). \tag{2.10}$$

Так как уравнение (2.I0) должно удовлетворяться тождественно (относительно σ), то $m_J = 0$. Учитывая (2.5), получим семь конечных уравнений.

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_4^{ii} = \Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij} - \Gamma_3^{ii}\Gamma_j^{3j}, \quad \Gamma_3^{ii}\Gamma_j^{ij} - \Gamma_j^{ii}\Gamma_3^{ij} = 0, \\ &a^i\Gamma_3^{jj} - a^j\Gamma_3^{ji} + \Gamma_3^{ii}\Gamma_i^{jj} - \Gamma_3^{ij}\Gamma_i^{ji} + 2(\Gamma_4^{ji}\Gamma_3^{4j} - \Gamma_4^{jj}\Gamma_3^{4i}) = 0, \\ &2m + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} + \Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

$$m = \Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}. \tag{2.12}$$

Условия одностороннего расслоения пары прямолинейных конгруэнций (ℓ), (ℓ') (от конгруэнции (ℓ) к конгруэнции (ℓ')) запишутся в виде :

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_3^{21} = \Gamma_3^{12}, \ \Gamma_4^{21} = \Gamma_4^{12} + \Gamma_3^{11}\Gamma_1^{32} - \Gamma_3^{12}\Gamma_1^{31} + \Gamma_3^{21}\Gamma_2^{32} - \Gamma_3^{22}\Gamma_2^{31}, \\ &\qquad \Gamma_4^{11}\Gamma_1^{32} - \Gamma_4^{12}\Gamma_1^{31} + \Gamma_4^{21}\Gamma_2^{32} - \Gamma_4^{22}\Gamma_2^{31} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Уравнения (2.5), (2.II), (2.I3) определяют пары C'_ℓ.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пара C'_ℓ называется характеристической, если точка A_3 является характеристической точкой плоскости коники; пара C'_ℓ называется фокальной, если точки A_i являются фокусами коники и фокальные поверхности (A_i) конгруэнции (C) не вырождаются в линии.

Для характеристических пар C'_ℓ имеют место уравнения :

$$\Gamma_3^{41} = 0, \ \Gamma_3^{42} = 0. \tag{2.14}$$

Фокальные пары C'_ℓ характеризуются соотношениями :

$$\Gamma_1^{22}=0,\ \Gamma_2^{11}=0, \tag{2.15}$$

причем

$$\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31}\neq 0 \tag{2.16}$$

О п р е д е л е н и е 2.3. Парой $\mathcal{D}$ называется характеристическая фокальная пара C_ℓ, у которой прямая ℓ инцидентна касательным плосеостям к поверхностям (A_i).

Из определения пары $\mathcal{D}$ следует, что

$$\omega_1^2=0,\ \omega_2^1=0,\ \omega_3^4=0 \tag{2.17}$$

Так как прямые $\ell=A_3A_4$ пары $\mathcal{D}$ образуют двупараметрическое семейство, то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \Gamma_3^{11} & \Gamma_3^{21} & \Gamma_4^{11} & \Gamma_4^{21} \\ \Gamma_3^{12} & \Gamma_3^{22} & \Gamma_4^{12} & \Gamma_4^{22} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

равен двум. Учитывая (2.11),(2.13),(2.17), убеждаемся, что для пар $\mathcal{D}$ это условие равносильно неравенству

$$m\neq 0. \tag{2.19}$$

Уравнения второй строки системы (2.11) можно заменить, в силу (2.17),(2.19), уравнением Пфаффа

$$\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0 \tag{2.20}$$

Замыкая это уравнение, получим :

$$3(\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}-\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11}+\Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22}-\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21})+\Gamma_4^{12}-\Gamma_4^{21}=0. \tag{2.21}$$

Из уравнений (2.11),(2.13),(2.21) находим :

$$\left.\begin{array}{c} \Gamma_4^{21}=\Gamma_4^{12},\ \Gamma_4^{12}=\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11}-\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}-m,\ \Gamma_2^{32}=\Gamma_1^{31}, \\ \Gamma_3^{11}\Gamma_1^{32}-\Gamma_3^{12}\Gamma_1^{31}+\Gamma_3^{21}\Gamma_2^{32}-\Gamma_3^{22}\Gamma_2^{31}=0. \end{array}\right\} \tag{2.22}$$

Т е о р е м а 1.2. Касательные к линиям $\omega_j=0$ на поверхностях (A_i) пары $\mathcal{D}$ пересекаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим :

$$\bar{P}=\bar{A}_4+\Gamma_1^{31}\bar{A}_3. \tag{2.23}$$

Используя (2.22), находим :

$$(d\bar{A}_i)_{\omega_j=0}=\omega_i^i\bar{A}_i+\omega_i\bar{P}. \tag{2.24}$$

Следовательно, точка P инцидентна обеим касательным. Совместим вершину A_4 репера R с точкой P . Тогда

$$\Gamma_1^{31}=0,\ \Gamma_2^{32}=0. \tag{2.25}$$

Система конечных и пфаффовых уравнений пары $\mathcal{D}$ приводится к виду :

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_4^{ii}=\Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij},\ \Gamma_4^{21}=\Gamma_4^{12},\ \Gamma_3^{21}=\Gamma_3^{12},\\&\Gamma_4^{12}=\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11}-m,\ \Gamma_3^{11}\Gamma_1^{32}-\Gamma_3^{22}\Gamma_2^{31}=0,\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega_i^j=0,\ \omega_3^4=0,\ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0,\ \omega_i^3=\Gamma_i^{3j}\omega_j,\\&\omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\ \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k.\end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

О п р е д е л е н и е 2.4. Конгруэнция (C) коник с невырождающимися фокальными поверхностями (A_i) называется конгруэнцией $\mathcal{D}$, если пара C_ℓ , где ℓ — линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i), есть пара $\mathcal{D}$.

Ниже мы установим существование четырех непересекающихся классов конгруэнций $\mathcal{D}$.

О п р е д е л е н и е 2.5. Сеть линий $\omega_i=0$ на характеристической поверхности (A_3) называется f — сетью.

§ 3. Конгруэнции $\mathcal{D}$ с несопряженной f-сетью.

Рассмотрим конгруэнции $\mathcal{D}$ с несопряженной f-сетью на поверхности (A_3). Имеем :

$$\Gamma_3^{12} \neq 0. \tag{3.1}$$

Учитывая (2.16), можно так пронормировать вершины A_α репера R, чтобы

$$\Gamma_3^{12} = 1\,, \quad \Gamma_1^{32} = \Gamma_2^{31}. \tag{3.2}$$

Построенный канонический репер конгруэнции $\mathcal{D}$ назовем репером R'. Положим :

$$\Gamma_3^{11} = a\,,\ \Gamma_1^{32} = b\,, \quad c = b - a\,, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1^1 - \omega_2^2) = p\omega_1 + q\omega_2\,, \quad \omega_3^3 = r\omega_1 + s\omega_2. \tag{3.4}$$

Матрица компонент деривационных формул репера R' приводится к виду:

$$\begin{bmatrix} (p+r)\omega_1+(q+s)\omega_2 & 0 & b\omega_2 & \omega_1 \\ 0 & (r-p)\omega_1+(s-q)\omega_2 & b\omega_1 & \omega_2 \\ a\omega_1+\omega_2 & \omega_1+a\omega_2 & r\omega_1+s\omega_2 & 0 \\ b\omega_1+(1+ac)\omega_2 & (1+ac)\omega_2+b\omega_2 & \Gamma_4^{3k}\omega_k & -3(r\omega_1+s\omega_2) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$m = a^2 - 1 \neq 0, \qquad b \neq 0. \tag{3.6}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения

$$\omega_i^3 = b\omega_j\,, \ \omega_3^i = a\omega_i + \omega_j\,, \ \omega_4^i = b\omega_i + (1+ac)\omega_j\,, \tag{3.7}$$

находим :

$$\frac{1}{2}\,dc = c\left(\Omega + \frac{a}{m}\Theta_2\right), \ \frac{1}{2}\,da = a\Omega + 2(s\omega_1 + r\omega_2), \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{2}\omega_4^3 - 2\omega_3^3 = \frac{ac}{m}\Theta_1 \qquad (3.8)$$

где положено

$$\Theta_i = q\omega_3^i - p\omega_3^j, \quad \Omega = p\omega_1 - q\omega_2 - 2\omega_3^3 \qquad (3.9)$$

Обозначим :

$$h = m - 2pq + 4(qr - ps), \ \alpha = ps + qr, \ \beta = pr + qs. \qquad (3.10)$$

Замыкания уравнений (3.4) имеют вид :

$$\left.\begin{aligned} dp\wedge\omega_1 + dq\wedge\omega_2 + h\omega_1\wedge\omega_2 = 0,\\ dr\wedge\omega_1 + ds\wedge\omega_2 - \alpha\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

Предположим сначала, что

$$ac \neq 0 \qquad (3.12)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3.8), находим :

$$\left.\begin{aligned} dq\wedge\omega_3^1 - dp\wedge\omega_3^2 - a\gamma\omega_1\wedge\omega_2 = 0,\\ (2ds + a\,dp)\wedge\omega_1 + (2dr - a\,dq)\wedge\omega_2 + 2(8r^2 - 8s^2 - 3\beta - 2a\alpha)\omega_1\wedge\omega_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

$$2a\alpha - (1 + a^2)\beta + \frac{1}{2}a^2\gamma = 0, \ \gamma = p^2 - q^2 \qquad (3.14)$$

Осуществляя последовательные продолжения полученной замкнутой системы, убеждаемся, что она совместна только при $\gamma = 0$, то есть при

$$q = \varepsilon p, \quad \varepsilon^2 = 1 \qquad (3.15)$$

Определение 3.1. Конгруэнции $\mathcal{D}$, характеризуемые соотношением (3.15) и неравенствами (3.1), (3.12), называются конгруэнциями $\mathcal{D}_\varepsilon$.

Теорема 3.1. Конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$ существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.

Доказательство. Обозначим:

$$\Omega_i^\varepsilon = \omega_1 + (-1)^i \varepsilon \omega_2 , \quad \varepsilon^2 = 1 \tag{3.16}$$

Подставляя (3.15) в (3.11),(3.13),(3.14) получим:

$$S = -\varepsilon r, \tag{3.17}$$

$$dp = -\frac{1}{2}\varepsilon h \Omega_1^\varepsilon , \tag{3.18}$$

$$dr \wedge \Omega_1^\varepsilon = 0 \tag{3.19}$$

Так как замыкание уравнения (3.18) является следствием предыдущих уравнений, то полученная замкнутая система - в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$ с произволом одной функции одного аргумента.

Матрица компонент деривационных формул репера R' конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} r\Omega_1^\varepsilon + p\Omega_2^\varepsilon & 0 & b\omega_2 & \omega_1 \\ 0 & r\Omega_1^\varepsilon - p\Omega_2^\varepsilon & b\omega_1 & \omega_2 \\ a\omega_1 + \omega_2 & \omega_1 + a\omega_2 & r\Omega_1^\varepsilon & 0 \\ b\omega_1 + (1+ac)\omega_2 & (1+ac)\omega_1 + b\omega_2 & k\Omega_1^\varepsilon & -3r\Omega_1^\varepsilon \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

где

$$k = 2\left[2r + \frac{acp}{m}(\varepsilon a - 1)\right].$$

Теорема 3.2. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4), порожденных конгруэнцией $\mathcal{D}_\varepsilon$, соответствуют. Фокусы луча A_1A_2 гармонически делят точки A_1 и A_2.

Доказательство. Пользуясь (3.20) и учитывая (3.12), находим уравнение торсов прямолинейных конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$ в виде:

$$(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2 = 0. \tag{3.22}$$

Из совпадения уравнений торсов вытекает утверждение первой части теоремы. Фокусы $\bar{M}_i$ луча $A_1 A_2$ определяются формулами

$$\bar{M}_i = \bar{A}_j + (-1)^j \bar{A}_i. \tag{3.23}$$

Отсюда

$$(M_1 M_2; A_1 A_2) = -1. \tag{3.24}$$

Определение 3.2. Линии $\omega_j + (-1)^j \omega_i = 0$, соответствующие торсам прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$, называются линиями $\mathcal{L}_i$; касательные к характеристической поверхности (A_3), проходящие через фокусы M_i луча $A_1 A_2$ прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$, называются прямыми ℓ_i.

Теорема 3.3. Фокусы $F_{i,\kappa}$ коники C конгруэнции $\mathcal{D}$, отличные от A_i, являются точками пересечения прямых ℓ_i с коникой C. Фокусам $F_{i,1}$, $F_{i,2}$ соответствует фокальная линия $\mathcal{L}_i$.

Доказательство. Уравнения для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$, отличных от (A_i) и $\omega_i = 0$, имеют вид:

$$(x^3)^2 - 2x^1 x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \quad (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0, \tag{3.25}$$

$$(\omega_1 + \omega_2)^2 (\omega_1 - \omega_2)^2 = 0. \tag{3.26}$$

Пользуясь (3.25), находим:

$$\bar{F}_{i,\kappa} = \bar{A}_j + (-1)^j \bar{A}_i + (-1)^\kappa \sqrt{2(-1)^j}\, \bar{A}_3 \tag{3.27}$$

Сравнивая (3.27) с (3.23), убеждаемся, что

$$F_{i,k} = C \cap \ell_i \tag{3.28}$$

Фокусам $F_{1,k}$ соответствует фокальное семейство ℓ_1, фокусам $F_{2,k}$ –фокальное семейство ℓ_2 .

Т е о р е м а 3.4. Касательные к линиям $\mathcal{L}_i$ на поверхностях (A_1), (A_2) попарно пересекаются в точках, гармонически делящих точки A_3, A_4 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим :

$$\bar{P}_i = \bar{A}_4 + (-1)^i b \bar{A}_3 . \tag{3.29}$$

Имеем :

$$(d\bar{A}_1)_{\omega_1+\omega_2=0} = \omega_1^1 \bar{A}_1 + \bar{P}_2 \omega_1 , \quad (d\bar{A}_2)_{\omega_1+\omega_2=0} = \omega_2^2 \bar{A}_1 + \bar{P}_2 \omega_2 , \tag{3.30}$$

$$(d\bar{A}_1)_{\omega_1-\omega_2=0} = \omega_1^1 \bar{A}_1 + \bar{P}_1 \omega_2 , \quad (dA_2)_{\omega_1-\omega_2=0} = \omega_2^2 \bar{A}_1 + \bar{P}_1 \omega_2 , \tag{3.31}$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Линия

$$\Omega_1^\varepsilon = 0 \tag{3.32}$$

геометрически характеризуется тем, что касательная к ней на поверхности (A_4) пересекает прямую $[A_1 A_2]$. Так как

$$\mathcal{D}\Omega_1^\varepsilon = 0, \tag{3.33}$$

то форма Пфаффа Ω_1^ε является полным дифференциалом.

Т е о р е м а 3.5. Вдоль линии $\Omega_1^\varepsilon = 0$ все инварианты конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$ постоянны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из уравнений (3.I8), (3.I9) и уравнений

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} da &= [ap - 2r(a+\varepsilon)]\Omega_1^\varepsilon \\ \tfrac{1}{2} dc &= \tfrac{c}{m}[p(a\varepsilon - 1) - 2rm]\Omega_1^\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

Рассмотрим теперь случай

$$ac = 0. \tag{3.35}$$

Определение 3.3. Конгруэнции $\mathcal{D}$ с несопряженной ℓ-сетью на поверхности (A_3), удовлетворяющие условию

$$a = 0 \tag{3.36}$$

называются конгруэнциями $\mathcal{D}_2$; удовлетворяющие условию

$$c = 0 \tag{3.37}$$

-конгруэнциями $\mathcal{D}_3$.

Так как фокальные поверхности (A_i) конгруэнции $\mathcal{D}$ невырождены, то классы конгруэнций $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_3$ не пересекаются.

Теорема 3.6. Конгруэнции $\mathcal{D}_2$ существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Доказательство. При условии (3.36) уравнения (3.8), (3.11) приводятся к виду:

$$d\ln b = 2\Omega, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_4^3 = 0, \tag{3.38}$$

$$\left.\begin{aligned} &dp\wedge\omega_1 + dq\wedge\omega_2 - (1+2pq)\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \\ &dp\wedge\omega_1 - dq\wedge\omega_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

Полученная система -замкнутая. Она имеет решение с произволом двух функций одного аргумента.

Матрица компонент деривационных формул репера R' конгруэнции $\mathcal{D}_2$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} p\omega_1 + q\omega_2 & 0 & b\omega_2 & \omega_1 \\ 0 & -p\omega_1 - q\omega_2 & b\omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 & 0 \\ b\omega_1 + \omega_2 & \omega_1 + b\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

Для конгруэнций $\mathcal{D}_2$ справедливы теоремы 3.2, 3.3, 3.4.

Теорема 3.6. Каждая из поверхностей (A_1), (A_2), (A_3), (A_3-2A_4) является инвариантной квадрикой

$$Q=(x^4)^2+2x^3x^4-2x^1x^2=0. \tag{3.41}$$

Доказательство. Точки A_1, A_2, A_3, A_3-2A_4 лежат на квадрике Q. Дифференцируя (3.4I) с помощью уравнений стационарности точки:

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega_\beta^\alpha+\theta x^\alpha, \tag{3.42}$$

убеждаемся, что Q — инвариантная квадрика.

Следствие. Прямые $[A_iA_3]$, $[A_i, A_3-2A_4]$ являются прямолинейными образующими квадрики Q. Прямые $[A_1A_2]$ и $[A_3A_4]$ полярно сопряжены относительно квадрики Q.

Теорема 3.7. Касательная плоскость к поверхности (M_i) конгруэнции $\mathcal{D}_2$ содержит точку P_i.

Доказательство. Имеем:

$$d\bar{M}_i=(p\omega_1+q\omega_2)\bar{M}_j+(\omega_1+(-1)^j\omega_2)\bar{P}_i \tag{3.43}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Определение 3.4. Конгруэнции $\mathcal{D}_2$, удовлетворяющие условию (3.I5), называются конгруэнциями $\mathcal{D}_2^\varepsilon$.

Теорема 3.8. Если конгруэнция $\mathcal{D}_2$ не является конгруэнцией $\mathcal{D}_2^\varepsilon$, то асимптотические линии на фокальных поверхностях (M_1) и (M_2) прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) образуют f-сеть.

Доказательство. Асимптотические линии на (M_i) определяются уравнением:

$$[p+(-1)^j q]\,\omega_1\omega_2 = 0 \qquad (3.44)$$

Если $q \neq \varepsilon p$, то это уравнение определяет f-сеть.

С л е д с т в и е. Если конгруэнция $\mathcal{D}_2$ не является конгруэнцией $\mathcal{D}_2^\varepsilon$, то прямолинейная конгруэнция $(A_1 A_2)$ есть конгруэнция W [4].

Т е о р е м а 3.9. Торсы прямолинейных конгруэнций $(M_i P_i)$, порожденных конгруэнцией $\mathcal{D}_2$, соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь уравнениями (3.43) и уравнениями

$$\left.\begin{aligned} d\bar{P}_1 &= (b+\tfrac{1}{2})(\omega_1+\omega_2)\bar{M}_1 + \tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)\bar{M}_2 + (p\omega_1 - q\omega_2)(\bar{P}_1-\bar{P}_2), \\ d\bar{P}_2 &= -\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\bar{M}_1 + (b-\tfrac{1}{2})(\omega_2-\omega_1) + (p\omega_1 - q\omega_2)(\bar{P}_1-\bar{P}_2), \end{aligned}\right\} \qquad (3.45)$$

находим уравнение торсов прямолинейных конгруэнций $(M_i P_i)$ в виде :

$$p^2(\omega_1)^2 - q^2(\omega_2)^2 = 0, \qquad (3.46)$$

откуда следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 3.10. Конгруэнции $\mathcal{D}_2^\varepsilon$ существуют и определяются с произволом двух постоянных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя (3.15) в (3.39), получим:

$$\left.\begin{aligned} dp &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon + 2p^2)\Omega_1^\varepsilon, \\ d\ln b &= 2p\Omega_1^\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (3.47)$$

Система (3.47) - вполне интегрируема, следовательно, она имеет решение с произволом двух постоянных.

З а м е ч а н и е. Учитывая, что форма Ω_1^ε — полный дифференциал, положим :

$$\Omega_1^\varepsilon = du_\varepsilon \qquad (3.48)$$

Общее решение системы (3.47) приводится к виду :

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\,tg\,\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(u_\varepsilon+c_1)\,,\qquad b=\frac{c_2}{\cos^2\frac{1}{\sqrt{2}}(u_\varepsilon+c_1)}\,. \tag{3.49}$$

Т е о р е м а 3.11. Поверхности (M_i) конгруэнции $\mathcal{D}_2^2$ вырождаются в линии;касательные к линиям $\mathcal{L}_2$ на фокальных поверхностях ($F_{i,1}$) пересекаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть утверждения теоремы непосредственно следует из формул (3.15),(3.45). Полагая

$$a_\varepsilon=\rho+\varepsilon-\sqrt{2}\,,\quad b_\varepsilon=\rho+\varepsilon+\sqrt{2} \tag{3.50}$$

и пользуясь формулами (3.27),находим :

$$(\bar F_{1,1}\bar F_{1,2}d\bar F_{1,1}d\bar F_{1,2})_{\omega_2=\omega_1}=(\omega_1)^2\begin{vmatrix}1&1&-\sqrt{2}&0\\1&1&\sqrt{2}&0\\a_\varepsilon&-b_\varepsilon&2b&2\\b_\varepsilon&-a_\varepsilon&2b&2\end{vmatrix}=0 \tag{3.51}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь конгруэнции $\mathcal{D}_3$.Подставляя (3.37) в (3.8),получим :

$$\frac{1}{2}da=a\Omega+2(s\omega_1+r\omega_2),\ \omega_4^3=4\omega_3^3 \tag{3.52}$$

Матрица (3.5) приводится к виду :

$$\begin{bmatrix}(p+r)\omega_1+(q+s)\omega_2 & 0 & a\omega_2 & \omega_1\\ 0 & (r-p)\omega_1+(s-q)\omega_2 & a\omega_1 & \omega_2\\ a\omega_1+\omega_2 & \omega_1+a\omega_2 & r\omega_1+s\omega_2 & 0\\ a\omega_1+\omega_2 & \omega_1+a\omega_2 & 4(r\omega_1+s\omega_2) & -3(r\omega_1+s\omega_2)\end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Т е о р е м а 3.12. Конгруэнции $\mathcal{D}_3$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замыкая уравнения (3.52), получим:

$$(2ds+adp)\wedge\omega_1+(2dr-adq)\wedge\omega_2+2(8r^2-8s^2-3\beta-2a\alpha)\omega_1\wedge\omega_2=0. \quad (3.54)$$

Присоединяя к этому квадратичному уравнению уравнения (3.11), убеждаемся, что полученная замкнутая система - в инволюции и имеет решение с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 3.13. Все коники конгруэнции $\mathcal{D}_3$ принадлежат конусу φ:

$$\varphi \equiv (x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2+2x^3x^4=0 \quad (3.55)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Коника (2.3) принадлежит квадрике (3.55), являющейся конусом с вершиной $\bar{A}_3-\bar{A}_4$. Дифференцируя (3.55) с помощью (3.42), убеждаемся, что f-инвариантный конус

§ 4. Конгруэнции $\mathcal{D}$ с сопряженной f-сетью.

О п р е д е л е н и е 4.1. Конгруэнции $\mathcal{D}$, с сопряженной f-сетью на характеристической поверхности (A_3) называются конгруэнциями $\mathcal{D}_0$.

