Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Калининградский государственный университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 5

Калининград — 1974

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ
ФИГУР

В ы п у с к 5.

г.Калининград- 1974 год.

От редакции

Межвузовский сборник "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" издается один раз в год при Калининградском государственном университете. Статьи, публикуемые в выпуске 5 этого сборника, посвящены следующим вопросам:

I/Многообразия алгебраических поверхностей в n -мерном проективном пространстве (В.В.Махоркин),

2/Периодические однородные пространства (А.С.Феденко),

3/Общие вопросы дифференциальной геометрии многообразий фигур (В.С.Малаховский),

4/Гиперполосы в n -мерном проективном пространстве и пространстве проективной связности (Е.Т.Ивлев, Ю.И.Попов),

5/Многообразия пар фигур в многомерных пространствах (А.А.Лучинин, В.М.Овчинников, Е.А.Хляпова),

6/Многообразия пар фигур в трехмерных пространствах. (Е.В.Скрыдлова, Г.П.Ткач, Т.П.Фунтикова)

7/Дифференцируемые соответствия двух пространств фигур (Б.А.Андреев).

8/Конгруэнции кривых второго порядка в трехмерных пространствах (Г.Л.Свешникова).

Содержание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Андреев Б.А.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОЕКТИВНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И ПРОСТРАНСТВОМ НУЛЬ-ПАР.

Продолжается изучение локального дифференцируемого отображения из точечного проективного пространства P_N в пространство нуль -пар $R(p,\pi)$ ([4],стр.12), проводившегося в предположении, что $N \geqslant rang\,(p,\pi)$ ([1],стр.181). В настоящей работе более подробно рассматривается случай $N = rang\,(p,\pi)$. Приводятся уравнения конусов слабо характеристических и характеристических прямых и дается их геометрическая характеристика. Изучается геометрия распределения пар n-плоскостей в P_N, порождаемого рассматриваемым отображением. Объект 1-го порядка этого распределения охватывается объектом 2-го порядка отображения. Устанавливается связь между геометрическими образами, ассоциированными с данным распределением и другими геометрическими образами, присоединенными к рассматриваемому отображению во 2-й дифференциальной окрестности.

§1. Фундаментальный объект II-го порядка. Характеристические направления.

Пусть P_n - n-мерное проективное пространство, p и π -соответственно его точка и неинцидентная ей гиперплоскость, так что $N = rang\,(p,\pi) = 2n$. Рассмотрим дифференцируемое отображение φ некоторой области $U \subset P_N$ в пространство $R(p,\pi)$. Определим отображения φ_a $(a,b=1,2;\ a\neq b)$ формулами: $\varphi_1(P)=p$, $\varphi_2(P)=\pi$, если $\varphi(P)=(p,\pi)$, $P\in U$. Отнесем пространства P_N и P_n, соответственно, к подвижным реперам $R=\{R_{\mathcal{J}'}\}$, $(\mathcal{J}',\mathcal{K}',\ldots=0,1,\ldots,N)$ и $\tau=\{\tau_{i'}\}$ $(i',j',\ldots=0,1,\ldots,n)$, деривационные формулы которых имеют вид:

$$d\bar{R}_{\mathcal{J}'}=\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'}\bar{R}_{\mathcal{K}'}, \quad d\bar{\tau}_{i'}=\omega^{j'}_{i'}\bar{\tau}_{j'}, \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа

$$\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'}, \quad \omega^{j'}_{i'} \tag{1.2}$$

подчиняются уравнениям структуры проективных пространств

$$\mathcal{D}\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'}=\Omega^{\mathcal{L}'}_{\mathcal{J}'}\wedge\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{L}'}, \quad \mathcal{D}\omega^{j'}_{i'}=\omega^{k'}_{i'}\wedge\omega^{j'}_{k'} \tag{1.3}$$

Поместим вершину R_0 репера R в произвольную точку области U, вершину τ_0 репера τ в точку $\varphi_1(R_0)$, а вершины τ_i $(i,j,\ldots=1,2,\ldots n)$ — в гиперплоскость $\pi^0=\varphi_2(R_0)$. Система пфаффовых уравнений отображения φ запишется в виде ([4],стр.12):

$$\omega^i_0=\Lambda^i_{\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_0, \quad \omega^0_i=\Lambda_{i\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_0 \quad (\mathcal{J},\mathcal{J},\mathcal{K},\ldots=1,2,\ldots N) \tag{1.4}$$

Система величин $\{\Lambda^i_{\mathcal{J}}, \Lambda_{i\mathcal{J}}\}$ образует фундаментальный геометрический объект I-го порядка отображения φ. Компоненты полученного путем продолжения системы (I.4) фундаментального объекта 2-го порядка $\{\Lambda^i_{\mathcal{J}}, \Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}, \Lambda_{i\mathcal{J}}, \Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}}\}$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
d\Lambda^i_{\mathcal{J}} &= \Lambda^i_{\mathcal{L}}\Omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{J}} - \Lambda^{\ell}_{\mathcal{J}}\omega^i_{\ell} + \Lambda^i_{\mathcal{J}}(\omega^0_0 - \Omega^0_0) + \Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\Omega^{\mathcal{K}}_0, \\
d\Lambda_{i\mathcal{J}} &= \Lambda_{i\mathcal{L}}\Omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{J}} + \Lambda_{\ell\mathcal{J}}\omega^{\ell}_i - \Lambda_{i\mathcal{J}}(\omega^0_0 + \Omega^0_0) + \Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}}\Omega^{\mathcal{K}}_0, \\
\delta\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}} &= \Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{L}}\Pi^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}} + \Lambda^i_{\mathcal{L}\mathcal{K}}\Pi^{\mathcal{L}}_{\mathcal{J}} - \Lambda^{\ell}_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\pi^i_{\ell} + \Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}(\pi^0_0 - 2\Pi^0_0) - \Lambda^i_{(\mathcal{J}}\Pi^0_{\mathcal{K})} \\
\delta\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}} &= \Lambda_{i\mathcal{K}\mathcal{L}}\Pi^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}} + \Lambda_{i\mathcal{L}\mathcal{K}}\Pi^{\mathcal{L}}_{\mathcal{J}} + \Lambda_{\ell\mathcal{J}\mathcal{K}}\pi^{\ell}_i - \Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}}(\pi^0_0 + 2\Pi^0_0) - \Lambda_{i(\mathcal{J}}\Pi^0_{\mathcal{K})}.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Здесь $\Pi^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'}, \pi^{j'}_{i'}$ и δ означают, соответственно, формы Пфаффа (I.2) и символ дифференцирования при фиксированных первичных параметрах, а $a_{(\mathcal{J}}b_{\mathcal{K})} = a_{\mathcal{J}}b_{\mathcal{K}} + a_{\mathcal{K}}b_{\mathcal{J}}$.

Координатные представления отображения φ_1 и φ_2 в окрестности точки R_0 имеют вид:

$$\tilde{x}^i = \Lambda^i_{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{J}} + \frac{1}{2}\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{K}} + \langle 3\rangle, \quad \tilde{\xi}_i = -\Lambda_{i\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{J}} - \frac{1}{2}\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{K}} + \langle 3\rangle, \tag{1.6}$$

где $\tilde{X}^{\mathcal{J}}$, $\tilde{x}^i$ и $\tilde{\xi}_i$ – соответственно, неоднородные координаты точек $P = R_0 + dR_0 + \frac{1}{2}d^2R_0 + \ldots$, $p = \varphi_1(P)$ и неоднородные тангенциальные координаты гиперплоскости $\pi = \varphi_2(P)$, а $\langle 3\rangle$ означает совокупность членов 3-го порядка малости относительно $\tilde{X}^{\mathcal{J}}$.

Отображение φ_a порождает локальное расслоение пространства P_N на n-параметрическое семейство n-мерных подмногообразий, являющихся прообразами элементов $\varphi_a(P)$.

Каждая точка окрестности U является пересечением двух подмногообразий, относящихся к разным семействам. Касательные к ним в точке R_0 n-плоскости L_a называющиеся F_a-подпространствами. Таким образом, с отображением φ ассоциируется 2 голономных распределения $\{(L_1)\}$ и $\{(L_2)\}$ трансверсально расположенных n-плоскостей. Уравнения последних в точке R_0 имеют в однородных координатах $X^{\mathcal{J}}$ следующий вид:

$$\Lambda^i_{\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}} = 0, \quad \Lambda_{i\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}} = 0 \tag{1.7}$$

Совокупность F_a-характеристических прямых, определяемых как характеристические прямые отображения φ_a в общем случае зависит от n параметров и является алгебраическим конусом порядка 2^n-1 ([2], стр.240), F_1 и F_2-характеристические конусы χ_1 и χ_2 задаются системами уравнений ([4], стр.I2):

$$\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}X^{\mathcal{J}}X^{\mathcal{K}} - 2\Lambda^i_{\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}}(X^0 + \rho) = 0, \tag{1.8}$$

$$\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}}X^{\mathcal{J}}X^{\mathcal{K}} - 2\Lambda_{i\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}}(X^0 + \sigma) = 0. \tag{1.9}$$

Конус $\tilde{\chi}$ слабо характеристических прямых ([4], стр.II) задается системой (I.8), (I.9) и в общем случае является I-параметрическим семейством прямых. Совокупность характеристических прямых χ, определяемых системой (I.8), (I.9) при $\sigma = \rho$, в общем случае содержит 2^N-1 прямую. В [4] дано несколько геометрических критериев, выделяющих характеристические прямые из конуса $\widetilde{X}$ слабо характеристических прямых.Для рассматриваемого случая $N=2n$ справедлива кроме того нижеследующая теорема.

Пусть $K(P_{\mathcal{J}},\hat{P}_{\mathcal{J}})=(K_1(P_{\mathcal{J}}),K_2(\hat{P}_{\mathcal{J}}))$ —касательное к φ отображение,компоненты которого $K_1(P_{\mathcal{J}})$ и $K_2(\hat{P}_{\mathcal{J}})$ имеют, соответственно,вид:

$$\widetilde{x}^i=\frac{\Lambda^i_{\mathcal{J}}\widetilde{X}^{\mathcal{J}}}{1-P_{\varkappa}\widetilde{X}^{\varkappa}}\ ,\quad \widetilde{\xi}_i=\frac{-\Lambda_{i\mathcal{J}}\widetilde{X}^{\mathcal{J}}}{1-\hat{P}_{\varkappa}\widetilde{X}^{\varkappa}}\ , \tag{1.10}$$

причем $P_{\mathcal{J}}=\hat{P}_{\mathcal{J}}$,что геометрически характеризуется равенством:

$$K_1^{-1}(P_{\mathcal{J}})(\pi^\circ)=K_2^{-1}(P_{\mathcal{J}})(\tau_\circ).$$

Здесь π° и $\tau_\circ$ рассматриваются,соответственно,как множества точек гиперплоскости π° и,дуально,гиперплоскостей связки $\{\tau_\circ\}$.

Т е о р е м а I. Характеристические направления отображения φ являются характеристическими направлениями точечного отображения $K^{-1}(P_{\mathcal{J}},P_{\mathcal{J}})\circ\varphi:\ U\to P_N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Уравнения обратного к (I.I0) отображения имеют в некоторой окрестности элемента $\varphi(R_\circ)$ следующий вид:

$$\widetilde{X}^{\mathcal{J}}=\frac{V^{\mathcal{J}}_i\widetilde{x}^i-V^{\mathcal{J}i}\widetilde{\xi}_i}{1+P_{\varkappa}V^{\varkappa}_j\widetilde{x}^j-P_{\varkappa}V^{\varkappa j}\widetilde{\xi}_j}\ , \tag{1.11}$$

где $V^{\mathcal{J}}_i, V^{\mathcal{J}i}$ -компоненты матрицы,обратной к матрице отображения (I.4),так что выполняется:

$$\begin{gathered}V^{\mathcal{J}}_i\Lambda^i_{\varkappa}+V^{\mathcal{J}i}\Lambda_{i\varkappa}=\delta^{\mathcal{J}}_{\varkappa},\ V^{\mathcal{J}}_i\Lambda^j_{\mathcal{J}}=\delta^j_i,\ V^{\mathcal{J}i}\Lambda_{\mathcal{J}j}=\delta^i_j\\ V^{\mathcal{J}}_i\Lambda_{j\mathcal{J}}=0,\ V^{\mathcal{J}i}\Lambda^j_{\mathcal{J}}=0,\end{gathered} \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered}\delta V^{\mathcal{J}i}=-V^{\mathcal{L}i}\Pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}-V^{\mathcal{J}l}\pi^i_l+V^{\mathcal{J}i}(\pi^\circ_\circ+\Pi^\circ_\circ),\\ \delta V^{\mathcal{J}}_i=-V^{\mathcal{L}}_i\Pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}+V^{\mathcal{J}}_l\pi^l_i+V^{\mathcal{J}}_i(\Pi^\circ_\circ-\pi^\circ_\circ).\end{gathered} \tag{1.13}$$

Разложив отображение (I.II) в степенной ряд в окрестности элемента $\varphi(R_\circ)$,и используя формулы (I.6) и (I.I2), получим представление отображения $K^{-1}(P_{\mathcal{J}},P_{\mathcal{J}})\circ\varphi$ в виде:

$$\widetilde{Y}^{\mathcal{J}}=\widetilde{X}^{\mathcal{J}}+\tfrac{1}{2}(\Gamma^{\mathcal{J}}_{\varkappa\mathcal{L}}-\delta^{\mathcal{J}}_{(\varkappa}P_{\mathcal{L})})\widetilde{X}^{\varkappa}\widetilde{X}^{\mathcal{L}}+\langle 3\rangle, \tag{1.14}$$

где $\widetilde{Y}^{\mathcal{J}}$ -неоднородные координаты точки $K^{-1}\circ\varphi(P)$,а

$$\Gamma^{\mathcal{L}}_{\mathcal{J}\varkappa}=V^{\mathcal{L}}_i\Lambda^i_{\mathcal{J}\varkappa}+\Lambda^{\mathcal{L}i}\Lambda_{i\mathcal{J}\varkappa}. \tag{1.15}$$

Пусть координаты точки $A(X^\circ,X^{\mathcal{J}}),X^{\mathcal{J}}\neq 0$ удовлетворяют уравнениям

$$\Gamma^{\mathcal{L}}_{\mathcal{J}\varkappa}X^{\mathcal{J}}X^{\varkappa}-2X^{\mathcal{L}}(X^\circ+\sigma)=0. \tag{1.16}$$

Тогда прямая $AR_\circ$ имеет касание 2-го порядка со своим образом при отображении (I.I4),т.е. является характеристической прямой.Но из (I.I5) и (I.I2) следует,что система (I.I6) равносильна системе (I.8),(I.9) при $\sigma=\rho$.

§2.Окрестность I-го порядка распределения $\{(L_1,L_2)\}$.

Поместим вершины $R_\alpha\ (\alpha,\beta,\ldots=1,2,\ldots,n)$ репера R в F_1-подпространство,а вершины $R_{\hat{\alpha}}\ (\hat{\alpha},\hat{\beta},\ldots=n+1,n+2,\ldots,N)$ - в F_2-подпространство.Имеем:

$$\Lambda^i_{\hat{\alpha}}\equiv 0,\ \Lambda_{i\alpha}\equiv 0,\ V^{\hat{\alpha}}_i\equiv 0,\ V^{\alpha i}\equiv 0.$$

С учетом этих соотношений получаем из (I.5):

$$\Omega^{\alpha}_{\hat{\alpha}}=\Lambda^{\alpha}_{\hat{\alpha}\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_{0}\,, \quad \Omega^{\hat{\alpha}}_{\alpha}=\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_{0}. \tag{2.1}$$

где системы величин $\Lambda^{\alpha}_{\hat{\alpha}\mathcal{J}}$ и $\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\mathcal{J}}$ определены равенствами

$$\Lambda^{\alpha}_{\hat{\alpha}\mathcal{J}}=-V^{\alpha}_{i}\Lambda^{i}_{\hat{\alpha}\mathcal{J}}\,, \quad \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\mathcal{J}}=-V^{\hat{\alpha}i}\Lambda_{i\alpha\mathcal{J}}. \tag{2.2}$$

Зададим оператор $\overset{\circ}{\nabla}$ формулой:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\nabla}E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat{\alpha}_1\dots\hat{\alpha}_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat{\beta}_1\dots\hat{\beta}_p}&=\delta E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat{\alpha}_1\dots\hat{\alpha}_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat{\beta}_1\dots\hat{\beta}_p}+E^{\gamma\alpha_2\dots\alpha_s\hat{\alpha}_1\dots\hat{\alpha}_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat{\beta}_1\dots\hat{\beta}_p}\Pi^{\alpha_1}_{\gamma}+\dots+\\&+E^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}\gamma\hat{\alpha}_1\dots\hat{\alpha}_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat{\beta}_1\dots\hat{\beta}_p}\Pi^{\alpha_s}_{\gamma}+E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat{\gamma}\hat{\alpha}_2\dots\hat{\alpha}_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat{\beta}_1\dots\hat{\beta}_p}\Pi^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\gamma}}+\dots+\\&+E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat{\alpha}_1\dots\hat{\alpha}_{q-1}\hat{\gamma}}_{\beta_1\dots\beta_r\hat{\beta}_1\dots\hat{\beta}_p}\Pi^{\hat{\alpha}_q}_{\hat{\gamma}}-E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat{\alpha}_1\dots\hat{\alpha}_q}_{\gamma\beta_2\dots\beta_r\hat{\beta}_1\dots\hat{\beta}_p}\Pi^{\gamma}_{\beta_1}-\dots-\\&-E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat{\alpha}_1\dots\hat{\alpha}_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat{\beta}_1\dots\hat{\beta}_{p-1}\hat{\gamma}}\Pi^{\hat{\gamma}}_{\hat{\beta}_p}-(s+q-r-p)E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat{\alpha}_1\dots\hat{\alpha}_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat{\beta}_1\dots\hat{\beta}_p}\Pi^{0}_{0}.\end{aligned}$$

Системы величин (2.I), которые подчиняются, как это следует из (I.5), дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}&\overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}\Pi^{0}_{\hat{\alpha}}\,, \quad \overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\alpha}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=0,\\&\overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\hat{\beta}}=\delta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}\Pi^{0}_{\alpha}\,, \quad \overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}=0\end{aligned} \tag{2.3}$$

является фундаментальным геометрическим объектом I-го порядка распределения ([3], стр.60) пары n-плоскостей (L_1, L_2). При этом тензоры $\{\Lambda^{\alpha}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\}$ и $\{\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}\}$ симмет-

ричны по нижним индексам, так что распределения $\{L_1\}$ и $\{L_2\}$ голономны, что, впрочем, следует и из геометрического смысла плоскостей L_a. Квазитензорами $\{\Lambda^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta}\}$ и $\{\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\hat{\beta}}\}$ охватываются, соответственно, одновалентные квазитензоры:

$$\Lambda_{\hat{\alpha}}\overset{d}{=}\Lambda^{\alpha}_{\hat{\alpha}\alpha}\,, \quad \overset{\circ}{\nabla}\Lambda_{\hat{\alpha}}=n\Pi^{0}_{\hat{\alpha}}\,, \tag{2.4}$$

$$\Lambda_{\alpha}\overset{d}{=}\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\hat{\alpha}}\,, \quad \overset{\circ}{\nabla}\Lambda_{\alpha}=n\Pi^{0}_{\alpha}. \tag{2.5}$$

Найдем основные геометрические образы первой дифференциальной окрестности распределения $\{(L_1, L_2)\}$.

Пусть тензор $A^{\alpha}_{\hat{\alpha}}$ $(\overset{\circ}{\nabla}A^{\alpha}_{\hat{\alpha}}=0)$ определяет нормаль I-го рода распределения $\{L_1\}$:

$$X^{\alpha}-A^{\alpha}_{\hat{\alpha}}X^{\hat{\alpha}}=0. \tag{2.6}$$

Ассоциированный с распределением $\{L_1\}$ обобщенный проективитет Бомпиани-Пантази ([3], стр.85) ставит в соответствие нормали (2.6) нормаль II-го рода:

$$X^{\hat{\alpha}}=0\,, \; X^{0}+\frac{1}{n}X^{\alpha}(\Lambda_{\alpha}+\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}A^{\beta}_{\hat{\alpha}})=0, \tag{2.7}$$

определенную квазитензором

$$A_{\alpha}=-\frac{1}{n}(\Lambda_{\alpha}+\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\hat{\alpha}}),\; \overset{\circ}{\nabla}A_{\alpha}=-\Pi^{0}_{\alpha}. \tag{2.8}$$

Аналогично, с распределением $\{L_2\}$ ассоциируется обобщенный проективитет Бомпиани-Пантази, который ставит в соответствие нормали I-го рода этого распределения

$$X^{\hat{\alpha}}-A^{\hat{\alpha}}_{\alpha}X^{\alpha}=0, \quad \overset{\circ}{\nabla}A^{\hat{\alpha}}_{\alpha}=0. \tag{2.9}$$

нормаль II-го рода:

$$X^{\alpha}=0,\ X^{0}+\frac{1}{n}X^{\hat\alpha}(\Lambda_{\hat\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\hat\beta}A^{\hat\beta}_{\alpha})=0. \qquad (2.10)$$

Взяв в качестве нормали I-го рода распределения $\{L_a\}$ n-плоскость L_b, получим внутренние связанные с распределением $\{(L_1,L_2)\}$ инвариантные нормали II-го рода, лежащие в плоскостях L_1 и L_2 и определяемые, соответственно, объектами $\{\Lambda_\alpha\}$ и $\{\Lambda_{\hat\alpha}\}$:

$$X^{\hat\alpha}=0,\ X^{0}+\frac{1}{n}\Lambda_{\alpha}X^{\alpha}=0, \qquad (2.11)(1)$$

$$X^{\alpha}=0,\ X^{0}+\frac{1}{n}\Lambda_{\hat\alpha}X^{\hat\alpha}=0 \qquad (2.11)(2)$$

Пусть точка R_0 смещается в n-плоскости L_a. Характеристика элемента L_a, определяемая системой

$$X^{\hat\alpha}=0,\ X^{\alpha}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\Omega^{\beta}=0, \qquad (2.12)(1)$$

для $a=1$, и

$$X^{\alpha}=0,\ X^{\hat\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\hat\beta}\Omega^{\hat\beta}=0 \qquad (2.12)(2)$$

для $a=2$ в общем случае является прямой. Уравнения асимптотических конусов для многообразий $\varphi^{-1}(\varphi_1(R_0))$ и $\varphi^{-1}(\varphi_2(R_0))$ в точке R_0 имеют, соответственно, вид:

$$\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}=0,\ X^{\hat\alpha}=0, \qquad (2.13)(1)$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}=0,\ X^{\alpha}=0. \qquad (2.13)(2)$$

Уравнение фокального многообразия элемента L_a при смещении точки R_0 в n-плоскости L_b имеет вид:

$$\det(X^{0}\delta^{\hat\alpha}_{\hat\beta}+X^{\alpha}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta})=0,\ X^{\hat\alpha}=0 \qquad (2.14)(1)$$

для $a=1$ и

$$\det(X^{0}\delta^{\alpha}_{\beta}+X^{\hat\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\beta})=0,\ X^{\alpha}=0 \qquad (2.14)(2)$$

для $a=2$. В общем случае система (2.14) (a) определяет $(n-1)$-мерную алгебраическую поверхность в F_a-подпространстве. Каждой её точке $P(X^{J'})$ соответствует направление в L_b, для которого эта точка является фокальной. Это направление определяется системой ([3], стр.81)

$$(X^{0}\delta^{\hat\alpha}_{\hat\beta}+X^{\alpha}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta})\Omega^{\hat\beta}_{0}=0,\ \Omega^{\hat\alpha}=0, \qquad (2.15)(1)$$

если точка P лежит на многообразии (2.14) (1).

Объект I-го порядка распределения $\{(L_1,L_2)\}$ определяет два инвариантных $(n-1)$-параметрических линейных семейства гиперквадрик, соприкасающихся в точке R_0 с многообразиями $\varphi^{-1}(\varphi_1(R_0))$ и $\varphi^{-1}(\varphi_2(R_0))$. Уравнения базисных гиперквадрик этих семейств имеют, соответственно, вид:

$$F^{\hat\alpha}\equiv\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}-2\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta}X^{\alpha}X^{\hat\beta}-\frac{2}{n}\Lambda_{\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}-2X^{\hat\alpha}X^{0}=0, \qquad (2.16)(1)$$

$$F^{\alpha}\equiv\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}-2\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}X^{\hat\alpha}X^{\beta}-\frac{2}{n}\Lambda_{\beta}X^{\alpha}X^{\beta}-2X^{\alpha}X^{0}=0, \qquad (2.17)(2)$$

так что произвольные гиперквадрики этих семейств задаются уравнениями:

$$\Lambda_{\hat{\alpha}} F^{\hat{\alpha}} = 0, \qquad (2.17)\,(1)$$

$$\Lambda_{\alpha} F^{\alpha} = 0 . \qquad (2.17)\,(2)$$

Кроме соприкосновения с многообразием $\varphi^{-1}(\varphi_a(R_0))$ гиперквадрики (2.16)(a) характеризуются геометрически следующими двумя свойствами. Поляры точек n-плоскости L_b относительно семейства гиперквадрик вида (2.17)(a) (т.е. общая часть поляр относительно всех гиперквадрик этого семейства), пересекающие F_a-подпространство, имеют точками пересечения точки фокального многообразия (2.14)(a).

•Пересечения гиперквадрик (2.17) (a) с F_b'-подпространством распадается на две $(n-1)$-плоскости, одна из которых является общей для всего семейства и совпадает с нормалью II-го рода (2.11) (b).

С каждой прямой ℓ связки $\{R_0\}$, не лежащей в n-плоскостях L_a, ассоциируется содержащая её двумерная плоскость, определяемая прямыми $\ell_1 = K^{-1}(R_\mathcal{J}, P_\mathcal{J}) \circ K_1(\hat{P}_\mathcal{J})(\ell)$ и $\ell_2 = K^{-1}(P_\mathcal{J}, P_\mathcal{J}) \circ K_2(\hat{P}_\mathcal{J})(\ell)$. Пусть прямая ℓ задается тензором $A^\mathcal{J}$ $(\overset{\circ}{\nabla} A^\mathcal{J} = 0)$. Тогда прямая ℓ^* с координатами $(A^\alpha, -A^{\hat{\alpha}})$ будет гармонически сопряжена прямой ℓ относительно n-плоскостей L_a (т.е. относительно прямых ℓ_a).

Т е о р е м а 2. Множество фокальных точек n-плоскости L_1 соответствующих направлению, задаваемому прямой ℓ, является пересечением n-плоскости L_1, с полярой прямой ℓ^* относительно семейства гиперквадрик (2.17) (I)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координаты фокальных точек удовлетворяют системе:

$$X^{\hat{\alpha}} = 0, \ \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} A^{\beta} X^{\alpha} + \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\hat{\beta}} A^{\hat{\beta}} X^{\alpha} + A^{\hat{\alpha}} X^{0} = 0 \qquad (2.18)$$

([3], стр.80). К тем же уравнениям приходим при определении пересечения n-плоскости L_1 и поляр точек прямой ℓ^* относительно гиперквадрик (2.17) (I).

Имеет место аналогичная теорема для L_2 и гиперквадрик (2.17) (2).