Так как у конгруэнций $\mathcal{D}_0$ f-сеть на (A_3) сопряжена, то

$$\Gamma_3^{12}=0. \quad (4.1)$$

Пронормируем вершины A_α репера R так, чтобы

$$\Gamma_1^{32}=1, \quad \Gamma_2^{31}=1. \quad (4.2)$$

Возможность такой нормировки обусловлена невырожденностью поверхностей (A_i). Полагая

$$\frac{1}{2}(\omega_1^1-\omega_2^2)=p\omega_1+q\omega_2, \quad \omega_3^3=r\omega_1+s\omega_2, \quad \Gamma_3^{11}=a, \quad (4.3)$$

приводим матрицу компонент деривационных формул построенного канонического репера (репера R'') к виду :

$$\begin{bmatrix} (p+r)\omega_1+(q+s)\omega_2 & 0 & \omega_2 & \omega_1 \\ 0 & (r-p)\omega_1+(s-q)\omega_2 & \omega_1 & \omega_2 \\ a\omega_1 & a\omega_2 & r\omega_1+s\omega_2 & 0 \\ a(1-a)\omega_2 & a(1-a)\omega_1 & \Gamma^{3k}_4\,\omega_k & -3(r\omega_1+s\omega_2) \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения

$$\omega^3_i=\omega_j\,,\quad \omega^i_3=a\omega_i\,,\quad \omega^i_4=a(1-a)\omega_j\,, \qquad (4.5)$$

находим

$$r=\frac{1}{2}ap\,,\quad s=-\frac{1}{2}aq\,, \qquad (4.6)$$

$$da=2a(1-a)(p\omega_1-q\omega_2)\,,\quad \omega^3_4=2a(1-a)(q\omega_1-p\omega_2)\,. \qquad (4.7)$$

Осуществляя последовательные продолжения полученной системы уравнений, убеждаемся, что она имеет решение только при

$$(a-1)(p^2-q^2)=0\,. \qquad (4.8)$$

Определение 4.2. Конгруэнции $\mathcal{D}_0$, характеризуемые условием

$$a=1\,,$$

называются конгруэнциями $\mathcal{D}^1_0$; конгруэнции $\mathcal{D}_0$, характеризуемые условием

$$q=\varepsilon p\,,\quad \varepsilon^2=1\,, \qquad (4.10)$$

называются конгруэнциями $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$.

Теорема 4.1. Конгруэнции $\mathcal{D}'_0$ существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Доказательство. Подставляя (4.9) в (4.7), получим

$$da=0\,,\quad \omega^3_4=0 \qquad (4.11)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (4.3) с учетом (4.6),(4.II),находим :

$$\left.\begin{aligned} dp\wedge\omega_1 - dq\wedge\omega_2 = 0, \\ dp\wedge\omega_1 + dq\wedge\omega_2 + (1+2pq)\omega_1\wedge\omega_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.12)$$

Полученная замкнутая система имеет решение с произволом двух функций одного аргумента.

Матрица компонент деривационных формул репера R'' конгруэнции $\mathcal{D}_0'$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(3p\omega_1+q\omega_2) & 0 & \omega_2 & \omega_1 \\ 0 & -\frac{1}{2}(p\omega_1+3q\omega_2) & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & \frac{1}{2}(p\omega_1-q\omega_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}(p\omega_1-q\omega_2) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Т е о р е м а 4.2. Все коники конгруэнции $\mathcal{D}_0'$ принадлежат одному конусу $\mathcal{f}$:

$$\mathcal{f} \equiv (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0. \quad (4.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Коника (2.3) принадлежит квадрике $\mathcal{f}$,являющейся конусом с вершиной A_4 .Дифференцируя (4.14),убеждаемся,что $\mathcal{f}$ -инвариантный конус.

Т е о р е м а 4.2. Конгруэнции $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$ существуют и определяются с произволом двух постоянных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замыкая уравнения (4.3), (4.7),получим,в силу (4.6),(4.10),вполне интегрируемую систему :

$$da = 2ap(1-a)\Omega_1^{\varepsilon}, \qquad dp = \left[p^2(1-2a) - \frac{1}{2}a^2\varepsilon\right]\Omega_1^{\varepsilon}, \quad (4.15)$$

определяющую конгруэнцию $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$ с произволом двух постоянных.

Матрица компонент деривационных формул репера R'' конгруенции $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$ записывается в виде :

$$\begin{bmatrix} p(\frac{1}{2}a\Omega_1^\varepsilon+\Omega_2^\varepsilon) & 0 & \omega_2 & \omega_1 \\ 0 & p(\frac{1}{2}a\Omega_1^\varepsilon-\Omega_2^\varepsilon) & \omega_1 & \omega_2 \\ a\omega_1 & a\omega_2 & \frac{1}{2}ap\Omega_1^\varepsilon & 0 \\ a(1-a)\omega_2 & a(1-a)\omega_1 & 2\varepsilon(1-a)p\Omega_1^\varepsilon & -\frac{3}{2}ap\Omega_1^\varepsilon \end{bmatrix} \qquad (4.16)$$

Для конгруэнции $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$ справедливы теоремы (3.2),(3.3),(3.4) и (3.5).

Т е о р е м а 4.4. Фокусы Q_i луча ℓ прямолинейной конгруэнции (A_3A_4),порожденной конгруэнцией $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$,гармонически делят точки A_3A_4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь (4.16),находим

$$\bar{Q}_i=(a-1)(-1)^i\bar{A}_3+\bar{A}_4 \qquad (4.17)$$

откуда следует

$$(Q_1Q_2;A_3A_4)=-1 \qquad (4.18)$$

Т е о р е м а 4.5. Поверхность Q_1 конгруэнции $\mathcal{D}_{0,-1}$ и поверхность Q_2 конгруэнции $\mathcal{D}_{0,1}$ вырождаются в линии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь (4.16) и (4.17), находим

$$(d\bar{Q}_1)_{\omega_1+\omega_2=0}=0,\ (d\bar{Q}_2)_{\omega_1-\omega_2=0}=0 \qquad (4.19)$$

Л и т е р а т у р а.

1. С.П.Фиников,Теория конгруэнций ГИТТЛ,М,1956

2. В.С.Малаховский,Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве.Геометрический сб., вып.3 (Труды Томского университета,т. 168) 28-42,1963

3. F. Backes, Sur la stratifications des congruences engendrées l'une par une droite, l'autre par une conique. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 47, №2, 66-82, 1961

4.С.П.Фиников,Теория конгруэнций.ГИТТЛ,М,1950.

5.В.С.Малаховский,Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными семействами.Геометрический сб.,вып. 3 (Труды Томского университета,т.160),5-14,1960

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.

Ю.И. П О П О В

ВВЕДЕНИЕ ИНВАРИАНТНОГО ОСНАЩЕНИЯ НА ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ Γ_m МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n.

Гиперполоса в n-мерном проективном пространстве P_n является многообразием, образующим элементом которого является пара фигур $F=\{F_1, F_2\}$, где F_1 –точка, а F_2 -инцидентная ей гиперплоскость. В работе изучаются оснащенные вырожденные гиперполосы ранга τ в проективном пространстве P_n. При исследовании используется аналитический аппарат и терминология, введенные в работах [2]–[7]. В целях полноты изложения в § I.(I) приведены основные обозначения и формулы работы [6], употребляемые в настоящей статье.

§ I. Развертывающиеся гиперполосы Γ_m.

I°. Аналитическое задание оснащенной вырожденной гиперполосы Γ_m ранга τ $(\tau<m)$. В составном многообразии проективного пространства $C_{n(m)}$, базисная поверхность B_m оснащенной гиперполосы $N(\Gamma_m)$ задается тензорным полем*)

$$M_1^\alpha = M_1^\alpha (x^1, x^2, \dots, x^m), \tag{1.1}$$

а главные касательные гиперплоскости -тензорным полем

$$T_\alpha^0 = T_\alpha^0 (x^1, x^2, \dots, x^m). \tag{1.2}$$

Нормаль первого рода в данной точке $M_1^\alpha (x^i)$ базисной поверхности B_m гиперполосы Γ_m задается точками $X^\alpha_o = X^\alpha_o(x^i), X^\alpha_\lambda = X^\alpha_\lambda(x^i)$ или гиперплоскостями $N^{1h}_\alpha = N^{1h}_\alpha(x^i)$,а нормаль второго рода-гиперплоскостями*)

$$P^1_\alpha = P^1_\alpha(x^i), T^o_\alpha = T^o_\alpha(x^i), T^\lambda_\alpha = T^\lambda_\alpha(x^i).$$

Оснащение гиперполосы Γ_m индуцирует в составном многообразии $C_{n(m)}$ тензоры $p_{ij}, \ell^o_{1ij}, \ell^\lambda_{1ij}, m^{1h}_{oi}, m^1_{oi}, n^\lambda_{oi}, m^{1h}_{\lambda i}, m^1_{\lambda i}$ и связность

$$\Gamma_i\{\Gamma^h_{ij}, \Gamma^1_{1i}, \Gamma^o_{oi}, \Gamma^\chi_{\lambda i}, \Gamma^\alpha_{\beta i}\},$$

которые удовлетворяют в частности следующим соотношениям**) :

$$M^\alpha_{1/ij} = p_{ij} M^\alpha_1 + \ell^o_{1ij} X^\alpha_o + \ell^\lambda_{1ij} X^\alpha_\lambda, \tag{1.3}$$

$$X^\alpha_{o/i} = m^{1h}_{oi} M^\alpha_{1/h} + m^1_{oi} M^\alpha_1 + n^\lambda_{oi} X^\alpha_\lambda, \tag{1.4}$$

$$X^\alpha_{\lambda/i} = m^{1h}_{\lambda i} M^\alpha_{1/h} + m^1_{\lambda i} M^\alpha_1, \tag{1.5}$$

$$T^\lambda_{\alpha/j} M^\alpha_1 = 0, \; T^\lambda_{\alpha/j} M^\alpha_{1/i} = -\ell^\lambda_{1ij}, \; T^\lambda_{\alpha/j} X^\alpha_o = -n^\lambda_{oj}, \; T^\lambda_{\alpha/j} X^\alpha_\lambda = 0, \tag{1.6}$$

$$T^o_{\alpha/i} = \ell^o_{1ih} N^{1h}_\alpha, \tag{1.7}$$

$$\ell^o_{1\underline{i}\underline{j}} = 0, \; \ell^\lambda_{1\underline{i}\underline{j}} = 0, \; p_{\underline{i}\underline{j}} = R^1_{1ij}, \tag{1.8}$$

$$R^h_{ijk} + \delta^h_i R^1_{1jk} = p_{i\underline{j}} \delta^h_{\underline{k}} + \ell^o_{1i\underline{j}} m^{1h}_{o\underline{k}} + \ell^\lambda_{1i\underline{j}} m^{1h}_{\lambda\underline{k}}, \tag{1.9}$$

$$\ell^o_{1i\underline{j}/\underline{k}} = 0, \tag{1.10}$$

$$m^{1h}_{\lambda\underline{i}} \ell^o_{1h\underline{j}} = 0. \tag{1.11}$$

---

*). См. [6], [7]. Здесь и в дальнейшем мы предполагаем,что индексы принимают следующие обозначения: $\alpha, \beta, \gamma \ldots = 1,2,\ldots,n+1$; $i,j,k \ldots = 1,2,\ldots,m$; $i_1, j_1, k_1, \ldots = 1,2,\ldots,\tau$; $i_2, j_2, k_2, \ldots = \tau, \tau+1, \ldots, m$;

$\chi, \lambda, \sigma, \ldots = 1,2,\ldots,n-m-1$.

**).Обозначения для тензоров и связности те же,что и в работе [6].Символ „/" обозначает ковариантное дифференцирование относительно связности Γ_i .Для альтернирования принимаем обозначение $2\varphi_{[ij]} = \varphi_{\underline{i}\underline{j}}$.

При изменении оснащения[*)]

$$\overline{N}^{1h}_{\alpha}=N^{1h}_{\alpha}-\psi^{1h}_{o}T^{o}_{\alpha},\ \overline{M}^{\alpha}_{1/i}=M^{\alpha}_{1/i}+h_i M^{\alpha}_{1} \qquad (1.12)$$

тензор b^{o}_{1ij} не изменяется, а связность Γ_i меняется по формулам:

$$\overline{\Gamma}^{1}_{1i}=\Gamma^{1}_{1i}-h_i,\ \overline{\Gamma}^{o}_{oi}=\Gamma^{o}_{oi}+\psi^{1h}_{o}b^{o}_{1hi},\ \overline{\Gamma}^{\chi}_{\lambda i}=\Gamma^{\chi}_{\lambda i}, \qquad (1.13)$$

$$\overline{\Gamma}^{h}_{ij}=\Gamma^{h}_{ij}+h_i\delta^{h}_{j}+h_j\delta^{h}_{i}-b^{o}_{1ij}\psi^{1h}_{o}. \qquad (1.14)$$

Вырожденная гиперполоса Γ_m характеризуется тем, что ранг матрицы $\|b^{o}_{1ij}\|$ равен r, поэтому при фиксировании координатных систем в ассоциированных пространствах составного многообразия $C_{n(m)}$ базисное пространство с тензором b^{o}_{1ij} и связностью Γ^{h}_{ij} является примером пространства B_m $(m=n)$, рассмотренного в работе [5], § I. Как известно, в этом случае в базисном многообразии B_m существует система координат, в которой выполняется условие:

$$b^{o}_{1i_1j_2}=0^{**)} \qquad (1.15)$$

Всякая система координат, удовлетворяющая этому условию, называется канонической [5], §I. Формулы преобразования канонических систем координат базисного многообразия имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} x^{i'_1}=x^{i'_1}(x^1,x^2,\dots,x^r), \\ x^{i'_2}=x^{i'_2}(x^1,x^2,\dots,x^r,x^{r+1},\dots,x^m) \end{array}\right\}$$

Обратные формулы имеют аналогичный вид. Будем предполагать в дальнейшем изложении, что все рассматриваемые системы координат многообразия B_m канонические.

---

*). Черта сверху говорит о том, что соответствующая величина индуцируется новым оснащением. Дифференцирование относительно связности Γ_i обозначается символом $/$. Нормаль второго рода задается также точками $M^{\alpha}_{1/i}$.

**). См. [I], теорема [3,4].

Базисная поверхность B_m вырожденной гиперполосы образована из ∞^{r} систем плоских $(m-r)$-мерных образующих [1]. Выбор канонической координатной системы в B_m геометрически означает, что плоская образующая оснащенной гиперполосы Γ_m, проходящая через точку $(x_o^1, x_o^2, \dots, x_o^r, x_o^{r+1}, \dots, x_o^m)$, задается уравнениями $x^{i_1} = x_o^{i_1}$ и, следовательно, уравнением $M_1^{\alpha} = M_1^{\alpha}(x_o^1, \dots, x_o^r, x^{r+1}, \dots, x^m)$ в P_n. Отсюда вытекает, что линейно независимые точки $M_1^{\alpha}, M_{1/i_2}^{\alpha}$ принадлежат $(m-r)$-мерной плоской образующей, проходящей через M_1^{α}, и полностью её определяют.

Для оснащенной вырожденной гиперполосы Γ_m ранга r компоненты $\Gamma_{i_2 j}^{h_1}$ образуют геометрический объект и преобразуются по закону:

$$\Gamma_{i_2' j'}^{h_1'} = \Gamma_{i_2 j}^{h_1} \frac{\partial x^{h_1'}}{\partial x^{h_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i_2'}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}$$

Отсюда следует, что если компоненты $\Gamma_{i_2 j}^{h_1}$ равны нулю в одной канонической системе координат, то они равны нулю и в любой другой канонической системе координат. Связность Γ_{ij}^{h} базисного многообразия B_m, для которой $\Gamma_{i_2 j}^{h_1} = 0$ в любой канонической системе координат, называется к-связностью [5], § I.

Далее, компоненты $\Gamma_{i_2 j_2}^{h_1}$ связности Γ_{ij}^{h} тождественно равны нулю. Действительно, из уравнения (I.8), полагая $i = i_2$, $j = j_2$ и учитывая соотношение (I.14), находим

$$\Gamma_{i_2 j_2}^{h_1} \equiv 0. \tag{1.16}$$

Компоненты $\Gamma_{i_2 j_2}^{h_2}$ образуют геометрический объект и преобразуются по закону:

$$\Gamma_{i_2' j_2'}^{h_2'} \frac{\partial x^{k_2}}{\partial x^{h_2'}} = \frac{\partial^2 x^{k_2}}{\partial x^{i_2'} \partial x^{j_2'}} + \Gamma_{p_2 t_2}^{k_2} \frac{\partial x^{p_2}}{\partial x^{i_2'}} \frac{\partial x^{t_2}}{\partial x^{j_2'}}$$

Для к-связности Γ_{ij}^{h} аналогичное утверждение имеет место и относительно компонент $\Gamma_{i_2 j_1}^{h_1}$.

2° m-конические развертывающиеся гиперполосы.

О п р е д е л е н и е. Гиперполоса Γ_m, вложенная в проективное пространство, называется развертывающейся гиперполосой ранга τ, если её базисная поверхность состоит из ∞^{τ} $(m-\tau)$-мерных плоских образующих, вдоль каждой из которых касательная m-плоскость постоянна (то есть B_m представляет собой развертывающуюся поверхность ранга τ).

Сформулируем тензорный признак развертывающейся гиперполосы Γ_m.

Т е о р е м а [I.I]. Для того, чтобы оснащенная вырожденная гиперполоса была развертывающейся гиперполосой ранга τ, необходимо и достаточно, чтобы

$$b^{\lambda}_{1 i j_2}=0, \quad n^{\lambda}_{0 j_2}=0. \tag{1.17}$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Заметим, что для всякой вырожденной гиперполосы, как следует из (I.7), вдоль плоской образующей $x^{i_1}=x^{i_1}_0$ поле гиперплоскостей $T^{0}_{\alpha}=T^{0}_{\alpha}(x^1_0,\dots,x^{\tau}_0,x^{\tau+1},\dots,x^m)$ постоянно*):

$$T^{0}_{\alpha/i_2}=0. \tag{1.18}$$

Тогда условие постоянства касательной плоскости $\{T^0_{\alpha}, T^{\lambda}_{\alpha}\}$ вдоль плоской образующей развертывающейся гиперполосы запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &T^{0}_{\alpha/i_2}=0,\\ &T^{\lambda}_{\alpha/j_2}=\psi_{j_2}T^{\lambda}_{\alpha} \end{aligned}\right\}. \tag{1.19}$$

Подставляя (I.19) в соотношения (I.6), находим**):

$$b^{\lambda}_{1 i j_2}=0, \quad n^{\lambda}_{0 j_2}=0.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. В силу условий (I.17) из (I.6) следует, что $T^{\lambda}_{\alpha/j_2}=0$. Отсюда, учитывая ещё (I.18), приходим к выводу, что касательная плоскость вдоль плоской образующей $x^{i_1}_0=x^{i_1}$ постоянна.

---

*). См. [2], §6, стр. 29.

**). См. [6], стр. 29.

В дальнейшем изложении воспользуемся предложениями :

Лемма [I.2]. Если оснащение вырожденной гиперполосы индуцирует в B_m к-связность Γ^h_{ij}, то имеют место следующие условия*):

а). $\overset{\circ}{b}_{1ij/k}$ — к-тензор типа $\left\{\begin{smallmatrix}0\\a\end{smallmatrix}\right\}$, где $a \leq$ I,

б). $u^i_{/k}$ — к-тензор типа $\left\{\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\right\}$, где $a \leq$ I.

Если для некоторого оснащения вырожденной гиперполосы имеет место по крайней мере одно из условий а) и б), то связность, индуцируемая этим оснащением, является к-связностью.

Лемма [I.3]. Для того, чтобы существовало оснащение вырожденной гиперполосы, индуцирующее в рассматриваемой области базисной поверхности B_m к-связность Γ^h_{ij}, необходимо и достаточно, чтобы для любого оснащения гиперполосы Γ_m в этой области B_m выполнялось равенство

$$\overset{\circ}{b}_{1ij/k_2} = \varphi_{k_2} \overset{\circ}{b}_{1ij}, \qquad (1.20)$$

где φ_{k_2}—подтензор некоторого ковариантного вектора базисного пространства B_m.

Лемма [I.4]. Для всякой развертывающейся гиперполосы имеет место равенство :

$$\overset{\lambda}{b}_{1ki} u^i = 0, \qquad (1.21)$$

где u^i—к-тензор типа $\left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right\}$. о

Доказательство лемм [I.2] и [I.3] проводим совершенно аналогично предложениям [2.I] и [2.2] работы [5]. Равенство (I.2I) выполняется в силу соотношения (I.I7).

Определение. Развертывающаяся гиперполоса Γ_m называется $\mathcal{M}$-конической, все плоские образующие которой имеют общую ($m-r-1$)-мерную плоскость (вершину гиперполосы).

---

*) См. [5], §I.

M-конические развертывающиеся гиперполосы Γ_m характеризуются следующим признаком.

Т е о р е м а [I.5]. Для того, чтобы развертывающаяся гиперполоса Γ_m ранга r в n-мерном проективном пространстве P_n была M-конической, необходимо и при $r > 1$ достаточно, чтобы для любого оснащения в базисном многообразии B_m существовал подтензор φ_{K_2}, удовлетворяющий соотношению (I.20).

Учитывая лемму [I.4], эту теорему можно доказать аналогично теореме [2.3] работы [5].

Непосредственно из теоремы [I.5] и леммы [I.3] вытекает следующее предложение :

Т е о р е м а [I.6]. Для того, чтобы развертывающаяся гиперполоса Γ_m ранга r в n-мерном проективном пространстве P_n была M-конической, необходимо и при $r > 1$ достаточно, чтобы существовало оснащение данной гиперполосы, индуцирующее в базисном многообразии B_m к-связность Γ_{ij}^{k}.

§ 2. К-оснащения вырожденной гиперполосы.

Введем в рассмотрение симметрический тензор $\overset{o}{b}{}^{ij}$, определяемый соотношением :

$$\overset{o}{b}_{ij}\,\overset{o}{b}{}^{jk} = \Delta_i^k , \qquad (2.1)$$

где Δ_i^k — к-тензор типа $\begin{Bmatrix} 0 \\ I \end{Bmatrix}$, характеризующийся следующими условиями[ж)]:

$$\Delta_{i_2}^{k} = 0, \Delta_{i_1}^{k_1} = \delta_{i_1}^{k_1}, \ \Delta_{i_1}^{k_2} \text{—произвольные функции } x^i. \quad (2.2)$$

Компоненты $\overset{o}{b}{}^{ij_1k_2}$ этого тензора, как следует из (2.I) и (2.2), определяются однозначно заданным тензором Δ_i^k, компоненты $\overset{o}{b}{}^{ij_1k_1}$ не зависят от выбора Δ_i^k, а компоненты $\overset{o}{b}{}^{ij_2k_2}$—произвольные.

ж). См. [5], §I.

Как известно[*], тензор $b^{0}_{1ij/k}$ является к-тензором типа $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix} \right\}$, где $b \leq 2$, то есть $b^{0}_{1ij_2/k_2} = 0$.

Следовательно, подтензор K_{i_2} чебышевского вектора[**] $K_i = \frac{1}{\tau+2} b^{0}_{1ij/k} b^{ijk}_{0}$ вырожденной гиперполосы ранга τ не зависит от компонент $b^{ijk_2}_{0}$ тензора b^{ijk}_{0}.

Определение. Оснащение вырожденной гиперполосы, индуцирующее ковариантный к-вектор K_i (компоненты K_{i_2} равны нулю), называется к-оснащением.

Рассмотрим некоторые свойства к-оснащений вырожденной гиперполосы Γ_m ранга τ.

Теорема [2.I]. На всякой вырожденной гиперполосе Γ_m существует к-оснащение.