§3. Связь геометрии распределения $\{(L_1, L_2)\}$ с отображением φ.

Введем системы величин:

$$\Gamma_1 = \{\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\}, \ \Gamma_2 = \{\Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat{\beta}}\}, \ \Gamma_3 = \{\Gamma^{\gamma}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\},$$
$$\Gamma^1 = \{\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\}, \ \Gamma^2 = \{\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\beta}\}, \ \Gamma^3 = \{\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\alpha\beta}\}, \qquad (3.1)$$

где

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = V^{\gamma}_{i} \Lambda^{i}_{\alpha\beta}, \ \Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat{\beta}} = V^{\gamma}_{i} \Lambda^{i}_{\alpha\hat{\beta}}, \ \Gamma^{\gamma}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = V^{\gamma}_{i} \Lambda^{i}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}},$$
$$\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = V^{\hat{\gamma}i} \Lambda_{i\hat{\alpha}\hat{\beta}}, \ \Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\beta} = V^{\hat{\gamma}i} \Lambda_{i\hat{\alpha}\beta}, \ \Gamma^{\hat{\gamma}}_{\alpha\beta} = V^{\hat{\gamma}i} \Lambda_{i\alpha\beta}, \qquad (3.2)$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = -\delta^{\gamma}_{(\alpha} \Pi^{0}_{\beta)}, \ \overset{\circ}{\nabla} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat{\beta}} = -\delta^{\gamma}_{\alpha} \Pi^{0}_{\hat{\beta}}, \ \overset{\circ}{\nabla} \Gamma^{\gamma}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0,$$
$$\overset{\circ}{\nabla} \Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -\delta^{\hat{\gamma}}_{(\hat{\alpha}} \Pi^{0}_{\hat{\beta})}, \ \overset{\circ}{\nabla} \Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\beta} = -\delta^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}} \Pi^{0}_{\beta}, \ \overset{\circ}{\nabla} \Gamma^{\hat{\gamma}}_{\alpha\beta} = 0 \qquad (3.3)$$

Тогда уравнения инвариантных направляющих конусов χ_1 и χ_2 получаемых из систем (I.8) и (I.9) при $\rho = 0$ и $\sigma = 0$, примут, соответственно, вид

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}+2\Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat\beta}X^{\alpha}X^{\hat\beta}+\Gamma^{\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}-2X^{\gamma}X^{\circ}=0, \qquad (3.4)(1)$$

$$\Gamma^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}+2\Gamma^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\beta}X^{\hat\alpha}X^{\beta}+\Gamma^{\hat\gamma}_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}-2X^{\hat\gamma}X^{\circ}=0. \qquad (3.4)(2)$$

Назовем их, соответственно, F_1- и F_2-индикатрисами. Их геометрическая характеристика дается в [4]. В общем случае F_a-индикатриса является n-мерным алгебраическим многообразием порядка 2^n, содержащим точку R_o. Нулевые направления отображения φ_a выделяются из множества характеристических направлений этого отображения тем, что определяемые ими прямые касаются F_a-индикатрисы в точке R_o. Более полно, F_b-подпространство является касательным подпространством к F_a-индикатрисе в точке R_o.

Т е о р е м а 3. Асимптотические направления многообразия $\varphi^{-1}(\varphi_a(R_o))$ в точке R_o совпадают с асимптотическими направлениями F_a-индикатрисы.

Заметим, что

$$\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\mathcal{J}}=-\Gamma^{\alpha}_{\mathcal{J}\hat\alpha}, \quad \Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\mathcal{J}}=-\Gamma^{\hat\alpha}_{\mathcal{J}\alpha}. \qquad (3.5)$$

Доказательство теоремы следует теперь из (2.I3) и (3.4).

Рассмотрим два линейных $(n-1)$-параметрических семейства гиперквадрик вида

$$\Lambda_{\alpha}\Phi^{\alpha}=0, \qquad (3.6)(1)$$

$$\Lambda_{\hat\alpha}\Phi^{\hat\alpha}=0, \qquad (3.6)(2)$$

где Φ^{α} и $\Phi^{\hat\alpha}$ - соответственно, левые части уравнений (3.4)(1) и (3.4)(2). F_a-индикатриса является пересечением всех гиперквадрик (3.6)(a).

Пусть поляра точки $P_1\in L_1$ относительно F_1-индикатрисы (т.е. пересечение поляр относительно всех гиперквадрик (3.6)(I)) имеет с F_2-подпространством общую точку $P_2(Y^{\mathcal{J}'})$. Координаты $X^{\mathcal{J}'}$ точки P_1 тогда удовлетворяют системе

$$X^{\hat\alpha}=0, \quad \Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat\beta}Y^{\hat\beta}X^{\alpha}-X^{\gamma}Y^{\circ}=0, \qquad (3.7)$$

которая имеет решение только в случае, если выполняется

$$\det(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat\beta}Y^{\hat\beta}-\delta^{\gamma}_{\alpha}Y^{\circ})=0. \qquad (3.8)$$

Следовательно, точка P_2 является фокальной точкой n-плоскости L_2. Аналогичным свойством обладает и F_2-индикатриса, т.е. справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Поляры точек F_a-подпространства относительно F_a-индикатрисы, пересекающие F_b-подпространство, имеют своими точками пересечения точки фокального многообразия (2.I5)(b).

Следующая теорема доказывается так же, как и теорема 2 с учетом равенств (3.5).

Т е о р е м а 5. Пересечение F_a-подпространства с полярой некоторой прямой связки $\{R_o\}$ относительно F_a-индикатрисы состоит из фокальных точек F_a-подпространства, соответствующих направлению, задаваемому этой прямой.

Кроме инвариантно связанной с распределением $\{(L_1, L_2)\}$ нормали II-го рода (2.II)(I) многообразия $\varphi^{-1}(\varphi_1(R_o))$ объектами $\{\Gamma^{\gamma}_{\gamma\alpha}\}$ и $\{\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\alpha}\}$ определяются еще две инвариантных нормали II-го рода

$$X^{\hat\alpha}=0,\quad \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}X^{\alpha}-(n+1)X^{0}=0, \qquad (3.9)$$

$$X^{\hat\alpha}=0,\quad \Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\alpha}X^{\alpha}-(N+1)X^{0}=0. \qquad (3.10)$$

Для характеристики последней нормали выделим в пучке касательных отображений $K(P_{\mathcal{J}})=(K_1(P_{\mathcal{J}}),K_2(P_{\mathcal{J}}))$ одно отображение $K(\mathring{P}_{\mathcal{J}})$, определяемое равенством

$$\mathring{P}_{\mathcal{J}}=\frac{1}{N+1}\Gamma^{\varkappa}_{\varkappa\mathcal{J}}. \qquad (3.11)$$

Оно характеризуется более тесным сближением с отображением φ в том смысле, что в точке R_0 выполняется

$$d\mathfrak{J}(K(\mathring{P}_{\mathcal{J}}))=d\mathfrak{J}(\varphi), \qquad (3.12)$$

где $\mathfrak{J}(K(\mathring{P}_{\mathcal{J}}))$ и $\mathfrak{J}(\varphi)$, соответственно, якобианы отображений $K(\mathring{P}_{\mathcal{J}})$ и φ в точке R_0.

Действительно, из (I.6) и (I.IO) получаем:

$$d\ln\mathfrak{J}(\varphi)=\Gamma^{\varkappa}_{\varkappa\mathcal{J}}\widetilde{X}^{\mathcal{J}}, \qquad (3.13)$$

$$d\ln\mathfrak{J}(K(P_{\mathcal{J}}))=(N+1)P_{\mathcal{J}}\widetilde{X}^{\mathcal{J}}, \qquad (3.14)$$

откуда, учитывая касание φ и $K(\mathring{P}_{\mathcal{J}})$ в точке R_0, получаем (3.I2).

Из (I.IO) и (3.II) вытекает следующее утверждение: Нормаль II-го рода (3.IO) является прообразом гиперплоскости π при отображении, являющемся сужением $K(\mathring{P}_{\mathcal{J}})$ на L_1.

Подобным же образом дается характеристика нормали (3.9) ([4],стр. II).

Между нормалями II-го рода (3.9),(3.IO) и (2.II) (I) существует следующая связь:

Т е о р е м а 6. Ассоциированная с распределением $\{(L_1,L_2)\}$ нормаль II-го рода (2.II)(I) многообразия $\varphi^{-1}(\varphi_1(R_0))$ принадлежит пучку нормалей II-го рода

$$X^{\hat\alpha}=0,\ \Big[\frac{1}{N+1}\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\alpha}+\sigma\Big(\frac{1}{n+1}\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}-\frac{1}{N+1}\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\alpha}\Big)\Big]X^{\alpha}-X^{0}=0, \qquad (3.15)$$

порожденному нормалями 2-го рода (3.9) и (3.IO) и определяется значением $\sigma=-(1+\frac{1}{n})$.

Аналогичным образом интерпретируются нормали II-го рода

$$X^{\alpha}=0,\quad \Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\hat\alpha}X^{\hat\alpha}-(N+1)X^{0}=0, \qquad (3.16)$$

$$X^{\alpha}=0,\quad \Gamma^{\hat\beta}_{\hat\beta\hat\alpha}X^{\hat\alpha}-(n+1)X^{0}=0. \qquad (3.17)$$

многообразия $\varphi^{-1}(\varphi_2(R_0))$ в точке R_0, определяющие пучок нормалей II-го рода

$$X^{\alpha}=0,\ \Big[\frac{1}{N+1}\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\hat\alpha}+\sigma\Big(\frac{1}{n+1}\Gamma^{\hat\beta}_{\hat\beta\hat\alpha}-\frac{1}{N+1}\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\hat\alpha}\Big)\Big]X^{\hat\alpha}-X^{0}=0, \qquad (3.18)$$

который содержит нормаль (2.II) (2).

§4. Классификация точек вырождения отображения φ.

Рассмотрим тензоры

$$T_1=\{\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}-\frac{1}{n+1}\delta^{\gamma}_{(\alpha}\Gamma^{\eta}_{\beta)\eta}\},\ T_2=\{\Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat\beta}-\frac{1}{n}\delta^{\gamma}_{\alpha}\Gamma^{\eta}_{\eta\hat\beta}\},\ T_3=\{\Gamma^{\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta}\},$$

$$T^1=\{\Gamma^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta}-\frac{1}{n+1}\delta^{\hat\gamma}_{(\hat\alpha}\Gamma^{\hat\eta}_{\hat\beta)\hat\eta}\},\ T^2=\{\Gamma^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\beta}-\frac{1}{n}\delta^{\hat\gamma}_{\hat\alpha}\Gamma^{\hat\eta}_{\hat\eta\beta}\},\ T^3=\{\Gamma^{\hat\gamma}_{\alpha\beta}\},\quad(4.1)$$

$$T_4=\{\frac{1}{N+1}\Gamma^{J}_{J\alpha}-\frac{1}{n+1}\Gamma^{\hat\gamma}_{\hat\gamma\alpha}\},\ T^4=\{\frac{1}{N+1}\Gamma^{J}_{J\hat\alpha}-\frac{1}{n+1}\Gamma^{\gamma}_{\gamma\hat\alpha}\}.$$

Обращение одного из них в фиксированной точке R_0 в нулевой тензор инвариантно и не зависит от типа остальных тензоров. Строение присоединенных геометрических образов второй дифференциальной окрестности при этом отличается от общего случая, т.е. отображение φ претерпевает в точке R_0 вырождение определенного типа. Возникает следующая классификация точек области U по признаку указанных вырождений в них отображения φ. Будем обозначать тип точки R_0 буквой Z с указанием номеров тензоров (4.I), аннулирующихся в точке R_0. Таким образом, эта классификация выделяет $255 = 2^8-1$ типов точек вырождения отображения φ. Рассмотрим некоторые из них.

Точки типа Z_3 являются точками уплощения многообразия $\varphi^{-1}(\varphi_2(R_0))$. Проективитет Бомпиани-Пантази (2.IO) вырождается в тождественное отображение, которое всем нормалям I-го рода (2.9) распределения $\{L_2\}$ ставит в соответствие инвариантную нормаль II-го рода (2.II)(2). Множества фокальных точек n-плоскости L_2, соответствующих направлениям Ω^{J}_0, которые имеют одинаковые проекции Ω^{α}_0 на n-плоскость L_1, совпадают.

Точки типа Z_2 характеризуются тем, что фокальное многообразие (2.I4)(2) распределения $\{L_2\}$ соответствующее n-плоскости L_1, вырождается в $(n-1)$-плоскость, совпадающую с нормалью II-го рода (2.II)(2).

Точки типа $Z_{2,3}$ обладают всеми свойствами точек типов Z_2 и Z_3. Фокальным многообразием, соответствующим любому направлению, является в этих точках $(n-1)$-плоскость (2.II)(2). Конус χ_1 F_1-характеристических прямых распадается на $(n+1)$-плоскости, каждая из которых определяется F_2-подпространством и одной из собственно F_1-характеристических прямых (т.е. F_1-характеристических прямых, лежащих в F_1-подпространстве).

Аналогичными свойствами обладает отображение φ в точках типов Z^3, Z^2 и $Z^{2,3}$.

В точке типа Z_1 (Z^1) каждое направление, лежащее в F_1- (F_2)-подпространстве, является F_1- (F_2)-характеристическим.

F_1-индикатриса в точке типа $Z_{1,2,3}$ распадается на n-плоскость L_2 и неинцидентную точке R_0 гиперплоскость, пересекающую L_2 и L_1, соответственно, по нормали II-го рода (2.II)(2) распределения $\{L_2\}$ и по $(n-1)$-плоскости (3.9). Таким образом, любое направление является F_1-характеристическим, а конус $\tilde\chi$ слабо характеристических прямых совпадает с конусом χ F_2-характеристических. Направляющей конуса характеристических прямых, не лежащих в F_1 подпространстве, является пересечение F_2-индикатрисы с указанной гиперплоскостью. Аналогичное строение имеют соответствующие геометрические образы в точке $Z^{1,2,3}$.

В точке типа $Z^{1,2,3}_{1,2,3}$ любое направление является *слабо* характеристическим направлением. Характеристические направления в такой точке лежат в гиперплоскости

$$\left(\frac{1}{n+1}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}-\frac{1}{n}\Gamma^{\hat\beta}_{\alpha\hat\beta}\right)X^{\alpha}-\left(\frac{1}{n}\Gamma^{\beta}_{\hat\alpha\beta}-\frac{1}{n+1}\Gamma^{\hat\beta}_{\hat\alpha\hat\beta}\right)X^{\hat\alpha}=0, \quad (4.2)$$

а также в F_1 и F_2-подпространствах.

И, наконец, в точке типа $Z^{1,2,3,4}_{1,2,3,4}$ любое направление является характеристическим.

Л и т е р а т у р а

I. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. (Труды геом. семинара, т.2, 1969, ВИНИТИ АН СССР, стр. 179-206).

2. Рыжков В.В., Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n. (Труды геом. семинара, т.3, 1971, ВИНИТИ АН СССР, с.235-242).

3. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М., Распределения m-мерных линейчатых элементов в пространстве проективной связности I. (Труды геом. семинара, т.3, 1971, ВИНИТИ АН СССР, с.49-94)

4. Андреев Б.А., О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, Калининград, 1973, с.6-19.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

И в л е в Е.Т.

ОБ ОСНАЩЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ.

В статье [I] в пространстве проективной связности геометрически построены поля нормалей первого и второго рода в смысле Нордена А.П. m-поверхности S_m с заданным полем гиперплоскостей, проходящих через соответствующие m-плоскости L_m, касательные к S_m, т.е. m-мерной гиперполосы в смысле Вагнера В.В. [2]. Настоящая статья посвящена другому построению поля нормалей первого рода m-мерной гиперполосы в $P_{n,n}$, отличному от того, которое дается в статье [I]. В заключительном параграфе данной статьи решается одна задача, связанная с оснащением m-мерной гиперполосы в пространстве проективной связности.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [3]-[5] и [I].

§I. Аналитический аппарат.

Как известно [4], пространство проективной связности $P_{n,n}$ есть расслоенное пространство, базой которого служит

n-мерное дифференцируемое многообразие, а слоем (u), соответствующим точке $A(u)$ базы, является n-мерное проективное пространство P_n. Здесь u означает локальные координаты $u^1, \ldots, u^n$ точки A базы, которые являются первыми интегралами некоторой вполне интегрируемой системы форм ω^i ($i, j, k = 1, 2, \ldots, n$). Пусть слой (u) отнесен к подвижному проективному реперу $T = \{A_0(u), \ldots, A_n(u)\}$, где $A \equiv A_0$. Линейные дифференциальные формы $\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}}$ являются формами связности, т.е. определяют главную линейную часть отображения локального проективного пространства $P_n(u+du)$ точки $A(u+du)$ базы пространства $P_{n,n}$ на исходное пространство $P_n(u)$:

$$A_{\mathcal{J}}(u+du) \to A_{\mathcal{J}}(u, du) \cong A_{\mathcal{J}}(u) + \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}(u),$$

тогда и только тогда, когда они подчинены следующим структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} \wedge \omega_{\mathcal{L}}^{\mathcal{J}} + R_{\mathcal{K}ij}^{\mathcal{J}} \omega^i \wedge \omega^j, \tag{1.1}$$

$$\omega_{\mathcal{L}}^{\mathcal{L}} = 0,$$

$$(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = 0, 1, \ldots, n; \quad i, j, k, \ell = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь тензор кручения-кривизны $R_{\mathcal{J}ij}^{\mathcal{K}}$ кососимметричен по индексам i и j.

Рассмотрим в $P_{n,n}$ некоторую m-мерную поверхность (m-поверхность) S_m, текущей точкой которой является точка A_0. Проективный репер T локального проективного пространства P_n (слоя) точки A_0 m-поверхности S_m выбираем так, чтобы m-плоскость $L_m = (A_0 A_1 \ldots A_m)$ являлась касательной m-плоскостью к S_m в точке A_0. Тогда

$$\omega^{\hat{\alpha}} = 0, \quad (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = m+1, \ldots, n), \tag{1.2}$$

(см., например, формулы (7) в [I]. Продолжение этой системы с использованием структурных уравнений (I.I) приводит к системе

$$\omega_{\beta}^{\hat{\alpha}} = A_{\beta\gamma}^{\hat{\alpha}} \omega^{\gamma}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \mu, \sigma = 1, 2, \ldots, m), \tag{1.3}$$

где

$$A_{\beta\gamma}^{\hat{\alpha}} = \Lambda_{\beta\gamma}^{\hat{\alpha}} + R_{0\gamma\beta}^{\hat{\alpha}}. \tag{1.4}$$

Здесь величины $\Lambda_{\beta\gamma}^{\hat{\alpha}}$ симметричны, а величины $R_{0\gamma\beta}^{\hat{\alpha}}$ кососимметричны по индексам β и γ.

Продолжение системы (I.3) приводит к системе дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют компоненты геометрического объекта $\{A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}\}$ [3]:

$$d A_{\beta\gamma}^{\hat{\alpha}} + A_{\beta\gamma}^{\hat{\alpha}} \omega_0^0 - A_{\beta\sigma}^{\hat{\alpha}} \omega_{\gamma}^{\sigma} - A_{\sigma\gamma}^{\hat{\alpha}} \omega_{\beta}^{\sigma} + A_{\beta\gamma}^{\hat{\gamma}} \omega_{\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}} +$$

$$+ (R_{0\alpha\gamma}^{\sigma} A_{\beta\sigma}^{\hat{\alpha}} + R_{\beta\gamma\alpha}^{\hat{\alpha}}) \omega^{\alpha} = \bar{A}_{\beta\gamma\sigma}^{\hat{\alpha}} \omega^{\sigma}, \tag{1.5}$$

(см., например, формулы (II) в [I]). Здесь величины $\bar{A}_{\beta\gamma\sigma}^{\hat{\alpha}}$ симметричны по индексам γ и σ.

§2. Гиперконусы $T_{(k)}^m$ ($k = 1, 2, 3$).

I. Рассмотрим в каждом локальном пространстве P_n (слое) точки A_0 гиперплоскость, проходящую через L_m и определяемую уравнением

$$x_{\hat{\alpha}} x^{\hat{\alpha}} = 0. \qquad (2.1)$$

В статье [I] (см. §3) показано, что каждой гиперплоскости (2.I) в m-плоскости L_m отвечают конус второго порядка с вершиной в точке A_0, определяемый системой

$$x_{\hat{\alpha}} \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \; x^{\hat{\beta}} = 0, \qquad (2.2)$$

и $(m-1)$-мерный линейный комплекс, определяемый уравнениями

$$x_{\hat{\alpha}} R^{\hat{\alpha}}_{0\alpha\beta} x^\alpha t^\beta = 0, \; x^{\hat{\alpha}} = 0, \; t^{\hat{\beta}} = 0. \qquad (2.3)$$

Геометрическая интерпретация этих образов дана в статье [I] (см. (32) и (33)).

В статье [I] также показано, что с гиперплоскостью (2.I) ассоциируется $(m-1)$-плоскость в L_m, проходящая через A_0 и определяемая системой (см. (29) в [I]):

$$x^\alpha x_{\hat{\alpha}} A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} t^\beta = 0, \; t^{\hat{\beta}} = 0, \qquad (2.4)$$

которая отвечает каждой прямой (28) в [I]. Геометрически эта $(m-1)$-плоскость, как известно [I], содержит все прямые (30) в [I], в направлении которых $Tx\{t^\alpha\}$ принадлежит гиперплоскости (2.I). Здесь $Tx\{t^\alpha\}$ касательное линейное подпространство к I-семейству прямых

$$x = x^\alpha (A_0 A_\alpha) \qquad (2.5)$$

в направлении

$$t = t^\alpha (A_0 A_\alpha).$$

2. Геометрические образы (2.4), (2.2) и (2.3) дают возможность определить и геометрически охарактеризовать гиперконусы $T^m_{(k)}$ класса m с вершиной L_m, каждый из которых определяется соответствующим уравнением:

$$\underset{(k)}{G}^{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_m} x_{\hat{\alpha}_1} x_{\hat{\alpha}_2} \dots x_{\hat{\alpha}_m} = 0, \qquad (2.6)$$

$$(k = 1, 2, 3; \; \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m = m+1, \dots, n),$$

где симметрические по верхним индексам величины $\underset{(k)}{G}^{\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_m}$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \underset{(1)}{G}^{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_m} &= \frac{1}{m!} \det \left\| A^{(\hat{\alpha}_1}_{1\alpha} \; A^{\hat{\alpha}_2}_{2\alpha} \dots A^{\hat{\alpha}_m)}_{m\alpha} \right\| \\ \underset{(2)}{G}^{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_m} &= \frac{1}{m!} \det \left\| \Lambda^{(\hat{\alpha}_1}_{1\alpha} \; \Lambda^{\hat{\alpha}_2}_{2\alpha} \dots \Lambda^{\hat{\alpha}_m)}_{m\alpha} \right\| \qquad (2.7) \\ \underset{(3)}{G}^{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_m} &= \frac{1}{m!} \det \left\| R^{(\hat{\alpha}_1}_{01\alpha} \; R^{\hat{\alpha}_2}_{02\alpha} \dots R^{\hat{\alpha}_m)}_{0m\alpha} \right\| \end{aligned}$$

(α -номер строк).

Каждый из гиперконусов $T^m_{(k)}$ является определенным при следующих соотношениях между m и n:

$$T^m_{(1)}: \qquad n \leq m^2 + m ,$$

$$T^m_{(2)}: \qquad n \leq \frac{m(m+3)}{2}, \qquad (2.7')$$

$$T^m_{(3)}: \qquad n \leq \frac{m(m+1)}{2}, \qquad m - \text{четное}$$

Геометрически гиперконус $T^m_{(2)}$ представляет собой совокупность всех гиперплоскостей (2.I) в слое, которым в отвечают вырожденные конусы (2.2) (т.е. конусы (2.2) с прямолинейными вершинами, проходящими через A_o), так как уравнения $\det\| x_{\hat{\alpha}} \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} \| = 0$ и (2.6) при $k=2$ эквивалентны. Гиперконус же $T^m_{(3)}$ представляет собой совокупность всех гиперплоскостей (2.I) в слое точки A_o, которым в L_m отвечают особые линейные комплексы (2.3). При этом линейный комплекс (2.3), отвечающий гиперплоскости (2.I), называется особым [6], если $\det\| x_{\hat{\alpha}} R^{\hat{\alpha}}_{o\alpha\beta} \| = 0$, что равносильно уравнению (2.6) при $k=3$. Особый линейный комплекс в общем случае каждой прямой $x = x^{\alpha}(A_o A_{\alpha})$, проходящей через A_o, ставит в соответствие (в нуль-системе) ($m-1$)-плоскость (2.3), проходящую через прямую x и содержащую независимо от выбора прямой x одну и ту же (особую) прямую, на которой лежит точка A_o.

Остановимся на геометрической интерпретации гиперконуса $T^m_{(1)}$. Будем искать такие прямые x, которым отвечают неопределенные ($m-1$)-плоскости (2.4). Это возможно тогда и только тогда, когда

$$x^{\alpha} x_{\hat{\alpha}} A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} = 0. \qquad (2.8)$$

Геометрически это означает, что касательное линейное подпространство к m-семейству прямых $x = x^{\alpha}(A_o A_{\alpha})$ принадлежит гиперплоскости (2.I). При этом касательное линейное подпространство к m-семейству прямых x определяют главные линейные части смещений образа прямой x в исходном слое $P_n(u)$ при смещении точки A_o (а, следовательно, и прямой x) по поверхности S_m:

$$x(u+du) - x(u) = x^{\alpha} A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}\, \omega^{\beta} (A_o A_{\hat{\alpha}}) + (\ldots)^{\alpha}(A_o A_{\alpha}) + [2].$$

Система (2.8) будет иметь нетривиальные решения относительно x^{α} тогда и только тогда, когда

$$\det \| x_{\hat{\alpha}} A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} \| = 0,$$

что равносильно уравнению (2.6) при $k=1$. Таким образом, гиперконус $T^m_{(1)}$ представляет собой совокупность всех гиперплоскостей (2.I), каждой из которых отвечает прямая $x = x^{\alpha}(A_o A_{\alpha})$ в m-плоскости L_m (ассоциированная прямая), такая, что касательное линейное подпространство к m-семейству таких прямых принадлежит этой гиперплоскости.

<u>Замечание I</u>. Из геометрических соображений, а так же из (2.6) и (2.7) следует, что каждый из гиперконусов $T^m_{(k)}$ определен при соответствующих ограничениях (2.7'), так как величины $A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}$ в общем случае не симметричны по α и β, величины $\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}$ симметричны, а $R^{\hat{\alpha}}_{o\alpha\beta}$ кососимметрич-

ны, а по α и β .

Замечание 2. В случае, если пространство $P_{n,n}$ является пространством без кручения ($R^{x}_{oij} \equiv 0$) или однородным ($R^{x}_{\mathcal{Y}ij} \equiv 0$), то гиперконусы $T^{m}_{(1)}$ и $T^{m}_{(2)}$ в силу (1.4), (2.6) и (2.7) совпадают друг с другом, а гиперконус $T^{m}_{(3)}$ становится неопределенным. В случае однородного пространства $P_{n,n}$ гиперконус $T^{m}_{(1)}$ совпадает с касательным в смысле [7] или фокальным в смысле [8] гиперконусом к m-поверхности S_m.

Замечание 3. Из (1.3), (1.4) и (1.5) следует, что величины (2.7) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d\underset{(k)}{G}^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m} + \underset{(k)}{\Omega}\underset{(k)}{G}^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m} + \underset{(k)}{G}^{\hat\beta\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m}\omega^{\hat\alpha_1}_{\hat\beta} + \dots +$$

$$+ \underset{(k)}{G}^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_{m-1}\hat\beta}\omega^{\hat\alpha_m}_{\hat\beta} = \underset{(k)}{G}^{\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_m}_{\gamma}\omega^{\gamma}, \qquad (2.9)$$

где

$$\underset{(1)}{\Omega} = \underset{(2)}{\Omega} = m\,\omega^{0}_{0} - 2\,\omega^{\gamma}_{\gamma}\,, \quad \underset{(3)}{\Omega} = 2\,(m\,\omega^{0}_{0} - \omega^{\gamma}_{\gamma}),$$

причем явный вид величин $\underset{(k)}{G}^{\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_m}_{\gamma}$ нас не интересует. Из (2.9) следует, что каждая из систем величин (2.7) является тензором в смысле Г.Ф.Лаптева [3], симметрическим по всем верхним индексам.

§3. Поле нормалей первого рода m-поверхности S_m, оснащенной полем касательных гиперплоскостей.

1. Рассмотрим гиперплоскость ℓ_{n-1}, проходящую через m-плоскость L_m, которая в локальных координатах репера T слоя $P_n(u)$ точки A_0 определяется уравнением

$$x^{n} - b_p\,x^{p} = 0\,, \quad (p, q, r = m+1, \dots, n-1). \qquad (3.1)$$

Здесь величины b_p удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d b_p + b_p\,\omega^{n}_{n} - b_p b_q\,\omega^{q}_{n} - b_q\,\omega^{q}_{p} + \omega^{n}_{p} = b_{p\beta}\,\omega^{\beta} \qquad (3.2)$$

(см. уравнения (13) в [1]). Продолжение этой системы дифференциальных уравнений приводит к дифференциальным уравнениям

$$d b_{p\beta} + b_{p\beta}(\omega^{0}_{0} + \omega^{n}_{n}) - b_{p\gamma}\,\omega^{\gamma}_{\beta} - b_{q\beta}\,\omega^{q}_{p} + A_{\gamma\beta}(\omega^{\gamma}_{p} + b_p\,\omega^{\gamma}_{n}) -$$

$$-(b_{r\beta} + b_r b_{p\beta})\,\omega^{r}_{n} = (b_{p\alpha}R^{\alpha}_{o\beta\gamma} + b_p R^{n}_{n\gamma\beta} - b_p b_q R^{q}_{n\gamma\beta} -$$

$$- b_q R^{q}_{p\gamma\beta} + R^{n}_{p\gamma\beta} + b_{p\gamma\beta})\,\omega^{\gamma}, \qquad (3.3)$$

где

$$A_{\gamma\beta} = A^{q}_{\gamma\beta}\,b_q - A^{n}_{\gamma\beta}\,, \qquad (3.4)$$

причем величины $b_{p\beta\gamma}$ симметричны по индексам β и γ .

Заметим, что система дифференциальных уравнений, состоящая из (1.2), (1.3) и (3.2) при условии (1.5) и (3.3) определяет в пространстве $P_{n,n}$ m-мерную гиперполосу в смысле [2]. Так же, как и в [1], находим, что $(n-m-1)$-плоскость

$$L^{*}_{n-m-1} = (E_0\,E_{m+1}\dots E_{n-1}), \qquad (3.5)$$

Зак. 10314.

где

$$E_o = A_o\,,\quad E_p = a_p^{\alpha} A_{\alpha} + A_p + b_p A_n \tag{3.6}$$

является характеристическим элементом гиперплоскости (3.I). Здесь величины a_p^{α} определяются по формулам

$$a_q^{\alpha} = \frac{1}{A}\, b_{q\beta} A^{\beta\alpha}, \tag{3.7}$$

причем

$$A = \det \| A_{\gamma\beta} \|, \qquad A_{\alpha\gamma} A^{\gamma\beta} = A\, \delta_{\alpha}^{\beta}. \tag{3.8}$$

При этом из рассмотрения исключается случай $A = \det\|A_{\alpha\beta}\| = 0$, когда гиперплоскость (3.I) принадлежит гиперконусу $T^m_{(1)}$.

С помощью дифференциальных уравнений (3.3),(3.2) и (I.5) найдем, что величины $A_{\gamma\beta}$, определенные по формулам (3.4), и величины (3.7) и (3.8) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$dA_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}(\omega_o^o + \omega_n^n) - A_{\alpha\beta} b_q \omega_n^q - A_{\sigma\beta}\omega_{\alpha}^{\sigma} - A_{\alpha\sigma}\omega_{\beta}^{\sigma} = A_{\alpha\beta\sigma}\omega^{\sigma},$$

$$dA = \Omega A + \tilde{A}_{\sigma}\omega^{\sigma},$$

$$dA^{\sigma\beta} - \Omega^{*} A^{\sigma\beta} + A^{\mu\beta}\omega_{\mu}^{\sigma} + A^{\sigma\mu}\omega_{\mu}^{\beta} = A_{\gamma}^{\sigma\beta}\omega^{\gamma}, \tag{3.9}$$

$$da_p^{\alpha} + a_p^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha} + \omega_p^{\alpha} + b_p\omega_n^{\alpha} - a_q^{\alpha}(\omega_p^q + \omega_n^q b_p) = a_{p\sigma}^{\alpha}\omega^{\sigma},$$

где

$$\Omega = 2\omega_{\alpha}^{\alpha} - m(\omega_o^o + \omega_n^n) + m\,\omega_n^q b_q, \quad \Omega^{*} = \Omega + (\omega_o^o + \omega_n^n) - b_q\omega_n^q,$$

$$A_{\alpha\beta\sigma} = A_{\alpha\beta}^{p} b_{p\sigma} + b_p A_{\alpha\beta\sigma}^{p} - A_{\alpha\beta\sigma}^{n},$$

$$\tilde{A}_{\sigma} = \det\|A_{1\beta\sigma} A_{2\beta}\dots A_{m\beta}\| + \dots + \det\|A_{1\beta}\dots A_{m-1,\beta} A_{m\beta\sigma}\|,$$

$$A_{\gamma}^{\sigma\beta} = \frac{1}{A}\tilde{A}_{\gamma} A^{\sigma\beta} - \frac{1}{A} A^{\alpha\beta} A^{\sigma\tau} A_{\alpha\tau\gamma}, \tag{3.10}$$

$$a_{p\sigma}^{\alpha} = \frac{1}{A} A^{\beta\alpha}\, \bar{b}_{p\beta\sigma} - \frac{\tilde{A}_{\sigma}}{A} a_p^{\alpha} + \frac{b_{p\beta}}{A} A_{\sigma}^{\beta\alpha},$$

$$\bar{b}_{p\beta\sigma} = b_{p\beta\sigma} + b_{p\alpha} R_{o\sigma\beta}^{\alpha} - b_p R_{n\sigma\beta}^{n} + b_p b_q R_{n\sigma\beta}^{q} + b_q R_{p\sigma\beta}^{q} - R_{n\sigma\beta}^{n}.$$

Из (3.9) замечаем, что величины $A_{\alpha\beta}$ и $A^{\sigma\beta}$ являются относительно инвариантными величинами.

2. Так же, как и в [I](см. (25) и (26)), найдем, что $(n-m-2)$-плоскость

$$L^{*}_{n-m-2} = (H_{m+1}\dots H_{n-1}), \tag{3.11}$$

где

$$H_p = E_p + a_p A_o = a_p^{\alpha} A_{\alpha} + A_p + b_p A_n + a_p A_o, \tag{3.12}$$

$$a_p = -\frac{1}{m} a_{p\alpha}^{\alpha}, \tag{3.13}$$

является линейной полярой точки A_0 относительно фокусной алгебраической поверхности линейного подпространства (3.5).

Продолжая систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют величины a_p^{α} (см.(3.9), найдем, что величины a_p, определенные по формулам (3.13), удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$da_p - a_q\omega_p^q - a_p b_q \omega_n^q + b_p\omega_n^0 + \omega_p^0 + a_p^{\alpha}\omega_{\alpha}^0 + a_p\omega_0^0 = a_{p\sigma}\omega^{\sigma} \quad (3.13')$$

Здесь явный вид величин $a_{p\sigma}$ нас не интересует.

3. Рассмотрим $(m+1)$-плоскость

$$L_{m+1} = (L_m, A_{\hat{\alpha}})\Lambda^{\hat{\alpha}}, \quad (3.14)$$

где

$$\Lambda^{\hat{\alpha}} = \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha\beta},$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta\gamma} = \Lambda\delta_{\alpha}^{\gamma}, \quad \Lambda = \det\|\Lambda_{\alpha\beta}\|, \quad (3.15)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta} = A_{(\alpha\beta)} = \Lambda^p_{\alpha\beta} b_p - \Lambda^n_{\alpha\beta}.$$

Геометрическая характеристика этой $(m+1)$-плоскости дана в [I] (см. пункт 3§3). При этом из рассмотрения исключается случай $\Lambda = \det\|\Lambda_{\alpha\beta}\| = 0$, когда гиперплоскость (3.I) принадлежит гиперконусу $T^m_{(2)}$.

Пользуясь формулами (I.4), (I.5), (3.I) и (3.15), получаем, что система величин $\Lambda^{\hat{\alpha}}$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d\Lambda^{\hat{\alpha}} = -\Lambda^{\hat{\gamma}}\omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{\gamma}} + \Lambda^{\hat{\alpha}}\Omega^{**} + \tilde{\Lambda}^{\hat{\alpha}}_{\sigma}\omega^{\sigma}, \quad (3.16)$$

где

$$\tilde{\Lambda}^{\hat{\alpha}}_{\sigma} = \Lambda^{\beta\gamma}\Lambda_{\beta\gamma\sigma} + \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\beta\gamma}\Lambda^{\beta\gamma}_{\sigma}, \quad (3.17)$$

$$\Omega^{**}_{\beta\gamma} = 2\omega_{\alpha}^{\alpha} - (1+m)(\omega_0^0 + \omega_n^n - b_q\omega_n^q) - \omega_0^0.$$

Здесь величины $\Lambda^{\beta\gamma}_{\sigma}$ определяются по таким же формулам, что $A^{\sigma\beta}_{\gamma}$ в (3.10), но только надо вместо A писать Λ с соответствующими индексами.

4. Зададим на m-поверхности S_m некоторую кривую

$$\omega^{\hat{\alpha}} = 0, \quad \omega^{\alpha} = t^{\alpha}\theta, \quad \mathcal{D}\theta = 0, \quad (3.18)$$

где t^{α} удовлетворяют при фиксированных главных параметрах дифференциальным уравнениям

$$\delta t^{\alpha} - t^{\alpha}\pi_0^0 + t^{\beta}\pi_{\beta}^{\alpha} = 0.$$

Здесь δ -символ дифференцирования по вторичным параметрам, а $\pi^{x}_{y} = \omega^{x}_{y}(\delta)$.

Пусть точка $X = x^p H_p = x^p(a_p^{\alpha}A_{\alpha} + a_pA_0 + bA_n + A_0)$ принадлежит $(n-m-2)$-плоскости (3.II). Тогда вдоль развертки [I] кривой (3.18) с учетом (I.3), (3.I), (3.9) и (3.I3) будем иметь

$$\frac{dX}{\theta} = (\ldots)^q H_q + \{(a^{\alpha}_{p\sigma}t^{\sigma} + b_p t^{\alpha})A_{\alpha} +$$

$$+ a_p^{\alpha}A^q_{\alpha\sigma}t^{\sigma}(A_q + b_qA_n) + a_{p\sigma}t^{\sigma}A_0\}x^p. \quad (3.19)$$

Отсюда следует, что точка

$$X^* = x^p \{ a_{p\sigma} t^\sigma A_0 + (a^\alpha_{p\sigma} t^\sigma + b_p t^\alpha) A_\alpha \}$$

есть точка пересечения m-плоскости L_m с линейным подпространством, проходящим через $\overset{*}{L}_{n-m-2}$ и касательную к линии, описываемой точкой X вдоль (3.18). Вдоль развертки кривой (3.18) с учетом (1.3) будем иметь:

$$\frac{dX^*}{\theta} = (\dots)^0 A_0 + (\dots)^\alpha A_\alpha + x^p (a^\alpha_{p\sigma} t^\sigma + b_p t^\alpha) A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} t^\beta A_{\hat\alpha} .$$

Поэтому $TX^*\{t^\alpha\}$ - касательная к линии $X^*\{t^\alpha\}$, описываемой точкой X^* вдоль (3.18) - будет принадлежать гиперплоскости (3.1) тогда и только тогда, когда в силу (3.4)

$$x^p W_{p\sigma\beta} t^\sigma t^\beta = 0, \qquad (3.20)$$

где

$$W_{p\sigma\beta} = a^\alpha_{p\sigma} A_{\alpha\beta} + b_p A_{\sigma\beta} . \qquad (3.21)$$

Итак, каждой точке $X = x^p H_p \in \overset{*}{L}_{n-m-2}$ в L_m отвечает конус (3.20) с вершиной в точке A_0, в направлении прямолинейных образующих $t = (A_0 A_\alpha) t^\alpha$ которого $TX^*\{t^\alpha\}$ принадлежит гиперплоскости (3.1). Поэтому $(n-m-3)$-плоскость

$$x^n = b_p x^p, \; x^\alpha = a^\alpha_p x^p, \; x^0 = a_p x^p, \; W_p x^p = 0, \qquad (3.22)$$

где

$$W_p = W_{p\sigma\beta} \Lambda^{\sigma\beta}, \qquad (3.22')$$

представляет собой совокупность всех точек $X = x^p H_p \in \overset{*}{L}_{n-m-2}$, которым в L_m отвечают конусы (3.20), аполярные в смысле [9] конусу

$$\Lambda_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{\hat\alpha} = 0,$$

т.е. конусу (2.2), соответствующему заданной гиперплоскости (3.1). Заметим, что в формулах (3.22) величины $\Lambda^{\sigma\beta}$ определяются из формул (3.15).

Пусть точка $R = x^0 A_0 + x^\alpha A_\alpha + x \Lambda^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha}$ принадлежит $(m+1)$- плоскости (3.14). Тогда вдоль развертки кривой (3.18) с учетом (3.16) и (1.3) будем иметь

$$\frac{dR}{\theta} = (\dots)^0 A_0 + (\dots)^\alpha A_\alpha + (\dots) \Lambda^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha} + x \tilde\Lambda^{\hat\alpha}_\alpha t^\alpha A_{\hat\alpha} + x^\alpha A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} t^\beta A_{\hat\alpha} .$$

Следовательно, линейная оболочка касательных к кривым $R\{t^\alpha\}$, описываемым точкой R вдоль всех кривых (3.18), принадлежит гиперплоскости $\Gamma_{n-1}(R)$, проходящей через (3.14) и (3.22), тогда и только тогда, когда

$$x^\beta \overset{*}{A}_{\beta\alpha} + x \overset{*}{\tilde\Lambda}_\alpha = 0, \qquad (3.23)$$

где

$$\overset{*}{A}_{\beta\alpha} = A^{\hat\alpha}_{\beta\alpha} \overset{*}{W}_{\hat\alpha}, \quad \overset{*}{\tilde\Lambda}_\alpha = \tilde\Lambda^{\hat\alpha}_\alpha \overset{*}{W}_{\hat\alpha} \qquad (3.24)$$

Здесь

$$\overset{*}{W}_n = W_p \Lambda^p, \quad \overset{*}{W}_p = m \Lambda W_p - b_p \Lambda^q W_q . \qquad (3.25)$$

Из (3.23) следует, что совокупность всех искомых точек R подпространства (3.14) образует в слое P_n прямую

$$g = (A_0, \, g^\beta A_\beta + \Lambda^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha}), \tag{3.25}$$

где

$$g^\beta = - \frac{\tilde{\Lambda}^*_\alpha \overset{*}{\Lambda}^{\alpha\beta}}{\overset{*}{\Lambda}}. \tag{3.26}$$

Здесь

$$\overset{*}{\Lambda} = \det \| \Lambda^*_{\alpha\beta} \|, \qquad \overset{*}{\Lambda}_{\beta\alpha} \overset{*}{\Lambda}^{\alpha\gamma} = \delta^\gamma_\beta \overset{*}{\Lambda}. \tag{3.27}$$

причем предполагается, что $\overset{*}{\Lambda} \neq 0$. При этом можно показать, что определитель $\overset{*}{\Lambda}$ в общем случае отличен от нуля. Заметим, что при определении прямой (3.25) из рассмотрения исключается случай $\overset{*}{\Lambda} = 0$, когда гиперплоскость, проходящая через (3.14) и (3.22), определяемая системой

$$\overset{*}{W}_{\hat\alpha} x^{\hat\alpha} = 0,$$

принадлежит гиперконусу $T^m_{(1)}$. Так как величины $\Lambda^{\hat\alpha}$ не равны нулю одновременно в общем случае, поскольку они в силу (3.16) относительно инвариантны, то прямая (3.25) в общем случае не лежит в $(m+1)$-плоскости (3.14).

5. Оснащающую $(n-m)$-плоскость $\overset{*}{L}_{n-m}$ или нормаль первого рода m-поверхности S_m в смысле А.П.Нордена [10] в слое P_n точки A_0 определим теперь, как линейное подпространство, проходящее через прямую (3.26) и линейное

подпространство (3.5). Если теперь эту $(n-m)$-плоскость задать в слоевых координатах системой

$$x^\alpha = C^\alpha_{\hat\beta} x^{\hat\beta}, \tag{3.28}$$

то из (3.5) и (3.26) мы найдем, что

$$C^\alpha_p = \frac{m a^\alpha_p \Lambda - \Lambda^q a^\alpha_q b_p + g^\alpha b_p}{m\Lambda}, \quad C^\alpha_n = \frac{\Lambda^p a^\alpha_p - g^\alpha}{m\Lambda}. \tag{3.29}$$

§4. Оснащения индекса k.

Рассмотренные в предыдущих параграфах некоторые геометрические образы, связанные с m-мерной поверхностью S_m и m-мерной гиперполосой в $P_{n,n}$, а так же некоторые другие геометрические образы позволяют с геометрической точки зрения сделать некоторые выводы, касающиеся существования некоторых полей оснащающих плоскостей m-поверхности S_m в $P_{n,n}$.

1. В §2 настоящей статьи были определены аналитически и геометрически инвариантные гиперконусы $T^m_{(k)}$, связанные с текущей точкой A_0 m-поверхности S_m в $P_{n,n}$. Оказывается, что между гиперконусом $T^m_{(2)}$, $(m+1)$-плоскостью (3.14) и гиперплоскостью (3.1) существует интересная геометрическая связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. В случае $n \leq \frac{m(m+3)}{2}$ линейное подпространство L_{m+1} является линейным полюсом [11] гиперплоскости ℓ_{n-1} относительно гиперконуса $T^m_{(2)}$.

Доказательство. Обозначим при $n \le \frac{m(m+3)}{2}$

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} = \underset{(2)}{G}{}^{\hat\alpha\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m}\, b_{\hat\alpha_2}\cdots b_{\hat\alpha_m}, \quad (b_n=-1) \qquad (4.1)$$

где величины $\underset{(2)}{G}{}^{\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_m}$ определяются по формулам (2.7), а $b_{\hat\alpha}$ - тангенциальные координаты гиперплоскости ℓ_{n-1}. Тогда, в соответствии с [II](стр.I3I7), $(m+1)$-плоскость

$$\overset{*}{L}_{m+1} = (L_m, A_{\hat\alpha})\overset{*}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} \qquad (4.2)$$

является линейным полюсом гиперплоскости ℓ_{n-1} относительно гиперконуса $T^m_{(2)}$. Для доказательства теоремы нам надо показать, что $\overset{*}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} = \lambda\Lambda^{\hat\alpha}$, или, в силу (3.I5),

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} = \lambda\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha\beta}, \quad (\lambda\neq 0). \qquad (4.3)$$

С этой целью проведем фиксацию репера T в слое P_n точки A_0, при которой

$$b_p = 0, \quad b_n = -1 \qquad (4.4)$$

Геометрически это означает, что гиперплоскость ℓ_{n-1} содержит точки $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$. Из (3.2) и (4.4) следует, что $\omega^n_p = b_{p\alpha}\omega^\alpha$, т.е. согласно лемме Н.М.Остиану [I2], фиксация (4.4) общего вида. Из (2.7), (3.I5) и (4.4) получаем

$$\Lambda^n_{\alpha\beta} = -\Lambda_{\alpha\beta}.$$

Поэтому

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} \equiv \underset{(2)}{G}{}^{\hat\alpha\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m}\, b_{\hat\alpha_2}\cdots b_{\hat\alpha_m} = (-1)^{m-1}\underset{(2)}{G}{}^{\hat\alpha n\dots n} =$$

$$= \frac{-1}{m}\left\{\det\|\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha_1}\Lambda_{\alpha_2}\cdots\Lambda_{\alpha_m}\| + \dots + \det\|\Lambda_{\alpha_1}\cdots\Lambda_{\alpha_{m-1}}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha_m}\|\right\} = \frac{1}{m}\Lambda\Lambda^{n}_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha\beta}.$$

Как видим, соотношения (4.3) справедливы, причем $\lambda = \frac{1}{m}\Lambda$.
Теорема доказана.

По аналогии с $(m+1)$-плоскостью L_{m+1} мы можем ввести в рассмотрение $(m+1)$-плоскости

$$\overset{(k)}{L}_{m+1} = (L_m, A_{\hat\alpha})\underset{(k)}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} \quad (k=1,2,3), \qquad (4.5)$$

где

$$\underset{(k)}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} = \underset{(k)}{G}{}^{\hat\alpha\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m}\, b_{\hat\alpha_2}\cdots b_{\hat\alpha_m} \quad (b_n=-1).$$

Здесь тензоры $\underset{(k)}{G}{}^{\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_m}$ определяются по формулам (2.7). В соответствии с [II], а также учитывая теорему I, мы получаем, что каждая $(m+1)$-плоскость (4.5) является полюсом гиперплоскооти (3.I) относительно гиперконуса $T^m_{(k)}$. Например, при $k=2$, как это следует из (4.I) и (4.5), $(m+1)$-плоскость $\overset{(2)}{L}_{m+1}$ есть $(m+1)$-плоскость (3.I4). Поэтому эти $(m+1)$-плоскости можно использовать для нахождения прямой $g_{(k)}$, аналогичной прямой (3.25), если всюду вместо $(m+1)$-плоскости L_{m+1} брать $(m+1)$-плоскость $\overset{(k)}{L}_{m+1}$. Оснащенную $(n-m)$-плоскость (3.28) можно определить, как линейную оболочку прямой $g_{(k)}$ и линейного подпространства (3.5). Тогда в формулах (3.29) вместо величин g^α надо писать $g^\alpha_{(k)}$, которые определяются по формулам, аналогичным (3.26), только вместо $\tilde{\overset{*}{\Lambda}}_\alpha$ надо писать $\underset{(k)}{\tilde{\overset{*}{\Lambda}}}_\alpha$. Полученное таким путем оснащение m-мерной поверхности S_m

с заданным полем касательных гиперплоскостей ℓ_{n-1} будем называть оснащением индекса k. Так как гиперконусы $T^m_{(k)}$ определены при n и m, удовлетворяющих (2.7), то и оснащение индекса k будет определено при тех же значениях n и m, соответственно. Рассмотренное в предыдущем параграфе оснащение m-мерной гиперполосы в $P_{n,n}$ будет оснащением индекса 2.

§5. Заключение.

Из результатов предыдущих параграфов следует, что существенным при определении оснащения индекса k поверхности S_m с заданным полем касательных гиперплоскостей ℓ_{n-1} является то, что характеристический элемент каждой гиперплоскости ℓ_{n-1} слоя P_n точки A_o, т.е. элемент m-мерного многообразия, огибаемого полем гиперплоскостей ℓ_{n-1}, принадлежит соответствующей оснащающей $(n-m)$-плоскости L^*_{n-m}, проходящей так же через прямую $g_{(k)}$, геометрически определенную в предыдущем параграфе. Таким образом, каждой касательной гиперплоскости ставится в соответствие по закону (3.29), где вместо g^α надо писать $g^\alpha_{(k)}$, вполне определенная нормаль первого рода (3.28). Возникает естественная задача: для любой ли m-мерной поверхности S_m в $P_{n,n}$ можно найти касательную гиперплоскость ℓ_{n-1}, которая бы определила оснащение индекса k. Для определенности будем решать задачу для случая оснащения индекса 2, рассмотренного в §3.

Для решения поставленной задачи предположим, что каждой

текущей точке A_o m-поверхности S_m в слое P_n каким-то образом поставлена в соответствие $(n-m)$-плоскость (3.28), где величины $C^\alpha_{\hat\beta}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\Delta C^\alpha_{\hat\alpha} \equiv dC^\alpha_{\hat\alpha} - C^\alpha_{\hat\beta}\,\omega^{\hat\beta}_{\hat\alpha} + C^\gamma_{\hat\alpha}\,\omega^\alpha_\gamma + \omega^\alpha_{\hat\alpha} = C^\alpha_{\hat\alpha\beta}\,\omega^\beta \quad (5.1)$$

Здесь величины $C^\alpha_{\hat\alpha\beta}$ удовлетворяют следующим квадратичным уравнениям:

$$\Delta C^\alpha_{\hat\alpha\beta} \wedge \omega^\beta = 0, \quad (5.2)$$

где

$$\Delta C^\alpha_{\hat\alpha\beta} = dC^\alpha_{\hat\alpha\beta} + C^\alpha_{\hat\alpha\beta}\,\omega^o_o - C^\alpha_{\hat\beta\beta}\,\omega^{\hat\beta}_{\hat\alpha} - C^\alpha_{\hat\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta + C^\gamma_{\hat\alpha\beta}\,\omega^\alpha_\gamma +$$

$$+ C^\alpha_{\hat\beta} A^{\hat\beta}_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_{\hat\alpha} + C^\sigma_{\hat\alpha} A^{\hat\beta}_{\sigma\beta}\,\omega^\alpha_{\hat\beta} - C^\gamma_{\hat\alpha}\,\delta^\alpha_\beta\,\omega^o_\gamma - \delta^\alpha_\beta\,\omega^o_{\hat\alpha} +$$

$$+ (C^\alpha_{\hat\alpha\gamma} R^\gamma_{o\tau\beta} + C^\gamma_{\hat\alpha} R^\alpha_{o\beta\tau} + R^\alpha_{\hat\alpha\beta\tau} + C^\alpha_{\hat\beta} R^{\hat\beta}_{\hat\alpha\tau\beta})\,\omega^\tau.$$

Для удобства и простоты аналитических выкладок и рассуждений проведем такую канонизацию репера m-мерной поверхности с заданным полем нормалей первого рода, при которой точки $A_o, A_{m+1}, \dots, A_n$ располагаются в заданной $(n-m)$-плоскости L^*_{n-m}. Тогда из $x^\alpha = C^\alpha_{\hat\alpha} x^{\hat\alpha}$ получаем $C^\alpha_{\hat\alpha} = 0$ и система (5.I) примет вид

$$\omega^\alpha_{\hat\alpha} = C^\alpha_{\hat\alpha\beta}\,\omega^\beta, \quad (5.3)$$

т.е.наша фиксация в силу леммы Н.М.Остиану [I2] будет общей.Здесь величины $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta}$ удовлетворяют квадратичным уравнениям (5.2).