Доказательство. На основании соотношений (I.I3) и (I.I4) получаем, что при изменении оснащения подтензор b^{0}_{1mk/i_2} меняется по формуле
$$b^{0}_{1mk//i_2} = b^{0}_{1mk/i_2} - h_{i_2} b^{0}_{1mk}.$$

Умножив это равенство на $\frac{1}{\tau+2} b^{mk}_{0}$ и свернув по m и k, приходим к выводу:
$$\bar{K}_{i_2} = K_{i_2} - \frac{\tau}{\tau+2} h_{i_2}. \qquad (2.4)$$

Отсюда, при $h_{i_2} = \frac{\tau+2}{\tau} K_{i_2}$ получаем $\bar{K}_{i_2} = 0$, то есть новое оснащение является к-оснащением.

Теорема [2.2]. Для того, чтобы данное оснащение вырожденной гиперполосы Γ_m было к-оснащением, необходимо и достаточно, чтобы индуцированная им связность Γ^{h}_{ij} удовлетворяла условию:
$$\Gamma^{s_1}_{i_2 s_1} = 0. \qquad (2.5)$$

---

*). См. [5], § I, теорема [I.5].

**). См. [6].

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из выражения ковариантной производной тензора b^{o}_{1ij} относительно связности Γ_i следует, что

$$b^{o}_{1i_2j/k} = -\Gamma^{s}_{i_2k}\, b^{o}_{1sj}$$

Учитывая (I.16), из полученного соотношения находим :

$$(\tau+2)\, K_{i_2} = -\Gamma^{s}_{i_2k}\, \Delta^{k}_{s} = -\Gamma^{s_1}_{i_2s_1}$$

Значит, равенства $K_{i_2}=0$ и $\Gamma^{s_1}_{i_2s_1}=0$ эквивалентны, что и доказывает теорему.

Т е о р е м а [2.3] . Для того, чтобы некоторое оснащение M-конической развертывающейся гиперполосы было к-оснащением, необходимо и достаточно, чтобы оно индуцировало к-связность.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Умножив (I.20) на b^{1ij}_{o} и свернув по i и j, получим $\varphi_{k_2} = \frac{\tau+2}{\tau} K_{k_2}$. Поэтому для M-конических развертывающихся гиперполос при любом оснащении выполняется равенство

$$b^{o}_{1ij/k_2} = \frac{\tau+2}{\tau} K_{k_2}\, b^{o}_{1ij}. \qquad (2.6)$$

Из леммы [1.2] и соотношения (2.6) вытекает справедливость доказываемого предложения.

Т е о р е м а [2.4] . Для всех к-оснащений нормали второго рода, рассматриваемые в одной и той же точке базисной поверхности B_m вырожденной гиперполосы пересекают соответствующую плоскую образующую по одной и той же $(m-\tau-1)$ — мерной плоскости (Эта плоскость называется к-плоскостью).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из (2.4) следует, что при переходе от одного к-оснащения к другому $h_{i_2}=0$. Подставляя $h_{i_2}=0$ в (I.II) получаем :

$$M^{\alpha}_{1/\!/i_2} = M^{\alpha}_{1/i_2}. \qquad (2.7)$$

Точки M^{α}_{1/i_2} определяют $(m-\tau-1)$-мерную плоскость, по которой нормаль второго рода пересекается с плоской образующей, проходящей через рассматриваемую точку базисной поверхности B_m гиперполосы.

Соотношение (2.7) показывает, что все к-оснащения индуцируют в рассматриваемой точке базисной поверхности гиперполосы одну и ту же плоскость (к-плоскость). Теорема доказана.

Итак, каждой точке базисной поверхности гиперполосы соответствует некоторая к-плоскость. Следовательно, всякой линии общего положения базисной поверхности B_m соответствует $(m-1)$-мерная поверхность B_{m-1}, вложенная в B_m. Поверхность B_{m-1}, состоящая из τ-параметрического семейства $(m-\tau-1)$-мерных плоских образующих (к-плоскостей), называется подповерхностью, индуцированной данной линией общего положения на B_m.

Следующие предложения характеризуют геометрическую структуру к-оснащений конических развертывающихся гиперполос с p-мерной вершиной ($p \leq m-\tau-1$).

Теорема [2.5]. Вершина любой конической развертывающейся гиперполосы Γ_m принадлежит всем к-плоскостям.

Доказательство. Пусть $\underset{\tau}{R}{}^{\alpha}_{1}$ $(\tau=1,2,\dots,p+1)$ линейно независимые постоянные точки, определяющие p-мерную вершину развертывающейся гиперполосы:

$$\underset{\tau}{R}{}^{\alpha}_{1/i} = \underset{\tau}{e}_i \underset{\tau}{R}{}^{\alpha}_{1}. \tag{2.8}$$

С другой стороны имеем:

$$\underset{\tau}{R}{}^{\alpha}_{1} = \underset{\tau}{\lambda} M^{\alpha}_{1} + \underset{\tau}{u}{}^{s} M^{\alpha}_{1/s}, \tag{2.9}$$

где $\underset{\tau}{u}{}^{s}$ — линейно независимые контравариантные к-векторы. Дифференцируя (2.9) и принимая во внимание (1.3), (2.8), (2.9), (1.21), $\overset{\circ}{b}_{1ij} u^j = 0$, получаем:

$$\underset{\tau}{e}_i \underset{\tau}{\lambda} - \underset{\tau}{\lambda}_{/i} - \underset{\tau}{u}{}^{s} p_{si} = 0,$$

$$\underset{\tau}{e}_i \underset{\tau}{u}{}^{s} - \underset{\tau}{u}{}^{s}_{/i} - \underset{\tau}{\lambda} \delta^{s}_{i} = 0 \tag{2.10}$$

Далее, дифференцируя равенство $\overset{\circ}{b}_{1is} \underset{\tau}{u}{}^{s} = 0$, а затем преобразовывая полученное соотношение с помощью (2.10), находим:

$$\overset{\circ}{b}_{1is/k} \underset{\tau}{u}{}^{s} - \underset{\tau}{\lambda} \overset{\circ}{b}_{1kt} = 0. \tag{2.11}$$

Наконец, умножив (2.11) на $\overset{\circ}{b}{}^{it}$ и свернув по i и t, приходим к равенству

$$K_s \underset{\tau}{u}{}^{s} = \underset{\tau}{\lambda} \tau \tag{2.12}$$

При произвольном к-оснащении из (2.12) получаем, что $\lambda_{\tau}=0$. Подставляя $\lambda_{\tau}=0$ в (2.9), будем иметь

$$R^{\alpha}_{\tau\,1}=u^{s_2}_{\tau}M^{\alpha}_{1/s_2},$$

то есть вершина конической развертывающейся гиперполосы принадлежит к-плоскостям.

Из доказанной теоремы [2.5] непосредственно вытекают предложения:

Т е о р е м а [2.6]. Для того, чтобы данное оснащение M-конической развертывающейся гиперполосы было к-оснащением, необходимо и достаточно, чтобы все $(m-z-1)$-мерные плоскости, по которым нормали второго рода этого оснащения пересекают соответствующие плоские образующие, совпадали с вершиной.

Т е о р е м а [2.7]. Для того, чтобы подповерхность, индуцированная любой кривой общего положения на базисной поверхности B_m развертывающейся гиперполосы, была конической с p-мерной вершиной, необходимо и достаточно, чтобы данная развертывающаяся гиперполоса была конической с p-мерной вершиной.

Рассматривая предыдущую теорию для случая $m=n-1$, то есть когда базисная поверхность гиперполосы является вырожденной гиперповерхностью, мы приходим к результатам работы [5], § 3.

§ 3. Полувнутренние и внутренние Δ-оснащения вырожденной гиперполосы.

I. Полувнутреннее Δ-оснащение.

О п р е д е л е н и е. Оснащение, для которого чебышевский вектор K_i равен нулю, назовем полувнутренним Δ-оснащением вырожденной гиперполосы Γ_m.

Полувнутреннее Δ-оснащение не зависит от произвола $b_0^{i i_2 j_2}$, но, вообще говоря, зависит от выбора Δ^i_j. Исключение, например, составляют M-конические развертывающиеся гиперполосы, на которых к-оснащение индуцирует к-связность.

Т е о р е м а [3.1]. Для всякой вырожденной гиперполосы Γ_m существует полувнутреннее Δ-оснащение.

При переходе от одного к-оснащения к другому тензору K_i меняется по закону:

$$\overline{K}_i = K_i + \psi_0^{1h} b^0_{1hi} - h_i \qquad (3.1)$$

Следовательно, h_i и ψ_0^{1h} всегда можно подобрать так, что $\overline{K}_i = 0$. Теорема доказана.

В дальнейшем изложении будем предполагать, что рассматриваемые оснащения являются полувнутренними Δ-оснащениями.

Равенство

$$h_i = \psi_0^{1k} b^0_{1ik}, \qquad (3.2)$$

которое мы получаем из (3.1), характеризует переход от одного полувнутреннего Δ-оснащения к другому полувнутреннему Δ-оснащению. Подставляя полученное равенство в соотношение

$$\overline{b}^0_{1it//j} = b^0_{1it/j} + \psi_0^{1s} b^0_{1sj} + \psi_0^{1s} b^0_{1st} b^0_{1ij} + \psi_0^{1s} b^0_{1is} b^0_{1tj} - h_j b^0_{1it} - h_i b^0_{1jt} - h_t b^0_{1ij},$$

приходим к выводу :

Т е о р е м а [3.2]. Тензор $b^0_{1ij/k}$ есть инвариант полувнутренних Δ-оснащений.

Из (3.2) находим, что компоненты $\psi_0^{1k_1}$ тензора ψ_0^{1k} (задает новую нормаль первого рода (2.12)) однозначно определяются заданием h_i, а компоненты $\psi_0^{1k_2}$ могут быть выбраны произвольно. Поэтому полувнутреннее Δ-оснащение каждой к-нормализации второго рода ставит в соответствие единственное поле $(n-r)$-мерных направлений, определяемых гиперплоскостями $N_\alpha^{1k_1}$ (это поле называется н о р м а л ь н ы м полем $(n-r)$-мерных направлений *)). Плоскость P_{n-r} нормального поля, как следует из соотношения $N_\alpha^{ii} M^\alpha_{1/k} = \delta^i_k$ **), в данной точке B_m содержит плоскую

---

*) См. [5] , § 4.

**) См. [6] , стр. 29.

образующую и, кроме того, соответствующую нормаль первого рода.

Определение. Оснащение вырожденной гиперполосы Γ_m ранга τ, в каждой точке базисной поверхности B_m которой заданы нормаль второго рода и $(n-\tau)$-мерная плоскость $P_{n-\tau}$ нормального поля, называется обобщенным оснащением данной гиперполосы.

Если от данного оснащения требуется перейти к полувнутреннему обобщенному Δ-оснащению определенного вида, то достаточно найти либо $\psi_0^{i k_1}$, либо k_i соответствующие этому новому оснащению. Очевидно, два оснащения вырожденной гиперполосы Γ_m ранга τ, индуцирующие на ней одно и то же обобщенное оснащение, отличаются друг от друга только положением нормалей первого рода в соответствующих нормальных плоскостях.

2. Внутренняя Δ-нормализация M-конических развертывающихся гиперполос.

Найдем аналитические условия, характеризующие инвариантное обобщенное оснащение M-конической развертывающейся гиперполосы. Предварительно сформулируем две леммы, необходимые для дальнейших исследований:

Лемма [3.3]. Тензор P_{ij}, индуцируемый на M-конической развертывающейся гиперполосе K-оснащением, удовлетворяет условию

$$P_{i_2 j} = 0 \tag{3.3}$$

Лемма [3.4]. Для всякой вырожденной гиперполосы выполняется соотношение

$$m^{i k_1}_{\lambda i_2} = 0 \tag{3.4}$$

Равенство (3.3) вытекает из теоремы [I.5], если учесть, что для K-оснащения M-конической развертывающейся гиперполосы $\underset{\tau_2}{u}{}^{\kappa_1}_{/i} = 0$ $(\tau_2 = 1, 2, \ldots, m-\tau)$, а равенство (3,4) непосредственно следует из соотношения (I.II).

Так как полувнутреннее оснащение M-конической развертывающейся гиперполосы всегда индуцирует соотношение $b^{o}_{1i_2j/k}=0$, то все оснащения, рассматриваемые нами в данном параграфе, индуцируют тензор b^{o}_{1ij} , все производные которого удовлетворяют условию:

$$b^{o}_{1ij_2/ke\ldots s}=0. \qquad (3.5)$$

Наконец, используя леммы [3.3], [3.4] и соотношения (3.5), (I.IO), (I.8), (I.9) , получаем следующее выражение для тензора b^{o}_{1ij/ke_2}:

$$b^{o}_{1ij/ke_2}=b^{o}_{1ij}\,S_{ke_2}+b^{o}_{1ik}\,S_{je_2}+b^{o}_{1jk}\,S_{ie_2}, \qquad (3.6)$$

где

$$S_{ke_2}=m^{1s}_{oe_2}\,b^{o}_{1sk}-p_{ke_2}$$

Введем теперь в рассмотрение тензор

$$\Omega^{1}_{op}=\alpha\mathcal{L}^{1}_{op}+\beta B^{1}_{op}-\alpha S^{1}_{op}, \qquad (3.7)$$

где

$$\mathcal{L}^{1}_{op}=b^{o}_{1ij/ke}\,b^{o}_{1sq/p}\,b^{1is}_{o}\,b^{1ke}_{o}\,b^{1qj}_{o},$$

$$B^{1}_{op}=b^{o}_{1ij/kp}\,b^{o}_{1mn/q}\,b^{1mi}_{o}\,b^{1nj}_{o}\,b^{1qk}_{o}, \qquad (3.8)$$

$$S^{1}_{op}=b^{o}_{1ij/ps}\,b^{o}_{1mn/q}\,b^{1ik}_{o}\,b^{1jn}_{o}\,b^{1sq}_{o},$$

а α и β —произвольные параметры, не равные одновременно нулю. С помощью соотношений (3.7), (3.3)-(3,6), (2.I) можно получить следующие свойства тензора Ω^{1}_{op}, индуцированного полувнутренним оснащением на M-конической развертывающейся гиперполосе:

а). Ω^{1}_{op} не зависит от выбора компонент $b^{1ij_2}_{o}$ тензора b^{1ij}_{o} ,

б). Ω^{1}_{op} есть к-тензор типа $\left\{\begin{matrix}0\\b\end{matrix}\right\}_{o}$, где $b\leq I$.

При изменении полувнутренних оснащений M-конической развертывающейся гиперполосы тензор Ω^{1}_{op} меняется по формуле:

$$\overline{\Omega}^{1}_{op}=\Omega^{1}_{op}+\psi^{1s_1}_{o}\left[\alpha(r+2)\,l_{s_1p}+(\alpha-\beta)J^{1}_{o}\,b^{o}_{1ps_1}\right] \qquad (3.9)$$

где

$$l_{sp}=b^{o}_{1ij/s}\,b^{o}_{1ke/p}\,b^{1ik}_{o}\,b^{1je}_{o},$$

$$J^{1}_{o}=l_{sp}\,b^{1sp}_{o}.$$

На основании теоремы [3.2] мы утверждаем , что тензоры l_{sp}, J^{1}_{o} и, следовательно, коэффициент при $\psi^{1s_1}_{o}$ в формуле (3.9) являются инвариантами полувнутренних оснащений M -конической развертывающейся гиперполосы. Кроме того, так как $b^{o}_{1ij/k}$ -к-тензор типа $\left\{\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right\}$, где $b \leq 1$, то ℓ_{sp} и $\mathcal{J}^{1}_{o}$ не зависят от выбора Δ^{i}_{j}.

Потребуем, чтобы для нового оснащения имело место равенство $\bar{\Omega}^{1}_{op}=0$. Тогда мы получаем следующую систему уравнений относительно компонент $\psi^{1S_1}_{o}$:

$$\Omega^{1}_{op}+\psi^{1S_1}_{o}\left[\alpha(r+2)\ell_{s_1p}+(\alpha-\beta)\mathcal{J}^{1}_{o}b^{o}_{1s_1p}\right]=0 \qquad (3.10)$$

Эта система имеет одно и только одно решение, если

$$\left|\alpha(r+2)\ell_{s_1p}+(\alpha-\beta)\mathcal{J}^{1}_{o}b^{o}_{1ps_1}\right|\neq 0, \qquad (3.11)$$

то есть оснащение, удовлетворяющее условию $\bar{\Omega}^{1}_{op}=0$, существует. Причем, как видно из равенства (3.10), двух таких оснащений построить нельзя.

Т е о р е м а [3.5]. Если для M-конической развертывающейся гиперполосы Γ_m при полувнутреннем оснащении имеет место соотношение (3.11), то при фиксированных параметрах α, β на этой гиперполосе существует единственное обобщенное оснащение, не зависящее от исходного выбора Δ^{i}_{j}, и от произвола $b^{1i_2j_2}_{o}$ и удовлетворяющее равенствам

$$K_i=0\ ,\ \Omega^{1}_{op}=0. \qquad (3.12)$$

Обощенное оснащение, определенное в теореме [3.5] назовем в н у т р е н н и м о б о б щ е н н ы м о с н а щ е н и е м (α,β) M-конической развертывающейся гиперполосы, удовлетворяющей при полувнутреннем оснащении соотношению (3.11). Из определения обощенного оснащения видно, что оснащения индуцирующие одно и то же внутреннее обобщенное оснащение (α,β), отличаются друг от друга только положением нормалей первого рода во внутренних нормальных плоскостях P_{n-r}. Для краткости оснащения, удовлетворяющие условиям (3.12) при фиксированных α и β, будем называть Ω -оснащениями (α,β).

Следует отметить, что проведенные рассуждения не проходят в случае, когда базисной поверхностью гиперполосы служит гиперповерхность второго порядка, а также для вырожденных р а з в е р т ы в а ю щ и х с я гиперполос ранга один . Для этих гиперполос полувнутреннее оснащение, как легко показать, индуцирует нулевой тензор $\overset{\circ}{b}_{1ij/k}$.

Перейдем теперь к построению специальной нормали первого рода во внутренней нормальной плоскости P_{n-r} . Для этой цели предварительно выясним, как меняются производные второго, третьего порядков тензора $\overset{\circ}{b}_{1ij}$ при изменении Ω -оснащений.

Т е о р е м а [3.6] Тензор $\overset{\circ}{b}_{1ij/kp}$ есть инвариант Ω -оснащений (α, β) .

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании теоремы [3.2] и формулы (3.2) тензор $\overset{\circ}{b}_{1ij/kp}$ при изменении полувнутренних оснащений меняется по формуле :

$$\overset{\circ}{b}_{1ij//kp}=\overset{\circ}{b}_{1ij/kp}-\overset{\circ}{b}_{1is}\psi_{\circ}^{1s}\overset{\circ}{b}_{1pj/k}+\overset{\circ}{b}_{1ip}\psi_{\circ}^{1s}\overset{\circ}{b}_{1sj/k}-\overset{\circ}{b}_{1js}\psi_{\circ}^{1s}\overset{\circ}{b}_{1ip/k}-$$

$$-\overset{\circ}{b}_{1ps}\psi_{\circ}^{1s}\overset{\circ}{b}_{1ij/k}+\overset{\circ}{b}_{1jp}\psi_{\circ}^{1s}\overset{\circ}{b}_{1is/k}-\overset{\circ}{b}_{1sk}\psi_{\circ}^{1s}\overset{\circ}{b}_{1ij/p}+\overset{\circ}{b}_{1kp}\psi_{\circ}^{1s}\overset{\circ}{b}_{1ij/s}. \quad (3.13)$$

С другой стороны, при переходе от одного Ω -оснащения к другому $\psi_{\circ}^{1s_1}=0$. Учитывая, что $\psi_{\circ}^{1s_1}=0$ и $\overset{\circ}{b}_{1ij/k}$ -- к-тензор типа $\left\{\begin{smallmatrix}0\\ b\end{smallmatrix}\right\}$, где $b\leq 1$, из (3.13) находим : $\overset{\circ}{b}_{1ij//kl}=\overset{\circ}{b}_{1ij/kl}$.

Теорема доказана.

Из теоремы [3.6] и соотношений (3.5), $\psi_{\circ}^{1s_1}=0$, $h_i=0$ следует, что для Ω -оснащений (α, β) имеет место равенство

$$\overset{\circ}{b}_{1ij//kpt}=\overset{\circ}{b}_{1ij/kpt}+\psi_{\circ}^{1s_2}\overset{\circ}{b}_{1pt}\overset{\circ}{b}_{1ij/ks_2},$$

которое в силу (3.6) можно представить в следующем виде:

$$\overset{\circ}{b}_{1ij//kpt}=\overset{\circ}{b}_{1ij/kpt}+\psi_{\circ}^{1s_2}\overset{\circ}{b}_{1pt}\overset{\circ}{b}_{1(ij}S_{k)s_2}. \quad (3.14)$$

Из (3.14) получаем, что все подтензоры типа $\left\{\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right\}$ тензора $\overset{\circ}{b}_{1ij/kpt}$ являются инвариантами Ω -оснащений (α, β), то есть

$$b^{\circ}_{1ij\|kpt} = b^{\circ}_{1ij/kpt}, \qquad (3.15)$$

если хотя бы один латинский индекс принимает значение большее z.

Рассмотрим тензор

$$\Pi^{11}_{oop} = b^{\circ}_{1ij/kpmn} b^{\circ}_{1tq/s} b_{o}^{1km} b_{o}^{1it} b_{o}^{1jq} b_{o}^{1nS}. \qquad (3.16)$$

Так как для Ω-оснащенной M-конической развертывающейся гиперполосы $b^{\circ}_{1ij_2/k} = 0$, $b^{\circ}_{1ij_2/kpmn} = 0$, то тензор $\Pi^{11}_{\dots}$ не зависит от компонент $b_{o}^{1i_2 j_2}$, то есть вполне определяется заданным тензором Δ^{i}_{j}.

При изменении Ω-оснащений (α, β) подтензор $\Pi^{11}_{oop_2}$ меняется по закону:

$$\overline{\Pi}^{11}_{oop_2} = \Pi^{11}_{oop_2} + \psi_{o}^{1S_2} b^{\circ}_{1ij/tp_2s_2} b^{\circ}_{1lq/n} b_{o}^{1il} b_{o}^{1jq} b_{o}^{1tn}. \qquad (3.17)$$

Очевидно, коэффициент при $\psi_{o}^{1S_2}$ в (3.17) не зависит от выбора Δ^{i}_{j} и на основании (3.15) является инвариантом Ω-оснащений (α, β) M-конической развертывающейся гиперполосы.

Т е о р е м а [3.7]. Для всякой M-конической развертывающейся гиперполосы, на которой Ω-оснащение (α, β) индуцирует невырожденную матрицу

$$\| b^{\circ}_{1ij/tp_2s_2} b^{\circ}_{1lq/n} b_{o}^{1il} b_{o}^{1jq} b_{o}^{1tn} \| \qquad (3.18)$$

существует единственное Ω-оснащение (α, β), для которого

$$\overline{\Pi}^{11}_{oop_2} = 0. \qquad (3.19)$$

Ω-оснащение (α, β), удовлетворяющее условию (3.19), назовем в н у т р е н н и м Δ-о с н а щ е н и е м (α, β, Π) всякой M-конической развертывающейся гиперполосы, на которой Ω-оснащение (α, β) индуцирует невырожденную матрицу (3.18).

3°. Внутреннее Δ-оснащение вырожденной гиперполосы, не являющейся M-конической развертывающейся гиперполосой.