Искомую гиперплоскость ℓ_{n-1}, о которой идет речь в поставленной выше задаче,мы будем задавать в виде (3.I), где неизвестные функции b_p удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (3.2),в которой функции $b_{p\alpha}$ удовлетворяют системе (3.3).Характеристический элемент (3.5) гиперплоскости ℓ_{n-1} будет принадлежать в силу (3.6) $(n-m)$-плоскости $\overset{*}{L}_{n-m}=(A_0 A_{m+1}\cdots A_n)$ тогда и только тогда, когда $a^{\alpha}_{p}=0$.А этим условиям в силу $A=\det\|A_{\alpha\beta}\|\neq 0$ и (3.7) эквивалентны условия $b_{p\alpha}=0$.Из систем (3.2) и (3.3) в силу (5.3) получаем следующие соотношения для определения b_p .

$$b_p \overset{*}{R}{}^{n}_{n\alpha\beta} + b_p b_q \overset{*}{R}{}^{q}_{n\alpha\beta} + b_q \overset{*}{R}{}^{q}_{p\alpha\beta} + \overset{*}{R}{}^{n}_{p\alpha\beta} = 0, \qquad (5.4)$$

где

$$\overset{*}{R}{}^{n}_{n\alpha\beta} = R^{n}_{n\beta\alpha} + A^{n}_{\gamma[\beta} C^{\gamma}_{|n|\alpha]}, \quad \overset{*}{R}{}^{q}_{p\alpha\beta} = R^{q}_{p\alpha\beta} + C^{\gamma}_{p[\alpha} A^{q}_{|\gamma|\beta]},$$

$$\overset{*}{R}{}^{n}_{p\alpha\beta} = R^{n}_{p\beta\alpha} + \lambda^{n}_{\gamma[\alpha} C^{\gamma}_{|p|\beta]}, \quad \overset{*}{R}{}^{q}_{n\alpha\beta} = R^{q}_{n\alpha\beta} + A^{q}_{\gamma[\beta} C^{\gamma}_{|n|\alpha]},$$

причем величины $\overset{*}{R}{}^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}\alpha\beta}$ кососимметричны по α и β .

Таким образом,мы получили систему (5.4),состоящую из $(n-m-1)\,C^{2}_{m}$ уравнений с $(n-m-1)$ неизвестными.Такая система для поверхности S_m общего вида будет иметь решения лишь в случае $m=2$.В этом случае система (5.4) будет иметь в общем случае не более 2^{n-3} решений,где $n\leq\frac{m(m+3)}{2}$.Таким образом,только для двумерной полунормализованной поверхности общего вида в P_n $(n\leq\frac{m(m+3)}{2})$ существует не более 2^{n-3} искомых гиперплоскостей ℓ_{n-1}. Во всех остальных случаях искомые гиперплоскости ℓ_{n-1} существуют лишь для m-поверхностей частного вида. Например,для m-поверхностей S_m в $P_{n,n}$ класса

$$\overset{*}{R}{}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}\alpha\beta}\equiv 0$$

существует ∞^1 гиперплоскостей ℓ_{n-1} ,проходящих через L_m,характеристические элементы которых принадлежат заданной $(n-m)$-плоскости $\overset{*}{L}_{n-m}$.

Остановимся на случае $m=2,\ n=4$.В этом случае существуют две гиперплоскости ℓ_3 ,обладающие указанным геометрическим свойством.Пользуясь уравнениями (5.2) и (5.4),можно доказать следующие теоремы для случая $m=2$, $n=4$.

Т е о р е м а 2. К любой поверхности S_2 в $P_{4,4}$ с произволом одной функции двух аргументов можно присоединить поле оснащающих плоскостей $\overset{*}{L}_2$,каждой из которых отвечает ∞^1 гиперплоскостей,проходящих через L_2 , с характеристическими элементами,принадлежащими этим плоскостям $\overset{*}{L}_2$.

Т е о р е м а 3.Каждой поверхности S_2 в однородном пространстве P_4 с произволом четырех (трех) функций двух аргументов можно присоединить поле оснащающих плоскостей L^*_2 таких,что выполняется каждое из следующих свойств:

1/для каждой плоскости L^*_2 существуют две (одна) гиперплоскости,проходящие через L_2 ,характеристические элементы которых принадлежат L^*_2;

2/в плоскости L^*_2 существуют две (одна) прямые,проходящие через A_0 ,касательные линейные подпространства к которым принадлежат соответствующим гиперплоскостям,проходящим через L_2.

Т е о р е м а 4. К любой двумерной поверхности S_2 в $P_{4,4}$ с произволом двух функций двух аргументов можно присоединить поле нормалей первого рода L^*_2 ,каждой из которых отвечает не более двух гиперплоскостей,проходящих через L_2.,с характеристическими элементами,принадлежащими L_2 и с прямой $g=(L_2,\Lambda^{\hat{\alpha}}A_{\hat{\alpha}}+g^{\alpha}A_{\alpha})$,так же принадлежащей этой оснащающей плоскости.

Л и т е р а т у р а

I.Ивлев Е.Т.,Об одной нормализации поверхности пространства проективной связности.Дифференциальная геометрия многообразий фигур,вып.4,Калининград,1974,6-28.

2.Вагнер В.В.,Теория поля локальных гиперполос,Труды семинара по векторному и тензорному анализу,8,1950,197-272.

3.Лаптев Г.Ф.,Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.Труды Московского матем.об-ва,2,1953,275-382.

4.Лаптве Г.Ф.,Остиану Н.М.,Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности,I, Труды геом.семинара,3,АН СССР ВИНИТИ,М.1971,49-94.

5.Остиану Н.М.,Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности П,Там же,95-114

6.Гуревич Г.Б.,Основы теории алгебраических инвариантов, ГИТТЛ,М.-Л.,1948.

7.Карапетян С.Е.,Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей,I,Изв.АН Арм.ССР,серия физмат наук,1963,№6,3-22.

8.Акивис М.А.,О преобразовании поверхности при помощи фокальных семейств.Успехи матем.наук,1961,16,№1,193-195.

9.Ивлев Е.Т.,К многомерной геометрической интерпритации операции свертывания некоторых тензоров.Матер.итоговой науч.конф.по матем. и мех.за 1970г.I.Изд-во Томского ун-та, 1970,121-123.

10.Норден А.П.Обобщение основной теоремы теории нормализации.Изв.высш.уч.зав."Математика",1966,№2,9-19.

11.Ивлев Е.Т.,О многообразии $E(L,L_m,L^{\hat{\alpha}}_{m+1})$ в n-мерном проективном пространстве P_n $(m>2)$. Сиб.матем.жур. 1967,т.8,№6,1307-1320.

12.Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Rev. math. pures et appl.(RNR)1962,№2, 231-240.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Л у ч и н и н А.А.

О НЕГОЛОНОМНОМ МНОГООБРАЗИИ ПАР ТОЧЕК.

В настоящей статье изучается неголономное многообразие $G_{2n}(F,\widetilde{F})$ пар точек в n-мерном проективном пространстве. Находятся некоторые геометрические объекты и определяемые ими геометрические образы многообразия $G_{2n}(F,\widetilde{F})$. Рассмотрения всюду имеют локальный характер. Все встречающиеся в данной статье функции предполагаются аналитическими.

§I. Дифференциальные уравнения неголономного многообразия пар точек.

Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $\{A_a\}$, уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$dA_a = \omega_a^b A_b, \qquad (1)$$

$$(a, b, c = 1, 2, \dots, n+1),$$

где I-формы ω_a^b удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b \qquad (2)$$

и условию

$$\omega_{.a}^{a} = 0$$

В качестве рассматриваемой пары точек (пары фигур $F=(F_1, F_2)$) в пространстве P_n возьмем пару точек, являющуюся вершинами A_1 и A_{n+1} репера. Тогда формы

$$\Omega^i \overset{def}{=} \omega_1^{i+1}, \quad \Omega^\alpha \overset{def}{=} \omega_{n+1}^{\alpha-n} \quad \left(\begin{array}{l} i, j, k, i_1, j_1, k_1, \dots = 1, 2, \dots, n; \\ \alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots = n+1, \dots, 2n \end{array} \right)$$

являются главными.

Сопоставляя с каждой парой точек A_1 и A_{n+1} некоторую фигуру $\widetilde{F}$, определенную объектом $\widetilde{\Gamma}_1 = \{\Lambda_i^\alpha\}$, компоненты которого удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla \Lambda_i^\alpha = M_{ij}^\alpha \Omega^j + M_{i\beta}^\alpha \Omega^\beta; \qquad (3)$$

мы получаем $2n$-мерное многообразие $G_{2n}(F,\widetilde{F})$, которое, следуя [I], будем называть неголономным многообразием пар точек. Многообразие $G_{2n}(F,\widetilde{F})$ погружено в $n(n+2)$-мерное пространство касательных элементов и определяется с произволом n^2 функций $2n$ аргументов (см. [2]).

Здесь и в дальнейшем оператор ∇ определим по формуле

$$\nabla X^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_t \beta_1 \dots \beta_q} = dX^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_t \beta_1 \dots \beta_q} - X^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_s}_{k j_2 \dots j_t \beta_1 \dots \beta_q} \omega^{k+1}_{j_1+1} -$$

$$- \dots - X^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_{t-1} k \beta_1 \dots \beta_q} \omega^{k+1}_{j_t+1} - X^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_t \gamma \beta_2 \dots \beta_q} \omega^{\gamma-n}_{\beta_1-n} - \dots -$$

$$- X^{i_1\dots i_p\alpha_1\dots\alpha_s}_{j_1\dots j_t\beta_1\dots\beta_{q-1}\gamma}\,\omega^{\gamma-n}_{\beta_q-n} + X^{\kappa i_2\dots i_p\alpha_1\dots\alpha_s}_{j_1\dots j_t\beta_1\dots\beta_q}\,\omega^{i_1+1}_{\kappa+1}+\dots+$$

$$+X^{i_1\dots i_p\alpha_1\dots\alpha_{s-1}\gamma}_{j_1\dots j_t\beta_1\dots\beta_q}\,\omega^{\alpha_s-n}_{\gamma-n}+\{(t-p)\omega^1_1+(q-s)\omega^{n+1}_{n+1}\}X^{i_1\dots i_p\alpha_1\dots\alpha_s}_{j_1\dots j_t\beta_1\dots\beta_q}. \quad (4)$$

Фундаментальным геометрическим объектом первого порядка многообразия $G_{2n}(F,\widetilde{F})$ является объект

$$\Gamma_1=\{\Lambda^\alpha_i, M^\alpha_{ij}, M^\alpha_{i\beta}\}, \quad (5)$$

компоненты $M^\alpha_{ij}, M^\alpha_{i\beta}$ которого удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}&\nabla M^\alpha_{ij}+\Lambda^\alpha_i\,\omega^1_{j+1}+\Lambda^\alpha_j\,\omega^1_{i+1}=M^\alpha_{ij\kappa}\Omega^\kappa+M^\alpha_{ij\beta}\Omega^\beta,\\ &\nabla M^\alpha_{i\beta}-\Lambda^\alpha_i\,\omega^{n+1}_{\beta-n}-\Lambda^\gamma_i\delta^\alpha_\beta\,\omega^{n+1}_{\gamma-n}=M^\alpha_{i\beta j}\Omega^j+M^\alpha_{i\beta\gamma}\Omega^\gamma,\end{aligned} \quad (6)$$

где

$$M^\alpha_{i[\beta j]}=M^\alpha_{i[j\kappa]}=M^\alpha_{i[\beta\gamma]}=0.$$

Из (6) следует, что совокупности величин

$$\Gamma'_1=\{\Lambda^\alpha_i, M^\alpha_{ij}\}\ ,\quad \Gamma''_1=\{\Lambda^\alpha_i, M^\alpha_{i\beta}\} \quad (7)$$

образуют подобъекты объекта Γ_1.

Объект $\widetilde{\Gamma}_1$, который является тензором [3], определяет соответствие между связкой прямых, проходящих через точку A_1, и связкой прямых, проходящих через точку A_{n+1}. Действительно, каждой прямой $x=x^{i+1}(A_1A_{i+1})$ соответствует прямая $y=x^{i+1}\Lambda^\alpha_i(A_{n+1}A_{\alpha-n})$. Так как в общем случае тензор $\{\Lambda^\alpha_i\}$ является невырожденным, то это соответствие

является взаимно-однозначным.

Нетрудно доказать, что объект Γ_1 является основным [3] для многообразия $G_{2n}(F,\widetilde{F})$.

§2. Геометрические объекты, охваченные основным фундаментальным объектом Γ_1.

Считая, что тензор $\widetilde{\Gamma}=\{\Lambda^\alpha_i\}$ – невырожденный, мы можем ввести в рассмотрение обращенный тензор $\widetilde{\Gamma}^*_1=\{V^i_\alpha\}$ по формулам

$$V^i_\alpha\Lambda^\alpha_j=\delta^i_j\ ,\quad V^i_\alpha\Lambda^\beta_i=\delta^\beta_\alpha, \quad (8)$$

компоненты которого удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla V^i_\alpha=V^i_{\alpha j}\Omega^j+V^i_{\alpha\beta}\Omega^\beta, \quad (9)$$

где

$$V^i_{\alpha j}=-V^\kappa_\alpha V^i_\beta M^\beta_{\kappa j}\ ,\quad V^i_{\alpha\beta}=-V^\kappa_\alpha V^i_\gamma M^\gamma_{\kappa\beta} \quad (10)$$

Продолжение уравнений (9) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\nabla V^i_{\alpha j}-V^i_\alpha\,\omega^1_{j+1}-V^\kappa_\alpha\,\delta^i_j\,\omega^1_{\kappa+1}=V^i_{\alpha j\kappa}\Omega^\kappa+V^i_{\alpha j\beta}\Omega^\beta,\\ &\nabla V^i_{\alpha\beta}+V^i_\alpha\,\omega^{n+1}_{\beta-n}+V^i_\beta\,\omega^{\widehat{n+1}}_{\alpha-n}=V^i_{\alpha\beta j}\Omega^j+V^i_{\alpha\beta\gamma}\Omega^\gamma.\end{aligned} \quad (11)$$

Из (6) и (11) имеем:

$$\nabla M^\alpha_{i\alpha}-(n+1)\Lambda^\alpha_i\,\omega^{n+1}_{\alpha-n}=M^\alpha_{i\alpha j}\Omega^j+M^\alpha_{i\alpha\gamma}\Omega^\gamma, \quad (12_1)$$

$$\nabla V^i_{\alpha i} - (n+1) V^i_\alpha \omega^1_{i+1} = V^i_{\alpha i j}\Omega^j + V^i_{\alpha i \gamma}\Omega^\gamma . \qquad (12_2)$$

Свертывая (12_1) и (12_2) соответственно с V^i_β и Λ^α_j, получаем

$$\nabla e_\alpha - \omega^{n+1}_{\alpha-n} = e_{\alpha i}\Omega^i + e_{\alpha\beta}\Omega^\beta, \qquad (13)$$
$$\nabla e_i - \omega^1_{i+1} = e_{ij}\Omega^j + e_{i\alpha}\Omega^\alpha,$$

где

$$e_\beta = \frac{1}{n+1} M^\alpha_{i\alpha} V^i_\beta , \qquad e_i = \frac{1}{n+1} V^j_{\alpha j}\Lambda^\alpha_i . \qquad (14)$$

Продолжение дифференциальных уравнений (I3) приводит к системе, которой удовлетворяют величины $e_{ij}, e_{\alpha\beta}, e_{i\alpha}, e_{\alpha i}$

$$\nabla e_{ij} + e_i\omega^1_{j+1} + e_j\omega^1_{i+1} = e_{ijk}\Omega^k + e_{ij\alpha}\Omega^\alpha,$$
$$\nabla e_{\alpha\beta} + e_\alpha\omega^{n+1}_{\beta-n} + e_\beta\omega^{n+1}_{\alpha-n} = e_{\alpha\beta i}\Omega^i + e_{\alpha\beta\gamma}\Omega^\gamma,$$
$$\nabla e_{i\alpha} = e_{i\alpha j}\Omega^j + e_{i\alpha\beta}\Omega^\beta, \qquad (15)$$
$$\nabla e_{\alpha i} = e_{\alpha i j}\Omega^j + e_{\alpha i\beta}\Omega^\beta .$$

Отсюда сразу следует, что величины $e_{i\alpha}$ и $e_{\alpha i}$ являются тензорами (в общем случае не симметричными).

Введем в рассмотрение величины

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(e_{(ij)} + e_{(i}e_{j)}), \quad a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(e_{(\alpha\beta)} + e_{(\alpha}e_{\beta)}), \qquad (16)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{2} e_{[ij]} , \quad b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{[\alpha\beta]} . \qquad (17)$$

Из (I3),(I5) следует, что эти величины являются тензорами. Величины

$$a_i = M^\alpha_{i\alpha} - M^\beta_{j\alpha} V^j_\beta \Lambda^\alpha_i , \quad a_\alpha = V^i_{\alpha i} - V^j_{\beta i}\Lambda^\beta_j V^i_\alpha \qquad (18)$$

также являются тензорами, так как из (3),(6),(9),(II) имеем:

$$\nabla a_i = a'_{ij}\Omega^j + a'_{i\alpha}\Omega^\alpha,$$
$$\nabla a_\alpha = a'_{\alpha i}\Omega^i + a'_{\alpha\beta}\Omega^\beta . \qquad (19)$$

§3. Некоторые геометрические образы, ассоциированные с многообразием $G_{2n}(F,\widetilde{F})$.

I. Квазитензоры [3] e_i и e_α определяют две инвариантные гиперплоскости L^1_{n-1} и L^2_{n-1} :

$$x^1 + e_i x^{i+1} = 0, \qquad (20)$$

$$x^{n+1} + e_\alpha x^{\alpha-n} = 0, \qquad (21)$$

соответвенно, а тензоры (I8) определяют две инвариантные гиперплоскости

$$a_i x^{i+1} = 0 , \quad a_\alpha x^{\alpha-n} = 0 , \qquad (22)$$

проходящие соответственно через точки A_1 и A_{n+1} .

2. Тензоры (16) определяют два инвариантных гиперконуса

$$a_{ij}\, x^{i+1} x^{j+1} = 0, \qquad (23)$$

$$a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha-n} x^{\beta-n} = 0. \qquad (24)$$

с вершинами A_1 и A_{n+1} соответственно.

3. Тензоры (17) определяют два инвариантных линейных гиперкомплекса

$$b_{ij}\, P^{i+1,j+1} = 0, \qquad (25)$$

$$b_{\alpha\beta}\, P^{\alpha-n,\beta-n} = 0. \qquad (26)$$

С помощью этих гиперкомплексов можно установить соответствие между гиперплоскостями, проходящими через точки A_1 и A_{n+1}.

Действительно, пусть задана точка

$$X = t^{i+1} A_{i+1} + t^1 A_1 .$$

В нуль-системе гиперкомплекса (25) ей соответствует гиперплоскость

$$e_{[ij]}\, x^{i+1} t^{j+1} = 0, \qquad (27)$$

проходящая через точки A_1 и X. В нуль-системе гиперкомплекса (26) этой же точке соответствует гиперплоскость

$$e_{[\alpha\beta]}\, x^{\alpha-n} t^{\beta-n} = 0, \qquad (28)$$

проходящая через точки A_{n+1} и X. Назовем гиперплоскости (27) и (28) соответствующими гиперплоскостями относительно точки X.

4. Рассмотрим 1-семейства, задаваемые уравнениями

$$\Omega^{\alpha} = 0, \ \Omega^{i} = x^{i+1}\theta, \ \mathcal{D}\theta = 0 \qquad (29)$$

и 1-семейства, задаваемые уравнениями

$$\Omega^{i} = 0, \ \Omega^{\alpha} = x^{\alpha-n}\tilde{\theta}, \ \mathcal{D}\tilde{\theta} = 0, \qquad (30)$$

где функции x^{i+1} и $x^{\alpha-n}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla x^{i+1} = x^{i+1}_{j}\,\Omega^{j} + x^{i+1}_{\alpha}\,\Omega^{\alpha}, \qquad (31)$$

$$\nabla x^{\alpha-n} = x^{\alpha-n}_{j}\,\Omega^{j} + x^{\alpha-n}_{\beta}\,\Omega^{\beta}.$$

Возьмем касательную к линии, описываемой точкой A_1 вдоль (29). Эта касательная пересекает гиперплоскость $\overset{1}{L}_{n-1}$ в точке

$$Y = x^{i+1} P_{i+1},$$

где

$$P_{i+1} = -e_i A_1 + A_{i+1}. \qquad (32)$$

Имеем:

$$dY = \{dx^{i+1} + x^{j+1}\omega^{i+1}_{j+1} - e_j x^{j+1}\Omega^{i}\} P_{i+1} +$$

$$+ (e_{ij} + e_i e_j)\, x^{i+1}\Omega^{j} A_1 .$$

Отсюда следует, что геометрическим местом точек Y таких, что касательные к линиям, описываемым этими точками вдоль (29) не выходят из гиперплоскости $\overset{1}{L}_{n-1}$, является квадрика

$$a_{ij}\, x^{i+1} x^{j+1} = 0, \qquad x^1 + e_i x^{i+1} = 0, \qquad (33)$$

которая является пересечением гиперконуса (23) с гиперплоскостью L^1_{n-1}.

Аналогично, с помощью (30) характеризуется гиперконус (24). Характеристика гиперплоскости (20) вдоль I-семейств

$$\Omega^i = x^{i+1}\theta^*, \quad \Omega^\alpha = x^{\alpha-n}\theta^*, \quad \mathcal{D}\theta^* = 0, \qquad (34)$$

где x^{i+1} и $x^{\alpha-n}$ образуют геометрические объекты, определяется уравнениями

$$\begin{aligned} &(e_{ij} + e_i e_j)\, x^{i+1} x^{j+1} + e_{i\alpha} x^{i+1} x^{\alpha-n} = 0, \\ &x^1 + e_i x^{i+1} = 0. \end{aligned} \qquad (35)$$

Таким образом, имеем, что вдоль I-семейств (29) гиперквадрика (33) гиперплоскости L^1_{n-1} представляет собой совокупность точек, принадлежащих характеристике гиперплоскости L^1_{n-1} вдоль (29).

Вдоль I-семейств (29) характеристика квадрики (33) определяется уравнениями

$$\begin{aligned} &c_{ijk}\, x^{i+1} x^{j+1} x^{k+1} = 0, \\ &a_{ij}\, x^{i+1} x^{j+1} = 0, \\ &x^1 + e_i x^{i+1} = 0, \end{aligned} \qquad (36)$$

где

$$c_{ijk} = \frac{1}{6}\{a_{(ijk)} + 2a_{(ij}e_{k)} + a_{(ik}e_{j)} + a_{(kj}e_{i)}\} -$$

-симметричный тензор.

Рассмотрим в гиперплоскости L^1_{n-1} поверхность третьего порядка, проходящую через алгебраическую поверхность (36), которую зададим уравнениями

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_{ijk}\, x^{i+1} x^{j+1} x^{k+1} = 0, \\ &x^1 + e_i x^{i+1} = 0, \end{aligned} \qquad (37)$$

где

$$\tilde{a}_{ijk} = c_{ijk} + \lambda_i a_{jk} + \lambda_j a_{ik} + \lambda_k a_{ij}. \qquad (38)$$

Величины λ_i найдем из условия аполярности искомой поверхности третьего порядка и квадрики (33), т.е. из условия (см. [4])

$$\tilde{a}_{ijk}\, a^{ij} = 0, \qquad (39)$$

где $a^{ij} a_{ik} = \delta^j_k$. Из условия (39) получаем, что

$$\lambda_i = -\frac{1}{n+2}\, c_{ijk}\, a^{jk}.$$

Тогда тензор (38) запишется в виде

$$\tilde{a}_{ijk} = c_{ijk} - \frac{a^{i_1 j_1}}{n+2}\{c_{i i_1 j_1} a_{jk} + c_{j i_1 j_1} a_{ik} + c_{k i_1 j_1} a_{ij}\}. \qquad (40)$$

Пусть задана точка $Y_1 = y_1^{i+1} P_{i+1}$ гиперплоскости L^1_{n-1}. Найдем поляру этой точки относительно поверхности (37). Имеем:

$$a_{ijk}\, x^{i+1} x^{j+1} y_1^{k+1} = 0, \quad x^1 + e_i x^{i+1} = 0. \qquad (41)$$

Совокупность поляр всех точек квадрики (4I) относительно квадрики (33) определяется уравнениями

$$\widetilde{a}_{ijk}\, a^{i_1 i}\, a^{j_1 j}\, y_1^{k+1}\, x_{i_1+1}\, x_{j_1+1}=0, \qquad\qquad (42)$$
$$x^1+e_i\, x^{i+1}=0.$$

Таким образом, каждой точке $Y_1\in L^1_{n-1}$ соответствует в гиперплоскости L^1_{n-1} квадрика (4I) и поверхность второго класса (42).

Пусть точка $Z=z^{i+1}P_{i+1}(Z\neq Y_1)$ принадлежит гиперплоскости L^1_{n-1}. Её полярой относительно (4I) является $(n-2)$-плоскость

$$\widetilde{a}_{ijk}\, y_1^{k+1}\, z^{j+1}\, x^{i+1}=0, \qquad\qquad (43)$$
$$x^1+e_i\, x^{i+1}=0.$$

Полюсом этой $(n-2)$-плоскости относительно (42) является точка $\widetilde{Z}=\widetilde{z}^{i+1}P_{i+1}$, где

$$\widetilde{z}^{i+1}=\widetilde{a}_{i_1 j_1 j}\,\widetilde{a}_{i_2 j_2 k}\, a^{i_1 i_2}\, a^{ij}\, y_1^{i_1+1}\, y_1^{k+1}\, z^{j_2+1} \qquad\qquad (44)$$

Таким образом, каждой точке $Y_1\in L^1_{n-1}$ алгебраические поверхности (4I) и (42) ставят в соответствие проективное преобразование $\Pi(Y_1)$ гиперплоскости L^1_{n-1} в себя, определяемое при фиксированных y_1^{i+1} формулами (44). Это проективное преобразование будет преобразованием W [4] тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{a}_{i_1 j_1 j}\,\widetilde{a}_{i_2 j_2 k}\, a^{i_1 i_2}\, a^{j j_2}\, y_1^{j_1+1}\, y_1^{k+1}=0.$$

Итак, геометрическим местом точек $Y\in L^1_{n-1}$, для которых проективное преобразование $\Pi(Y)$ будет преобразованием W является квадрика

$$\overset{*}{a}_{ij}\, x^{i+1}\, x^{j+1}=0, \qquad\qquad (45)$$
$$x^1+e_i\, x^{i+1}=0,$$

где

$$\overset{*}{a}_{ij}=\widetilde{a}_{i_1 j_1 i}\,\widetilde{a}_{i_2 j_2 j}\, a^{i_1 i_2}\, a^{j_1 j_2}. \qquad\qquad (46)$$

Рассмотрим квадрику (4I) и найдем геометрическое место $(n-2)$-плоскостей, являющихся полярами точек квадрики (4I) относительно квадрики (33). Этим геометрическим местом $(n-2)$-плоскостей является поверхность третьего класса

$$\widetilde{a}^{ijk}\, x_{i+1}\, x_{j+1}\, x_{k+1}=0, \qquad\qquad (47)$$
$$x^1+e_i\, x^{i+1}=0,$$

где

$$\widetilde{a}^{ijk}=\widetilde{a}_{i_1 j_1 k_1}\, a^{ii_1}\, a^{jj_1}\, a^{kk_1},$$

$x_i,\ x_\alpha$ — дуальные координаты.

Рассмотрим вектор $c^i=\widetilde{a}^{ijk}\,\overset{*}{a}_{jk}$, который, по аналогии с [5], назовем основным вектором гиперплоскости L^1_{n-1} и точку $C=c^iP_{i+1}$ — основную точку гиперплоскости L^1_{n-1}. Выясним её геометрический смысл.

Возьмем точку $Z_1=z_1^{i+1}P_{i+1}$, принадлежащую гиперплоскости L^1_{n-1}. Её полярой относительно квадрики (33) является $(n-2)$-плоскость

$$a_{ij}\, x^{i+1}\, z_1^{j+1}=0, \quad x^1+e_i x^{i+1}=0. \qquad\qquad (48)$$

Полюсом $(n-2)$-плоскости (48) относительно (47) является поверхность второго класса

$$\begin{gathered} a^{ijk}\, x_{i+1}\, x_{j+1}\, a_{kj_1}\, z_1^{j_1+1} = 0, \\ x^1 + e_i\, x^{i+1} = 0. \end{gathered} \tag{49}$$

Пусть $Y_2 = y_2^{i+1} P_{i+1}$ – точка гиперплоскости $\overset{1}{L}_{n-1}$ отличная от Z_1. Полярой точки Y_2 относительно квадрики (45) является $(n-2)$-плоскость

$$\overset{*}{a}_{ij}\, y_2^{i+1}\, x^{j+1} = 0\,, \quad x^1 + e_i\, x^{i+1} = 0. \tag{50}$$

Полюсом этой $(n-2)$-плоскости относительно поверхности (49) будет точка $Q = \overset{*}{y}^{i+1} P_{i+1}$, где

$$\overset{*}{y}^{i+1} = \tilde{a}^{ij i_1}\, a_{i_1 k}\, a_{j_1 j}\, z_1^{k+1}\, y_2^{j_1+1}. \tag{51}$$

Таким образом, каждой точке $Z_1 \in \overset{1}{L}_{n-1}$ отвечает проективное преобразование $\overset{*}{\Pi}(Z_1)$ гиперплоскости $\overset{1}{L}_{n-1}$ в себя, определенное формулами (51). Это преобразование будет преобразованием W, если

$$c^i a_{ij} z_1^{j+1} = 0.$$

Следовательно, геометрическое место точек $Z \in \overset{1}{L}_{n-1}$, которым соответствует проективное преобразование $\overset{*}{\Pi}(Z)$, являющееся преобразованием W, определяется системой

$$c^i a_{ij} z^{j+1} = 0\,, \quad z^1 + e_i z^{i+1} = 0. \tag{52}$$

Уравнения (52) определяют $(n-2)$-плоскость, принадлежащую гиперплоскости $\overset{1}{L}_{n-1}$, которую мы назовем основной $(n-2)$-плоскостью $\overset{1}{L}_{n-2}$ гиперплоскости $\overset{1}{L}_{n-1}$. Из (52) следует, что основная точка $C \in \overset{1}{L}_{n-1}$ является полюсом $(n-2)$-плоскости $\overset{1}{L}_{n-2}$ относительно квадрики (33).

Аналогичные геометрические образы можно определить, используя гиперплоскость $\overset{2}{L}_{n-1}$.

Литература.

I. Близникас В.И., Гринцевичюс К.И., О неголономной линейчатой геометрии. Третья Прибалтийская геом. конф. Тезисыд докл. Паланга, I968, 2I-25.

2. Лаптев Г.Ф., Распределения касательных элементов. Тр. геом. семинара, т.3, ВИНИТИ АН СССР, I97I, 29-48.

3. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. об-ва ГИТТЛ, М., I953, 2, 275-383.

4. Ивлев Е.Т., К геометрической интерпретации свертывания некоторых тензоров. Материалы итоговой научной конф. по матем. и механике за I970г., т.I, Томск, I970, I2I-I23.

5. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом. сб., 3. Тр. Томского ун-та, I963, I68, 28-42.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

М а л а х о в с к и й В.С.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР.

Дифференциальная геометрия многообразий фигур имеет предметом своих исследований многообразия, образующим элементом котоых являются фигуры, отличные от точки исходного пространства. Исследование обобщенных пространств составляет основной раздел современной дифференциальной геометрии. Геометрия обобщенных пространств широко используется в теоретической механике, физике и прикладных науках. Переход от точки к фигуре в качестве образующего элемента многообразия открывает широкие возможности построения теории обобщенных пространств и получения новых результатов в классических областях дифференциальной геометрии.

В работе дана краткая характеристика основных направлений исследований калининградских геометров по дифференциальной геометрии многообразий фигур и рассмотрены некоторые проблемы в этой области геометрии.

§I. Геометрические объекты и фигуры в n-мерном однородном пространстве.

Рассмотрим n-мерное однородное пространство E_n с

фундаментальной r-членной группой Ли $\mathcal{G}$, определяемой линейно независимыми формами Пфаффа $\theta^s(u^p, du^q)$ и структурными постоянными C^s_{pq} $(p, q, s = 1, 2, \ldots, r)$.

Как известно ([I], стр.294), геометрическим объектом Φ ранга N пространства E_n называется точка N-мерного пространства $\overset{*}{E}_N$ представления группы $\mathcal{G}$ в предположении, что все пространства представления группы $\mathcal{G}$ отнесены к семейству реперов заданного однородного пространства E_n. Относительные координаты $a^{\mathcal{I}}$ $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 1, \ldots, N)$ точки $\Phi \in \overset{*}{E}_N$ называются компонентами геометрического объекта.

Аналитически геометрический объект $\Phi = \{a^{\mathcal{I}}\}$ можно задать формулами

$$\tilde{a}^{\mathcal{I}} = \mathcal{F}(a, u) \tag{1.1}$$

преобразования его компонент $a^{\mathcal{I}}$ при переходе от одного репера к другому, либо вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа

$$\Omega^{\mathcal{I}} \equiv da^{\mathcal{I}} - f^{\mathcal{I}}_s(a)\,\theta^s(u, du) = 0, \tag{1.2}$$

где

$$f^{\mathcal{I}}_s(a) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\mathcal{I}}}{\partial u^s}\right)_{u=0}, \tag{1.3}$$

причем

$$\frac{\partial f^{\mathcal{I}}_p}{\partial a^{\mathcal{K}}} f^{\mathcal{K}}_q - \frac{\partial f^{\mathcal{I}}_q}{\partial a^{\mathcal{K}}} f^{\mathcal{K}}_p = C^s_{pq} f^{\mathcal{I}}_s \tag{1.4}$$

Зак. 10314.

При фиксированных значениях компонент $a^{\mathfrak{I}}$ геометрического объекта Φ вполне интегрируемая система уравнений Пфаффа $\omega^{\mathfrak{I}}=0$, $\omega^{\mathfrak{I}}_{x}=0$, ..., $\omega^{\mathfrak{I}}_{x_1\dots x_m}=0$ $(m=1,2\dots)$, (1.5)
где

$$\omega^{\mathfrak{I}}=-f^{\mathfrak{I}}_{s}(a)\theta^{s}(u,du),\ \omega^{\mathfrak{I}}_{x}=-\frac{\partial f^{\mathfrak{I}}_{s}}{\partial a^{x}}\theta^{s}(u,du),\dots,$$

$$,\dots,\ \omega^{\mathfrak{I}}_{x_1\dots x_m}=-\frac{\partial f^{\mathfrak{I}}_{s}}{\partial a^{x_1}\dots\partial a^{x_m}}\theta^{s}(u,du) \qquad (1.6)$$

определяет τ_m -членную группу Ли H_{τ_m} –подгруппу стационарной подгруппы $H=H_{\tau_0}$ геометрического объекта Φ. Геометрический объект $\Phi=\{a^{\mathfrak{I}}\}$ охватывает геометрический объект $\Psi=\{b^{\hat{\mathfrak{I}}}\}$ $(\hat{\mathfrak{I}},\hat{j},x=1,\dots,\hat{N})$, если компоненты $b^{\hat{\mathfrak{I}}}$ являются функциями компонент $a^{\mathfrak{I}}$ ([I],стр.300). В этом случае говорят также, что геометрический объект Ψ охватывается геометрическим объектом Φ. Два геометрических объекта Φ и $\tilde{\Phi}$ называются подобными, если каждый из них охватывает другой. Подобные геометрические объекты являются точками изоморфных пространств представления группы $\mathcal{G}$.

Подмножество F пространства E_n называется фигурой этого пространства, если его можно включить в систему $R(F)$ подмножеств пространства E_n, изоморфную некоторому конечномерному пространству представления группы $\mathcal{G}$ ([2],стр.7).

Из этого определения следует, что каждой фигуре F пространства E_n соответствует класс подобных геометрических объектов: $F=\{\Phi\}$.

В теории геометрических объектов и фигур возникают следующие проблемы, представляющие интерес для дифференциальной геометрии многообразий фигур.

I. Определение арифметических инвариантов геометрического объекта и фигуры.

2. Выделение геометрических объектов различных типов из класса подобных объектов.

3. Определение фигуры однородного пространства по заданному геометрическому объекту.

4. Построение с помощью фигур ненулевого жанра ([3], стр.I82) расширений фундаментальной группы $\mathcal{G}$.

5. Классификация фигур и пар фигур в однородном пространстве.

Рассмотрим каждую проблему в отдельности.

I. К настоящему времени известны четыре арифметических инварианта геометрического объекта Φ : ранг N, равный размерности пространства $\overset{*}{E}_N$ представления группы $\mathcal{G}$, точкой которого является объект Φ; жанр$=N-R$, где R - ранг матрицы $\| f^{\mathfrak{I}}_{s} \|$, совпадающий ([2],стр.6) с числом независимых абсолютных инвариантов геометрического объекта Φ относительно преобразований фундаментальной группы $\mathcal{G}$; характеристика λ –наименьшее неотрицательное число, для которого подгруппа H_{τ_λ} совпадает со всеми подгруппами $H_{\tau_{\lambda+i}}$ (i -произвольное натуральное число) и тип $æ$ -число, равное единице, если подгруппа H_{τ_λ} единичная, и равное двум, если подгруппа H_{τ_λ} не является единичной. Эти четыре инварианта независимые и не меняют своих значений при переходе от геометрического объекта Φ к произвольному подобному ему геометрическому объекту $\tilde{\Phi}$. Следовательно, все они являются арифметическими инвариантами фигуры F [3].

Представляет интерес отыскание новых независимых арифметических инвариантов геометрического объекта Φ или доказательство того, что таких инвариантов не существует.

2. Для аналитической характеристики фигуры F пространства E_n целесообразно воспользоваться наиболее простыми геометрическими объектами из класса $\{\Phi\}$ подобных геометрических объектов. Всякую фигуру ненулевого жанра ρ можно задать специально координированным геометрическим объектом $\Phi_0 \in \{\Phi\}$, у которого ρ первых компонент b^{s_0} $(s_0, p_0, q_0 = -\rho+1, \dots, 0)$ являются абсолютными инвариантами ([2], стр. 7).

Например, окружность

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_0 = 0 \qquad (1.7)$$

на евклидовой плоскости E_2 можно задать не только геометрическим объектом $\Phi = \{a_0, a_1, a_2\}$, но и подобным ему специально координированным геометрическим объектом $\tilde{\Phi} = \{b_0, b_1, b_2\}$, где b_0 - радиус окружности, а b_1, b_2 - координаты её центра

$$b_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 - 4a_0}, \quad b_1 = \frac{a_1}{2}, \quad b_2 = \frac{a_2}{2}. \qquad (1.8)$$

Назовем фигуру $F = \{\Phi\}$ лианеризируемой относительно заданного семейства реперов пространства E_n, если среди класса $\{\Phi\}$ подобных геометрических объектов, определяющих эту фигуру, существует линейный геометрический объект ([I], стр. 297).

Возникает проблема определения класса лианизируемых фигур и нахождения линейных геометрических объектов, задающих эти фигуры. Эту задачу можно расширить, заменив линейные геометрические объекты полиномиальными объектами степени выше первой ([4], стр. 9).

3. Если задан геометрический объект $\Phi = \{a^J\}$ пространства E_n формулами (I.I) или вполне интегрируемой системой уравнений (I.2), то возникает проблема отыскания фигуры пространства E_n, характеризуемой геометрическим объектом Φ. В процессе инвариантного построения дифференциальной геометрии многообразия фигур того или иного типа аналитически получают различные геометрические объекты, охватываемые фундаментальными объектами, находят соответствующие им фигуры и получают геометрические интерпретации этих фигур.

4. Рассмотрим фигуру F ранга N жанра $\rho > 0$, заданную специально координированным геометрическим объектом

$$\Phi = \{a^{s_0}, a^{s_1}\} \quad (s_1, p_1, q_1 = 1, \dots, N-\rho):$$

$$\tilde{a}^{s_1} = F^{s_1}(a, u), \quad \tilde{a}^{s_0} = a^{s_0}. \qquad (1.9)$$

Обозначим буквой $\mathcal{G}''$ ρ-членную группу сдвигов ρ-мерного евклидова пространства R^ρ и буквой $\mathcal{G}'$ - прямое произведение групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}''$:

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G} \times \mathcal{G}''. \qquad (1.10)$$

Инвариантными формами группы Ли $\mathcal{G}'$ являются формы Пфаффа $\theta^S(u, du)$ и формы $\theta^{s_0} = du^{s_0}$.

Формулы

$$\tilde{a}^{s_1} = F^{s_1}(a^{p_1}, u^q), \quad \tilde{a}^{s_0} = a^{s_0} + u^{s_0} \qquad (1.11)$$

определяют транзитивное представление группы $\mathcal{G}'$ в пространстве $R(F)$ фигуры F .

Возникает проблема отыскания представления группы $\mathcal{G}'$ в исходном пространстве E_n .

Если такое представление существует, то группа $\mathcal{G}'$ называется группой преобразования пространства E_n, порожденной фигурой F (группой фигуры F). Фундаментальная группа $\mathcal{G}$ является подгруппой этой группы. Задавая в E_n различные фигуры ненулевого жанра и определяя их группы, можно получить представление различных групп на одном и том же множестве, т.е. получить различные расширения фундаментальной группы $\mathcal{G}$ пространства E_n.

Например, рассмотрим евклидову плоскость E_2 с фундаментальной группой $\mathcal{G}$ движений:

$$\tilde{x}^1 = x^1 \cos u^1 - x^2 \sin u^1 + u^2 , \quad \tilde{x}^2 = x^1 \sin u^1 + x^2 \cos u^1 + u^3 \qquad (1.12)$$

В качестве фигуры F возьмем окружность радиуса r . Группой этой фигуры является четырехмерная группа $\mathcal{G}'$

$$\tilde{x}^1 = e^{r}(x^1 \cos u^1 - x^2 \sin u^1) + u^2 , \quad \tilde{x}^2 = e^{r}(x^1 \sin u^1 + x^2 \cos u^1) + u^3 , \qquad (1.13)$$

изоморфная группе подобных преобразований плоскости.

Любые две окружности плоскости E_2 для представления (I.13) являются эквивалентными.

5. Классификацию фигур F пространства E_n и классификацию пар фигур можно осуществлять различными способами. В дифференциальной геометрии многообразий фигур, оказывается удобным подразделять фигуры на простые, не охватывающие

никакой другой фигуры, и индуцирующие-фигуры, охватывающие по крайней мере одну фигуру меньшего ранга ([3], стр. 186).

Для некоторых фигур такую классификацию осуществить легко. Например, точка, p-мерная плоскость, невырожденная гиперквадрика в n-мерном проективном пространстве являются простыми фигурами, а гиперквадрика в n-мерном аффинном пространстве и квадратичный элемент в n-мерном проективном пространстве являются индуцирующими фигурами (они индуцируют, соответственно, точку и гиперплоскость).

Однако, в общем случае еще не установлены аналитические критерии, позволяющие определить является ли данная фигура F простой или индуцирующей. Задача сводится к установлению отсутствия или наличия подобъектов у геометрического объекта, определяющего фигуру F .

Пары фигур классифицируются не только на простые и индуцирующие, но и на неинцидентные и инцидентные (см. [3], стр. 187-188).

§2. Многообразия коник и квадрик.

Одним из основных разделов дифференциальной геометрии многообразий фигур является геометрия многообразий квадрик и коник в трехмерных пространствах (евклидовом, аффинном и проективном), а также геометрия многообразий p-мерных квадрик $(1 \leq p \leq n-1)$ в соответствующих n-мерных пространствах. К настоящему времени наиболее полно исследованы конгруэнции коник в трехмерном проективном пространстве, многообразия квадратичных элементов и многообразия гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве (см. [5], стр. 114-126).

При исследовании многообразий коник и квадрик основное внимание обращалось на выделение фокальных образов, построение ассоциированных многообразий (главным образом алгебраических), построение инвариантного оснащения и рассмотрение различных классов многообразий коник и квадрик со специальными свойствами фокальных и других ассоциированных образов.

Рассмотрим некоторые проблемы, относящиеся к геометрии многообразий коник и квадрик в проективном пространстве.

I. Осуществить инвариантное построение дифференциальной геометрии m-мерного многообразия p-мерных невырожденных квадрик в n-мерном проективном пространстве

$$\left(1 \leq m < C^2_{p+3} + (p+2)(n-p-1) - 1\,,\quad 1 \leq p < n\right).$$

1/ В [6] рассмотрены m-мерные многообразия невырожденных гиперквадрик

$$F_0 \equiv a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0\,,\quad \det\|a_{\alpha\beta}\| \neq 0 \quad (\alpha,\beta,\gamma = 1,\dots,n+1) \qquad (2.1)$$

в n-мерном проективном пространстве-многообразия $K(m,n)$.
Они задаются пфаффовой системой уравнений

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i}\tau^i \qquad (i = 1,2,\dots,m), \qquad (2.2)$$

где

$$\Theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta\,, \qquad (2.3)$$

ω^β_α – компоненты инфинитезимальных перемещений репера, τ^i – инвариантные формы параметрической группы [7]. При продолжении системы (2.3) возникает последовательность фундаментальных объектов многообразия $K(m,n)$:

$$\Gamma_1 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta i}\},\ \Gamma_2 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta i}, \Lambda_{\alpha\beta ij}\}, \dots,$$
$$\Gamma_p = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta i_1}, \dots, \Lambda_{\alpha\beta i_1 \dots i_p}\}, \dots \qquad (2.4)$$

определяющая геометрию этого многообразия.

Система алгебраических уравнений

$$F_{i_1} = 0\,, \dots,\ F_{i_1 \dots i_p} = 0\,, \qquad (2.5)$$

где

$$F_{i_1} = \Lambda_{\alpha\beta i_1} x^\alpha x^\beta, \dots,\ F_{i_1,\dots,i_p} = \Lambda_{\alpha\beta i_1,\dots,i_p} x^\alpha x^\beta \qquad (2.6)$$

определяет характеристическое многообразие ранга p многообразия $K(m,n)$ ([6], стр.53). Его пересечение с гиперквадрикой (2.1) дает фокальное многообразие ранга p. Возникает проблема исследования многообразий $K(m,n)$ с непустыми ассоциированными алгебраическими многообразиями ранга p, имеющими в общем случае нульмерные компоненты. Для $p=1$ такими многообразиями, в частности, являются многообразия $K(m,n)$, где $m = n-1$, $m = n$ или $\frac{m(m+3)}{2} = n-1$. Для $m > n$, $p \geq 1$ и для $m < n$, $p > 1$ многообразия $K(m,n)$ с непустыми ассоциированными алгебраическими многообразиями, состоящими из нульмерных компонент, еще не рассматривались.

Бесконечная последовательность алгебраических уравнений

$$F_0 = 0\,,\quad F_{i_1} = 0\,, \dots,\ F_{i_1,\dots i_k} = 0 \qquad (2.7)$$

по теореме Гильберта о базисе эквивалентна конечной системе алгебраических уравнений (базисной системе).

Пусть $\tau_{m,n}$ – число независимых уравнений базисной системы многообразия $K(m,n)$. Совпадает ли это число с порядком основного объекта многообразия $K(m,n)$?.Для некоторых частных типов многообразий $K(m,n)$ такое совпадение имеет место.Однако,для произвольных многообразий $K(m,n)$ эта проблема пока не решена.

2/ В [8] дано инвариантное построение дифференциальной геометрии многообразий $(k,k,n)^2$ квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве (k-мерных многообразий невырожденных $(n-2)$-мерных квадрик,гиперплоскости которых образуют k-параметрическое семейство). Найдена инвариантная точка вне гиперплоскости квадратичного элемента многообразия $(k,k,n)^2$ (инвариантное оснащение).Однако,геометрической интерпретации этой точки еще не найдено.

Учитывая,что с помощью инвариантного оснащения многообразия $(k,k,n)^2$ возникает связность на многообразии,нахождение геометрической интерпретации полученной инвариантной точки представляет особый интерес.

2.Осуществить инвариантное построение дифференциальной геометрии m-мерного многообразия алгебраических гиперповерхностей порядка $K>2$ в n-мерном проективном пространстве.

В [9] рассмотрены многообразия кубических гиперповерхностей (случай $K=3$).Многообразия алгебраических гиперповерхностей порядка $K>3$ не изучены.

3.Исследовать конгруэнцию кривых второго порядка (коник) в трехмерном проективном пространстве, все коники которой принадлежат одной алгебраической поверхности порядка $K>2$.

Исследованы (см.[5],стр.116) конгруэнции,все коники которых принадлежат одной квадрике (случай $K=2$).Доказано,что такие конгруэнции характеризуются неопределенностью фокальных семейств и фокальных поверхностей.Для $K>2$ задача пока не решена.

4.По заданным $m<6$ фокальным поверхностям конгруэнции коник некоторого класса найти геометрическую характеристику фокальных точек коники,описывающих остальные $6-m$ фокальных поверхностей.Выделить классы конгруэнций коник,для которых эта задача решается.К таким классам относятся,например,конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$ ([10],стр.202-204)).

5.Найти конгруэнции коник с шестью различными вырождающимися в линии фокальными поверхностями.

6.Найти конгруэнции коник,все шесть фокальных поверхностей которых являются плоскостями.

§3.Дифференциальная геометрия соответствий пространств фигур.

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является геометрия точечных соответствий проективных,аффинных и евклидовых пространств.Состояние исследований по этой тематике отражено в обзорах [11],[12].Применение современных методов дифференциально-геометрических исследований и прежде всего метода Г.Ф.Лаптева [1]дает возможность приступить к построению дифференциальной геометрии соответствий пространств,образующими элементами которых являются произвольные фигуры.

Пусть F_1 и F_2 -произвольные фигуры одинакового ранга N ;$\Omega_1^{\mathcal{I}}$, $\Omega_2^{\mathcal{I}}$ ($\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}=1,2,\dots,N$) -левые части уравнений стационарности этих фигур.

Система пфаффовых уравнений локального соответствия между пространствами $R(F_1)$ и $R(F_2)$ этих фигур имеет вид:

$$\Omega_1^{\mathcal{I}}=\Lambda_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}}\Omega_2^{\mathcal{K}}. \tag{3.1}$$

Продолжения системы (3.I) дают последовательность фундаментальных геометрических объектов соответствия φ :

$$\Gamma_1=\{\Lambda_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}}\},\Gamma_2=\{\Lambda_{\mathcal{K}_1}^{\mathcal{I}},\Lambda_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2}^{\mathcal{I}}\},\dots,\Gamma_n=\{\Lambda_{\mathcal{K}_1}^{\mathcal{I}},\dots\Lambda_{\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_n}^{\mathcal{I}}\},\dots \tag{3.2}$$

Геометрические объекты, охватываемые фундаментальным объектом Γ_n определяют всю геометрию $n^{ой}$-дифференциальной окрестности соответствия φ .

Уже первая дифференциальная окрестность соответствия оказывается, как правило, значительно богаче в случае соответствия пространств фигур, чем в случае точечных соответствий. Это объясняется существованием в пространствах фигур (в отличие от пространств E_n, A_n и P_n) особых направлений смещения произвольной фиксированной фигуры, т.е. неизотропностью пространств фигур.

Одним из основных понятий теории точечных соответствий является понятие характеристических направлений, выделяемых во 2-й дифференциальной окрестности, как направлений, вдоль которых данное соответствие соприкасается с касательным к нему коллинейным соответствием. Это понятие сохраняет свой смысл для специального класса фигур , так называемых

P -фигур [13]. Для этого случая соответствий сохраняется также классификация по признаку специального расположения характеристических направлений.

Представляют интерес рассмотреть различные обобщения этого понятия на случай произвольных фигур. Исследовались случаи, когда F_1 является точкой проективного пространства, а F_2 -парой P -фигур (точка-гиперплоскость и точка - гиперквадрика). В этих случаях возникает понятие слабо характеристических направлений, размерность конуса которых на единицу больше размерности конуса характеристических направлений (число которых в общем случае 2^N-1) и, таким образом, имеется I-параметрическое семейство слабо характеристических направлений. Последнее понятие сохраняет смысл для произвольных пар P -фигур, а наличие инвариантных характеристических направлений связано с существованием в точечном пространстве инвариантного поля гиперплоскостей, неинцидентных точкам, в которых строится соответствие.

Существование аналога характеристических направлений для соответствий пространств произвольных фигур связано с существованием в них инвариантных однопараметрических семейств специального вида. В произвольной точке для произвольного смещения $\Omega^{\mathcal{I}}=\lambda^{\mathcal{I}}\omega$ (ω -параметрическая форма) должна существовать дифференциальная окрестность порядка K , в которой можно выделить I-параметрическое семейство простейшего вида- в некотором смысле аналог гиперинфлексионной кривой. Наименьший номер K такой дифференциальной окрестности является арифметическим инвариантом данной фигуры. Таким образом, рассматриваемая проблема сводится к существованию еще одного арифметического инварианта для произвольной фигуры (см. §I).

Другой путь исследования соответствий пространств фигур состоит в определении инвариантно возникающих связностей в этих пространствах. Однопараметрические семейства фигур одного пространства, соответствующие инвариантным геодезическим в другом пространстве будут определять геометрию изучаемого соответствия.

§4. Многообразия полуквадратичных и квадратичных пар фигур.

Основной раздел в теории многообразий пар фигур, интенсивно разрабатываемой в последние годы калининградскими и томскими геометрами [5], составляют многообразия полуквадратичных (точка, прямая-коника) и квадратичных (коника-коника) пар фигур в трехмерных пространствах (проективном, аффинном, эвклидовом) и прежде всего двумерные многообразия-конгруэнции.