Введем в рассмотрение тензор

$$Y^{1}_{os} = \Phi^{1}_{os} - \frac{(z+2)}{2} \Psi^{1}_{os}, \qquad (3.20)$$

где
$$\left.\begin{aligned}\Phi^1_{os} &= b^o_{1ij/kl}\, b^o_{1tm/n}\, \Delta^i_s \Delta^j_p \Delta^k_q \Delta^t_z\, b_o^{1lp}\, b_o^{1qm}\, b_o^{1nz},\\ \Psi^1_{os} &= b^o_{1ij/kl}\, b^o_{1tm/n}\, \Delta^l_s \Delta^i_p \Delta^j_q \Delta^t_z\, b_o^{1kp}\, b_o^{1qm}\, b_o^{1nz}.\end{aligned}\right\} \quad (3.21)$$

Легко видеть, что Y^1_{os} не зависит от компонент $b_o^{1i_2j_2}$, то есть вполне определяется заданием Δ^i_j, и кроме того, $Y^1_{os_2} = 0$.

При изменении полувнутренних Δ-оснащений τ-вырожденной гиперполосы Γ_m тензор Y^1_{os} меняется по формуле :
$$\overline{Y}^1_{os} = Y^1_{os} + \psi_o^{1t_1} W_{t_1 s}, \qquad (3.22)$$
где
$$W_{t_1 s} = \frac{\tau}{2}\, b^o_{1km/n}\, b^o_{1lj/k}\, b^o_{1st_1}\, \Delta^j_{p_1} \Delta^k_{q_1} \Delta^h_{z_1}\, b_o^{1lp_1}\, b_o^{1mq_1}\, b_o^{1nz_1} +$$
$$+ \frac{\tau}{2}\, b^o_{1km/n}\, b^o_{1ij/l}\, \Delta^m_{t_1} \Delta^i_s \Delta^j_p \Delta^h_{z_1}\, b_o^{1lp_1}\, b_o^{1nz_1} +$$
$$+ \tau\, b^o_{1km/n}\, b^o_{1il/k}\, \Delta^l_{t_1} \Delta^i_s \Delta^k_{q_1} \Delta^h_{z_1}\, b_o^{1mq_1}\, b_o^{1nz_1} -$$
$$- \frac{\tau+2}{2}\, b^o_{1km/n}\, b^o_{1it_1/k}\, \Delta^m_s \Delta^i_{p_1} \Delta^h_{z_1}\, b_o^{1kp_1}\, b_o^{1nz_1}.$$

Матрица $\|W_{t_1 s}\|$ в силу теоремы [3.2] является инвариантом полувнутренних Δ-оснащений. Кроме того, $W_{t_1 s_2} = 0$.

Т е о р е м а [3.8]. Все полувнутренние Δ-оснащения, удовлетворяющие условию
$$Y^1_{os} = 0, \qquad (3.23)$$
индуцируют на вырожденной гиперполосе с невырожденной при полувнутреннем Δ-оснащении матрицей $\|W_{t_1 s}\|$ одно и тоже обобщенное оснащение.

Далее, рассмотрим тензор
$$H^1_{os} = b^o_{1ij/kn}\, b^o_{1lm/s}\, \Delta^i_p \Delta^j_q \Delta^k_t\, b_o^{1pl}\, b_o^{1qm}\, b_o^{1tn}, \qquad (3.24)$$
который вполне определяется заданием тензора Δ^i_j. При полувнутренних Δ-оснащениях удовлетворяющих условию (3.23), имеем
$$\overline{H}^1_{os_2} = H^1_{os_2} + (\tau+2)\psi^{1t_2}\, \ell_{t_2 s_2}. \qquad (3.25)$$

Т е о р е м а [3.9]. Для каждой τ -вырожденной гиперполосы, на которой полувнутреннее Δ-оснащение индуцирует невырожденные матрицы $\|W_{t_1 s_1}\|$ и $\|\ell_{t_2 s_2}\|$, существует единственное полувнутреннее Δ -оснащение, удовлетворяющее условиям

$$Y^{1}_{os}=0,\ H^{1}_{os}=0. \qquad (3.26)$$

Полувнутреннее Δ-оснащение, удовлетворяющее условиям (3.26), назовем в н у т р е н н и м Δ-оснащением всякой вырожденной гиперполосы ранга τ, на которой полувнутреннее Δ-оснащение индуцирует невырожденные матрицы $\|W_{t_1 s_1}\|$ и $\|\ell_{t_2 s_2}\|$.

Применяя полученную теорию к частному виду вырожденных гиперполос - к гиперповерхностям Γ_{n-1} ($m=n-1$), мы приходим к результатам работы [5], §4.

Л и т е р а т у р а.

1.Атанасян Л.С., Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т.9 (1952г), 351-410.

2.Атанасян Л.С., К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства. Ученые записки МГПИ им.В.И.ЛЕНИНА, т.108, вып.2, 1957, 3-44.

3.Воронцова Н.С., Некоторые вопросы теории оснащенных гиперповерхностей многомерного проективного пространства. Сборник статей по математике и методике преподавания математики в ср.школе Челябинского пединститута, т.5, вып.3, 1960, 286-296.

4.Атанасян Л.С. и Воронцова Н.С., Специальные нормализации вырожденных гиперповерхностей (n+1)-мерного проективного пространства. Волжский математический сборник, вып.I, Куйбышев, 1963.

5.Атанасян Л.С. и Воронцова Н.С., Построение инвариантного оснащения τ-вырожденной гиперповерхности многомерного проективного пространства. Ученые записки МГПИ им В.И.ЛЕНИНА, 1965, 243, 5-28.

6. Попов Ю.И. ,Сферические гиперполосы многомерного проективного пространства P_n .Ученые записки Калининградского государственного университета, 1969, вып. I, 27-57.

7. Попов Ю.И., К теории оснащенных регулярных гиперполос многомерного проективного пространства. Тезисы докладов 4 Всесоюзной Межвузовской конференции, Тбилиси, 1969, 209-210.

Б.А.АНДРЕЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ПАР ФИГУР В ТОЧЕЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Пусть F -пара фигур ранга N [I] ,состоящая из невырожденной гиперквадрики q n-мерного проективного пространства P_n и неинцидентной ей точки p .Исследуется биективное дифференцируемое отображение φ пространства этой пары $R(F)$ в точечное проективное N-мерное пространство P_N .Найден основной объект отображения,построены и геометрически охарактеризованы различные поля геометрических объектов,охватываемые полем основного объекта.

§ I. Построение системы фундаментальных объектов отображения.

Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\tau=\{\bar{\tau}_0,\bar{\tau}_1,\dots,\bar{\tau}_n\}$,а пространство P_N к реперу $R=\{\bar{R}_0,\bar{R}_1,\dots,\bar{R}_N\}$. Деривационные формулы реперов τ и R имеют соответственно вид :

$$d\bar{\tau}_{i'}=\omega_{i'}^{j'}\bar{\tau}_{j'} \qquad (i',j',k',\dots=0,1,\dots,n), \tag{1.1}$$

$$d\bar{R}_{\mathcal{J}'}=\Omega_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}\bar{R}_{\mathcal{K}'} \qquad (\mathcal{J}',\mathcal{K}',\mathcal{L}',\dots=0,1,\dots,N), \tag{1.2}$$

где формы Пфаффа $\omega_{i'}^{j'}$, $\Omega_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}$ подчинены структурным уравнениям Картана:

$$\mathcal{D}\omega_{i'}^{j'}=\omega_{i'}^{k'}\wedge\omega_{k'}^{j'}\ ,\quad \mathcal{D}\Omega_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}=\Omega_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{L}'}\wedge\Omega_{\mathcal{L}'}^{\mathcal{K}'}\ . \tag{1.3}$$

Поместим нулевую вершину $\bar{\tau}_0$ репера τ в точку p ,вершины $\bar{\tau}_i$ ($i,j,k,\dots=1,2,\dots,n$) в полярную гиперплоскость π точки p относительно гиперквадрики q .

При таком расположении вершин репера уравнение гиперквадрики q имеет вид :

$$a_{ij}x^i x^j + (x^0)^2 = 0, \qquad (1.4)$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0. \qquad (1.5)$$

Положим

$$\theta_{ij} \equiv da_{ij} - a_{kj}\omega_i^k - a_{ik}\omega_j^k + 2a_{ij}\omega_0^0 \qquad (1.6)$$

Обозначив формы Пфаффа $\omega_{i'}^{j'}$ при фиксированном образующем элементе F через $\pi_{i'}^{j'}$, получим следующую систему дифференциальных уравнений стационарности пары F :

$$\overset{\circ}{\theta}_{ij} = 0, \quad \pi_i^0 = 0, \quad \pi_0^i = 0 \qquad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем нолик над формой Пфаффа означает фиксацию первичных параметров. Из (I.7) следует, что формы

$$\theta_{ij}, \; \omega_i^0, \; \omega_0^i \qquad (1.8)$$

суть главные формы многообразия $R(F)$. Имеем:

$$\dim R(F) = N = C_n^2 + 3n. \qquad (1.9)$$

Легко показать, что подсистемы $\pi_i^0 = 0$; $\pi_i^0 = \pi_0^i = 0$; $\overset{\circ}{\theta}_{ij} = \pi_0^i = 0$ системы (I.7) вполне интегрируемы. Их первые интегралы определяют нетривиально индуцируемые [I] парой F фигуры : гиперплоскость π ; пару, состоящую из точки p и гиперплоскости π ; гиперконус:

$$a_{ij}x^i x^j = 0. \qquad (1.10)$$

Среди этих фигур максимальный ранг $\overline{N} = C_n^2 + 2n - 1$ имеет гиперконус (I.10). Таким образом, пара F является индуцирующей парой индекса $\overline{N} = C_n^2 + 2n - 1$ [I] . Из уравнений (I.7) видно, что система величин $\Gamma_0 = a_{ij}$ образует тензор. Учитывая (I.5), введем систему приведенных миноров a^{ij} матрицы (a_{ij}), характеризующихся соотношениями :

$$a^{ik}a_{kj} = \delta_j^i. \qquad (1.11)$$

Система величин a^{ij} образует тензор, подобный тензору a_{ij} :

$$\delta a^{ij} = -a^{kj}\pi_k^i - a^{ik}\pi_k^j + 2a^{ij}\pi_0^0. \qquad (1.12)$$

Поместив нулевую вершину репера R пространства P_N в точку $P=\varphi(F)$,приведем систему дифференциальных уравнений отображения φ к виду :

$$\Theta_{ij}=\Lambda_{ij\gamma}\Omega_0^\gamma,\ \omega_0^i=\Lambda_\gamma^i\Omega_0^\gamma,\ \omega_i^0=\Lambda_{i\gamma}\Omega_0^\gamma;\ (\gamma,\varkappa,\iota=1,2,\dots,N) \qquad (1.13)$$

причем матрица отображения предполагается невырожденной,что обеспечивает локальную биективность отображения .

Осуществляя двукратное продолжение системы (I.13),получим :

$$\Delta\Lambda_{ij\gamma}=\Lambda_{ij\gamma\varkappa}\Omega_0^\varkappa,\ \Delta\Lambda_\gamma^i=\Lambda_{\gamma\varkappa}^i\Omega_0^\varkappa,\ \Delta\Lambda_{i\gamma}=\Lambda_{i\gamma\varkappa}\Omega_0^\varkappa,$$

$$\Delta\Lambda_{ij\gamma\varkappa}=\Lambda_{ij\gamma\varkappa\iota}\Omega_0^\iota,\ \Delta\Lambda_{\gamma\varkappa}^i=\Lambda_{\gamma\varkappa\iota}^i\Omega_0^\iota,\ \Delta\Lambda_{i\gamma\varkappa}=\Lambda_{i\gamma\varkappa\iota}\Omega_0^\iota,$$

$$\Delta\Lambda_{ij\gamma\varkappa\iota}\wedge\Omega_0^\iota=0,\ \Delta\Lambda_{\gamma\varkappa\iota}^i\wedge\Omega_0^\iota=0,\ \Delta\Lambda_{i\gamma\varkappa\iota}\wedge\Omega_0^\iota=0,$$

где

$$\Delta\Lambda_{ij\gamma}\equiv d\Lambda_{ij\gamma}-\Lambda_{kj\gamma}\omega_i^k-\Lambda_{ik\gamma}\omega_j^k-\Lambda_{ij\iota}\Omega_\gamma^\iota+\Lambda_{ij\gamma}(\Omega_0^0+2\omega_0^0),$$

$$\Delta\Lambda_\gamma^i\equiv d\Lambda_\gamma^i+\Lambda_\gamma^j\omega_j^i-\Lambda_\varkappa^i\Omega_\gamma^\varkappa+\Lambda_\gamma^i(\Omega_0^0-\omega_0^0),$$

$$\Delta\Lambda_{i\gamma}\equiv d\Lambda_{i\gamma}-\Lambda_{k\gamma}\omega_i^k-\Lambda_{i\iota}\Omega_\gamma^\iota+\Lambda_{i\gamma}(\Omega_0^0+\omega_0^0);$$

$$\Delta\Lambda_{ij\gamma\varkappa}\equiv d\Lambda_{ij\gamma\varkappa}-\Lambda_{kj\gamma\varkappa}\omega_i^k-\Lambda_{ik\gamma\varkappa}\omega_j^k-\Lambda_{ij\iota\varkappa}\Omega_\gamma^\iota-\Lambda_{ij\gamma\iota}\Omega_\varkappa^\iota+$$
$$+2\Lambda_{ij\gamma\varkappa}(\Omega_0^0+\omega_0^0)-\Lambda_{ij(\gamma}\Omega_{\varkappa)}^0,$$

$$\Delta\Lambda_{\gamma\varkappa}^i\equiv d\Lambda_{\gamma\varkappa}^i+\Lambda_{\gamma\varkappa}^j\omega_j^i-\Lambda_{\iota\varkappa}^i\Omega_\gamma^\iota-\Lambda_{\gamma\iota}^i\Omega_\varkappa^\iota+\Lambda_{\gamma\varkappa}^i(2\Omega_0^0-\omega_0^0)-\Lambda_{(\gamma}^i\Omega_{\varkappa)}^0,$$

$$\Delta\Lambda_{i\gamma\varkappa}\equiv d\Lambda_{i\gamma\varkappa}-\Lambda_{j\gamma\varkappa}\omega_i^j-\Lambda_{i\iota\varkappa}\Omega_\gamma^\iota-\Lambda_{i\gamma\iota}\Omega_\varkappa^\iota+\Lambda_{i\gamma\varkappa}(2\Omega_0^0+\omega_0^0)-\Lambda_{i(\gamma}\Omega_{\varkappa)}^0,$$

а формы Пфаффа $\Delta\Lambda_{ij\gamma\varkappa\iota},\ \Delta\Lambda_{\gamma\varkappa\iota}^i,\ \Delta\Lambda_{i\gamma\varkappa\iota}$ имеют аналогичный вид. При этом системы величин $\Lambda_{ij\gamma\varkappa},\ \Lambda_{\gamma\varkappa}^i,\dots$ симметричны по всем своим однотипным индексам.Здесь и в дальнейшем $a_{(\gamma}b_{\varkappa)}$ означает: $a_\gamma b_\varkappa+a_\varkappa b_\gamma$.

Система величин $\Gamma_1=\{a_{ij},\Lambda_{ij\gamma},\Lambda_\gamma^i,\Lambda_{i\gamma}\}$ образует фундаментальный геометрический объект первого порядка рассматриваемого отображения.Система величин $\Gamma_2=\{\Gamma_1,\Lambda_{ij\gamma\varkappa},\Lambda_{\gamma\varkappa}^i,\Lambda_{i\gamma\varkappa}\}$ образует фундаментальный объект второго порядка.Из уравнений (I.14) следует,что подсистемы : $\Gamma_1^{(1)}=\{\Lambda_{ij\gamma}\},\ \Gamma_1^{(2)}=\{\Lambda_\gamma^i\},\ \Gamma_1^{(3)}=\{\Lambda_{i\gamma}\}$ являются тензорами,а $\Gamma_2^{(1)}=\{\Gamma_1^{(1)},\Lambda_{ij\gamma\varkappa}\},\Gamma_2^{(2)}=\{\Gamma_1^{(2)},\Lambda_{\gamma\varkappa}^i\},\Gamma_2^{(3)}=\{\Gamma_1^{(3)},\Lambda_{i\gamma\varkappa}\}$

являются подобъектами фундаментального объекта Γ_2 .

§2. Основной объект отображения.

Т е о р е м а. Фундаментальный объект второго порядка является основным объектом отображения ψ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения основного объекта [2] следует, что надо доказать алгебраическую разрешимость системы дифференциальных уравнений

$$\overset{\circ}{\Theta}_{ij}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{ij\mathcal{I}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda^{i}_{\mathcal{I}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{i\mathcal{I}}=0, \tag{2.1}$$

$$\overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{ij\mathcal{I}\mathcal{K}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda^{i}_{\mathcal{I}\mathcal{K}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{i\mathcal{I}\mathcal{K}}=0 \tag{2.2}$$

локального фундаментального объекта Γ_2 относительно всех вторичных форм :

$$\hat{\pi}^{j}_{i}=\pi^{j}_{i}-\delta^{j}_{i}\pi^{\circ}_{\circ},\quad \hat{\Pi}^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{I}}=\Pi^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{I}}-\delta^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{I}}\Pi^{\circ}_{\circ}. \tag{2.3}$$

Так как система дифференциальных уравнений (2.I),(2.2) вполне интегрируема, то начальные значения фундаментального объекта Γ_2 можно задавать произвольно.

Зададим для компонент Γ_2 следующие начальные значения :

$$a_{ij}=\delta^{j}_{i},\ \Lambda_{ij1}=i\delta^{j}_{i}\ \text{,остальные}\ \Lambda_{ij\mathcal{I}}=\delta^{C}_{N-\mathcal{I}+1}\ \text{,где}$$

$$C=\begin{cases}(j-i)n-\frac{1}{2}(j-i)(j-i-1)+i, & \text{при } j>i\\ 0, & \text{при } j<i,\ \Lambda_{1\mathcal{I}}=1,\end{cases} \tag{2.4}$$

$$\Lambda_{i\mathcal{I}}=\delta^{\mathcal{I}}_{n+i}\ \text{при}\ i>1,\ \Lambda^{i}_{\mathcal{I}}=\delta^{i}_{\mathcal{I}},\ \Lambda^{1}_{\mathcal{I}\mathcal{K}}=\delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}},\ \Lambda^{2}_{\mathcal{I}\mathcal{K}}=\mathcal{I}\delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}},$$

где $\delta^{\beta}_{\alpha}=\begin{cases}\text{I, если } \alpha=\beta,\\ \text{O, если } \alpha\neq\beta\end{cases}$

Остальные начальные значения компонент положим равными нулю.

Такое задание компонент Γ_2 обеспечивает невырожденность матрицы преобразования (I.I3), а уравнения (2.I),(2.2) разрешаются относительно всех форм (2.3) следующим образом:

$$\hat{\pi}^{i}_{i}=\frac{1}{2}a_{ii},\ \hat{\pi}^{i}_{j}=\frac{1}{i-j}(\delta\Lambda_{ij1}-j\delta a_{ij}),\ \hat{\Pi}^{\circ}_{\mathcal{I}}=-\frac{1}{2}\delta\Lambda_{1\mathcal{I}\mathcal{I}},$$

$$\hat{\Pi}^{1}_{1}=\frac{1}{4}(2\delta\Lambda^{1}_{11}+\delta a_{11}+2\delta a_{12}-\delta\Lambda_{121}-2\delta\Lambda_{211}),$$

$$\hat{\Pi}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}}=\frac{1}{4}\left[\delta a_{11}+\mathcal{J}(2\delta a_{12}-\delta\Lambda_{121})+2\delta\Lambda^{1}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}\right] \text{ при } \mathcal{J}>1,$$

$$\hat{\Pi}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}=\frac{1}{2(\mathcal{K}-\mathcal{J})}\left[\delta_{\mathcal{J}}\delta\Lambda^{2}_{1\mathcal{K}\mathcal{K}}+\delta^{2}_{\mathcal{K}}\delta\Lambda_{1\mathcal{J}\mathcal{J}}-2\delta\Lambda^{2}_{\mathcal{J}\mathcal{K}}-\mathcal{K}(\delta^{1}_{\mathcal{J}}\delta\Lambda_{1\mathcal{K}\mathcal{K}}+\delta\Lambda_{1\mathcal{J}\mathcal{J}}\delta^{1}_{\mathcal{K}}-2\delta\Lambda^{1}_{\mathcal{J}\mathcal{K}})\right]$$

Здесь $i\neq j$, $\mathcal{J}\neq\mathcal{K}$ и по индексам i,j и $\mathcal{J}\mathcal{K}$ суммирование не производится. Для завершения докашательства заметим, что, как легко показать, система дифференциальных уравнений (2.1) локального фундаментального объекта Γ_1 не разрешима относительно форм Пфаффа (2.3).

Следствие. Надлежащее задание компонент объекта $\Gamma_3=\{\Gamma_2,\Lambda_{ij\mathcal{J}\mathcal{K}L},\Lambda^{i}_{\mathcal{J}\mathcal{K}L},\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}L}\}$ определяет отображение φ с точностью до постоянных [2].

§ 3. Поля геометрических объектов, определяемые отображением φ.

Рассмотрим сначала геометрические объекты, охватываемые фундаментальным объектом первого порядка Γ_1.

Его подобъект $\{\Gamma_0,\Gamma^{(1)}_1\}$ определяет следующие системы величин:

$$A_{\mathcal{J}}=a^{ij}\Lambda_{ij\mathcal{J}}, \tag{3.1}$$

$$A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}=a^{ij}a^{pq}\Lambda_{ip\mathcal{J}}\Lambda_{jq\mathcal{K}} \quad (A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}=A_{\mathcal{K}\mathcal{J}}) \tag{3.2}$$

Дифференциальные уравнения:

$$\delta A_{\mathcal{J}}=A_{\mathcal{K}}\Pi^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}-A_{\mathcal{J}}\Pi^{0}_{0},\ \delta A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}=A_{L\mathcal{K}}\Pi^{L}_{\mathcal{J}}+A_{\mathcal{J}L}\Pi^{L}_{\mathcal{K}}-2A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\Pi^{0}_{0} \tag{3.3}$$

показывают, что эти системы величин образуют соответственно одно- и двухвалентные ковариантные тензоры в пространстве P_N.

Тензор $A_{\mathcal{J}}$ определяет в P_N инвариантную гиперплоскость

$$A_{\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}}=0, \tag{3.4}$$

проходящую через точку $P=\varphi(F)$. Двухвалентный симметрический тензор $A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}$ определяет инвариантный конус

$$A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}X^{\mathcal{J}}X^{\mathcal{K}}=0, \tag{3.5}$$

вершиной которого является точка P. В случае, когда $\det(A_{\mathcal{J}\mathcal{K}})\neq 0$, можно ввести контравариантный тензор $A^{\mathcal{J}\mathcal{K}}$, компоненты которого суть приведенные миноры матрицы $(A_{\mathcal{J}\mathcal{K}})$:

$$A^{\gamma\iota}A_{\iota\varkappa}=\delta^{\gamma}_{\varkappa}, \tag{3.6}$$

$$\delta A^{\gamma\varkappa}=-A^{\iota\varkappa}\Pi^{\gamma}_{\iota}-A^{\gamma\iota}\Pi^{\varkappa}_{\iota}+2A^{\gamma\varkappa}\Pi^{\circ}_{\circ}. \tag{3.7}$$

Один раз контравариантный тензор

$$A^{\gamma}=A_{\gamma}A^{\gamma\varkappa},\ \delta A^{\gamma}=-A^{\iota}\Pi^{\gamma}_{\iota}+A^{\gamma}\Pi^{\circ}_{\circ} \tag{3.8}$$

определяет инвариантную прямую

$$\bar{A}_{\lambda}=A^{\gamma}\bar{R}_{\gamma}+\lambda\bar{P}, \tag{3.9}$$

проходящую через точку P, так как

$$\bar{A}_{\lambda}+\delta\bar{A}_{\lambda}=(1+\Pi^{\circ}_{\circ})\bar{A}_{\mu}\quad ,\text{где}\quad \mu=\lambda+\delta\lambda+A^{\gamma}\Pi^{\circ}_{\gamma}. \tag{3.10}$$

Законы преобразования всех тензоров одинаковой валентности, охватываемых полем фундаментального объекта Γ_1, совершенно аналогичны друг другу. Одинаковое строение имеют и все инвариантно присоединенные геометрические образы, ими определяемые: это квадратичные и кубичные гиперконусы с вершинами в точках P и p, гиперплоскости и прямые, проходящие через эти же точки.