Исследование многообразий полуквадратичных и квадратичных пар фигур осуществлялось в основном с использованием различных типов расслоений (см. [IO], [I4]). Условия расслоения, налагаемые на различные классы конгруэнций таких пар выделяет конгруэнции с достаточно интересными геометрическими свойствами, но при этом возникают значительные аналитические трудности, затрудняющие решение проблемы в целом.

Рассмотрим, например, расслояемую пару (C_1, C_2) конгруэнций (C_1), (C_2) коник, не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей.

Пусть A_i -одна из точек пересечения коники C_j ($i,j,k = 1,2;\ i \neq j$) с прямой ℓ, A_3 и A_4-полюсы прямой ℓ относительно коник C_1 и C_2. Тогда уравнения коник C_1, C_2 и система пфаффовых уравнений пары (C_1, C_2) конгруэнций запишутся соответственно в виде ([IO], стр. 2IO):

$$(x^3)^2 - (a_1 x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{4.1}$$

$$(x^4)^2 - (a_2 x^2)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered} \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \\ \theta_i = A_i^k\omega_k, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \\ \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \quad \Omega_i = b_i^k\omega_k, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где ω_α^β $(\alpha, \beta, = 1,2,3,4)$ -компоненты инфинитезимальных перемещений репера и

$$\omega_i = \omega_i^4, \quad \theta_i = da_i - a_i(\omega_i^i - \omega_{i+2}^{i+2}), \quad \Omega_i = \omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_{i+2}^{i+2}. \tag{4.3'}$$

Здесь суммирование по индексам i и j не производится.

Как известно ([IO], стр. 2II), пара (C_1, C_2) называется расслояемой, если существуют односторонние расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к конгруэнции (A_3A_4) прямых, инцидентных полюсам прямой ℓ относительно C_1 и C_2. Расслояемые пары (C_1, C_2) определяются пфаффовыми уравнениями (4.3), их замыканиями и квадратичными уравнениями (6.II)

(6.13) из [10]:

$$\omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0, \qquad \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0,$$

$$\Omega_1 \wedge \omega_3^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 - 2\,\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 = 0,$$

$$2\,\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\Omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 - 2\,\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 + a_1\,\theta_1 \wedge \omega_3^1 + (a_1)^2 (\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^1) = 0, \tag{4.4}$$

$$(a_1)^2\,\omega_3^2 \wedge \omega_3^1 + \omega_1^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_3^2 \wedge \omega_1^2 + a_1\,\theta_1 \wedge \omega_3^2 + (a_1)^2 \omega_3^4 \wedge \omega_2 = 0.$$

$$\omega_4^2 \wedge \omega_1^2 = 0, \qquad \omega_1 \wedge \omega_4^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0,$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_4^1 \wedge \omega_1^2 - 2\,\omega_4^3 \wedge \omega_3^2 = 0,$$

$$2\,\omega_4^2 \wedge \omega_4^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^1 - 2\,\omega_4^3 \wedge \omega_3^1 + a_2\,\theta_2 \wedge \omega_4^2 + (a_2)^2 (\omega_4^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_4^1 \wedge \omega_1^2) = 0, \tag{4.5}$$

$$(a_2)^2\,\omega_4^1 \wedge \omega_4^2 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$

$$\omega_4^1 \wedge \omega_2^1 + a_2\,\theta_2 \wedge \omega_4^1 + (a_2)^2\,\omega_4^3 \wedge \omega_1^3 = 0.$$

До сих пор удалось доказать теорему существования и исследовать только некоторые очень частные классы расслояемых пар (C_1, C_2). Возникает проблема доказательства теоремы существования расслояемых пар (C_1, C_2) общего вида. Решение этой проблемы сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений (4.3), (4.4), (4.5).

Аналогичная проблема возникает в теории расслояемых пар C_ℓ ([10], стр. 197-207) и в теории расслояемых пар (C_1, C_2), когда обе коники (или только одна) касаются линии ℓ пересечения коник.

Среди нерешенных проблем, относящихся к невырожденным многообразиям пар фигур, следует отметить также проблему инвариантного построения дифференциальной геометрии многообразия пар гиперквадрик n-мерного проективного пространства, многообразий пар p-мерных квадрик $(p < n-2)$, а также многообразий пар фигур порожденных k-плоскостью и p-мерной квадрикой.

Вырожденные многообразия пар p-мерных квадрик $(1 \leq p \leq n-1)$ и пар фигур, порожденных k-плоскостью и p-мерной квадрикой до сих пор не рассматривались.

§5. Касательно-оснащенные многообразия фигур.

Пусть $\Omega^J = da^J - f^J_s(a)\,\theta^s(u, du)$ — левые части уравнений стационарности фигуры F, заданной в однородном пространстве E_n, $\theta^s(u, du)$ — инвариантные формы фундаментальной группы этого пространства $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 1, 2, \ldots, N;\ s = 1, \ldots, r)$.

Многообразие $\mathcal{M}^*_m$ размерности m, определенное уравнениями

$$\Omega^a = \lambda^a_i \Omega^i, \qquad (5.1)$$

$$dA^\alpha_\xi - A^\alpha_\eta \Omega^\eta_\xi + A^\beta_\xi A^\alpha_\eta (\Omega^\eta_\beta + \lambda^b_\beta \Omega^\eta_b) - \lambda^b_\xi (\Omega^\alpha_b + A^\alpha_\eta \Omega^\eta_b) +$$

$$+ A^\beta_\xi (\Omega^\alpha_\beta + \lambda^b_\beta \Omega^\alpha_b) - \Omega^\alpha_\xi = A^\alpha_{\xi i} \Omega^i, \qquad (5.2)$$

$(\xi, \eta = 1, \ldots, k;\ \alpha, \beta = k+1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, m;\ a, b = m+1, \ldots, N)$,

где

$$\Omega^{\mathcal{J}}_{\varkappa} = -\frac{\partial f^{\mathcal{J}}_s}{\partial a^{\varkappa}} \theta^s (u, du), \qquad (5.3)$$

называется касательно оснащенным многообразием, соответствующим m-мерному многообразию $\mathfrak{M}_m$, определенному уравнениями (5.I). Уравнения (5.2) характеризуют относительную инвариантность системы форм $\theta^\alpha = A^\alpha_\xi \Omega^\xi + \Omega^\alpha$ (см. [I5]). Многообразие $\underset{(k)}{\mathfrak{M}^*_m}$ является многообразием $\mathfrak{M}_m$ с заданным на нем полем касательно оснащающего объекта

$\varphi_k = \{a^{\mathcal{J}}, \lambda^a_i, A^\alpha_\xi\}$ (с заданным распределением).

Наряду с разработкой общих вопросов теории касательно оснащенных многообразий фигур и пар фигур, представляет интерес исследование касательно-оснащенных многообразий фигур специального вида. (Например, квадрик, квадратичных элементов в P_n).

К настоящему времени изучены лишь некоторые частные классы касательно оснащенных конгруэнций коник в P_3 [I6].

Литература

I. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. общ-ва ГИТТЛ, М., I953, 2, 275-383.

2. Малаховский В.С., О многообразиях алгебраических фигур. Тр. Томского ун-та, т. I8I, I965, 5-I4.

3. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геом. семинара ВИНИТИ АН СССР, М., I969, 2, I79-206.

4. Малаховский В.С., Производные и полиномиальные геометрические объекты. Тр. Томского ун-та, т. I96, I968, 3-I4.

5. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия семейств линий и поверхностей. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР Алгебра. Топология. Геометрия., т. IO, I972, II3-I57.

6. Махоркин В.В., Некоторые типы многообразий гиперквадрик. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 3, Калининград, I973, 50-59.

7. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. "Геометрия, I963", Итоги науки ВИНИТИ АН СССР. М., I965, 5-64.

8. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Тр. Томского ун-та т. I68, 28-42, I963.

9. Махоркин В.В., Многообразия кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства. Данный сб., 85-96.

IO. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур Труды геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР, т. 3, I97I, I93-220.

II. Рыжков В.В., Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. "Геометрия, I963", Итоги науки ВИНИТИ АН СССР, М., I965, 65-I07.

I2.Рыжков В.В.,Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.Итоги науки ВИНИТИ АН СССР.Алгебра.Топология.Геометрия.,М.,1971,153-169.

I3.Андреев Б.А.,О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством.Дифференциальная геометрия многообразий фигур,вып.2, Калининград,1971,28-37.

I4.Ткач Г.П.,О некоторых классах аффинно-расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.Дифференциальная геометрия многообразий фигур,вып.3, Калининград,1973,143-152.

I5.Малаховский В.С.,К геометрии касательно оснащенных подмногообразий.Известия высших учебных заведений,Математика,1972,№9(124),54-65.

I6.Малаховский В.С.,Касательно оснащенные конгруэнции коник.Дифференциальная геометрия многообразий фигур,вып.4, г.Калининград,1974,68-85.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

М а х о р к и н В.В.

МНОГООБРАЗИЯ КУБИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ n-МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.(I)

Рассматриваются m-мерные многообразия кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства. Вводится понятие ассоциированных алгебраических многообразий.Рассмотрено ассоциированное алгебраическое многообразие,которое состоит в общем случае из 3^n точек,принадлежащих кубической гиперповерхности,и содержит все её особые точки.Доказано,что $(n-1)$-мерное многообразие кубических гиперповерхностей n-мерного пространства индуцирует $(n-1)$-мерные многообразия гиперквадрик.

§I.Многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к реперу $R\equiv\{A_\alpha\}$ с деривационными формулами

$$\mathcal{D}A_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta,\ (\alpha,\beta,\gamma=0,1,\ldots,n) \qquad (1.1)$$

где формы ω_α^β подчинены структурным уравнениям проективной группы:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta . \qquad (1.2)$$

Рассмотрим в P_n кубическую гиперповерхность C ,заданную уравнением :

$$a_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \qquad (1.3)$$

где $a_{\alpha\beta\gamma}$ симметричны относительно всех индексов.

О п р е д е л е н и е I.Многообразием $\mathfrak{C}(m,n)$ называется m-мерное многообразие кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства.

Многообразие $\mathfrak{C}(m,n)$ задается следующей системой уравнений Пфаффа:

$$\theta_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma i}\tau^i, \qquad (1.4)$$

где

$$\theta_{\alpha\beta\gamma} \equiv da_{\alpha\beta\gamma} - a_{\lambda\beta\gamma}\omega_\alpha^\lambda - a_{\alpha\lambda\gamma}\omega_\beta^\lambda - a_{\alpha\beta\lambda}\omega_\gamma^\lambda - a_{\alpha\beta\gamma}\vartheta, \qquad (1.5)$$

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta\gamma i} = d\Lambda_{\alpha\beta\gamma i} - \Lambda_{\lambda\beta\gamma i}\omega_\alpha^\lambda - \Lambda_{\alpha\lambda\beta i}\omega_\beta^\lambda - \Lambda_{\alpha\beta\lambda i}\omega_\gamma^\lambda - \Lambda_{\alpha\beta\gamma j}\tau_i^j, \qquad (1.6)$$

а формы τ^i [I]являются инвариантными формами бесконечной аналитической группы преобразований пространства X_m (пространства параметров) и подчинены следующим структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\tau^i = \tau^k \wedge \tau_k^i , \qquad (1.7)$$

$$\mathcal{D}\tau_j^i = \tau_j^k \wedge \tau_k^i + \tau^k \wedge \tau_{jk}^i ,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\mathcal{D}\tau^i_{j_1 j_2 \dots j_r} = \sum_{s=1}^{r} \frac{r!}{s!(r-s)!}\tau^k_{(j_1 j_2 \dots j_s} \wedge \tau^i_{j_{s+1} \dots j_r)k} + \tau^k \wedge \tau^i_{j_1 j_2 \dots j_r k} .$$

Множитель ϑ в (I.5) является полным дифференциалом некоторой функции.Последовательно продолжая систему уравнений (I.4) получим бесконечную последовательность функций

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma i},\ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2}, \dots, \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2 \dots i_p}, \dots \qquad , \qquad (1.8)$$

определяющих дифференциальную геометрию многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$.

Система величин

$$\{ a_{\alpha\beta\gamma},\ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1}, \dots, \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2 \dots i_p} \} \qquad (1.9)$$

образует фундаментальный объект порядка p многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$.Функции (I.8) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$d\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1} = \Lambda_{\alpha\beta\lambda i_1}\omega_\gamma^\lambda + \Lambda_{\alpha\lambda\gamma i_1}\omega_\beta^\lambda + \Lambda_{\lambda\beta\gamma i_1}\omega_\alpha^\lambda + \\ + \Lambda_{\alpha\beta\gamma j}\tau_{i_1}^j + \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 j}\tau^j , \qquad (1.10)$$

$$d\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2} = \Lambda_{\lambda\beta\gamma i_1 i_2}\omega_\alpha^\lambda + \Lambda_{\alpha\lambda\gamma i_1 i_2}\omega_\beta^\lambda + \Lambda_{\alpha\beta\lambda i_1 i_2}\omega_\gamma^\lambda +$$

$$+\Lambda_{\alpha\beta\gamma j i_2}\tau^j_{i_1}+\Lambda_{\alpha\beta i_1 j}\tau^j_{i_2}+\Lambda_{\alpha\beta\gamma j}\tau^j_{i_1 i_2}+\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2 j}\tau^j,$$

$$d\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\dots,i_p}=\Lambda_{\lambda\beta\gamma i_1 i_2,\dots,i_p}\omega^\lambda_\alpha+\Lambda_{\alpha\lambda\gamma i_1 i_2,\dots,i_p}\omega^\lambda_\beta+$$

$$+\Lambda_{\alpha\beta\lambda i_1,\dots,i_p}\omega^\lambda_\gamma+\sum_{s=1}^{p}\frac{p!}{s!(p-s)!}\Lambda_{\alpha\beta\gamma j(i_{s+1},\dots,i_p}\tau^j_{i_1,\dots,i_s)}+\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\dots,i_p j}\tau^j.$$

(Скобки в индексах означают симметрирование по всем индексам в них заключенным).

Из уравнений (I.IO) следует, что система величин

$$\{\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1},\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2},\dots,\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2\dots i_p}\} \qquad (1.11)$$

образует геометрический объект, который в дальнейшем будем называть фундаментальным подобъектом порядка p многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$.

§2. Ассоциированные алгебраические многообразия.

Построим при помощи фундаментального подобъекта порядка p следующие системы алгебраических уравнений

$$F_0=0,\quad F_{i_1}=0,\dots,F_{i_1 i_2,\dots,i_p}=0, \qquad (2.1)$$

и

$$F_{i_1}=0,\quad F_{i_1 i_2}=0,\dots,F_{i_1 i_2\dots i_p}=0, \qquad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned}F_0&\equiv a_{\alpha\beta\gamma}\,x^\alpha x^\beta x^\gamma,\\ F_{i_1}&\equiv\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1}x^\alpha x^\beta x^\gamma,\\ F_{i_1 i_2}&\equiv\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2}x^\alpha x^\beta x^\gamma,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ F_{i_1 i_2,\dots,i_p}&\equiv\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\dots,i_p}x^\alpha x^\beta x^\gamma.\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Из (I.5), (I.IO) и (2.3) следует, что

$$\begin{aligned}\delta F_0&=\vartheta F_0,\\ \delta F_{i_1}&=\vartheta F_{i_1}+F_j\overset{\circ}{\tau}{}^j_{i_1},\\ \delta F_{i_1 i_2}&=\vartheta F_{i_1 i_2}+F_{j i_2}\overset{\circ}{\tau}{}^j_{i_1}+F_{i_1 j}\overset{\circ}{\tau}{}^j_{i_2},\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \delta F_{i_1 i_2,\dots,i_p}&=\vartheta F_{i_1 i_2,\dots,i_p}+\sum_{s=1}^{p}F_{j(i_{s+1},\dots,i_p}\overset{\circ}{\tau}{}^j_{i_1,\dots,i_s)}.\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Обозначим

$$N=1+m+\frac{m(m+1)}{2!}+\dots+\frac{m(m+1)(m-p+1)}{p!}. \qquad (2.5)$$

Из (2.4) вытекает, что при $N\leq n$ система уравнений (2.I) определяет непустое алгебраическое многообразие. При $N\leq n-1$ система уравнений (2.2) также определяет непустое алгебраическое многообразие.

О п р е д е л е н и е 2. Непустое алгебраическое многообразие, определяемое системой (2.I), называется многообразием ${}^{(p)}\mathfrak{f}(m,n)$ или фокальным многообразием ранга p.

О п р е д е л е н и е 3. Непустое алгебраическое многообразие, определяемое системой (2.2), называется многообразием ${}^{(p)}\mathfrak{h}(m,n)$ или характеристическим многообразием ранга p .

Из определений (2) и (3) следует, что

$$ {}^{(s)}\mathfrak{f}(m,n) = C \cap {}^{(s)}\mathfrak{h}(m,n). \quad , \qquad (2.6) $$

в общем случае

$$ C \supset {}^{(1)}\mathfrak{f}(m,n) \supset {}^{(2)}\mathfrak{f}(m,n) \supset \ldots \supset {}^{(s)}\mathfrak{f}(m,n) \,, \qquad (2.7) $$

$$ {}^{(1)}\mathfrak{h}(m,n) \supset {}^{(2)}\mathfrak{h}(m,n) \supset \ldots \supset {}^{(s)}\mathfrak{h}(m,n) . \qquad (2.8) $$

Бесконечная последовательность функций (I.8) порождает бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$ \begin{array}{l} a_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\ldots,i_p}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (2.9) $$

Согласно теореме Гильберта о базисе [2] система уравнений (2.9) обладает базисом. Пусть базисом системы уравнений (2.9) в некоторой области многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$ является система уравнений (2.I), тогда будем иметь:

$$ F_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} = b^{j_1 j_2,\ldots,j_p}_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} F_{j_1 j_2,\ldots,j_p} + b^{j_1 j_2,\ldots,j_{p-1}}_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} F_{j_1 j_2,\ldots,j_{p-1}} + $$
$$ + \ldots + b^{j_1}_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} F_{j_1} + b_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} F_0 . \qquad (2.10) $$

Из (2.I0) получаем

$$ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} = b^{j_1 j_2,\ldots,j_p}_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} \Lambda_{\alpha\beta\gamma j_1 j_2,\ldots,j_p} + \ldots + $$
$$ + b^{j_1}_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} \Lambda_{\alpha\beta\gamma j_1} + b_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}}\, a_{\alpha\beta\gamma} . \qquad (2.11) $$

§3. Многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$.

Фокальное многообразие ранга один кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$ определяется системой уравнений:

$$ \begin{array}{l} a_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0 . \end{array} \qquad (3.1) $$

Т е о р е м а I. Фокальное многообразие ${}^{(1)}\mathfrak{f}(n-1,n)$ кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$ состоит в общем случае из 3^n точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений (3.I) состоит из n уравнений третьей степени, значит [3] фокальное многообразие в общем случае состоит из 3^n точек.

Характеристическое многообразие ранга один ${}^{(1)}\mathfrak{h}(n-1,n)$ кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{S}(n-1,n)$ является в общем случае алгебраической кривой порядка 3^{n-1}, её пересечение с C определяет фокальное многообразие ${}^{(1)}\mathfrak{f}(n-1,n)$. Осуществим следующую канонизацию репера R

$$a_{000} = a_{00i} = \Lambda_{000i} = 0, \quad a_{00n} = -1, \quad (3.2)$$

причем

$$\det \| \Lambda_{00ij} \| \neq 0.$$

Так как многообразие $\mathfrak{S}(n-1,n)$ определяется системой уравнений

$$\theta_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma i}\tau^i, \quad (i,j,k = 1,2,\ldots,n-1) \quad (3.3)$$

где

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta\gamma i} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma ij}\tau^j,$$

то канонизация (3.2) геометрически означает, что вершина A_0 репера R помещается в одну из фокальных точек кубической гиперповерхности C, являющейся её неособой точкой и описывающей гиперповерхность (A_0); в касательной плоскости к C в точке A_0 располагаются вершины A_i.

Фокальные точки кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{S}(n-1,n)$, описывающие гиперповерхности, назовем фокальными точками первого рода.

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы неособая точка P кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{S}(n-1,n)$ являлась её фокальной точкой первого рода необходимо и достаточно, чтобы касательная плоскость к поверхности (P) в точке P совпала с касательной плоскостью к C в той же точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка P фокальная первого рода, то из (3.3), (3.2) получаем

$$\omega_0^n = 0,$$

следовательно,

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^k A_k,$$

т.е. касательные плоскости совпадают. Если точка P описывает гиперповерхность (P), касательная плоскость к которой в точке P совпадает с касательной плоскостью к C в точке P, то помещая вершину A_0 в точку P, а вершины A_i на общую касательную плоскость, будем иметь:

$$\omega_0^n = 0.$$

Из (3.3) получим:

$$\Lambda_{000i}\tau^i = 0.$$

Так как τ^i линейно-независимы, то

$$\Lambda_{000i} = 0,$$

а значит точка P — фокальная точка.

Т е о р е м а 3. Фокальная точка первого рода кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{S}(n-1,n)$ индуцирует гиперквадрику, касающуюся C в этой точке.

Доказательство. Учитывая канонизацию (3.2) и обозначая

$$\Phi \equiv a_{0\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta}, \qquad (3.4)$$

будем иметь

$$\delta\Phi = (\pi^0_0 - \overset{\circ}{\vartheta})\Phi.$$

Значит

$$\Phi = 0$$

определяет в общем случае гиперквадрику. Из (3.4) следует, что Φ касается C.

Таким образом, с многообразием $\mathfrak{C}(n-1,n)$ в общем случае ассоциируется 3^n многообразий $K(n-1,n)$ [4].

Следствие. Фокальная точка первого рода кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$ является фокальной точкой индуцированной гиперквадрики ассоциированного многообразия $K(n-1,n)$.

Теорема 4. Если все кубические поверхности многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$ имеют общую точку, то она принадлежит многообразию, определяемому системой уравнений (2.9)

Доказательство. Поместим вершину A_0 репера в общую точку всех кубических поверхностей, тогда будем иметь

$$a_{000} = 0, \quad \omega^i_0 = 0, \quad \omega^n_0 = 0. \qquad (3.6)$$

$$dA_0 = \omega^0_0 A_0. \qquad (3.7)$$

Из (3.3) и их продолжений с учетом (3.6) получим для любого p:

$$\Lambda_{000i_1} = 0, \ \Lambda_{000i_1i_2} = 0, \dots, \Lambda_{000i_1i_2\dots i_p} = 0.$$

Теорема 5. Каждая особая точка кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$ принадлежит её фокальному многообразию ${}^{(1)}\mathfrak{f}(n-1,n)$.

Доказательство. Особые точки кубической гиперповерхности C определяются следующей системой уравнений [3]:

$$\Pi_\lambda = 0, \qquad (3.8)$$

где

$$\Pi_\lambda \equiv a_{\lambda\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta}, \qquad (3.9)$$

$$\delta\Pi_\lambda = \Pi_\mu (\pi^\mu_\lambda + \overset{\circ}{\vartheta}).$$

Расположим вершину A_0 репера R в одну из особых точек C, тогда из (3.9) получим

$$a_{00\lambda} = 0. \qquad (3.10)$$

Из уравнений (3.3), получим

$$\Lambda_{000i}\, \tau^i = 0, \qquad (3.11)$$

а так как τ^i линейно независимы, то

$$\Lambda_{000i} = 0. \qquad (3.12)$$

То есть особая точка принадлежит фокальному многообразию ${}^{(1)}\mathfrak{f}(n-1,n)$.

Особая точка кубической гиперповерхности C индуцирует конус [3].

Литература.

I.Лаптев Г.Ф.,Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей.Геометрия.1963г.(Итоги науки ВИНИТИ АН СССР), М.,1965,5-64.

2.Ходж В.,Пидо Д.,Методы алгебраической геометрии,т.I, ИЛ,М.,1954.

3.Шафаревич И.Р.,Основы алгебраической геометрии,М., "Наука",1972.

4.Махоркин В.В.,Некоторые типы многообразий гиперквадрик."Дифференциальная геометрия многообразий фигур"вып.3, Калининград,1973,50-59.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Овчинников В.М.

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ,АССОЦИИРОВАННЫЕ С МНОГООБРАЗИЕМ ПОЛУКВАДРАТИЧНЫХ ПАР ФИГУР.

В статье [3] изучалось дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов.В настоящей работе рассмотрены некоторые геометрические образы, ассоциированные с k-мерным многообразием пар фигур $\{F_1F_2\}$, где F_1 -квадратичный элемент [2],а F_2-не инцидентная ему точка.

§I.Система дифференциальных уравнений многообразия полуквадратичных пар фигур $\{F_1,F_2\}$.

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n k-мерное многообразие $V_{k,n}$ пар фигур $\{F_1,F_2\}$,где F_1 - квадратичный элемент,а F_2 -не инцидентная ему точка (многообразие полуквадратичных пар фигур).

Расположим вершины A_α $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots,n)$ репера $\{A_1,\ldots,A_{n+1}\}$ в гиперплоскости квадратичного элемента F_1, а вершину A_{n+1} совместим с точкой F_2.Уравнения инфинитезимальных перемещений репера имеют вид:

$$dA_\mathcal{J}=\omega_\mathcal{J}^{\varkappa}A_\varkappa ,$$

где формы $\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}}$ удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства P_n :

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}} = \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{L}} \wedge \omega_{\mathcal{L}}^{\mathcal{K}}, \quad (\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L} = 1,2,\dots,n+1).$$

Формы

$$\theta_{\alpha\beta}, \quad \omega_\alpha^{n+1} = \omega_\alpha, \quad \omega_{n+1}^\alpha = \omega^\alpha,$$

где

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv d a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma - a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma + \frac{2}{n} a_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\gamma,$$

являются главными.