Различными подобъектами Γ_1 охватываются следующие объекты в пространствах P_N и P_n:

$$\begin{gathered} B_{\gamma\varkappa}=\tfrac{1}{2}\Lambda^{i}_{(\gamma}\Lambda_{|i|\varkappa)},\ B^{\gamma\varkappa}\quad (B^{\gamma\varkappa}B_{\varkappa\iota}=\delta^{\gamma}_{\iota}),\\ C^{ij}=\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa}B^{\gamma\varkappa};\ \bar{C}_{ij}=\Lambda_{i\gamma}\Lambda_{j\varkappa}B^{\gamma\varkappa},\\ P_{\gamma\varkappa}=a_{ij}\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa},\ \bar{P}_{\gamma\varkappa}=a^{ij}\Lambda_{i\gamma}\Lambda_{j\varkappa}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Подобъектом $\{\Gamma_{\circ},\Gamma^{(1)}_{1},\Gamma^{(2)}_{1}\}$ объекта Γ_1 охватываются тензоры:

$$\begin{gathered} M_{\gamma\varkappa\iota}=\Lambda_{ij\gamma}\Lambda^{i}_{\varkappa}\Lambda^{j}_{\iota},\ m^{ij}=A^{\gamma\varkappa}\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa},\ M_{\gamma}=m^{ij}\Lambda_{ij\gamma},\\ M^{\gamma}=A^{\gamma\varkappa}M_{\varkappa},\ m^{i}=A^{\gamma}\Lambda^{i}_{\gamma},\ v_{ijk}=a_{ip}A^{\gamma\varkappa}\Lambda_{jk\gamma}\Lambda^{p}_{\varkappa},\\ V_{\gamma\varkappa\iota}=v_{ijk}\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa}\Lambda^{k}_{\iota},\ v_{i}=A^{\gamma\varkappa}\Lambda_{ij\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa},\\ v^{i}=a^{ij}v_{j},\ V_{\gamma}=v_{i}\Lambda^{i}_{\gamma},\ V^{\gamma}=V_{\varkappa}A^{\gamma\varkappa}. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Аналогично, подобъектом $\{\Gamma_{\circ},\Gamma^{(1)}_{1},\Gamma^{(3)}_{1}\}$ охватываются:

$$\bar{M}_{\gamma\varkappa\iota},\ \bar{m}_{ij},\ \bar{m}_{i},\ \bar{v}_{ijk},\ \bar{V}_{\gamma\varkappa\iota},\ \bar{v}_{i},\ \bar{v}^{i},\ \bar{V}_{\gamma},\ \bar{V}^{\gamma}. \tag{3.13}$$

Наконец, объект Γ_1 охватывает тензоры:

$$\begin{gathered} F_{\gamma\varkappa\iota}=a^{ik}\Lambda_{ij\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa}\Lambda_{k\iota},\ \ell^{i}_{j}=A^{\gamma\varkappa}\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda_{j\varkappa},\\ \ell_{ij}=\ell^{k}_{(i}a_{|k|j)}, \end{gathered} \tag{3.14}$$

$$h_{ij}=a^{pq}B^{\gamma\varkappa}\Lambda_{ip\gamma}\Lambda_{jq\varkappa},\ H_{\gamma\varkappa}=A^{\tau s}B_{\gamma\tau}B_{s\varkappa},\ F_{\gamma\varkappa}=B^{\tau s}A_{\gamma\tau}A_{\varkappa s}. \quad (3.14)$$

В отличие от объекта Γ_1 ,объект второго порядка Γ_2 позволяет найти в пространстве P_N инвариантно присоединенные геометрические образы,не инцидентные точке $P=\varphi(F)$.

Рассмотрим объекты,охватываемые подобъектом $\{\Gamma_o,\Gamma_2^{(2)}\}$ объекта Γ_2 где $\Gamma_2^{(2)}=\{\Gamma_1^{(2)},\ \Lambda^i_{\gamma\varkappa}\}$.Введем систему величин:

$$L_\gamma=a_{ij}P^{\tau s}\Lambda^i_{\gamma}\Lambda^j_{\tau s},\ \delta L_\gamma=L_\ell\Pi^\ell_\gamma-L_\gamma\Pi^o_o-2\Pi^o_\gamma. \quad (3.15)$$

Квазитензор второго порядка L_γ определяет инвариантную гиперплоскость,не инцидентную точке P :

$$L_\gamma X^\gamma-2X^o=0. \quad (3.16)$$

Не являющийся тензором объект второго порядка $\Gamma_2^{(2)}$ определяет совместно с квазитензором L_γ тензор второго порядка:

$$T^i_{\gamma\varkappa}=\Lambda^i_{\gamma\varkappa}-\frac{1}{2}\Lambda^i_{(\gamma}L_{\varkappa)}, \quad (3.17)$$

$$\delta T^i_{\gamma\varkappa}=-T^j_{\gamma\varkappa}\pi^i_j+T^i_{\ell\varkappa}\Pi^\ell_\gamma+T^i_{\gamma\ell}\Pi^\ell_\varkappa-T^i_{\gamma\varkappa}(2\Pi^o_o-\pi^o_o). \quad (3.18)$$

Тензор $Q_{\gamma\varkappa}=a_{ij}P^{\tau s}T^i_{\gamma\tau}T^j_{\varkappa s}$ определяет инвариантный гиперконус:

$$Q_{\gamma\varkappa}X^\gamma X^\varkappa=0. \quad (3.19)$$

Объект второго порядка $\{Q_{\gamma\varkappa},L_\gamma\}$ определяет однопараметрическое семейство инвариантных гиперквадрик :

$$(\lambda Q_{\gamma\varkappa}-\frac{1}{2}L_\gamma L_\varkappa)X^\gamma X^\varkappa+2L_\gamma X^\gamma X^o-2(X^o)^2=0 \quad (3.20)$$

Аналогичные построения можно провести,используя вместо $\Gamma_2^{(2)}$ другой объект: $\Gamma_2^{(3)}=\{\Gamma_1^{(3)},\ \Lambda_{i\gamma\varkappa}\}$.

Литература.

I.В.С.Малаховский,Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.Труды геометрического семинара,т.2,I969,ВИНИТИ.

2. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского математического общества, 2, 1953, ГИТТЛ.

В.М.ОВЧИННИКОВ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТОЧЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО.

Исследуется дифференцируемое локально биективное отображение f пространства Q квадратичных элементов [I] - n - мерного проективного пространства P_n в точечное N -мерное проективное пространство P_N $(N=C^2_{n+1}+n-1)$. Построен основной фундаментальный объект отображения f [2] .Выделена система тензоров и квазитензоров отображения f .

§ I. Система дифференциальных уравнений отображения f .

Отнесем пространства P_n и P_N к реперам

$$r\equiv\{\bar{A}_{\alpha'}\} \quad \text{и} \quad R\equiv\{\bar{M}_{\mathcal{I}'}\} \quad (\alpha',\beta',\gamma'=1,2,\dots,n+1;\ \mathcal{I}',\mathcal{J}',\varkappa',\dots=0,1,\dots,N).$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений реперов r и R имеют вид:

$$d\bar{A}_{\alpha'}=\omega^{\beta'}_{\alpha'}\bar{A}_{\beta'},\ d\bar{M}_{\mathcal{I}'}=\Omega^{\varkappa'}_{\mathcal{I}'}\bar{M}_{\varkappa'}, \tag{1.1}$$

где формы $\omega^{\beta'}_{\alpha'}$, $\Omega^{\varkappa'}_{\mathcal{I}'}$ удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^{\beta'}_{\alpha'}=\omega^{\gamma'}_{\alpha'}\wedge\omega^{\beta'}_{\gamma'},\ \mathcal{D}\Omega^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{I}'}=\Omega^{\varkappa'}_{\mathcal{I}'}\wedge\Omega^{\mathcal{J}'}_{\varkappa'}. \tag{1.2}$$

Уравнения квадратичного элемента q пространства P_n запишутся в виде :

$$a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0,\ x^{n+1}=0 \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,\dots,n), \tag{1.3}$$

$$\det(a_{\alpha\beta})=1. \tag{1.4}$$

Формы Пфаффа

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha^{n+1}, \quad \Theta_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma - a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma + \frac{2}{n} a_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\gamma \qquad (1.5)$$

суть главные формы в пространстве Q квадратичных элементов [I].
Из (I.4) вытекает тождество

$$a^{\alpha\beta}\Theta_{\alpha\beta} \equiv 0. \qquad (1.6)$$

Следовательно,

$$\dim Q = N = C^2_{n+1} + n - 1 \qquad (1.7)$$

Рассмотрим биективное отображение f пространства Q в пространство P_N .

Совмещая точку M_0 репера R с образом $f(q)$ квадратичного элемента q ,приведем систему дифференциальных уравнений отображения f к виду :

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}\Omega^\gamma, \quad \omega_\alpha = \Lambda_{\alpha,\gamma}\Omega^\gamma, \qquad (1.8)$$

где

$$\Omega^\gamma = \Omega_0^\gamma \qquad (1.9)$$

§2. Поля фундаментальных геометрических объектов отображения f .

Система величин $\Gamma_1 = \{a_{\alpha\beta}; \Lambda_{\alpha,\gamma}; \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}\}$ образует фундаментальный объект первого порядка дифференцируемого отображения f .

Осуществляя последовательные продолжения системы дифференциальных уравнений (I.8), получим :

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta,\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta,\gamma\varkappa}\Omega^\varkappa, \quad \Delta\Lambda_{\alpha,\gamma} = \Lambda_{\alpha,\gamma\varkappa}\Omega^\varkappa, \qquad (2.1)$$

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta,\gamma\varkappa} = \Lambda_{\alpha\beta,\gamma\varkappa\iota}\Omega^\iota, \quad \Delta\Lambda_{\alpha,\gamma\varkappa} = \Lambda_{\alpha,\gamma\varkappa\iota}\Omega^\iota, \qquad (2.2)$$

где

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta,\gamma} = d\Lambda_{\alpha\beta,\gamma} + \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}\Omega_0^0 - \Lambda_{\alpha\beta,\varkappa}\Omega_\gamma^\varkappa - \Lambda_{\gamma\beta,\gamma}\omega_\alpha^\gamma -$$

$$-\Lambda_{\alpha\gamma,\sigma}\omega^{\gamma}_{\beta}+\frac{2}{n}\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}\omega^{\gamma}_{\gamma}-(a_{\gamma\beta}\Lambda_{\alpha,\sigma}+a_{\alpha\gamma}\Lambda_{\beta,\sigma}-\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\Lambda_{\gamma,\sigma})\omega^{\gamma}_{n+1},$$

$$\Delta\Lambda_{\alpha,\sigma}=d\Lambda_{\alpha,\sigma}+\Lambda_{\alpha,\sigma}\Omega^{0}_{0}-\Lambda_{\alpha,\kappa}\Omega^{\kappa}_{\sigma}+\Lambda_{\alpha,\sigma}\omega^{n+1}_{n+1}-\Lambda_{\gamma,\sigma}\omega^{\gamma}_{\alpha},$$

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\kappa}=d\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\kappa}-\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\lambda}\Omega^{\lambda}_{\kappa}-\Lambda_{\alpha\beta,\lambda\kappa}\Omega^{\lambda}_{\sigma}+2\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\kappa}\Omega^{0}_{0}+$$

$$+\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}\Omega^{0}_{\kappa}+\Lambda_{\alpha\beta,\kappa}\Omega^{0}_{\sigma}-\Lambda_{\gamma\beta,\sigma\kappa}\omega^{\gamma}_{\alpha}-\Lambda_{\alpha\gamma,\sigma\kappa}\omega^{\gamma}_{\beta}+\frac{2}{n}\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\kappa}\omega^{\gamma}_{\gamma}-$$

$$-(\Lambda_{\gamma\beta,\sigma}\Lambda_{\alpha,\kappa}+\Lambda_{\alpha\gamma,\sigma}\Lambda_{\beta,\kappa}-\frac{2}{n}\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}\Lambda_{\gamma,\kappa}+\Lambda_{\gamma\beta,\kappa}\Lambda_{\alpha,\sigma}+ \tag{2.3}$$

$$+a_{\gamma\beta}\Lambda_{\alpha,\sigma\kappa}+\Lambda_{\alpha\gamma,\kappa}\Lambda_{\beta,\sigma}+a_{\alpha\gamma}\Lambda_{\beta,\sigma\kappa}-\frac{2}{n}\Lambda_{\alpha\beta,\kappa}\Lambda_{\gamma,\sigma}-\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\Lambda_{\gamma,\sigma\kappa})\omega^{\gamma}_{n+1},$$

$$\Delta\Lambda_{\alpha,\sigma\kappa}=d\Lambda_{\alpha,\sigma\kappa}+2\Lambda_{\alpha,\sigma\kappa}\Omega^{0}_{0}-\Lambda_{\alpha,\sigma\lambda}\Omega^{\lambda}_{\kappa}-\Lambda_{\alpha,\lambda\kappa}\Omega^{\lambda}_{\sigma}+\Lambda_{\alpha,\sigma}\Omega^{0}_{\kappa}+$$

$$+\Lambda_{\alpha,\kappa}\Omega^{0}_{\sigma}-\Lambda_{\gamma,\sigma\kappa}\omega^{\gamma}_{\alpha}+\Lambda_{\alpha,\sigma\kappa}\omega^{n+1}_{n+1}-(\Lambda_{\alpha,\sigma}\Lambda_{\gamma,\kappa}+\Lambda_{\alpha,\kappa}\Lambda_{\gamma,\sigma})\omega^{\gamma}_{n+1},$$

а формы Пфаффа $\Delta\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\kappa\lambda}$; $\Delta\Lambda_{\alpha,\sigma\kappa\lambda}$ имеют аналогичную структуру.

Т е о р е м а . Фундаментальный объект $\Gamma_2=\{\Gamma_1;\Lambda_{\alpha,\sigma\kappa};\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\kappa}\}$ является основным объектом дифференцируемого отображения f .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система дифференциальных уравнений локального фундаментального объекта Γ_2 имеет вид:

$$\overset{\circ}{\Theta}_{\alpha\beta}=0,\quad \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}=0,\quad \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{\alpha,\sigma}=0, \tag{2.4}$$

$$\overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\kappa}=0,\quad \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{\alpha,\sigma\kappa}=0, \tag{2.5}$$

где нолик над формой Пфаффа означает фиксацию первичных параметров. Так как в системе (2.4) отсутствуют формы $\Pi^0_\kappa=\overset{\circ}{\Omega}{}^0_\kappa$, то её нельзя алгебраически разрешить относительно всех вторичных форм

$$\bar{\pi}_\alpha^\beta = \pi_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \pi_{n+1}^{n+1}, \quad \bar{\Pi}_\gamma^\varkappa = \Pi_\gamma^\varkappa - \delta_\gamma^\varkappa \Pi_n^0, \quad \Pi_\gamma^0, \quad \pi_{n+1}^\alpha \tag{2.6}$$

Из определения основного объекта [2] следует, что надо доказать алгебраическую разрешимость системы дифференциальных уравнений (2.4),(2.5) относительно вторичных форм (2.6). Система дифференциальных уравнений (2.4-5) вполне интегрируема. Следовательно, начальные значения компонент фундаментального объекта Γ_2 можно задавать произвольно с соблюдением тождеств (1.6).

Положим:

$$a_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\beta; \quad \Lambda_{1,\gamma} = 1; \quad \Lambda_{\alpha,\gamma} = 0, \ \alpha \neq 1;$$

$$\Lambda_{1,\gamma\varkappa} = \delta_\gamma^\varkappa; \quad \Lambda_{\alpha,\gamma\varkappa} = 0, \ \alpha \neq 1; \quad \Lambda_{\alpha\alpha,\gamma} = 0$$

$$\Lambda_{12,1} = 1; \quad \Lambda_{\alpha\alpha,\gamma\varkappa} = \alpha; \quad \Lambda_{\alpha\beta,\gamma\varkappa} = 0 \ (\alpha \neq \beta).$$

Тогда

$$2\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\pi_{n+1}^1 = \delta\Lambda_{11,1} - 2(\delta a_{12} - \delta\Lambda_{2,1}),$$

$$\bar{\pi}_\alpha^1 = \delta\Lambda_{\alpha,1} \quad (\alpha \neq 1),$$

$$\bar{\pi}_1^1 = \delta\Lambda_{1,1} - \tfrac{1}{2}(\delta\Lambda_{11,11} - \delta a_{11}) + \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\pi_{n+1}^1,$$

$$\bar{\Pi}_\gamma^\gamma = \delta\Lambda_{1,\gamma} - \bar{\pi}_1^1,$$

$$\Pi_\gamma^0 = \delta\Lambda_{1,1} - \tfrac{1}{2}\bar{\pi}_1^1 - \tfrac{1}{2}\delta\Lambda_{1,\gamma\gamma} + \pi_{n+1}^1,$$

$$\bar{\Pi}_\varkappa^\gamma = \delta\Lambda_{1,\gamma\varkappa} - \delta\Lambda_{1,\gamma} + \bar{\pi}_1^1 + 2\Pi_\varkappa^0 - 2\pi_{n+1}^1 \quad (\gamma \neq \varkappa),$$

$$(\beta - \alpha)\bar{\pi}_\alpha^\beta = \delta\Lambda_{\alpha\beta,11} - \alpha\,\delta a_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta;\ \alpha,\beta \neq 1),$$

$$\bar{\pi}_\alpha^\alpha = \tfrac{1}{2}(\delta a_{\alpha\alpha} - \delta a_{11}) + \bar{\pi}_1^1,$$

$$\pi_{n+1}^\alpha = \delta\Lambda_{\alpha 1,1} - \delta\Lambda_{1,1} + 2\bar{\pi}_1^1 - \delta a_{11} \quad (\alpha \neq 1),$$

(по γ -не суммировать!).

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Задание компонент фундаментального объекта $\Gamma_3=\{\Gamma_2;\Lambda_{\alpha,\gamma\varkappa};\Lambda_{\alpha,\gamma\varkappa}\}$ определяет дифференцируемое отображение f с точностью до констант [2].

Из уравнений

$$\overset{\circ}{\Theta}_{\alpha\beta}=\delta a_{\alpha\beta}-a_{\alpha\gamma}\pi^{\gamma}_{\beta}-a_{\gamma\beta}\pi^{\gamma}_{\alpha}+\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\pi^{\gamma}_{\gamma}=0$$

следует, что система величин $a_{\alpha\beta}$ образует дважды ковариантный симметрический тензор, являющийся подобъектом объекта Γ_2.

Системы величин

$$(\Lambda_{\alpha,\gamma});\ n^{\beta}_{\gamma}=a^{\alpha\beta}\Lambda_{\alpha,\gamma};\quad C_{\gamma\varkappa}=\frac{1}{2}a^{\alpha\beta}(\Lambda_{\alpha,\gamma}\Lambda_{\beta,\varkappa}+\Lambda_{\alpha,\varkappa}\Lambda_{\beta,\gamma})$$

образуют тензоры соответствующей валентности.

Действительно,

$$\delta\Lambda_{\alpha,\gamma}=-\Lambda_{\alpha,\gamma}\Pi^{0}_{0}+\Lambda_{\alpha,\varkappa}\Pi^{\varkappa}_{\gamma}-\Lambda_{\alpha,\gamma}\pi^{n+1}_{n+1}+\Lambda_{\gamma,\gamma}\pi^{\gamma}_{\alpha},$$

$$\delta n^{\beta}_{\gamma}=-n^{\beta}_{\gamma}(\Pi^{0}_{0}+\pi^{n+1}_{n+1}-\frac{2}{n}\pi^{\gamma}_{\gamma})+n^{\beta}_{\varkappa}\Pi^{\varkappa}_{\gamma}-n^{\gamma}_{\gamma}\pi^{\beta}_{\gamma},$$

$$\delta C_{\gamma\varkappa}=-2C_{\gamma\varkappa}(\Pi^{0}_{0}+\pi^{n+1}_{n+1}-\frac{1}{n}\pi^{\gamma}_{\gamma})+C_{\varkappa z}\Pi^{z}_{\gamma}+C_{\gamma z}\Pi^{z}_{\varkappa}.$$

Тензор $C_{\gamma\varkappa}$ определяет в пространстве P_N инвариантное поле гиперквадрик. Действительно,

$$F=C_{\gamma\varkappa}x^{\gamma}x^{\varkappa}=0,\ \delta F=\lambda F;\ \lambda=-2\Pi^{0}_{0}-2\pi^{n+1}_{n+1}+\frac{2}{n}\pi^{\gamma}_{\gamma}+2\Theta.$$

Рассмотрим дифференцируемое биективное отображение пространства гиперквадрик $Q_{\bar N}$ в некоторую область пространства P_n:

$$f:\ Q_{\bar N}\to P_{\bar N}\qquad(\bar N=C^{2}_{n+1}-1).$$

Система дифференциальных уравнений инвариантности гиперквадрики $a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0\ (\alpha,\beta=1,2,\dots,n+1)$ пространства P_n имеет вид:

$$\Theta_{\alpha\beta}=da_{\alpha\beta}-a_{\gamma\beta}\omega^{\gamma}_{\alpha}-a_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}+\frac{2}{n+1}a_{\alpha\beta}\omega^{\gamma}_{\gamma}=0.$$

Система дифференциальных уравнений дифференцируемого отображения f запишется в виде:

$$\Theta_{\alpha\varphi} = \Lambda_{\alpha\varphi,\gamma}\,\Omega^{\gamma}. \qquad (2.7)$$

Система величин $\Gamma_0 = \{a_{\alpha\varphi}, \Lambda_{\alpha\varphi,\gamma}\}$ -образует внутренний фундаментальный объект дифференцируемого отображения f. Компоненты внутреннего фундаментального объекта $\Lambda_{\alpha\varphi,\gamma}$ связаны соотношением

$$a^{\alpha\varphi}\Lambda_{\alpha\varphi,\gamma} = 0, \quad a^{\alpha\varphi} a_{\beta\varphi} = \delta^{\alpha}_{\beta}.$$

Осуществляя продолжение системы (2.7), получим внутренний фундаментальный объект

$$\Gamma_1 = \{a_{\alpha\varphi};\ \Lambda_{\alpha\varphi,\gamma};\ \Lambda_{\alpha\varphi,\gamma\kappa}\}.$$

Доказано, что он является основным.

Системы величин

$$n_{\gamma\kappa} = a^{\alpha\varphi}\Lambda_{\alpha\varphi,\gamma\kappa}; \quad b_{\alpha\varphi} = n^{\gamma\kappa}\cdot\Lambda_{\alpha\varphi,\gamma\kappa};$$

$$m_{\gamma y} = a^{\alpha\varphi} a^{\beta\psi}\Lambda_{\alpha\varphi,\gamma}\Lambda_{\beta\psi,y}; \quad c_{\gamma} = b^{\alpha\varphi}\Lambda_{\alpha\varphi,\gamma}$$

образуют тензоры соответствующей валентности.

Литература

1. В.С. Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3, Труды Томского университета, т. 168, стр. 28-42, 1963.

2. Г.Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского математического общества, 2, 1953, ГИТТ

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.

Г.Л.СВЕШНИКОВА

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается конгруэнция кривых второго порядка (коник), две фокальные поверхности которой вырождаются в линии (конгруэнции F). Найдены геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией F, исследованы некоторые её подклассы.

§ I. Конгруэнции F.