Пространство главных параметров обозначим через $\mathfrak{M}_k$. Определим на $\mathfrak{M}_k$ вполне интегрируемую систему форм $\theta^{\hat a}$ $(\hat a, \hat b = 1,2,\dots,k)$ так, что локальные координаты $u^{\hat a}$ пространства $\mathfrak{M}_k$ являются первыми интегралами этой системы форм [4]. Формы $\theta^{\hat a}$ выражаются через дифференциалы координат $u^{\hat a}$ следующим образом:

$$\theta^{\hat a} = u^{\hat a}_{\hat b} du^{\hat b}, \quad \det(u^{\hat a}_{\hat b}) \neq 0.$$

Система форм $\theta^{\hat a}$ подчинена структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\theta^{\hat a} = \theta^{\hat b} \wedge \theta^{\hat a}_{\hat b}.$$

Принимая формы $\theta^{\hat a}$ за базисные, запишем систему пфаффовых уравнений многообразия $V_{k,n}$ в виде

$$\theta_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta,\hat a}\theta^{\hat a}, \quad \omega_\alpha = b_{\alpha\hat a}\theta^{\hat a}, \quad \omega^\alpha = \Lambda^\alpha_{\hat a}\theta^{\hat a}, \qquad (1.1)$$

причем

$$\det(b_{\hat a \hat b}) \neq 0. \qquad (1.2)$$

Уравнения квадратичного элемента F_1 имеют вид:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad \det(a_{\alpha\beta}) = 1 \qquad (1.3)$$

Из равенства единице детерминанта $\det(a_{\alpha\beta})$ следуют тождества

$$a^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta,\hat a} \equiv 0, \qquad (1.4)$$

где $a^{\alpha\beta}$ -приведенные миноры матрицы $(a_{\alpha\beta})$:

$$a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad a^{\alpha\gamma} a_{\alpha\beta} = \delta^\gamma_\beta. \qquad (1.5)$$

Продолжая систему дифференциальных уравнений (I.I), получим

$$dP_{\alpha\beta,\hat a} = P_{\alpha\beta,\hat b}\theta^{\hat b}_{\hat a} + P_{\alpha\gamma,\hat a}\omega^\gamma_\beta + P_{\gamma\beta,\hat a}\omega^\gamma_\alpha - \frac{2}{n}P_{\alpha\beta,\hat a}\omega^\gamma_\gamma + P_{\alpha\beta,\hat a\hat b}\theta^{\hat b}; \qquad (1.6)$$

$$db_{\alpha\hat a} = b_{\alpha\hat b}\theta^{\hat b}_{\hat a} + b_{\beta\hat a}\omega^\beta_\alpha - b_{\alpha\hat a}\omega^{n+1}_{n+1} + b_{\alpha\hat a\hat b}\theta^{\hat b}, \qquad (1.7)$$

$$d\Lambda^\alpha_{\hat a} = \Lambda^\alpha_{\hat b}\theta^{\hat b}_{\hat a} + \Lambda^\alpha_{\hat a}\omega^{n+1}_{n+1} - \Lambda^\beta_{\hat a}\omega^\alpha_\beta + \Lambda^\alpha_{\hat a\hat b}\theta^{\hat b}. \qquad (1.8)$$

Размерность k многообразия $V_{k,n}$ удовлетворяет неравенствам:

$$1 \le k < C^2_{n+1} - n. \qquad (1.9)$$

§2. Геометрические образы, ассоциированные с многообразием $V_{k,n}$.

Ассоциируем с пространством параметров $\mathfrak{M}_k$ проективное пространство P_{k-1} [4] по правилу: точке $\vartheta \in \mathfrak{M}_k$ с локальными координатами $\vartheta^{\hat{a}}$ однозначно ставится в соответствие аналитическая точка $\gamma \in P_{k-1}$ с проективными координатами $\gamma^{\hat{a}}$ относительно некоторого репера $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$. Однопараметрическое семейство полуквадратичных пар фигур $\{F_1, F_2\}$ зададим системой:

$$\theta^{\hat{a}} = x^{\hat{a}}\Omega, \quad \mathcal{D}\Omega = 0, \tag{2.1}$$

где

$$dx^{\hat{a}} = -x^{\hat{b}}\theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} + x^{\hat{a}}_{\hat{b}}\theta^{\hat{b}}. \tag{2.2}$$

В пространстве P_{k-1} семейству (2.I) соответствует точка

$$B = x^{\hat{a}} C_{\hat{a}}. \tag{2.3}$$

Выделим в гиперплоскости $x^{n+1} = 0$ инвариантную точку

$$P = c^{\alpha} A_{\alpha}. \tag{2.4}$$

Имеем

$$dP = (dc^{\alpha} + c^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta})A_{\alpha} + c^{\alpha}\omega^{n+1}_{\alpha} A_{n+1}. \tag{2.5}$$

Смещению (2.I) соответствует точка

$$\overset{*}{P} = c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}} A_{n+1}. \tag{2.6}$$

Наряду с (2.I) рассмотрим другое однопараметрическое семейство пар фигур $\{F_1, F_2\}$:

$$\theta^{\hat{a}} = y^{\hat{a}}\Omega^1, \quad \mathcal{D}\Omega^1 = 0. \tag{2.7}$$

Так как

$$\begin{aligned} d\overset{*}{P} = (dc^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}} + c^{\alpha} b_{\beta\hat{a}} \omega^{\beta}_{\alpha} x^{\hat{a}} + \\ + c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} \theta^{\hat{b}} x^{\hat{a}} + c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}}_{\hat{b}} \theta^{\hat{b}}) A_{n+1} + \\ + c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}} \Lambda^{\beta}_{\hat{b}} \theta^{\hat{b}} A_{\beta}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

то точка

$$N = c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}} \Lambda^{\beta}_{\hat{b}} y^{\hat{b}} A_{\beta} \tag{2.9}$$

есть пересечение касательной к линии, описываемой точкой с гиперплоскостью $x^{n+1} = 0$.

Семействам (2.7), которым отвечают проективные преобразования

$$\tilde{c}^{\beta} = c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}} \Lambda^{\beta}_{\hat{b}} y^{\hat{b}}, \tag{2.10}$$

являющиеся преобразованиями W [I], в проективном пространстве P_{k-1} соответствует гиперплоскость

$$u_{\hat{a}\hat{b}} x^{\hat{a}} y^{\hat{b}} = 0, \tag{2.11}$$

где

$$u_{\hat{a}\hat{b}} = b_{\alpha\hat{a}} \Lambda^{\alpha}_{\hat{b}}. \tag{2.12}$$

Совокупность точек пространства P_{k-1}, которым соответствует гиперплоскость (2.II), образуют основную [I] гиперквадрику в проективном пространстве P_{k-1}:

$$u_{\hat{a}\hat{b}}\, x^{\hat{a}} x^{\hat{b}} = 0. \tag{2.13}$$

Литература

I. Ивлев Е.Т., Исабеков М.Б., К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами. Материалы 3-й научн.конф. по математике и механике. Вып. I, Изд-во Томского ун-та, 1973, 50-52.

2. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в п-мерном проективном пространстве. "Геом.сб.", вып.3, Труды Томского ун-та, т.168, 28-42.

3. Овчинников В.М., Дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2 (Труды Калининградского ун-та), 1971, 38-42.

4. Остиану Н.М., Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве. Труды геом. семинара, т.2, М., ВИНИТИ АН СССР, 1969, 247-262.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Попов Ю.И., Мишенина Т.И.

ИНВАРИАНТНОЕ ОСНАЩЕНИЕ РАСПАДАЮЩЕЙСЯ $(n-2)$-МЕРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ CH^{τ}_{n-2} РАНГА τ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n.

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n вырожденную $(n-2)$-мерную гиперполосу H^{τ}_{n-2} ранга τ [7], т.е. такую гиперполосу, семейство касательных гиперплоскостей которой зависит от τ существенных параметров ($\tau<n-2$). Каждая касательная гиперплоскость касается базисной поверхности V^{τ}_{n-2} гиперполосы H^{τ}_{n-2} по $(n-\tau-2)$-мерной плоскости E_s (где $s=n-\tau-2$), являющейся её плоской образующей. В данной работе мы рассматриваем гиперполосы H^{τ}_{n-2} с такими базисными поверхностями V^{τ}_{n-2}, вдоль плоских образующих E_s которых касательная плоскость T_{n-2} постоянна.

Вырожденную гиперполосу назовем центрированной, если в каждой её плоской образующей E_s задана некоторая точка, называемая центром данной плоской образующей. Центрирование называется нормальным [2], если множество всех центров плоских образующих является τ-мерной поверхностью

V_τ, касательные τ-плоскости E_τ которой не содержат общих направлений с соответствующими плоскими образующими E_s базисной поверхности V^τ_{n-2} гиперполосы H^τ_{n-2}.

В работе исследуются вырожденные распадающиеся нормально центрированные $(n-2)$-мерные гиперполосы CH^τ_{n-2} ранга τ проективного пространства P_n.

Вырожденную гиперполосу CH^τ_{n-2} назовем распадающейся, если гиперповерхность V^τ_{n-1}, огибающая главные касательные гиперплоскости τ гиперполосы CH^τ_{n-2}, распадается на две тангенциально вырожденные поверхности: V^τ_{n-2} и $V^\tau_{\tau+1}$ с общей направляющей поверхностью V_τ (V_τ - множество всех центров плоских образующих E_s поверхности V_{n-2}).

Для вырожденной распадающейся гиперполосы CH^τ_{n-2} построено инвариантное оснащение, внутренним образом связанное с этой гиперполосой, и дана геометрическая интерпретация объектов, характеризующих полученное оснащение. Рассмотрены некоторые частные классы распадающихся гиперполос CH^τ_{n-2} (конические и плоские гиперполосы).

Работа выполнена теоретико-групповым методом Лаптева Г.Ф. [5].

Обозначения и замечания:

I. Во всей работе мы придерживаемся следующей схемы использования индексов:

$$p, q, t, s, f, v = 1, 2, \ldots, \tau; \quad i, j, k, \ell = \tau+1, \ldots, n-2;$$

$$\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

2. При операции дифференцирования широко используем оператор ∇:

$$\nabla B^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{K}_w} = dB^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{K}_w} - B^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{I}_u}_{\mathcal{J} \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{K}_w} \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1} - \ldots - B^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{J}} \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_w} +$$

$$+ B^{\mathcal{J} \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{K}_w} \omega^{\mathcal{I}_1}_{\mathcal{J}} + \ldots + B^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{K}_w} \omega^{\mathcal{I}_u}_{\mathcal{J}}, \quad u, w = 1, 2 \ldots$$

3. Символом δ обозначаем дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$ при фиксированных главных параметрах через $\pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$. В этом случае оператор ∇ обозначается символом ∇_δ.

4. Символические обозначения вида

$$[A_{\mathcal{J}_1}, A_{\mathcal{J}_2}, \ldots, A_{\mathcal{J}_u}] \equiv [A_u] \quad \text{и} \quad [\tau^{\mathcal{J}_1}, \tau^{\mathcal{J}_2}, \ldots, \tau^{\mathcal{J}_w}] \equiv [\tau^w]$$

обозначают соответственно плоскость E_{u-1}, натянутую на линейно независимые точки $A_{\mathcal{J}_1}, A_{\mathcal{J}_2}, \ldots, A_{\mathcal{J}_u}$ и плоскость E_{n-w}, являющуюся пересечением линейно независимых гиперплоскостей $\tau^{\mathcal{J}_1}, \tau^{\mathcal{J}_2}, \ldots, \tau^{\mathcal{J}_w}$.

5. Все исследования, проведенные в настоящей работе, носят локальный характер. Изучаемые многообразия предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми.

§I. Задание распадающейся гиперполосы CH^τ_{n-2} в проективном пространстве P_n.

В проективном пространстве P_n наряду с точечным подвижным репером $\{A_{\mathcal{J}}\}$ рассмотрим двойственный ему репер

$\{\tau^{\varkappa}\}$, элементы которого $\tau^{\varkappa}$ являются гранями репера $\{A_{\mathcal{J}}\}$. Имеем:

$$(A_{\mathcal{J}}, \tau^{\varkappa}) = \delta^{\varkappa}_{\mathcal{J}}. \qquad (1.1)$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений данных реперов имеют следующий вид:

$$dA_{\mathcal{J}} = \omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}} A_{\varkappa}, \qquad d\tau^{\mathcal{J}} = -\omega^{\mathcal{J}}_{\varkappa} \tau^{\varkappa}, \qquad (1.2)$$

где формы $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$ имеют проективную структуру:

$$d\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}} = \omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \wedge \omega^{\varkappa}_{\mathcal{I}}, \qquad (1.3)$$

$$\sum_{\mathcal{J}} \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} = 0. \qquad (1.4)$$

Присоединим к изучаемому образу CH^{τ}_{n-2} подвижной репер, полагая $A_0 = A$, $\tau^n = \tau$, где A -центр плоской образующей E, а τ -главная касательная гиперплоскость гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Для гиперполосы CH^{τ}_{n-2} имеем:

$$(dA_0, \tau^n) = (A_0, d\tau^n) = 0, \qquad (1.5)$$

поэтому в репере нулевого порядка

$$\omega^n_0 = 0. \qquad (1.6)$$

Элемент (A_0, τ^n) гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, зависит от τ существенных параметров $\{u^p\}$, которые назовем главными. При изменении главных параметров $\{u^p\}$ точка A_0 описывает τ-мерную поверхность V_{τ} —поверхность центров плоских образующих E_s базисной поверхности V^{τ}_{n-2} гиперполосы, а семейство главных касательных гиперплоскостей τ^n огибает некоторую тангенциально вырожденную гиперповерхность V^{τ}_{n-1}.

Плоские $(n-\tau-1)$-мерные образующие $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V^{τ}_{n-1} являются характеристиками вырожденной гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, причем $E_s \subset E_{n-\tau-1}$.

Специализируем подвижной репер, поместив точки $\{A_p\}$ в касательной плоскости T_{τ} поверхности V_{τ}; точки $\{A_i\}$ - в плоскости E_s; точку A_{n-1} в характеристическую плоскость $E_{n-\tau-1}$ гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, а точка A_n пусть занимает произвольное положение, образуя с точками $\{A_0, A_p, A_i, A_{n-1}\}$ проективный репер $\{A_{\mathcal{J}}\}$ пространства P_n. В этом репере, учитывая (I.I) и (I.2), имеем:

$$\omega^i_0 = 0, \quad (1.7) \qquad \omega^{n-1}_0 = 0, \quad (1.8)$$

$$\omega^n_i = 0, \quad (1.9) \qquad \omega^n_{n-1} = 0. \quad (1.10)$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений плоского элемента (A_0, τ^n) гиперполосы CH^{τ}_{n-2} в силу (I.6)-(I.I0) примут вид:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega^0_0 A_0 + \omega^p_0 A_p, \\ d\alpha^n &= -\omega^n_p \tau^p - \omega^n_n \tau^n. \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Следовательно формы $\omega^p = \omega^p_0$ определяют перемещение точки A_0 по поверхности V_{τ} и поэтому являются независимыми линейными комбинациями дифференциалов du^p главных параметров-базисными формами гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, отнесенной к подвижному точечному реперу $\{A_{\mathcal{J}}\}$. Аналогично, формы ω^n_p определяют перемещение гиперплоскости τ^n и, следовательно, являются базисными формами гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, отнесенной к подвижному тангенциальному реперу $\{\tau^{\mathcal{J}}\}$.

Условие постоянства касательной плоскости T_{n-2} вдоль плоской образующей E_s базисной поверхности V^{r}_{n-2} гиперполосы CH^{r}_{n-2} и условие постоянства касательной плоскости T_{r+1} вдоль образующей $E_1=[A_0, A_{n-1}]$ поверхности V^{r}_{r+1} запишутся соответственно в виде:

$$\omega^{n-1}_i = 0, \quad (1.12) \qquad \omega^i_{n-1} = 0. \quad (1.13)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (I.6)-(I.10) и применяя лемму Картана, находим

$$\omega^n_p = a_{pq}\,\omega^q, \quad a_{pq} = a_{qp}, \quad a = \det\|a_{pq}\| \neq 0, \tag{1.14}$$

$$\omega^p_i = b^{pt}_i\,\omega^n_t = a^p_{iq}\,\omega^q, \tag{1.15}$$

$$\omega^{n-1}_p = b^{n-1}_{pq}\,\omega^q = a^{n-1,q}_p\,\omega^n_q, \tag{1.16}$$

$$\omega^i_p = b^i_{pq}\,\omega^q = a^{iq}_p\,\omega^n_q, \tag{1.17}$$

$$\omega^p_{n-1} = b^{pq}_{n-1}\,\omega^n_q = a^p_{n-1,q}\,\omega^q. \tag{1.18}$$

где величины $b^i_{pq}, b^{pq}_i, b^{n-1}_{pq}, b^{pq}_{n-1}$ симметричны по индексам p, q. Кроме того, коэффициенты уравнений Пфаффа (I.15)-(I.18) связаны следующими алгебраическими соотношениями

$$a^p_{iq}\,b^{n-1}_{pt} = a^p_{it}\,b^{n-1}_{pq}, \tag{1.19}$$

$$a^p_{n-1,q}\,b^i_{pt} = a^p_{n-1,t}\,b^i_{pq}. \tag{1.20}$$

Действительно, соотношения (I.19)-(I.20) вытекают из продолжения уравнений (I.12)-(I.13) с учетом (I.15)-(I.18).

Пфаффовы уравнения (I.6)-(I.10),(I12),(I.13),(I.15)-

(I.18), и конечные соотношения (I.19),(I.20) определяют распадающуюся гиперполосу CH^{r}_{n-2} ранга r проективного пространства P_n. При этом уравнения (I.6)-(I.8) задают поверхность центров V_r плоских образующих E_s базисной поверхности V^{r}_{n-2} гиперполосы CH^{r}_{n-2}, уравнения (I.6),(I.7),(I.10),(I.13),(I.17),(I.18),(I.20) определяют тангенциально вырожденную поверхность V^{r}_{r+1}, а уравнения (I.6),(I.8) (I.9),(I.12),(I.15),(I.16),(I.19) определяют базисную поверхность V^{r}_{n-2} гиперполосы CH^{r}_{n-2}.

Продолжая уравнения (I.14)-(I.18), находим

$$\nabla a_{pq} = -a_{pq}(\omega^0_0 + \omega^n_n) + a_{pqt}\,\omega^t, \tag{1.21}$$

$$\nabla b^{pq}_i = b^{pq}_i\,\omega^n_n + a^{pq}\,\omega^0_i - b^{pqt}_i\,\omega^n_t. \tag{1.22}$$

$$\nabla b^{n-1}_{pq} = -b^{n-1}_{pq}\,\omega^0_0 - a_{pq}\,\omega^{n-1}_n + b^{n-1}_{pqt}\,\omega^t, \tag{1.23}$$

$$\nabla b^i_{pq} = -b^i_{pq}\,\omega^0_0 - a_{pq}\,\omega^i_n + b^i_{pqt}\,\omega^t, \tag{1.24}$$

$$\nabla b^{pq}_{n-1} = b^{pq}_{n-1}\,\omega^0_0 + a^{pq}\,\omega^0_{n-1} - b^{pqt}_{n-1}\,\omega^n_t, \tag{1.25}$$

где величины $a_{pqt}, b^{pqt}_i, b^{n-1}_{pqt}, b^i_{pqt}, b^{pqt}_{n-1}$ симметричны по индексам p, q, t.

Рассмотрим матрицу $\|a^{pq}\|$, обратную матрице $\|a_{pq}\|$:

$$a_{pq}\,a^{qt} = \delta^t_p. \tag{1.26}$$

Дифференцируя эти соотношения с учетом (I.21), получим

$$\nabla a^{pq} = a^{pq}(\omega^0_0 + \omega^n_n) - a^{pqt}\,\omega^n_t. \tag{1.27}$$

где a^{pqt} так же симметричны по индексам p,q,t.

Из уравнений (I.21) и (I.27) следует, что величины a_{pq} и a^{pq} являются относительными тензорами-основные двухвалентные тензоры распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

Системы величин

$$\Gamma_2 = \{ a_{pq}, a^{pq}, b^{i}_{i}, b^{i}_{pq}, b^{n-1}_{pq}, b^{pq}_{n-1} \}$$

и

$$\Gamma_3 = \{ \Gamma_2, a_{pqt}, a^{pqt}, b^{pqt}_{i}, b^{i}_{pqt}, b^{n-1}_{pqt}, b^{pqt}_{n-1} \}$$

образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Дальнейшее продолжение системы (I.21)-(I.25),(I.27) вводит геометрические объекты четвертого и более высоких порядков, определяемые распадающейся гиперполосой CH^{τ}_{n-2}. Таким образом получена последовательность фундаментальных геометрических объектов распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

§2. Построение инвариантного оснащения распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

I. Присоединим к распадающейся гиперполосе CH^{τ}_{n-2} инвариантный репер, а так же инвариантные нормали первого и второго рода в смысле Нордена А.П. [6], связанные внутренним образом с гиперполосой CH^{τ}_{n-2}. Инвариантную нормаль второго рода гиперполосы CH^{τ}_{n-2} -плоскость $E_{n-3} \equiv [A_p, A_i]$ определим точками

$$M_p = A_p + x_p A_o , \qquad M_i = A_i + x_i A_o ,$$

где

$$\nabla_\delta x_p = - x_p \pi^o_o - \pi^o_p , \tag{2.1}$$

$$\nabla_\delta x_i = - x_i \pi^o_o - \pi^o_i . \tag{2.2}$$

Точки M_p определяют инвариантную плоскость $E_{\tau-1}$, лежащую в касательной плоскости T_τ поверхности V_τ, а точки M_i определяют инвариантную плоскость $E_{n-\tau-3} \subset E_S$.

Инвариантную нормаль первого рода гиперполосы CH^{τ}_{n-2} - плоскость $E_2 \equiv [A_o, A_{n-1}, A_n]$ —зададим как пересечение гиперплоскостей

$$\sigma^p = \tau^p + y^p \tau^n , \qquad \sigma^i = \tau^i + y^i \tau^n ,$$

где

$$\nabla_\delta y^p = y^p \pi^n_n + \pi^p_n , \tag{2.3}$$

$$\nabla_\delta y^i = y^i \pi^n_n + \pi^i_n . \tag{2.4}$$

Гиперплоскости σ^p определяют инвариантную плоскость $E_{n-\tau}$, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую плоскую образующую $E_{n-\tau-1} \equiv [A_o, A_i]$ гиперповерхности V^{τ}_{n-1}, огибаемой главными касательными гиперплоскостями τ^n гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Гиперплоскости σ^i определяют инвариантную плоскость $E_{\tau+2}$, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую касательную плоскость $T_{\tau+1}$ поверхности $V^{\tau}_{\tau+1}$.

Кроме основных элементов оснащения гиперполосы CH^{τ}_{n-2} - её нормалей первого и второго рода-определим ещё инвариантную гиперплоскость

$$\sigma^{n-1} = \tau^{n-1} + y^{n-1}\tau^{n},$$

проходящую через касательную плоскость T_{n-2} базисной поверхности V^{τ}_{n-2} и не совпадающую с гиперплоскостью τ^{n} и точку

$$M_{n-1} = A_{n-1} + x_{n-1} A_0 ,$$

принадлежащую прямолинейной образующей $E_1 \equiv [A_0, A_{n-1}]$ тангенциально вырожденной поверхности $V^{\tau}_{\tau+1}$.

Из условий инвариантности гиперплоскости σ^{n-1} и точки M_{n-1} соответственно получаем

$$\nabla_\delta y^{n-1} = y^{n-1}\pi^{n}_{n} + \pi^{n-1}_{n}, \qquad (2.5)$$

$$\nabla_\delta x_{n-1} = -x_{n-1}\pi^{0}_{0} - \pi^{0}_{n-1}. \qquad (2.6)$$

Наконец рассмотрим точку

$$M_n = A_n - y^p A_p - y^i A_i - y^{n-1} A_{n-1} + x A_0$$

и гиперплоскость

$$\sigma^0 = \tau^0 - x_p \tau^p - x_i \tau^i - x_{n-1}\tau^{n-1} + y\tau^{n}.$$

Точка M_n принадлежит гиперплоскостям σ^p. σ^i, σ^{n-1} и определяет вместе с точками $A_0 \equiv M_0$ и M_{n-1} нормаль первого рода гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Гиперплоскость σ^0 содержит точки M_p, M_i, M_{n-1} и определяет вместе с гиперплоскостями $\sigma^n \equiv \tau^n$ и σ^{n-1} нормаль второго рода гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Условие инцидентности точки M_n и гиперплоскости имеет вид:

$$(M_n, \sigma^0) = 0,$$

откуда

$$x + y + x_p y^p + x_i y^i + x_{n-1} y^{n-1} = 0. \qquad (2.7)$$

Условия инвариантности точки M_n и гиперплоскости σ^0 приводят к соотношениям

$$\delta x = x(\pi^{n}_{n} - \pi^{0}_{0}) + y^p \pi^{0}_{p} + y^i \pi^{0}_{i} + y^{n-1}\pi^{0}_{n-1} - \pi^{0}_{n}, \qquad (2.8)$$

$$\delta y = y(\pi^{n}_{n} - \pi^{0}_{0}) - x_p \pi^{p}_{n} - x_i \pi^{i}_{n} - x_{n-1}\pi^{n-1}_{n} + \pi^{0}_{n}. \qquad (2.9)$$

Уравнения (2.1)-(2.6),(2.8),(2.9) показывают,что величины x_p, x^i, x_{n-1}, y^p, y^i, y^{n-1}, $\{x, y^p, y^i, y^{n-1}\}$, $\{y, x_p, x_i, x_{n-1}\}$ образуют геометрические объекты ,которые назовем оснащающими объектами распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

2.Последовательность фундаментальных геометрических объектов дает возможность построить оснащающие объекты распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2} ,внутренним образом с ней связанные.

Положим

$$\Lambda_i = \frac{1}{\tau} a_{pq} b^{pq}_{i}, \quad (2.10) \qquad \Lambda^i = \frac{1}{\tau} a^{pq} b^{i}_{pq}, \quad (2.11)$$

$$\Lambda_{n-1} = \frac{1}{\tau} a_{pq} b^{pq}_{n-1}, \quad (2.12) \qquad \Lambda^{n-1} = \frac{1}{\tau} a^{pq} b^{n-1}_{pq} \quad (2.13)$$

Эти величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям :

$$\nabla_\delta \Lambda_i = -\Lambda_i \pi^0_0 + \pi^0_i , \qquad (2.14)$$

$$\nabla_\delta \Lambda^i = \Lambda^i \pi^n_n - \pi^i_n , \qquad (2.15)$$

$$\nabla_\delta \Lambda^{n-1} = \Lambda^{n-1} \pi^n_n - \pi^{n-1}_n , \qquad (2.16)$$

$$\nabla_\delta \Lambda_{n-1} = -\Lambda_{n-1} \pi^0_0 + \pi^0_{n-1} , \qquad (2.17)$$

которые показывают, что они являются геометрическими объектами, определяемыми в окрестности второго порядка распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Сравнивая уравнения (2.14)-(2.17) соответственно с уравнениями (2.2), (2.4), (2.5), (2.6) приходим к следующему результату:

Т е о р е м а I. Инвариантные плоскости $E_{n-\tau-3} = [M_i] = [A_i - \Lambda_i A_0]$ и $E_{\tau+2} = [\sigma^i] = [\tau^i - \Lambda^i \tau^n]$, инвариантные точка $M_{n-1} = A_{n-1} - \Lambda_{n-1} A_0$ и гиперплоскость $\sigma^{n-1} = \tau^{n-1} - \Lambda^{n-1}\tau^n$ внутренним образом связаны с распадающейся гиперполосой CH^{τ}_{n-2}, двойственны друг другу и определяются в её окрестности второго порядка.