Определение I. Конгруэнцией F называется конгруэнция кривых второго порядка, обладающая следующими свойствами: I) существуют две фокальные поверхности (A_i) $(i,j,k=1,2)$ вырождающиеся в линии, 2) касательные ℓ_i к линиям (A_i) в точках A_i не инцидентны плоскости коники, 3) прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) не вырождается в линейчатую поверхность.

Отнесем конгруэнцию F к реперу $R=\{\bar A_1, \bar A_2, \bar A_3, \bar A_4\}$, где A_3 - полюс прямой A_1A_2 относительно коники, а A_4 -точка на прямой ℓ, проходящей через A_3 и пересекающей прямые ℓ_i.

Инфинитезимальные перемещения репера R определяются деривационными формулами

$$d\bar A_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar A_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4), \qquad (1.1)$$

причем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \qquad (1.3)$$

Уравнения коники относительно этого репера записываются в виде :

$$(x^3)^2 - 2\rho x^1 x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ \rho \neq 0. \qquad (1.4)$$

Для определения фокальных поверхностей и фокальных семейст конгруэнции коник [I] имеем систему :

$$\begin{gathered} (x^3)^2 - 2\rho x^1 x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ x^k\omega_k + x^3\omega_3^4 = 0, \\ \rho[(x^1)^2\omega_1^2 + (x^2)^2\omega_2^1] + \tfrac{1}{2}(x^3)^2\Delta\rho + x^3[x^1(-\omega_1^3 + \rho\omega_3^2) + x^2(-\omega_2^3 + \rho\omega_3^1)] = 0, \end{gathered} \qquad (1.5)$$

где

$$\omega_i = \omega_i^4,\ \Delta\rho = \omega_k^k - 2\omega_3^3 - d\ln\rho. \qquad (1.6)$$

Формы Пфаффа

$$\omega_i,\ \omega_i^j,\ \omega_i^3,\ \omega_3^i,\ \omega_3^4,\ \omega_4^i,\ \Delta\rho \qquad (1.7)$$

являются главными формами конгруэнции. Так как касательные к линиям (A_i) не лежат в плоскости коники и A_i -фокальные точки коники, то

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{ji}\omega_i. \qquad (1.8)$$

Здесь и в дальнейшем считаем, что $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Из условия 3 определения I вытекает:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0. \qquad (1.9)$$

Следовательно, формы Пфаффа ω_i можно принять за первичные независимые формы конгруэнции коник. Остальные формы (I.7) линейно через них выражаются:

$$\begin{gathered} \omega_i^j = \Gamma_i^{ji}\omega_i,\ \ \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k,\ \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \\ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k,\ \ \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k,\ \Delta\rho = \alpha^k\omega_k. \end{gathered} \qquad (1.10)$$

Учитывая, что поверхности (A_i) вырождаются в линии, а вершина A_4 лежит на прямой ℓ, получаем соответственно :

$$\Gamma_i^{3j} = 0, \ \Gamma_i^{ji} = 0 \tag{1.11}$$

При замыкании уравнения $\omega_i^j = 0$

получим

$$\Gamma_i^{3i} \Gamma_3^{jj} + \Gamma_4^{jj} = 0. \tag{1.12}$$

Т е о р е м а I. Конгруэнция F существует и определяется с произволом четырех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конгруэнция F определяется системой уравнений Пфаффа :

$$\begin{gathered} \omega_i^j = 0, \ \omega_i^3 = \Gamma_i^{3i} \omega_i, \ \omega_3^i = \Gamma_3^{ik} \omega_k, \ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k} \omega_k, \\ \omega_4^i = -\Gamma_j^{3j} \Gamma_3^{ii} \omega_i + \Gamma_4^{ij} \omega_j, \ \Delta p = a^k \omega_k. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Продифферинцировав внешним образом уравнения (I.I3), получим систему квадратичных уравнений :

$$\begin{gathered} \Delta \Gamma_i^{3i} \wedge \omega_i = 0, \ \Delta \Gamma_3^{ik} \wedge \omega_k = 0, \ \Delta \Gamma_3^{4k} \wedge \omega_k = 0, \\ \Delta \Gamma_4^{ik} \wedge \omega_k = 0, \ \Delta a^k \wedge \omega_k = 0, \end{gathered} \tag{1.14}$$

где

$$\begin{gathered} \Delta \Gamma_i^{3i} = d\Gamma_i^{3i} + \Gamma_i^{3i} (\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3 - (\Gamma_i^{3i})^2 \Gamma_3^{4j} \omega_j, \\ \Delta \Gamma_3^{ii} = d\Gamma_3^{ii} + \Gamma_3^{ii} (2\omega_i^i - \omega_3^3 - \omega_4^4) + [\Gamma_3^{ii} \Gamma_3^{4j} (\Gamma_j^{3j} - \Gamma_i^{3i}) + \Gamma_3^{4i} (\Gamma_4^{ij} + \Gamma_3^{ij} \Gamma_j^{3j})], \\ \Delta \Gamma_3^{ij} = d\Gamma_3^{ij} + \Gamma_3^{ij} (\omega_i^i + \omega_j^j - \omega_3^3 - \omega_4^4), \\ \Delta \Gamma_3^{4i} = d\Gamma_3^{4i} + \Gamma_3^{4i} (\omega_i^i - \omega_3^3) + (-\Gamma_3^{4i} \Gamma_i^{3i} \Gamma_3^{4j} + \Gamma_3^{ji}) \omega_j, \\ \Delta \Gamma_4^{ij} = d\Gamma_4^{ij} + \Gamma_4^{ij} (\omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_4^4) - \Gamma_3^{ij} \omega_4^3, \end{gathered} \tag{1.15}$$

$$\Delta a^i = da^i + a^i(\omega_i^i - \omega_4^4) + (3\Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{ij} + \Gamma_4^{ij} - a^i\Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{4j})\omega_j - 2\Gamma_3^{4i}\omega_4^3,$$

$$\Delta\Gamma_4^{ii} = -\Gamma_3^{ii}\Delta\Gamma_j^{3j} - \Gamma_j^{3j}\Delta\Gamma_3^{ii} + (\Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{4i} + 2\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij} + \Gamma_3^{4j}\Gamma_3^{ii}\Gamma_j^{3j})\omega_j .$$

Замкнутая система (I.13),(I.14) - в инволюции и определяет конгруэнцию коник F с произволом четырех функций двух аргументов. Теорема доказана.

Из (I.13) следует, что при $\omega_i = 0$ точка A_i неподвижна, что геометрически характеризует координатную сеть $\omega_1\omega_2 = 0$ на всякой невырожденной поверхности, ассоциированной с конгруэнцией F.

Разрешая (I.14) по лемме Картана и фиксируя первичные параметры, получим :

$$\delta\Gamma_i^{3i} = \Gamma_i^{3i}(\pi_4^4 - \pi_3^3) - \pi_4^3, \quad \delta\Gamma_3^{ii} = \Gamma_3^{ii}(\pi_4^4 + \pi_3^3 - 2\pi_i^i),$$

$$\delta\Gamma_3^{ij} = \Gamma_3^{ij}(\pi_4^4 + \pi_3^3 - \pi_j^j - \pi_i^i), \quad \delta\Gamma_3^{4i} = \Gamma_3^{4i}(\pi_3^3 - \pi_i^i), \tag{1.16}$$

$$\delta\Gamma_4^{ij} = \Gamma_4^{ij}(2\pi_4^4 - \pi_j^j - \pi_i^i) + \Gamma_3^{ij}\pi_4^3, \quad \delta a^i = a^i(\pi_4^4 - \pi_i^i) + \Gamma_3^{4i}\pi_4^3,$$

$$\delta \ln p = \pi_k^k - 2\pi_3^3 .$$

Из (I.6) видно, что величины $p, \Gamma_3^{ii}, \Gamma_3^{ij}, \Gamma_3^{4i}$ являются относительными инвариантами. Условие $p = 0$ означает вырождение коники (I.4); условие $\Gamma_3^{ii} = 0$ характеризует конгруэнции коник со сдвоенной фокальной линией (A_j); условие $\Gamma_3^{ij} = 0$ определяет конгруэнции коник, у которых касательная к линии $\omega_i = 0$ на поверхности (A_3) пересекает прямую $A_j A_4$; условие $\Gamma_3^{4i} = 0$ характеризует конгруэнции, для которых прямая $A_j A_3$ содержит характеристическую точку плоскости коники. Исходя из системы (I.16), осуществим такую фиксацию репера :

$$\Gamma_k^{3k} = 0, \quad p = 1 . \tag{1.17}$$

Вершина A_4 при этом гармонически делит вместе с A_3 точки

$$\bar{B}_i = \Gamma_i^{3i}\bar{A}_3 + \bar{A}_4 , \tag{1.18}$$

являющиеся точками пересечения прямых ℓ_i с прямой ℓ. Две оставшиеся нормировки вершин репера осуществляются ниже при исследовании подклассов конгруэнции F.

С конгруэнцией F ассоциируются следующие основные геометрические образы.

1) Прямолинейная конгруэнция (A_iA_4). Второй фокус R_i луча этой конгруэнции и соответсвующее ему фокальное семейство определяются по формулам:

$$\bar{R}_i = \lambda \bar{A}_i + \mu \bar{A}_4, \quad \Gamma_i^{3i} \omega_4^j = 0, \qquad (1.19)$$

где

$$\lambda \Gamma_i^{3i} \Gamma_4^{jj} + \mu \left(\Gamma_4^{3i} \Gamma_4^{jj} - \Gamma_4^{ji} \Gamma_4^{3j} \right) = 0. \qquad (1.20)$$

2) Прямолинейная конгруэнция (A_3A_4). Фокусы $\bar{N} = \lambda \bar{A}_3 + \mu \bar{A}_4$ и торсы конгруэнции (A_3A_4) определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda^2 \left(\Gamma_3^{11} \Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12} \Gamma_3^{21} \right) - \mu\lambda \left(\Gamma_3^{12} \Gamma_4^{21} + \Gamma_4^{12} \Gamma_3^{21} \right) - \mu^2 \left[(\Gamma_1^{31})^2 \Gamma_3^{11} \Gamma_3^{22} + \Gamma_4^{12} \Gamma_4^{21} \right] = 0, \qquad (1.21)$$

$$\omega_3^1 \omega_4^2 - \omega_3^2 \omega_4^1 = 0. \qquad (1.22)$$

3) Фокальные поверхности конгруэнции, отличные от (A_i). Они определяются из уравнений:

$$(x^1)^4 (\Gamma_3^{22})^2 - 2 (x^1)^3 x^2 \left[\Gamma_3^{22} B_1 + (B_2)^2 \right] + (x^1)^2 (x^2)^2 \left[(B_1)^2 - \right.$$
$$\left. - 2 \Gamma_3^{11} \Gamma_3^{22} + 4 B_2 B_3 \right] + 2 x^1 (x^2)^3 \left[\Gamma_3^{11} B_1 - (B_3)^2 \right] + (x^2)^4 (\Gamma_3^{11})^2 = 0, \qquad (1.23)$$

$$(x^3)^2 - 2 x^1 x^2 = 0, \quad x^4 = 0,$$

где

$$B_1 = \Gamma_3^{21} - \Gamma_3^{12} - 2 \Gamma_1^{31} + a^1 \Gamma_3^{42} - a^2 \Gamma_3^{41},$$
$$B_2 = \Gamma_3^{42} (\Gamma_3^{21} - \Gamma_1^{31}) - \tfrac{1}{2} a^2 - \Gamma_3^{41} \Gamma_3^{22},$$
$$B_3 = \Gamma_3^{41} (\Gamma_3^{12} + \Gamma_1^{31}) - \tfrac{1}{2} a^1 - \Gamma_3^{42} \Gamma_3^{11}.$$

§ 2. Конгруэнции F_0 .

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией F_0 называется конгруэнция F ,обладающая следующими свойствами:

1) существует расслоение от конгруэнции коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) [2],

2) существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) [3],

3) точка A_3 не является характеристической точкой плоскости коники.

Т е о р е м а 2. Существует два непересекающихся класса конгруэнций F_0 :конгруэнции F_0' ,определяемые с произволом четырех функций одного аргумента и конгруэнции F_0'' ,определяемые с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о . В силу условий определения 2 для конгруэнции F_0 имеют место следующие конечные соотношения:

$$\left.\begin{array}{c}\Gamma_4^{ii}+\Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii}=0,\ a^i\Gamma_3^{ij}-a^j\Gamma_3^{ii}-2(\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij}-\Gamma_3^{4j}\Gamma_4^{ii})=0,\\ 2(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21})+\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}+\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21}+\Gamma_4^{21}+\Gamma_4^{12}=0,\\ \Gamma_2^{32}\Gamma_4^{21}-\Gamma_1^{31}\Gamma_4^{12}=0,\ \Gamma_3^{12}-\Gamma_3^{21}=0,\ -\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}+\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21}+\Gamma_4^{12}-\Gamma_4^{21}=0\end{array}\right\}\qquad(2.1)$$

Так как прямые A_3A_4 конгруэнции F_0 образуют двупараметрическое семейство ,то

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}\neq 0 \qquad (2.2)$$

Из соотношений (I.I7),системы (2.I) и неравенства (2.2) следует, что $\Gamma_i^{3i}=0$.Значит,

$$\omega_i^3=0 . \qquad (2.3)$$

При замыкании уравнений (2.3) с учетом (I.I3) будем иметь :

$$\omega_4^3=0 . \qquad (2.4)$$

Введем обозначения:

$$\Gamma_3^{11}=a\,,\ \Gamma_3^{22}=c\,,\ \Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21}=b\,,\ s=ac-b^2 \tag{2.5}$$

Систему дифференциальных уравнений, определяющую конгруэнцию F_o, можно записать в виде :

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=0,\ \omega_3^1=a\omega_1+b\omega_2\,,\ \omega_3^2=b\omega_1+c\omega_2\,,\\ &\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k\,,\ \omega_4^i=-s\omega_j\,,\ \omega_4^3=0,\\ &\omega_k^k-2\omega_3^3=2\left(b\omega_3^4+a\Gamma_3^{42}\omega_1+c\Gamma_3^{41}\omega_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Положим :

$$\begin{aligned} &\Delta a=da+a(2\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_4^4)-s\Gamma_3^{41}\omega_2\,,\ \Delta b=db+b\,(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4),\\ &\Delta c=dc+c(2\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)-s\Gamma_3^{42}\omega_1\,,\ \Delta\Gamma_3^{4i}=d\Gamma_3^{4i}+\Gamma_3^{4i}(\omega_i^i-\omega_3^3) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (2.6), получаем:

$$ds=s\,(2\omega_4^4-\omega_2^2-\omega_1^1), \tag{2.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta a\wedge\omega_1+\Delta b\wedge\omega_2=0,\ \Delta b\wedge\omega_1+\Delta c\wedge\omega_2=0.\\ &\Delta\Gamma_3^{4k}\wedge\omega_k=0,\ a\Delta\Gamma_3^{42}\wedge\omega_1+c\Delta\Gamma_3^{41}\wedge\omega_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Уравнение (2.8) после преобразования приводится к виду:

$$a\Delta c+c\Delta a-2b\Delta b-s(a\Gamma_3^{42}\omega_1+c\Gamma_3^{41}\omega_2+2b\omega_3^4)=0 \tag{2.10}$$

Если a и c одновременно не равны нулю, то система (2.6), (2.9) - в инволюции и определяет конгруэнцию F_o' с произволом четырех функций одного аргумента

Если $$a=c=0\,, \tag{2.11}$$

то система уравнений (2,6) принимает вид :

$$\begin{aligned} &\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=0,\ \omega_3^i=b\,\omega_j\,,\ \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k\,,\ \omega_4^i=b^2\omega_j,\\ &\omega_4^3=0\,,\ \ \omega_k^k-2\,\omega_3^3=2\,b\,\omega_3^4. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Замыкая (2.12), получим

$$\begin{aligned} &2db+b\,(\omega_1^1+\omega_2^2-2\,\omega_4^4)=0,\\ &\Delta\Gamma_3^{4k}\wedge\omega_k=0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Система (2.12),(2.13) - в инволюции и определяет конгруэнции F_0'' с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 3. Касательные к линиям (A_i) конгруэнции F_0 пересекаются. Поверхность (A_4) является плоскостью, инцидентной прямой A_1A_2 .

Доказательство непосредственно следует из соотношений (2.3), (2.4),(2.6) и деривационных формул репера.

Т е о р е м а 4. Линии (A_i) конгруэнции F_0 являются плоскими.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$d\bar{A}_i = \omega_i^i \bar{A}_i + \omega_i \bar{A}_4 , \; d\bar{A}_4 = \omega_4^4 \bar{A}_4 - s(\omega_2 \bar{A}_1 + \omega_1 \bar{A}_2), \tag{2.14}$$

то для любого $n = 1,2,3,\ldots$

$$(d^n \bar{A}_i \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_4) = 0, \tag{2.15}$$

что и доказывает теорему.

Для конгруэнции F_0' можно осуществить такую нормировку вершин репера:

$$s = -1, \; a = c. \tag{2.16}$$

Тогда

$$b = \varepsilon\sqrt{a^2+1}, \; \varepsilon = \pm 1. \tag{2.17}$$

Для конгруэнции F_0'' нормируем вершины репера так, что

$$b = 1, \; \Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42}. \tag{2.18}$$

Обозначим

$$\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} = q, \; \omega_1^1 = p\omega_1 + z\omega_2 . \tag{2.19}$$

Пусть P_i -фокусы луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) Инвариант a конгруэнции F_0' определяется формулой .

$$a = \frac{\varepsilon(1-x)}{2\sqrt{x}}, \tag{2.20}$$

где

$$x = (A_3A_4; P_1P_2) \tag{2.21}$$

Матрица компонент деривационных формул канонического репера конгруэнции F_0'' имеет вид :

$$\begin{bmatrix} p\omega_1 + \tau\omega_2 & 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & (\frac{1}{2}g-p)\omega_1+(\frac{1}{2}g-\tau)\omega_2 & 0 & \omega \\ \omega_2 & \omega_1 & -\frac{3}{4}g(\omega_1+\omega_2) & g(\omega_1+\omega_2) \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 & \frac{1}{4}g(\omega_1+\omega_2) \end{bmatrix}. \qquad (2.22)$$

Т е о р е м а 5. Все коники конгруэнции F_0'' принадлежат одному конусу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим конус Q с вершиной $\bar{A}_3$-$\bar{A}_4$:

$$Q = 2x^1x^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 - 2x^3x^4 = 0. \qquad (2.23)$$

Коника (I.4) принадлежит конусу Q .Используя деривационные формулы (2.22) и условия

$$\dot{d}x^\alpha = -x^\beta\omega_\beta^\alpha + \theta x^\alpha$$

стационарности точки, получим

$$\dot{d}Q = 2(\theta - \omega_3^4)Q$$

Следовательно, конус Q , определяемый уравнением (2.23), является инвариантным конусом пространства P_3 .
Теорема доказана.

Т е о р е м а 7. Касательные к линиям $\omega_i = 0$ на поверхности (A_3) пересекают прямые $A_i A_4$.

Доказательство вытекает из соотношений :

$$((d\bar{A}_3)_{\omega_i=0}\,\bar{A}_3\bar{A}_i\bar{A}_4) = 0$$

§ 3. Конгруэнции F_1.

О п р е д е л е н и е 3. Конгруэнцией F_1 называется конгруэнция F ,которая I)обладает условиями I и 2 определения 2, 2) имеет точку A_3 характеристической точкой плоскости коники, 3) координатная сеть $\omega_i = 0$ не является асимптотической сетью на поверхности (A_3).

Т е о р е м а 8. Конгруэнция F_1 существует с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конгруэнция F_1 определяется системой уравнений Пфаффа :

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i^j = 0,\ \omega_i^3 = 0,\ \omega_3^1 = a\omega_1 + b\omega_2,\ \omega_3^2 = b\omega_1 + c\omega_2, \\ &\omega_3^4 = 0,\ \omega_4^i = -s\omega_j,\ \omega_4^3 = 0,\ \omega_k^k - 2\omega_3^3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

Принимая во внимание условие 3 определения 3, убеждаемся, что конгруэнция F_1 существует и определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Для конгруэнции F_1 вершины репера можно пронормировать так, что

$$s = -1,\ a = c. \qquad (3.2)$$

Обозначим

$$q\,\omega_1 + t\,\omega_2 = \omega_1^1. \qquad (3.3)$$

Т е о р е м а 9. Двойные точки Ермолаева M_i [4] пары поверхностей (A_3) и (A_4) конгруэнции F_1 гармонически делят фокальные точки A_i коники.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Двойные точки Ермолаева M_i поверхностей (A_3) и (A_4) совпадают с точками пересечения касательных к линиям $\mathcal{L}_i$ [2], высекаемым на этих поверхностях торсами прямолинейной конгруэнции (A_3A_4). Для точек M_i получаем формулы:

$$\bar{M}_i = \bar{A}_j + (-1)^j \bar{A}_i, \qquad (3.4)$$

что и доказывает теорему.

Для конгруэнции F_1 имеет место теорема 3.3 [2]. Обозначим, как и в [2], буквами $F_{i,k}$ — фокальные точки коники, отличные от A_i. Имеем :

$$\bar{F}_{i,k} = \bar{A}_j + (-1)^j \bar{A}_i + (-1)^k \sqrt{2(-1)^j}\,\bar{A}_3 \qquad (3.5)$$

Т е о р е м а 10. Торсы прямолинейных конгруэнций $(F_{i,1}F_{i,2})$ и (A_3A_4), порожденных конгруэнцией F_1, соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейных конгруэнций определяются уравнениями:

$$\begin{gathered}(a+(-1)^i\varepsilon\sqrt{a^2+1})\left[(\omega_1)^2-(\omega_2)^2\right]=0,\\ a\left[(\omega_1)^2-(\omega_2)^2\right]=0,\end{gathered}\qquad(3.6)$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. Фокальные семейства конгруэнции F_1, отличные от $\omega_i=0$, соотвутствуют торсам прямолинейных конгруэнций $(F_{i,1}F_{i,2})$.

Л и т е р а т у р а.

1. В.С.Малаховский, Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3, Труды Томского университета, 1963, 168, стр. 43-53.

2. В.С.Малаховский, Конгруэнции коник, порожденные расслояемой парой C_ℓ. Печатается в данном сборнике.

3. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1956.

4. С.П.Фиников, Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева. Ученые записки МГПИ, 16, вып. 3, 1956.

В.В.МАХОРКИН

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК В P_3 С ПЛОСКИМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В работе рассматриваются некоторые типы конгруэнций коник в трехмерном проективном пространстве с плоскими фокальными поверхностями. Доказано, что сдваивание плоских фокальных поверхностей приводит к их вырождению. Исследована конгруэнция коник в P_3, у которой две фокальные поверхности суть плоскости и характеристическая точка плоскости коники инцидентна конике.

§ I. Введение.

Определение I. Конгруэнцией Π_m называется конгрузнция коник в P_3, у которой m (m =I,2,3) фокальных поверхностей суть плоскости, а фокальные линии на этих поверхностях не соответствуют друг другу.

В дальнейшем плоские фокальные поверхности будем называть фокальными плоскостями.

Репер $R \equiv \{\bar{A}_\alpha\}$ (α,β,γ=I,2,3,4) конгруэнции Π_m строится следующим образом: первые m вершин помещаются в фокальные точки коники, описывающие плоскости, следующие $(3-m)$ вершин - в произвольные оставшиеся фокальные точки, а вершину A_4 помещаем в подпространство, являющееся пересечением m фокальных плоскостей. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{A}_\beta . \tag{1.1}$$

где ω_α^β подчинены уравнениям структуры проективной группы:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

Уравнения коники относительно этого репера запишутся в виде :

$$x^1x^2 + a_\kappa x^\kappa x^3 = 0, \quad x^4 = 0, \quad a_\kappa \neq 0, (\kappa=1,2) \tag{1.3}$$

Система уравнений для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции Π_m имеет вид (см. [I], [2]) :

$$x^1x^2 + a_\kappa x^\kappa x^3 = 0, \; x^4 = 0, \; x^\kappa\omega_\kappa + x^3\omega_3^4 = 0,$$

$$\Delta a_\kappa x^\kappa x^3 - (x^1)^2(\omega_1^2 + a_1\omega_1^3) - (x^2)^2(\omega_2^1 + a_2\omega_2^3) - \tag{1.4}$$

$$-(x^3)^2(a_1\omega_3^1 + a_2\omega_3^2) = 0,$$

где $\quad \omega_\kappa = \omega_\kappa^4$.

$$\Delta a_\kappa \equiv da_i + a_i(\omega_j^j - \omega_3^3 + a_j\omega_i^3 + a_i\omega_j^3) - \omega_3^j - a_j\omega_i^j. \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем будем считать $i \neq j$, $i,j = 1,2$ и по этим индексам не суммировать. Так как у конгруэнции Π_m фокальные линии не соответствуют другу другу, то за независимые первичные формы можно взять формы ω_κ .Нормируем вершины A_α репера R так, чтобы

$$a_1 = a_2 = 1, \tag{1.6}$$

тогда формы : $\quad \Theta_i \equiv \omega_i^i - \omega_3^3 \quad (1.7)$

станут главными.

§ 2. Конгруэнции Π_3.

Т е о р е м а I. Конгруэнции Π_3 существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как первые m точек репера R фокальные, то из (I.4) получим систему уравнений :

$$\Omega_n = \lambda_n\omega_n^4 \qquad (n = I,2,3), \tag{2.1}$$

где

$$\Omega_i = \omega_i^j + \omega_i^3, \; \Omega_3 = \omega_3^1 + \omega_3^2. \tag{2.2}$$

Учитывая, что фокальные поверхности $(A_1),(A_2),(A_3)$ являются плоскостями, приводим систему уравнений Пфаффа, определяющую конгруэнцию Π_3, к виду:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_k = 0,\ \omega_4^k = 0,\ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \\ \theta_i = b_i^k\omega_k,\ \omega_3^i - \omega_i^3 - \theta_i = 0,\ \omega_i^j - \omega_j^i - \theta_j + \theta_i = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

Анализируя систему (2.3), устанавливаем справедливость теоремы I.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией Π_m^2 называется конгруэнция Π_m с m сдвоенными фокальными плоскостями.

В случае вырождения m фокальных поверхностей в линии ℓ_m репер R этой конгруэнции строится следующим образом: первые m вершин помещаем в те фокальные точки коники, которые описывают линии ℓ_m, следующие $(3-m)$ вершин–в произвольные оставшиеся фокальные точки, а вершину A_4 помещаем в подпространство, являющееся пересечением m плоскостей, каждая из которых определена касательной к конике и касательной к выродившейся фокальной поверхности в соответствующих фокальных точках.

Рассмотрим конгруэнцию Π_3^2. Из системы уравнений (I.4) следует что сдвоенность трех фокальных плоскостей дает следующие условия:

$$b_i^i = 0,\ b_1^2\Gamma_3^{41} + b_2^1\Gamma_3^{42} = 0. \quad (2.4)$$

Пусть

$$b_1^2 b_2^1 \neq 0. \quad (2.5)$$

Тогда уравнения (2.4) приводятся к виду:

$$b_i^i = 0,\ \Gamma_3^{4i} = (-1)^i a b_j^i, \quad (2.6)$$

где $a \neq 0$ –новая функция.

Уравнения (2.3) и (2.6) определяют конгруэнцию Π_3^2.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции Π_3^2 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая в уравнениях (2.3) и их замыканиях условия (2.6), убеждаемся, что система в инволюции, имеет решение с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 3. В конгруэнции Π_3^2 фокальные поверхности (A_k) вырождаются в плоские линии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем :

$$\left.\begin{aligned} d\bar{A}_i &= \omega_i^i \bar{A}_i + \omega_i [\, b_j^i (\bar{A}_j - \bar{A}_3) + \bar{A}_4] \\ d\bar{A}_3 &= \omega_3^3 \bar{A}_3 + (b_1^2 \omega_2 - b_2^1 \omega_1)(\bar{A}_1 - \bar{A}_2 + a\bar{A}_4) \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Из (2.7) непосредственно следует, что поверхности (A_n) являются линиями. Так как

$$(d^\rho \bar{A}_i, \bar{A}_i, \bar{A}_j - \bar{A}_3, \bar{A}_4) = 0, \quad (d^\rho \bar{A}_3, \bar{A}_3, \bar{A}_1 - \bar{A}_2, \bar{A}_4) = 0 \qquad (2.8)$$

то линии (A_n)-плоские.

§ 3. Конгруэнции Π_2.

Т е о р е м а 4. Конгруэнции Π_2 существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конгруэнция Π_2 определяется системой уравнений Пфаффа :

$$\left.\begin{aligned} &\theta_i = b_i^k \omega_k, \quad \Omega_i = 0, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik} \omega_k ; \\ &\omega_3^i - \omega_i^3 - \theta_i = 0, \quad \omega_4^i + \omega_4^3 = 0, \quad \omega_3^4 = \lambda(\omega_3^1 + \omega_3^2). \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Анализируя систему (3.1), получаем утверждение теоремы 4.

Характеристической точкой плоскости коники является точка:

$$\bar{M} = \bar{A}_3 - c^2 \bar{A}_2 - c^1 \bar{A}_1 , \qquad (3.2)$$

где $$c^i = \lambda(\Gamma_3^{ii} + \Gamma_3^{ji}), \quad \Gamma_3^{ii} + \Gamma_3^{ji} \neq 0. \qquad (3.3)$$

О п р е д е л е н и е 3. Конгруэнцией Π_2' называется конгруэнция Π_2, у которой характеристическая точка плоскости коники инцидентна конике.

Легко показать, что если характеристическая точка M плоскости коники инцидентна конике, то она является её фокальной точкой. Не умаляя общности, будем считать, что у конгруэнции Π_2 она является фокальной точкой A_3. Тогда

$$\omega_3^4 = 0. \qquad (3.4)$$

Замыкая (3.4), получим :

$$\Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21} = \Gamma_0 . \qquad (3.5)$$

Конгруэнция Π_2' существует и определяется с произволом трех функций двух аргументов.

Уравнения асимптотических линий поверхности (A_3) имеют вид:

$$\Gamma_3^{11}(\omega_1)^2 + 2\Gamma_0\,\omega_1\omega_2 + \Gamma_3^{22}(\omega_2)^2 = 0 \qquad (3.6)$$

О п р е д е л е н и е 4. Конгруэнцией Π_2'' называется конгруэнция Π_2' ,характеризуемая условиями :

$$\Gamma_3^{11} = 0\,,\ \Gamma_3^{22} = 0. \qquad (3.7)$$

Из уравнений (3.I),(3.4),(3.5),(3.7) непосредственно следует, что конгруэнция Π_2'' существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 5. Фокальные линии на поверхностях (A_1) и (A_2) конгруэнции Π_2'' соответствуют асимптотическим линиям на поверхности (A_3).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из определения конгруэнции Π_2'' следует,что уравнение асимптотических линий на поверхности (A_3) имеет вид :

$$\omega_1\omega_2 = 0. \qquad (3.8)$$

С л е д с т в и е I. Асимптотические касательные к поверхности (A_3) в точке A_3 проходят через фокальные точки A_1 и A_2 соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из условий (3.7) следует,что

$$(d\bar{A}_3)_{\omega_i=0} = \omega_3^3\bar{A}_3 + \Gamma_0\,\omega_j\bar{A}_i\,. \qquad (3.9)$$

О п р е д е л е н и е 5. Конгруэнцией Π_2''' называется конгруэнция Π_2'' с двумя сдвоенными фокальными плоскостями.

Системой уравнений для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции Π_2'' являются:

$$x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 = 0\ ,\ x^4 = 0,\ x^k\omega_k = 0,$$
$$2\,\omega_k^3 x^k - x^3(\omega_3^1 + \omega_3^2) = 0. \qquad (3.10)$$

Из системы (3.I0) получаем,что сдвоенность (A_i) дает следующее условие :

$$b_1^2 = b_2^1 = \Gamma_0\,. \qquad (3.11)$$

Теорема 6. Конгруэнции Π_2''' существуют и определяются с произволом двух постоянных.

Доказательство. При соответствующей канонизации репера R $(\Gamma_0 = 1,\ \ell_\kappa^\kappa = 0)$ система уравнений, определяющая конгруэнцию Π_2''', принимает вид:

$$\begin{gathered}\theta_1 = \ell_0\omega_1 + \omega_2,\ \theta_2 = \omega_1 - \ell_0\omega_2,\ \Omega_i = 0,\ \omega_3^i = \omega_j,\\ \omega_3^i - \omega_i^3 - \theta_i = 0,\ \omega_4^i + \omega_4^3 = 0,\ \omega_4^3 = 2\ell_0\omega_1 + \Gamma_4^{32}(\omega_1 + \omega_2),\\ d\ell_0 = (\ell_0^2 - \ell_0 - \Gamma_4^{32})(\omega_1 - \omega_2),\\ d\Gamma_4^{32} = (3\ell_0^2 + 4\ell_0\Gamma_4^{32} + \Gamma_4^{32})(\omega_1 - \omega_2),\ (\ell_0 = \ell_1^1).\end{gathered} \tag{3.12}$$

Система (3.I2) замкнутая и имеет решение с произволом двух постоянных.

Теорема 7. В конгруэнциях Π_2''' поверхность (A_3) является линейчатой квадрикой; а линии (A_i)-сечения этой квадрики стационарными плоскостями (A_1QA_4) и (A_2QA_4), где

$$\bar{Q} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 - \bar{A}_3. \tag{3.13}$$

Доказательство. Из определения конгруэнции следует, что

$$d[\bar{A}_3\bar{A}_i]_{\omega_i = 0} = \lambda[\bar{A}_3\bar{A}_i],$$

то есть на поверхности (A_3) имеется два семейства прямолинейных образующих. Следовательно, поверхность (A_3) -линейчатая квадрика. Вторая часть теоремы 7 следует из (3.I4) и определения 5.

Литература.

I. Н.Г.Туганов, О конгруэнции линий второго порядка в трехмерном проективном пространстве, ДАН СССР, IOO, №I, I3-I5, I955.

2. В.С.Малаховский, Конгруэнция кривых второго порядка с одной фокальной поверхностью вырождающейся в точку. Геометрический сборник, вып.3, Труды Томского университета, т.I68, 43-53, I963.

Г.П.Т К А Ч

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНДУЦИРОВАННО РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР В A_3.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются пары P конгруэнций фигур F_1 и F_2, где F_1 -парабола, а F_2 -прямая, не инцидентная плоскости параболы и не пересекающая параболу.

§ I. Канонический репер пары P.

Пусть M_0-точка пересечения прямой $F_2=\ell$ с плоскостью параболы. Отнесем пару P к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где A -точка пересечения параболы F_1 с диаметром, проходящим через точку M_0, $\bar{e}_1=\overline{AM}_0$, вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной ℓ' к параболе в точке A, а вектор $\bar{e}_3$ —параллелен прямой ℓ.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha,\quad d\bar{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{e}_\beta\quad(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3),\tag{1.1}$$

где формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta,\quad \mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha.\tag{1.2}$$

Дифференцируя условие эквиаффинности

$$(\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3)=1,\tag{1.3}$$

получаем

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0.\tag{1.4}$$

При надлежащей нормировке вектора $\bar{e}_2$, уравнения параболы относительно репера R примут вид:

$$(x^2)^2-2x^1=0,\quad x^3=0\tag{1.5}$$

Используя условия стационарности точки в A_3

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega_\beta^\alpha-\omega^\alpha,\tag{1.6}$$

$$dx^{\alpha}=-x^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}-\omega^{\alpha}, \tag{1.6}$$

находим уравнения, определяющие фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции (F_1) [I]:

$$\left.\begin{aligned}&(x^2)^2-2x^1=0,\ x^3=0,\ x^1\omega_1^3+x^2\omega_2^3+\omega^3=0,\\&(x^2)^2\omega_2^2-x^1x^2\omega_1^2+(\omega^2-\omega_2^1)x^2-\omega_1^1x^1-\omega^1=0\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Исключая случай параллельности прямой ℓ касательной плоскости к поверхности (A), примем формы Пфаффа ω^1, ω^2 за независимые. Система дифференциальных уравнений, определяющих пару P_1 имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\omega^3=\Gamma_k^3\omega^k,\ \omega_i^3=\Gamma_{ik}^3\omega^k,\ \omega_3^i=\Gamma_{3k}^i\omega^k,\\&\omega_j^i=\Gamma_{jk}^i\omega^k,\ \omega_j^j=\Gamma_{jk}^j\omega^k,\ (i,j,k=1,2)\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i,j суммирование не производится.

Замыкая систему (I.8), находим:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\Gamma_k^3\wedge\omega^k=0,\ \Delta\Gamma_{ik}^3\wedge\omega^k=0,\ \Delta\Gamma_{3k}^i\wedge\omega^k=0,\\&\Delta\Gamma_{jk}^i\wedge\omega^k=0,\ \Delta\Gamma_{jk}^j\wedge\omega^k=0,\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Delta\Gamma_i^3=d\Gamma_i^3+\Gamma_i^3(B\omega^j-\omega_i^i+\omega_3^3+\Gamma_{ij}^3\omega^j),\\
&\Delta\Gamma_{ii}^3=d\Gamma_{ii}^3+\Gamma_{ii}^3(B\omega^j-2\omega_i^i+\omega_3^3)+\Gamma_{ii}^j\Gamma_{jj}^3\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{ji}^3=d\Gamma_{ji}^3+\Gamma_{ji}^3(B\omega^j-\omega_k^k+\omega_3^3)+\Gamma_{ji}^i\Gamma_{ij}^3\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{3i}^i=d\Gamma_{3i}^i+\Gamma_{3i}^i(B\omega^j-\omega_3^3)+\Gamma_{3i}^j\Gamma_{jj}^i\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{3i}^j=d\Gamma_{3i}^j+\Gamma_{3i}^j(B\omega^j-\omega_i^i+\omega_j^j-\omega_3^3)+\Gamma_{3i}^i\Gamma_{ij}^j\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{ji}^i=d\Gamma_{ji}^i+\Gamma_{ji}^i(B\omega^j-\omega_j^j)+\Gamma_{ji}^3\Gamma_{3j}^i\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{ii}^j=d\Gamma_{ii}^j+\Gamma_{ii}^j(B\omega^j-2\omega_i^i+\omega_j^j)+\Gamma_{ii}^3\Gamma_{3j}^j\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{ji}^j=d\Gamma_{ji}^j+\Gamma_{ji}^j(B\omega^j-\omega_i^i)+(\Gamma_{ji}^i\Gamma_{ij}^j+\Gamma_{ji}^3\Gamma_{3j}^j)\omega^j,\\
&B=\Gamma_{ji}^i-\Gamma_i^3\Gamma_{3j}^i+\Gamma_j^3\Gamma_{3i}^i.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Из (I.8),(I.9) непосредственно следует, что пара P определяется с произволом девяти функций двух аргументов.

Матрица компонент деривационных формул репера R имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \omega^1 & \omega^2 & \Gamma^3_k \omega^k \\ \Gamma^1_{1k}\omega^k & \Gamma^2_{1k}\omega^k & \Gamma^3_{1k}\omega^k \\ \Gamma^1_{2k}\omega^k & \Gamma^2_{2k}\omega^k & \Gamma^3_{2k}\omega^k \\ \Gamma^1_{3k}\omega^k & \Gamma^2_{3k}\omega^k & -(\Gamma^1_{1k}+\Gamma^2_{2k})\omega^k \end{bmatrix}. \qquad (1.11)$$

§ 2. Индуцированно расслояемые пары P.

Определение I. Пара P называется индуцированно расслояемой, или парой P_ℓ, если прямолинейные конгруэнции (ℓ) и (ℓ') образуют двусторонне расслояемую пару [4]. Так как прямые ℓ' индуцированно расслояемой пары P образуют двупараметрическое семейство (конгруэнцию), то ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & \Gamma^3_1 & \Gamma^1_{21} & \Gamma^3_{21} \\ 0 & \Gamma^3_2 & \Gamma^1_{22} & \Gamma^3_{22} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

равен двум.

Теорема I. Пары P_ℓ существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Доказательство. Условия двусторонней расслояемости прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ') приводятся к виду:

$$\begin{gathered} \omega^1\wedge\omega^1_3+\omega^2_3\wedge\omega^1_2=0, \\ (\omega^1+\omega^1_1)\wedge\omega^3+\omega^3_2\wedge(\omega^2+\omega^2_1)=0, \\ (\omega^1+\omega^1_1)\wedge\omega^1_2-\omega^3_2\wedge\omega^1_3=0, \\ (\omega^2+\omega^2_1)\wedge\omega^1+\omega^2_3\wedge\omega^3=0, \\ (\omega^2+\omega^2_1)\wedge\omega^1_2-\omega^3\wedge\omega^1_3=0, \\ \omega^1\wedge\omega^1_1-\omega^2_3\wedge\omega^3_2=0 \end{gathered} \qquad (2.2)$$

Учитывая (I.II), имеем:

$$
\begin{gathered}
\Gamma^1_{32}-\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{32}+\Gamma^2_{31}\Gamma^1_{22}=0,\\
(\Gamma^1_{11}+1)\Gamma^3_{2}+(\Gamma^2_{12}+1)\Gamma^3_{21}-\Gamma^1_{12}\Gamma^3_{1}-\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{11}=0,\\
(\Gamma^1_{11}+1)\Gamma^1_{22}-\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{21}-\Gamma^3_{21}\Gamma^1_{32}+\Gamma^3_{22}\Gamma^1_{31}=0,\\
\Gamma^2_{12}+1-\Gamma^2_{31}\Gamma^3_{2}+\Gamma^2_{32}\Gamma^3_{1}=0,\\
(\Gamma^2_{12}+1)\Gamma^1_{21}-\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}+\Gamma^3_{1}\Gamma^1_{32}-\Gamma^3_{2}\Gamma^1_{31}=0,\\
\Gamma^3_{12}-\Gamma^2_{31}\Gamma^3_{22}-\Gamma^2_{32}\Gamma^3_{21}=0.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Пары P_ℓ определяются уравнениями Пфаффа (I.8), квадратичными уравнениями (I.9) и конечными соотношениями (2.3). Из шести конечных соотношений (2.3) независимых только пять, следовательно

$$S_1=9,\quad q=13,\quad S_2=4,\quad N=Q=17. \tag{2.4}$$

Система в инволюции и определяет пары P_ℓ с произволом четырех функций двух аргументов.

Пусть огибающая поверхность (M_3) плоскостей парабол F_1 не является торсом. Тогда

$$\bar{M}_3=\bar{A}+\frac{1}{d_3}\{(\Gamma^3_2\Gamma^3_{21}-\Gamma^3_1\Gamma^3_{22})\bar{e}_1-(\Gamma^3_2\Gamma^3_{11}-\Gamma^3_1\Gamma^3_{12})\bar{e}_2\}, \tag{2.5}$$

$$d=\Gamma^3_{11}\Gamma^3_{22}-\Gamma^3_{12}\Gamma^3_{21}\neq 0. \tag{2.6}$$

Требуя, чтобы точка A была характеристической точкой плоскости параболы, получим

$$\Gamma^3_1=\Gamma^3_2=0, \tag{2.7}$$

или

$$\omega^3=0 \tag{2.8}$$

Дифференцируя (2.8) внешним образом с учетом (I.8), находим:

$$\Gamma^3_{21}=\Gamma^3_{12}=\ell \tag{2.9}$$

Из уравнений (I.7), для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции (F_1) видно, что если

$$\omega^1\wedge\omega^3=0, \tag{2.10}$$

то точка A является фокальной точкой параболы F_1. Отсюда следует, что если характеристическая точка плоскости параболы инцидентна параболе,то она является её фокальной точкой.

Уравнение асимптотических линий на поверхности (A)имеет вид:
$$\Gamma_{11}^3 (\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + \Gamma_{22}^3 (\omega^2)^2 = 0. \qquad (2.11)$$
Если потребовать,чтобы фокальная линия поверхности (A) (линия $\omega^1 = 0$) и линия,огибаемая диаметрами параболы AM_0 (линия $\omega^2 = 0$),являлись асимптотическими линиями поверхности (A),то
$$\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = 0. \qquad (2.12)$$

§ 3. Характеристические пары P_ℓ.

О п р е д е л е н и е . 2. Пара P_ℓ называется характеристической,если точка A -характеристическая точка плоскости параболы и линии $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ являются асимптотическими линиями поверхности (A).

Т е о р е м а 2. Характеристические пары P_ℓ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для характеристической пары выполняются соотношения (2.7) и (2.12) .

Рассмотрим сначала случай,когда точка M_0 не является характеристической точкой плоскости $x^2 = 0$.

Тогда
$$\omega^2 + \omega_1^3 \neq 0. \qquad (3.1)$$
Из уравнений (2.2) находим :
$$\Gamma_{22}^1 = 0. \qquad (3.2)$$
Соотношения (3.2) и (2.12) приводят к понижению ранга матрицы (2.1),чего быть не может.

Рассмотрим теперь случай,когда M_0 -характеристическая точка плоскости $x^2 = 0$. Имеем :
$$\omega^2 + \omega_1^3 = 0. \qquad (3.3)$$
Введем обозначения :
$$\left.\begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \mu, \; \Gamma_{21}^1 = \beta, \; \Gamma_{22}^1 = q, \; \Gamma_{21}^2 = m, \\ \Gamma_{22}^2 = n, \Gamma_{31}^1 = \gamma, \Gamma_{32}^1 = \tau, \Gamma_{31}^2 = c, \Gamma_{32}^2 = a. \end{array}\right\} \qquad (3.4)$$

Замкнутая система уравнений, определяющих характеристическую пару P_ℓ приводится к виду :

$$1+\mu+bc=0\,,\quad cq-a\beta+\tau=0, \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega^3=0,\ \omega^2+\omega_1^2=0,\ \omega_1^1=\mu\omega^1-ab\omega^2,\ \omega_1^3=b\omega^2,\ \omega_2^1=\beta\omega^1+q\omega^2,\\&\omega_2^2=m\omega^1+n\omega^2,\ \omega_2^3=b\omega^1,\ \omega_3^1=\gamma\omega^1+\tau\omega^2,\ \omega_3^2=c\omega^1+a\omega^2,\\&\qquad\frac{1}{2}\,d\ln b=(1+m+\mu)\omega^1-(ab+\beta-n)\omega^2\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}&d\mu\wedge\omega^1-b\,da\wedge\omega^2-\{ab(3\mu+1+m)+\beta(1+\mu)-b\gamma\}\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\\&d\beta\wedge\omega^1+dq\wedge\omega^2-\{q(1-\mu+2m)+\beta(\beta-n)+b\tau\}\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\\&dm\wedge\omega^1+dn\wedge\omega^2-\{(ab+n)(1+m)+\beta(m-1)\}\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\\&d\gamma\wedge\omega^1+d\tau\wedge\omega^2+\{2\tau\mu+\gamma(ab-\beta-n)\}\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\\&dc\wedge\omega^1+da\wedge\omega^2-\{a(1-m-\mu)+c(2n+\beta)-\gamma\}\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\\&d\beta\wedge\omega^2+(b\gamma-\beta m)\,\omega^1\wedge\omega^2=0\end{aligned} \tag{3.7}$$

Система (3.5)-(3.7) - в инволюции и определяет характеристическую пару P_ℓ с произволом одной функции двух аргументов.

С л е д с т в и е I. Точка M_0 характеристической пары P_ℓ является характеристической точкой плоскости $x^2=0$.

Т е о р е м а 3. Существует только четыре фокальные поверхности конгруэнции (F_1) характеристической пары P_ℓ ,причем, фокальная поверхность (A) является сдвоенной .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Утверждение теоремы непосредственно следует из рассмотрения уравнений (I.7) и (3.6).

С л е д с т в и е 2. В расширенном эвклидовом пространстве две фокальные плоскости конгруэнции (F_1) характеристической пары P_ℓ являются несобственными.

Т е о р е м а 4. Линия $\omega^2=0$ и линия $\omega_3^2=0$ (линия, вдоль которой касательная к $\bar{e}_3$ параллельна плоскости $x^2=0$) -

асимптотические линии поверхности (M_0).

Доказательство. Уравнение асимптотических линий поверхности (M_0) приводится в силу (3.6) к виду :

$$a(\omega^2)^2+e\omega^1\omega^2=0. \tag{3.8}$$

Рассмотрим некоторые классы характеристической пары P_ℓ .

Определение 3. Характеристическая пара P_ℓ , у которой $c=0$ (3.9)

называется парой P_ℓ^1 .

Условие (3.8) означает, что асимптотическая линия $\omega^2=0$ поверхности (A) высекается торсом прямолинейной конгруэнции $\{A\bar{e}_3\}$. Пары P_ℓ^1 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов. Уравнения, определяющие пару P_ℓ^1 имеют вид :

$$\left.\begin{array}{l}\omega^3=0,\ \omega^2+\omega_1^2=0,\ \omega^1+\omega_1^1=-ab\omega^2,\ \omega_1^3=b\omega^2,\ \omega_2^3=b\omega^1,\\ \omega_2^1=\beta\omega^1+q\omega^2,\ \omega_2^2=m\omega^1+n\omega^2,\ \omega_3^1=a\beta\omega^2,\ \omega_3^2=a\omega^2.\end{array}\right\} \tag{3.10}$$

Теорема 5. Поверхность (M_0) пары P_ℓ^1 вырождается в линию.

Доказательство. Учитывая (3.9), находим:

$$dM_0=b(\bar{e}_3-a\bar{e}_1)\omega^2, \tag{3.11}$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Теорема 6. Торсы $\omega^2=0$ прямолинейной конгруэнции $\{A,\bar{e}_3\}$ являются цилиндрическими поверхностями.

Доказательство. Используя (3.10), находим

$$(d\bar{e}_3)_{\omega^2=0}=-(1+m)\omega^1\bar{e}_3, \tag{3.12}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Определение 4. Пара P_ℓ^1 , у которой

$$q=\frac{3}{2} \tag{3.13}$$

называется парой P_ℓ^2 .

Подставляя (3.13) в (3.9), убеждаемся, что пары P_ℓ^2 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 7. Поверхность (A) конгруэнции (F_1) пары P_4^2 является строенной фокальной поверхностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.13) и (3.9), уравнения (I.7) примут вид :

$$(x^2)^2 - 2x^1 = 0, \quad x^3 = 0,$$
$$(x^2)^3 \left\{ (2m+3)x^2 - 2(a b + \beta + 2n) \right\} = 0,$$

что и доказывает теорему.

Л и т е р а т у р а.

I. В.С.Малаховский, Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии. Труды Томского университета. Томск, I962.

2. С.П.Фиников, Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, Москва, I948г.

3. С.П.Фиников, Теория конгруэнций. ГИТТЛ, Москва, I950г.

4. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, Москва, I956г.

5. Р.Н.Щербаков, Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Издательство Томского университета. Томск, I960г.

Ф.А.ЛИПАТОВА .

КОНГРУЭНЦИИ ПАР ФИГУР В ТРЕХМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ОБРАЗОВАННЫЕ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве A_3 исследуются конгруэнции K пар фигур, образованные эллипсом C и точкой M, не инцидентной плоскости эллипса C.

§ I. Система дифференциальных уравнений конгруэнции K.

Отнесем конгруэнцию K к реперу $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где A -центр эллипса C, концы A_1, A_2 векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$-его фокальные точки, не принадлежащие одному диаметру, и $\bar{e}_3 = \overline{AM}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{1.2}$$

Уравнения эллипса C относительно репера R имеют вид:

$$(x^1)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \; |\lambda| < 1 \tag{1.3}$$

Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции (C) определяются из системы уравнений [I]:

$$\left.\begin{aligned} &(x^1)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + (x^2)^2 = 1, \; x^3 = 0, \\ &(\omega_1^1 + \lambda\omega_1^2)(x^1)^2 + (\omega_2^2 + \lambda\omega_2^1)(x^2)^2 + [-d\lambda + \omega_1^2 + \omega_2^1 + \lambda(\omega_1^1 + \omega_2^2)]\, x^1 x^2 + \\ &+ (\omega^1 + \lambda\omega^2) x^1 + (\omega^2 + \lambda\omega^1) x^2 = 0, \; x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + \omega^3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Так как координаты фокальных точек $A_1(1,0,0)$ и $A_2(0,1,0)$ удовлетворяют системе уравнений (I.4), то

$$\omega_1^1+\omega^1+\lambda(\omega_1^2+\omega^2)=\alpha(\omega_1^3+\omega^3), \tag{1.5}$$

$$\omega_2^2+\omega^2+\lambda(\omega_2^1+\omega^1)=\beta(\omega_2^3+\omega^3). \tag{1.6}$$

Исключая из рассмотрения случай параллельности вектора $\bar{e}_3$ касательной плоскости к поверхности (A), примем формы Пфаффа ω^1 и ω^2 за независимые.

Система дифференциальных уравнений конгруэнции K запишется в виде:

$$\begin{gathered}
\omega^3=a\omega^1+b\omega^2,\quad \omega_1^2=c\omega^1+f\omega^2,\ \omega_2^1=e\omega^1+h\omega^2,\\
\omega_1^3=n\omega^1+m\omega^2,\quad \omega_2^3=p\omega^1+k\omega^2,\ \omega_3^3=s\omega^1+t\omega^2,\\
\omega_3^1=q\omega^1+r\omega^2,\quad \omega_3^2=m_1\omega^1+m_2\omega^2,\ d\lambda=\lambda_1\omega^1+\lambda_2\omega^2,\\
\omega_1^1=\alpha(\omega_1^3+\omega^3)-\omega^1-\lambda(\omega_1^2+\omega^2),\ \omega_2^2=\beta(\omega_2^3+\omega^3)-\omega^2-\lambda(\omega_2^1+\omega^1).
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (I.7), получим:

$$\begin{gathered}
da\wedge\omega^1+db\wedge\omega^2+n_1\omega^1\wedge\omega^2=0,\ dc\wedge\omega^1+df\wedge\omega^2+n_2\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
de\wedge\omega^1+dh\wedge\omega^2+n_3\omega^1\wedge\omega^2=0,\ dn\wedge\omega^1+dm\wedge\omega^3+n_4\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
dp\wedge\omega^1+dk\wedge\omega^2+n_5\omega^1\wedge\omega^2=0,\ ds\wedge\omega^1+dt\wedge\omega^2+n_6\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
dq\wedge\omega^1+dr\wedge\omega^2+n_7\omega^1\wedge\omega^2=0,\ dm_1\wedge\omega^1+dm_2\wedge\omega^2+n_8\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
d\lambda_1\wedge\omega^1+d\lambda_2\wedge\omega^2+n_9\omega^1\wedge\omega^2=0,\ (a+n)d\alpha\wedge\omega^1+(b+m)d\alpha\wedge\omega^2+n_{10}\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
(p+a)d\beta\wedge\omega^1+(b+k)d\beta\wedge\omega^2+n_{11}\omega^1\wedge\omega^2=0,
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где

$$n_1=a[\alpha(b+m)-\lambda(1+f)-e+ar-bq-t]-b[\beta(p+a)-$$
$$-\lambda(1+e)-am_2+bm_1-f-s]-m+p,$$

$$n_2=c[2\alpha(b+m)-\lambda(1+f)-\beta(k+b)+\lambda h-e+ar-bq+1]-$$
$$-\lambda c(1+e)-f[\alpha(a+n)-\lambda c-am_2+bm_1-f-1]-nm_2+mm_1,$$

$$n_3 = e[\beta(b+\kappa)-\lambda h+ar-bq-e-1]-h[2\beta(p+a)-2\lambda(1+e)-$$
$$-\alpha(a+n)+\lambda c-am_2+bm_1-f+1]-pr+\kappa q,$$
$$n_4 = n[2\alpha(b+m)-2\lambda(1+f)+ar-bq-e-t]-m[\beta(p+a)-$$
$$-\lambda(1+e)+\alpha(a+m)-\lambda c-am_2+bm_1-f+s-1]-c\kappa+pf,$$
$$n_5 = p[\alpha(b+m)-\lambda(1+f)+\beta(b+\kappa)-\lambda h+ar-bq-e-t-1]-$$
$$-\kappa[2\beta(p+a)-2\lambda(1+e)-am_2+bm_1-f-s]-em+hn,$$
$$n_6 = s[\alpha(b+m)-\lambda(1+f)+ar-bq-e]-t[\beta(p+a)-\lambda(1+e)-$$
$$-am_2+bm_1-f]-mq+rn-m_1\kappa+pm_2,$$
$$n_7 = q(ar-bq-e)-r[\beta(p+a)-\lambda(1+e)-\alpha(a+n)+1-\lambda c-$$
$$-am_2+bm_1-f+s]-m_1h+em_2+tq,$$
$$n_8 = m_1[\alpha(b+m)-\lambda(1+f)-\beta(b+\kappa)+\lambda h-e+ar-bq+t]-$$
$$-m_2(bm_1-am_2-f+s)-tq+cr, \tag{1.9}$$
$$n_9 = \lambda_1[\alpha(b+m)-\lambda(1+f)-e+ar-bq]-\lambda_2[\beta(p+a)-$$
$$-\lambda(1+e)-am_2+bm_1-f],$$
$$n_{10} = \alpha\{m[\alpha(a+n)-\lambda c-1]-n[\alpha(b+m)-\lambda(1+f)]+c\kappa-pf+$$
$$+nt-ms+m-p+at-bs\}+\lambda\{f[\alpha(a+n)-1-\lambda c-\beta(p+a)+$$
$$+\lambda(1+e)-c[\alpha(b+m)-\lambda(1+f)-\beta(b+\kappa)+\lambda h+1]+nm_2-$$
$$-mm_1-\beta(p+a)+\lambda(1+e)+am_2-bm_1+f\}-\lambda_1(1+f)+c\lambda_2-$$
$$-\alpha(b+m)+\lambda(1+f)+e-ar-bq-ch+ef-nr+mq,$$
$$n_{11} = \beta\{\kappa[\beta(a+p)-\lambda(1+e)]-p[\beta(b+\kappa)-\lambda h-1]+em-hn+pt-$$
$$-\kappa s+m-p+at-bs\}-\lambda\{e[\alpha(b+m)-\lambda(1+f)+\beta(b+\kappa)+$$
$$+\lambda h+1]-h[\alpha(a+n)-\lambda c-1-\beta(p+a)+\lambda(1+e)]+pr-$$
$$-\kappa q+\alpha(b+m)-\lambda(1+f)-e-ar-bq\}+\beta(p+a)-\lambda(1+e)-$$
$$-m_2(a+p)+m_1(b+\kappa)-f(1+e)+ch-\lambda_1h+\lambda_2(1+e).$$

Из уравнений (I.7),(I.8) заключаем,что конгруэнции K существуют и определяются с произволом девяти функций двух аргументов.

Определение I. Конгруэнции K ,для которых

$$\lambda = 0 \tag{1.10}$$

называются конгруэнциями K_0.

Для конгруэнции K_0 система (I.7) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega_1^2 = c\omega^1 + f\omega^2, \quad \omega_2^1 = e\omega^1 + h\omega^2, \\ &\omega_1^3 = n\omega^1 + m\omega^2, \quad \omega_2^3 = p\omega^1 + k\omega^2, \quad \omega_3^3 = s\omega^1 + t\omega^2, \\ &\omega_1^1 = \alpha(\omega_1^3 + \omega^3) - \omega^1, \quad \omega_2^2 = \beta(\omega_2^3 + \omega^3) - \omega^2, \\ &\omega_3^2 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2, \quad \omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Отсюда непосредственно следует,что конгруэнции K_0 определяются с произволом восьми функций двух аргументов.Они характеризуются сопряженностью векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ относительно эллипса C .

§ 2. Основные геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией K .

I.Касательная плоскость к поверхности A.Она определяется векторами

$$\bar{E}_1 = \bar{e}_1 + a\bar{e}_2;\ \bar{E}_2 = \bar{e}_2 + b\bar{e}_3. \tag{2.1}$$

2.Касательная плоскость к поверхности (M).Она определяется векторами

$$\bar{E}_1^* = (1+q)\bar{e}_1 + m_1\bar{e}_2 + (a+s)\bar{e}_3,\ \bar{E}_2^* = r\bar{e}_1 + (1+m_2)\bar{e}_2 + (b+t)\bar{e}_3. \tag{2.2}$$

3. Фокусы $\bar{F} = \bar{A} + t\bar{e}_3$ и торсы прямолинейной конгруэнции AM,определяемые соответственно уравнениями:

$$t^2(m_2 q - m_1 r) + (m_2 + q)t + 1 = 0, \tag{2.3}$$

$$m_1(\omega^1)^2 + (m_2 - q)\omega^1\omega^2 - r(\omega^2)^2 = 0. \tag{2.4}$$

4.Фокусы $\bar{F}^* = \bar{A} + t\bar{e}_1$ и торсы прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_1)$ определяемые уравнениями:

$$t^2(cm - fn) + t(cb - af - n) - a = 0 \tag{2.5}$$

$$ac(\omega^1)^2 + (a\ell + bc - n)\omega^1\omega^2 + (b\ell - m)(\omega^2)^2 = 0. \qquad (2.6)$$

5. Характеристические точки $\bar{\mathcal{L}}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ граней $\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\{A, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$:

$$\bar{\mathcal{L}} = \bar{A} + \frac{m_1}{cm_2 - \ell m_1}\bar{e}_1 + \frac{c}{m_1\ell - cm_2}\bar{e}_3, \qquad (2.7)$$

$$\bar{M} = \bar{A} + \frac{bp - ak}{nk - pm}\bar{e}_1 + \frac{am - bn}{nk - pm}\bar{e}_2, \qquad (2.8)$$

$$\bar{N} = \bar{A} + \frac{r}{hq - er}\bar{e}_2 + \frac{h}{er - hq}\bar{e}_3. \qquad (2.9)$$

§ 3. Индуцированно расслояемые конгруэнции K_0.

Обозначим буквой ℓ касательную к эллипсу C в точке A_1.

Определение 2. Конгруэнции K_0 называются индуцированно расслояемыми, если прямолинейные конгруэнции (AM) и (ℓ) образуют двусторонне расслояемую пару [4].

Теорема I. Индуцированно расслояемые конгруэнции K существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Доказательство. Условия двусторонней расслояемости прямолинейных конгруэнций (AM) и (ℓ) имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} b + m - p = 0, \quad h + pr - kq = 0, \quad (m_2 - \alpha)(a+n) - (b+m)m_1 = 0, \\ \quad q(b+m) - r(a+n) - e = 0, \quad \alpha(b+m) + m_1 k - p m_2 = 0. \end{array}\right\} (3.1)$$

Система (I.II), (3.I) определяет индуцированно расслояемые конгруэнции K_0 с произволом трех функций двух аргументов.

Рассмотрим некоторые подклассы индуцированно расслояемых конгруэнций K_0.

Определение 3. Конгруэнцией K_0' называется конгруэнция K_0, у которой поверхность (A) огибает плоскости эллипсов и сеть линий $\omega^1\omega^2 = 0$ сопряжена на (A).

Из определения конгруэнции K'_0 следует, что
$$a = b = m = p = 0. \qquad (3.2)$$
В силу соотношений (3.2) система (3.I) принимает вид:
$$h = kq, \quad n(m_2 - \alpha) = 0, \quad rn - e = 0, \quad m_1 k = 0. \qquad (3.3)$$

При исследовании системы (3.3) обнаруживаем, что возможны следующие случаи:
$$k = 0, \; n = 0; \qquad (1)$$
$$k = 0, \; m_2 = \alpha; \qquad (2)$$
$$m_1 = 0, \; n = 0; \qquad (3)$$
$$m_1 = 0, \; m_2 = \alpha. \qquad (4)$$

О п р е д е л е н и е 4. Конгруэнции K'_0, характеризуемые соотношениями (i), называются конгруэнциями $K'_{0,i}$ (i = I,2,3,4).

Т е о р е м а 2. Существуют четыре класса конгруэнций K'_0 -конгруэнции $K'_{0,i}$ (i = I,2,3,4), причем конгруэнции $K'_{0,1}$, $K'_{0,2}$ определяются с произволом трех функций двух аргументов, а конгруэнции $K'_{0,3}$, не являющиеся конгруэнциями $K'_{0,1}$, – с произволом двух функций двух аргументов, $K'_{0,4}$ – с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя (I), (3.2), (3.3) в (I.II) получим:
$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, \; \omega_1^3 = 0, \; \omega_2^3 = 0, \; \omega_1^1 + \omega^1 = 0, \; \omega_2^1 = 0, \\ &\omega_1^2 = c\omega^1, \; \omega_2^2 + \omega^2 = 0, \; \omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2, \\ &\omega_3^2 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2, \quad \omega_3^3 = s\omega^1 + t\omega^2. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Замыкая систему (3.4), убеждаемся, что она имеет решение с произволом трех функций двух аргументов.

В силу соотношений (2), (3.2), (3.3) система (I.II) примет вид:
$$\left.\begin{aligned} &\omega^3 = 0, \; \omega_1^3 = n\omega^1, \; \omega_2^3 = 0, \; \omega_1^1 = \alpha\omega_1^3 - \omega^1, \\ &\omega_2^2 + \omega^2 = 0, \; \omega_1^2 = c\omega^1 + f\omega^2, \; \omega_2^1 = -rn\omega^1, \; \omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2, \\ &\omega_3^2 = m_1\omega^1 + \alpha\omega^2, \; \omega_3^3 = s\omega^1 + t\omega^2, \; f(rn - 1) = 0. \end{aligned}\right\} (3.5)$$

Замыкая систему (3.5) убеждаемся, что при $f=0$ она имеет решение с произволом одной функции двух аргументов, а при $m=1$ — с произволом трех функций двух аргументов.

При исследовании системы уравнений, определяющей конгруэнции $K'_{0,3}$ выделяются два подкласса. Подкласс $c=0$, определяемый системой

$$\left.\begin{array}{l} \omega^3=0,\ \omega^2_1=f\omega^2,\ \omega^1_2=kq\omega^2,\ \omega^3_1=0, \\ \omega^3_2=k\omega^2,\ \omega^3_3=s\omega^1+t\omega^2,\ \omega^1_3=q\omega^1+\tau\omega^2, \\ \omega^2_3=m_2\omega^2_1,\ \omega^1_1+\omega^1=0,\ \omega^2_2=\beta\omega^3_2-\omega^2, \end{array}\right\} \qquad (3.6)$$

с произволом одной функции двух аргументов и подкласс $k=0$, определяемый с произволом двух функций двух аргументов и входящий в класс $K'_{0,1}$.

Рассматривая систему (I.II),(3.2),(3.3),(4) убеждаемся, что конгруэнции $K'_{0,4}$ определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 3. Поверхность (A) конгруэнции $K'_{0,1}$ является плоскостью, которой принадлежат все коники конгруэнции C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.4) последнее уравнение системы (I.4) тождественно удовлетворяется. Следовательно все коники конгруэнции инцидентны одной плоскости $x^3=0$.

Т е о р е м а 4. Точки $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A^*_1(-1,0,0)$ конгруэнции $K'_{0,1}$ суть характеристические точки эллипса вдоль направления $\omega^1=0$, причем A^*_1 —сдвоенная характеристическая точка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя (I.IO),(3.4) и $\omega^1=0$ в систему (I.4), получим:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1,\quad x^3=0,\quad (x^2)^2-x^2=0, \qquad (3.7)$$

откуда непосредственно следует, утверждение теоремы.

Т е о р е м а 5. Поверхность (A) конгруэнций $K'_{0,2}(K'_{0,3})$ является торсом. Вдоль направлений $\omega^1=0$, $(\omega^2=0)$ коники конгруэнции (C) инцидентны одной плоскости.

Доказательство. В силу (3.5) уравнение асимптотических линий поверхности (A) конгруэнции $K'_{0,2}$ ($K'_{0,3}$) принимает вид:

$$n(\omega^1)^2 = 0, \quad \left(k(\omega^2)^2 = 0\right).$$

Следовательно, поверхность (A)-торс. Так как при $\omega^1 = 0$, $(\omega^2 = 0)$ последнее уравнение системы (I.4) тождественно удовлетворяется, то теорема доказана.

Литература.

I. В.С.Малаховский, Канонический репер конгруэнции центральных кривых второго порядка в эквиаффинной геометрии, Томск, 1962, Издательство Томского университета.

2. С.П.Фиников, Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, ГИТТЛ, М-Л, 1948.

3. С.П.Фиников, Теория конгруэнций, ГИТТЛ, М-Л, 1950.

4. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М-Л, 1948.

5. Р.Н.Щербаков, Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии, Томск, 1960.

СЕМИНАР ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР ПРИ КАЛИНИНГРАДСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ.

Научный семинар при кафедре геометрии Калининградского государственного университета начал работу в январе 1970 года. Ниже приводится перечень докладов, в которых сообщались результаты исследований участников семинара с января по май 1970 года.

27.I.1970. В.С.Малаховский, Расслояемые пары C_ℓ.

10.2.1970. В.С.Малаховский, Об одном классе конгруэнций коник в P_3.

24.2.1970. Ю.И.Попов, Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n.

3.3.1970. Г.Л.Свешникова, Конгруэнции коник в P_3 с двумя вырождающимися фокальными поверхностями.

10.3.1970. В.В.Махоркин, Некоторые типы конгруэнций коник в P_3 с плоскими фокальными поверхностями.

17.3.1970. В.М.Овчинников, Дифференцируемое отображение пространства квадратичных элементов в точечное пространство.

24.3.1970. И.С.Кузнецова, Конгруэнция параболических цилиндров в E_3.

31.3.1970. Ю.И.Шевченко, Конгруэнция парабол в трехмерном эквиаффинном пространстве с плоской фокальной поверхностью.

31.3.1970 И.Н.Фетисова, Многообразие пар фигур в P_n, образованное гиперквадрикой и точкой.

7.4.1970 Б.А.Андреев, Об одном классе дифференцируемых отображений пространств пар фигур в точечные пространства.

14.4.1970 В.П.Семенова, Конгруэнции прямых круговых цилиндров в E_3.

14.4.1970 Т.П.Новожилова, Двупараметрическое семейство фигур, образованное эллипсом и прямой в эквиаффинном пространстве.

21.4.1970. В.С.Малаховский, Индуцированно расслояемые пары фигур в P_3 .

28.4.1970. М.М.Пахила (Черновцы), Некоторые типы индуцированных изгибаний конгруэнций коник в P_3 .

5.5.1970. Г.П.Ткач, Об одном классе индуцированно расслояемых пар конгруэнций фигур в A_3 .

12.5.1970. Ф.А.Липатова, Конгруэнции пар фигур в A_3 , образованные эллипсом и точкой.

Калининградский государственный университет
КУ- 05063 . Цена- 60 коп. Тираж 500 экз.

Редактор профессор В.С.МАЛАХОВСКИЙ.

Подписано к печати 21.05.70. Заказ 165.
Формат 60 х 84/16. Объем 5,4 п.л.

Отпечатано факсимиле на ротапринте К.О. Гипрорыбфлот-
Клайпеда Лит.ССР, Минмос,2.