3. Построим охваты фундаментальным объектом третьего порядка Γ_3 оснащающих объектов x_p и x^p гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Составим величины:

$$d_p = \frac{1}{\tau+2} a_{pqt} a^{qt}, \quad (2.18) \qquad d^p = \frac{1}{\tau+2} a^{pqt} a_{qt} . \quad (2.19)$$

Эти величины позволяют построить относительные тензоры:

$$\ell_{pqt} = a_{pqt} - a_{(pq} d_{t)} , \qquad (2.20)$$

$$\ell^{pqt} = a^{pqt} - a^{(pq} d^{t)} , \qquad (2.21)$$

связанные равенством

$$\ell^{pqt} = a^{sp} a^{fq} a^{vt} \ell_{sfv} \qquad (2.22)$$

и удовлетворяющие условиям аполярности :

$$\ell_{pqt} a^{qt} = 0 , \quad \ell^{pqt} a_{qt} = 0 . \qquad (2.23)$$

Тензор ℓ_{pqt} является тензором Дарбу [5] базисной поверхности V^{τ}_{n-2}, а тензор ℓ^{pqt} – тензором Дарбу гиперповерхности V^{τ}_{n-1}, огибающей главные касательные гиперплоскости τ^n гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Тензоры Дарбу ℓ_{pqt} и ℓ^{pqt} удовлетворяют соответственно следующим дифференциальным уравнениям

$$\nabla \ell_{pqt} = -\ell_{pqt} (2\omega^0_0 + \omega^n_n) + \ell_{pqts} \omega^s , \qquad (2.24)$$

$$\nabla \ell^{pqt} = \ell^{pqt} (\omega^0_0 + 2\omega^n_n) - \ell^{pqts} \omega^n_s . \qquad (2.25)$$

С помощью тензоров Дарбу строим относительный инвариант

$$\ell = \ell_{pqt} \ell^{pqt} . \qquad (2.26)$$

Дальнейшее построение проводится в предположении, что $\ell \neq 0$. В общем случае можно считать, что $\ell \neq 0$ при $\ell_{pqt} \neq 0$.

Имеем

$$d \ln \ell = \omega^n_n - \omega^0_0 + \ell_p \omega^p \qquad (2.27)$$

или

$$d \ln \ell = \omega^n_n - \omega^0_0 - \ell^p \omega^n_p , \qquad (2.28)$$

где $\ell^p = a^{pq} \ell_q$.

С помощью величин d_p, d^p и ℓ_p, ℓ^p можно построить оснащающие объекты x_p и y^p нужного строения:

$$\Lambda_p = -\frac{1}{2}(d_p + \ell_p), \qquad (2.29)$$

$$\Lambda^p = -\frac{1}{2}(d^p + \ell^p), \qquad (2.30)$$

где

$$\nabla \Lambda_p = -\Lambda_p \omega^0_0 + \omega^0_p + \bar{\Lambda}^q_p \omega^n_q, \qquad (2.31)$$

$$\nabla \Lambda^p = \Lambda^p \omega^n_n - \omega^0_n - \tilde{\Lambda}^p_q \omega^q. \qquad (2.32)$$

Действительно, уравнения (2.I), (2.3) удовлетворяются соответственно при $x_p = -\Lambda_p$, $y^p = -\Lambda^p$.

Итак, имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 2. Инвариантные плоскости

$$E_{\tau-1} = [M_p] = [A_p - \Lambda_p A_0] \text{ и } E_{n-\tau} = [\sigma^p] = [\tau^p - \Lambda^p \tau^n]$$

внутренним образом присоединены к распадающейся гиперполосе CH^{τ}_{n-2}, двойственны друг другу и определяются в её окрестности третьего порядка.

4. Перейдем теперь к построению объектов, определяющих инвариантную точку M_n и гиперплоскость σ^0. Уравнения (2.7)-(2.9), которым удовлетворяют эти объекты, теперь принимают вид:

$$x + y + \Lambda_p \Lambda^p + \Lambda_i \Lambda^i + \Lambda_{n-1} \Lambda^{n-1} = 0, \qquad (2.32)$$

$$\delta x = x(\pi^n_n - \pi^0_0) - \Lambda^p \pi^0_p - \Lambda^i \pi^0_i - \Lambda^{n-1} \pi^0_{n-1} - \pi^0_n, \qquad (2.33)$$

$$\delta y = y(\pi^n_n - \pi^0_0) + \Lambda_p \pi^p_n + \Lambda_i \pi^i_n + \Lambda_{n-1} \pi^{n-1}_n + \pi^0_n. \qquad (2.34)$$

Вернемся к уравнениям (2.31), (2.32). Здесь величины $\bar{\Lambda}^q_p$ и $\tilde{\Lambda}^p_q$ определяются в окрестности четвертого порядка распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Дальнейшее построение в окрестности четвертого порядка гиперполосы CH^{τ}_{n-2} приводим аналогично работе [3].

Вводим в рассмотрение величины

$$\tilde{x} = \Lambda + \tilde{\Lambda} + \tilde{\tilde{\Lambda}}, \qquad \bar{y} = \Lambda + \bar{\Lambda} + \bar{\bar{\Lambda}}, \qquad (2.35)$$

где

$$\Lambda = -\Lambda_i \Lambda^i - \Lambda_{n-1} \Lambda^{n-1}, \quad \tilde{\Lambda} = \frac{1}{\tau} \tilde{\Lambda}^p_p, \quad \bar{\Lambda} = \frac{1}{\tau} \bar{\Lambda}^p_p,$$

$$\tilde{\tilde{\Lambda}} = \frac{1}{\tau} a^{pq} \Lambda_p \Lambda_q, \quad \bar{\bar{\Lambda}} = \frac{1}{\tau} a^{pq} \Lambda_p.$$

Тогда легко показать, что инвариантная точка

$$\tilde{M}_n = A_n + \Lambda^p A_p + \Lambda^i A_i + \Lambda^{n-1} A_{n-1} + \tilde{x} A_0$$

и инвариантная гиперплоскость

$$\bar{\sigma}^0 = \tau^0 + \Lambda_p \tau^p + \Lambda_i \tau^i + \Lambda_{n-1} \tau^{n-1} + \bar{y} \tau^n,$$

внутренним образом присоединены к гиперполосе CH^{τ}_{n-2} в её окрестности четвертого порядка. Однако условие инцидентности (2.32) для точки $\tilde{M}_n$ и гиперплоскости $\bar{\sigma}^0$ не выполняется. Поэтому в пучке гиперплоскостей $[\sigma^0, \sigma^n]$ можно выделить инвариантную гиперплоскость

$$\tilde{\sigma}^0 = \tau^0 + \Lambda_i \tau^i + \Lambda_p \tau^p + \Lambda_{n-1} \tau^{n-1} - (\tilde{x} + \Lambda_p \Lambda^p + \Lambda^i \Lambda_i + \Lambda_{n-1} \Lambda^{n-1}) \tau^n$$

инцидентную точке $\tilde{M}_n$, а на прямой $[A_0, \tilde{M}_n]$ — инвариантную точку

$$\overline{M}_n = A_n + \Lambda^p A_p + \Lambda^i A_i + \Lambda^{n-1} A_{n-1} - (\overline{y} + \Lambda_p \Lambda^p + \Lambda_i \Lambda^i + \Lambda_{n-1} \Lambda^{n-1}) A_0 ,$$

инцидентную гиперплоскости $\overline{\sigma}^0$. Более того, нетрудно показать, что величины

$$\Lambda^0 = \frac{\alpha \widetilde{x} + \beta \overline{x}}{\alpha + \beta} , \quad \Lambda_n = \frac{\alpha \widetilde{y} + \beta \overline{y}}{\alpha + \beta} , \qquad (2.36)$$

где α и β -произвольные вещественные числа, удовлетворяют уравнениям (2.33),(2.34).

В силу этого, точка

$$M_n = A_n + \Lambda^p A_p + \Lambda^i A_i + \Lambda^{n-1} A_{n-1} + \Lambda^0 A_0 \qquad (2.37)$$

и гиперплоскость

$$\sigma^0 = \tau^0 + \Lambda_p \tau^p + \Lambda_i \tau^i + \Lambda_{n-1} \tau^{n-1} + \Lambda_n \tau^n \qquad (2.38)$$

инвариантны и, кроме того, удовлетворяют условию инцидентности (2.32). Итак, приходим к выводу:

Т е о р е м а 3. Точка M_n и гиперплоскость σ^0 внутренним образом присоединены к касающейся гиперполосе CH^{τ}_{n-2}, двойственны друг другу и определяются в её окрестности четвертого порядка.

Таким образом, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы имеют следующий вид:

$$M_0 = A_0 , \qquad \sigma^0 = \tau^0 + \Lambda_p \tau^p + \Lambda_i \tau^i + \Lambda_{n-1} \tau^{n-1} + \Lambda_n \tau^n ,$$

$$M_p = A_p - \Lambda_p A_0 , \quad \sigma^p = \tau^p - \Lambda^p \tau^n , \qquad (2.39)$$

$$M_i = A_i - \Lambda_i A_0 , \qquad \sigma^i = \tau^i - \Lambda^i \tau^n ,$$

$$M_{n-1} = A_{n-1} - \Lambda_{n-1} A_0 , \qquad \sigma^{n-1} = \tau^{n-1} - \Lambda^{n-1} \tau^n , \qquad (2.39)$$

$$M_n = A_n + \Lambda^p A_p + \Lambda^i A_i + \Lambda^{n-1} A_{n-1} + \Lambda^0 A_0 , \quad \sigma^n = \tau^n .$$

З а м е ч а н и е. Можно показать, что если соприкасающаяся плоскость второго порядка базисной поверхности V^{τ}_{n-2} распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2} заполняют все пространство, то объект пятого порядка гиперполосы CH^{τ}_{n-2} является полным.

§3. Фокальные образы, связанные с распадающейся гиперполосой CH^{τ}_{n-2} ранга τ.

Для выяснения геометрического смысла элементов инвариантного оснащения, построенного во втором параграфе, рассмотрим фокальные образы, связанные с гиперполосой CH^{τ}_{n-2}.

Выясним геометрический смысл инвариантной плоскости $E_{n-\tau-3} = [M_i] \subset E_s$, внутренним образом связанной с гиперполосой CH^{τ}_{n-2}.

Рассмотрим инвариантную точку

$$X = x^i A_i + x^0 A_0 , \qquad (3.1)$$

которая принадлежит образующей $E_s = [A_0, A_i]$ базисной поверхности V^{τ}_{n-2} гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

О п р е д е л е н и е I. Точку X назовем фокальной [I], если она принадлежит кроме E_s еще некоторой смежной образующей E'_s. Геометрическое место фокальных точек X

назовем фокальной поверхностью $\mathcal{F}_\tau$ образующей E_s [I].

Из условия фокальности точки X в силу уравнений (I.2),(I.15) вытекает, что фокальная поверхность $\mathcal{F}_\tau$:

$$\det\| x^0\delta^p_q + x^i a^p_{iq} \| = 0,\ (a)\ ;\ x^p=0,\ x^{n-1}=0,\ x^n=0,(b) \quad (3.2)$$

представляет собой алгебраическую поверхность порядка τ [I]

Уравнения (3.2a) запишем в виде

$$\sum_{s=0}^{\tau} \mathcal{D}_s (x^0)^{\tau-s} = 0, \qquad (3.3)$$

где $\mathcal{D}_s$ —главные миноры порядка s матрицы определителя $\det\| x^0\delta^p_q + x^i a^p_{iq} \|$, причем

$$\mathcal{D}_0 = 1,\ \mathcal{D}_1 = \tau x^i \Lambda_i,\ \mathcal{D}_\tau = \det\| x^i b^{pt}_i a_{qt} \|.$$

Обозначим корни уравнения (3.3) через $\underset{(p)}{x^0}$ и назовем их характеристическими корнями этого уравнения. По обобщенной теореме Виетта имеем

$$-x^i\Lambda_i = \frac{1}{\tau}\sum_{p=1}^{\tau} \underset{(p)}{x^0}. \qquad (3.4)$$

На прямой

$$X = x^0 A_0 + \tilde{x}^i A_i, \qquad (3.5)$$

где $\tilde{x}^i = x^i$ — фиксированные переменные, в общем случае (когда поверхность $\mathcal{F}_\tau$ не вырождается) корни $\underset{(p)}{x^0}$ определяют τ точек

$$\underset{(p)}{X} = \tilde{x}^i A_i + \underset{(p)}{x^0} A_0. \qquad (3.6)$$

О п р е д е л е н и е 2. Точки $\underset{(p)}{X}$, соответствующие характеристическим корням $\underset{(p)}{x^0}$ уравнения (3.3), назовем характеристическими точками прямой (3.5) относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$ (3.2).

О п р е д е л е н и е 3. Гармоническим полюсом [8] точки A_0 относительно характеристических точек $\underset{(p)}{X}$ прямой (3.5), принадлежащей образующей E_s базисной поверхности V^τ_{n-2} или (что то же) гармоническим полюсом точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau \in E_s$ назовем точку

$$\tilde{X} = \tilde{x}^i A_i + \tilde{x}^0 A_0, \qquad (3.7)$$

где

$$\tilde{x}^0 = \frac{1}{\tau}\sum_{p=1}^{\tau} \underset{(p)}{x^0} \qquad (3.8)$$

В силу (3.4),(3.7),(3.8) находим, что

$$\tilde{X} = \tilde{x}^i M_i,$$

т.е. точка $\tilde{X}$ принадлежит инвариантной плоскости

$E_{n-\tau-3} = [M_i]$.

Если теперь x^i менять произвольным образом, то точка $\tilde{X}$ опишет гармоническую поляру [7] точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$ (3.2).

Выясним геометрический смысл инвариантной плоскости $E_{\tau+2} = [\sigma^i]$, внутренним образом присоединенной к гиперполосе CH^τ_{n-2} —двойственного образа плоскости $E_{n-\tau-3}$.

Рассмотрим пучок гиперплоскостей:

$$\sigma = y_i\tau^i + y_n\tau^n. \qquad (3.9)$$

осью которого является касательная плоскость $E_{\tau+1}=[\tau^i,\tau^n]$ поверхности $V^{\tau}_{\tau+1}$.

О п р е д е л е н и е 4. Гиперплоскость σ называется фокальной [I], если, кроме плоскости $E_{\tau+1}$, она проходит также через некоторую смежную касательную плоскость $E'_{\tau+1}$ поверхности $V^{\tau}_{\tau+1}$. Геометрическое место фокальных плоскостей σ называется фокальным конусом Φ_{τ} касательной плоскости $E_{\tau+1}$.

Из условия фокальности гиперплоскости σ в силу уравнений (I.2),(I.I7) следует, что фокальный конус Φ_{τ} представляет собой алгебраическую поверхность класса τ:

$$\det\| y_n\delta^t_p + y_i a^{it}_p \| = 0 \ , \ (a) ; \ y_p = 0, \ y_{n-1} = 0, \ y_n = 0. (b) \qquad (3.10)$$

Уравнения (3.I0a) запишем в виде:

$$\sum_{s=0}^{\tau} \mathcal{D}_s (y_n)^{\tau-s} = 0, \qquad (3.11)$$

где $\mathcal{D}_s$ -главные миноры порядка s матрицы определителя $\det\| y_n\delta^t_p + y_i a^{it}_p \|$, причем

$$\mathcal{D}_0 = 1, \ \mathcal{D}_1 = \tau y_i \Lambda^i, \ \mathcal{D}_\tau = \det\| y_i a^{it}_p \|.$$

Обозначим корни уравнения (3.II) через $\overset{(p)}{y}_n$ и назовем их характеристическими корнями этого уравнения. По обобщенной теореме Виетта имеем

$$-y_i\Lambda^i = \frac{1}{\tau}\sum_{p=1}^{\tau}\overset{(p)}{y}_n . \qquad (3.12)$$

О п р е д е л е н и е 5. Гиперплоскости $\overset{(p)}{\sigma}$, соответствующие характеристическим корням $\overset{(p)}{y}_n$ уравнения (3.II), т.е. гиперплоскости вида

$$\overset{(p)}{\sigma} = \tilde{y}_i\tau^i + \overset{(p)}{y}_n\tau^n \qquad (3.13)$$

будем называть характеристическими гиперплоскостями пучка

$$\sigma = \tilde{y}_i\tau^i + y_n\tau^n,$$

где y_n -переменная величина, $\tilde{y}_i$ -фиксированные величины.

О п р е д е л е н и е 6. Гармонической полярой [8] гиперплоскости τ^n относительно характеристических гиперплоскостей $\overset{(p)}{\sigma}$ пучка (3.I3), осью которого является $(\tau+1)$-мерная плоскость $E_{\tau+1}$ или (что то же) гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_τ назовем гиперплоскость

$$\tilde{\sigma} = \tilde{y}_i\tau^i + \tilde{y}_n\alpha^n, \qquad (3.14)$$

где

$$\tilde{y}_n = \frac{1}{\tau}\sum_{p=1}^{\tau}\overset{(p)}{y}_n . \qquad (3.15)$$

В силу (3.I2),(3.I4) имеем:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{y}_i\sigma^i, \qquad (3.16)$$

т.е. гиперплоскость $\tilde{\sigma}$ проходит через инвариантную плоскость $E_{\tau+2} = [\sigma^i]$.

При переменных y_i гиперплоскость $\tilde{\sigma}$ описывает пучок, осью которого является $(\tau+2)$-мерная плоскость $E_{\tau+2}$ - гармоническая поляра гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_τ.

Таким образом, приходим к следующей теореме :

Т е о р е м а 4. Инвариантная плоскость $E_{n-\tau-3}$, определяемая точками M_i и принадлежащая плоской образующей E_s базисной поверхности V^{τ}_{n-2} гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, является гармонической полярой точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_{\tau}$, принадлежащей образующей E_s.

Инвариантная плоскость $E_{\tau+2}=[\sigma^i]$, внутренним образом связанная с распадающейся гиперполосой CH^{τ}_{n-2} и проходящая через касательную плоскость T_{τ} поверхности V_{τ}, является гармонической полярой главной касательной гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_{τ}, вершиной которого является плоскость $E_{\tau+1}$.

Совершенно аналогично доказываются теоремы:

Т е о р е м а 5. Инвариантная точка M_{n-1}, внутренним образом связанная с гиперполосой, принадлежащая образующей $E_1=[A_0, M_{n-1}]$ поверхности $V^{\tau}_{\tau+1}$, является гармоническим полюсом точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_{\tau}$:

$$\det\| x^0 \delta^p_q + b^{pt}_{n-1} a_{qt} \| = 0,\ x^p=0,\ x^i=0,\ x^n=0. \quad (3.17)$$

Инвариантная гиперплоскость σ^{n-1}, внутренним образом присоединенная к гиперполосе CH^{τ}_{n-2} и не совпадающая с главной касательной гиперплоскостью τ^n, является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса $\mathfrak{F}_{\tau}$:

$$\det\| y_n \delta^q_p + a^{n-1,q}_p \| = 0,\ y_p=0,\ y_i=0, y_0=0, \quad (3.18)$$

вершиной которого является плоскость $E_{n-2}=[\sigma^{n-1}, \sigma^n]$

Т е о р е м а 6. Инвариантная плоскость $\Pi_{n-\tau-2}=[M_i, M_{n-1}]$, внутренним образом присоединенная к гиперполосе и принадлежащая характеристической плоскости $E_{n-\tau-1}$ гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, является гармонической полярой точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathfrak{F}_{\tau}$:

$$\det\| x^0 \delta^q_p + x^i a^q_{ip} + x^{n-1} a^p_{n-1,q} \| = 0,\ x^p=0,\ x^n=0, \quad (3.19)$$

которая принадлежит образующей $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V^{τ}_{n-1} (характеристике гиперполосы).

Инвариантная плоскость $E_{\tau+1}=[\sigma^i, \sigma^{n-1}]$, внутренним образом присоединенная к гиперполосе CH^{τ}_{n-2} и проходящая через касательную плоскость T_{τ} поверхности V_{τ}, является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса $\mathfrak{F}_{\tau}$:

$$\det\| y_n \delta^p_q + y_{n-1} a^{n-1,p}_q + y_i a^{ip}_q \| = 0,\ y_0=0,\ y_p=0, \quad (3.20)$$

вершиной которого является касательная плоскость T_{τ} поверхности V_{τ}.

§4. Некоторые классы распадающихся гиперполос CH^{τ}_{n-2} ранга τ.

Рассмотрим специальные классы гиперполос CH^{τ}_{n-2}, которые связаны с обращением в нуль относительных тензоров

$$C^i_{pq} = b^i_{pq} - \Lambda^i a_{pq}, \ (4.1); \quad C^{n-1}_{pq} = b^{n-1}_{pq} - \Lambda^{n-1} a_{pq}, \ (4.2)$$

$$c_i^{pq} = b_i^{pq} - \Lambda_i a^{pq}, \quad (4.3); \quad c_{n-1}^{pq} = b_{n-1}^{pq} - \Lambda_{n-1} a^{pq}, \quad (4.4)$$

определенных в окрестности второго порядка гиперполосы CH_{n-2}^{τ}.

I. Конические распадающиеся гиперполосы CH_{n-2}^{τ}.

О п р е д е л е н и е 7. Распадающуюся гиперполосу назовем конической [4], если гиперповерхность V_{n-1}^{τ}, огибающая главные касательные гиперплоскости гиперполосы, является гиперконусом с вершиной в неподвижной плоскости

$$\Pi_{n-\tau-2} \equiv [M_i, M_{n-1}].$$

Т е о р е м а 7. Для того, чтобы базисная поверхность V_{n-2}^{τ} гиперполосы CH_{n-2}^{τ} была конической [7], необходимо и достаточно, чтобы

$$c_i^{pq} \equiv 0. \quad (4.5)$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть базисная поверхность V_{n-2}^{τ} гиперполосы CH_{n-2}^{τ} является конической, а плоскость $E_{n-\tau-3} \equiv [\tau^0, \tau^p, \tau^{n-1}, \tau^n]$ —вершина этого конуса. Из условия неподвижности плоскости $E_{n-\tau-3}$ следует, что

$$\omega_i^p \equiv 0. \quad (4.6)$$

Отсюда в силу (I.I5) получаем

$$b_i^{pq} \equiv 0. \quad (4.7)$$

Теперь из (2.I0) и (4.7) находим $\Lambda_i = 0$ и, следовательно,

$$c_i^{pq} \equiv 0.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. В силу (4.5) выполняется соотношение (4.3) принимает вид:

$$b_i^{pq} = \Lambda_i a^{pq}. \quad (4.8)$$

и, следовательно,

$$\omega_i^p = \Lambda_i \omega^p. \quad (4.9)$$

Продолжая (4.9), находим

$$\nabla \Lambda_i = -\Lambda_i \omega_0^0 + \omega_i^0. \quad (4.10)$$

Имеем

$$dM_i = (\nabla\Lambda_i - \Lambda_i \omega_0^0 + \omega_i^0) A_0 + (\omega_i^p - \Lambda_i \omega^p) A_p + \omega_i^j M_j. \quad (4.11)$$

В силу (4.9), (4.I0) коэффициенты при A_0 и A_p выражения (4.II) тождественно равны нулю, поэтому

$$dM_i = \omega_i^j M_j$$

т.е. плоскость $E_{n-\tau-3} = [M_i]$ неподвижна. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Уравнения фокальной поверхности $\mathcal{F}_{\tau}$ (3.2) при условии (4.5) принимают вид:

$$\det \| (x^0 + x^i \Lambda_i) \delta_q^p \| = 0, \quad x^p = 0, \quad x^{n-1} = 0, \quad x^n = 0 \quad (4.12)$$

Соотношения (4.I2) показывают, что фокальная поверхность вырождается и совпадает с плоскостью $E_{n-\tau-3} \subset E_S$.

Также легко устанавливаются следующие результаты:

Т е о р е м а 8. Для того, чтобы тангенциально вырожденная поверхность $V_{\tau+1}^{\tau}$ была конической, необходимо и достаточно, чтобы

$$c^{pq}_{n-1} = 0 \tag{4.13}$$

Т е о р е м а 9. Распадающаяся гиперполоса CH^{τ}_{n-2} является конической тогда и только тогда, когда выполняются и условия (4.5) и (4.13).

Т е о р е м а 10. Для того, чтобы базисная поверхность V^{τ}_{n-2} распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2} была конической, необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{p}_{iq} = a_i \delta^{p}_{q}, \tag{4.14}$$

где a_i квазитензор:

$$\nabla_{\delta} a_i = -a_i \pi^{o}_{o} + \pi^{o}_{i}. \tag{4.15}$$

Т е о р е м а 11. Для того, чтобы тангенциально вырожденная поверхность $V^{\tau}_{\tau+1}$ была конической необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{p}_{n-1,q} = a_{n-1} \delta^{p}_{q}, \text{ где } \nabla_{\delta} a_{n-1} = -a_{n-1}\pi^{o}_{o} + \pi^{o}_{n-1}. \tag{4.16}$$

Следовательно, можно сформулировать еще один признак конических гиперполос CH^{τ}_{n-2} эквивалентный предыдущему.

Т е о р е м а 12. Для того, чтобы распадающаяся гиперполоса CH^{τ}_{n-2} была конической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a^{p}_{iq} = a_i \delta^{p}_{q}; \quad a^{p}_{n-1,q} = a_{n-1} \delta^{p}_{q}, \tag{4.17}$$

где квазитензоры a_i и a_{n-1} удовлетворяют соответственно условиям (4.15) и (4.16).

2. Плоские распадающиеся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

Обращение в нуль тензоров C^{i}_{pq} и C^{n-1}_{pq} выделяет еще один класс распадающихся гиперполос CH^{τ}_{n-2}. Геометрические образы, связанные с этим классом гиперполос CH^{τ}_{n-2}, двойственны соответствующим образам конических гиперполос CH^{τ}_{n-2}. Так как аналитические выкладки по существу ничем не отличаются от выкладок пункта, то нетрудно убедиться в следующих результатах:

О п р е д е л е н и е 8. Распадающуюся гиперполосу CH^{τ}_{n-2} назовем плоской [4], если направляющая поверхность V_{τ} (поверхность центров плоских образующих E_s) базисной поверхности V^{τ}_{n-2} этой гиперполосы лежит в неподвижной плоскости $E_{\tau+1} \supset T_{\tau}$.

Т е о р е м а 13. Для того, чтобы базисная поверхность V^{τ}_{n-2} гиперполосы CH^{τ}_{n-2} была плоской, необходимо и достаточно, чтобы

$$C^{n-1}_{pq} \equiv 0. \tag{4.18}$$

Т е о р е м а 14. Для того, чтобы тангенциально вырожденная поверхность $V^{\tau}_{\tau+1}$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы

$$C^{i}_{pq} \equiv 0. \tag{4.19}$$

Наконец, сформулируем характеристический признак плоской гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

Т е о р е м а 15. Распадающаяся гиперполоса CH^{τ}_{n-2} является плоской тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$c^{i}_{pq} = 0, \quad c^{n-1}_{pq} = 0. \qquad (4.20)$$

Литература

1. Акивис М.А., Фокальные образы поверхности ранга r. Известия высших учебных заведений, 1957, 1, 9-19.

2. Вагнер В.В., Теория поля локальных гиперполос. Труды семинара по векторной и тенз. анализу, М.-Л, 1952, т.8, 111-272.

3. Василаян М.А., Об инвариантном оснащении гиперполосы. ДАН Арм.ССР, т.50, №2, 1970, 65-69.

4. Васильян М.А., Проективная теория многомерных гиперполос. Известия АН Арм.ССР, Математика, т.6, 1971, 477-481.

5. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск. матем. общества, 1953, т.2, 275-382.

6. Норден А.П., Пространство аффинной связности, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

7. Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n. Труды Калининградского ун-та. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.1, 1970, 27-46.

8. Casanova G. „La nation de pôle harmonique", Rev. math. spéc, t 65, №6, 1955, 437-440.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Свешникова Г.Л.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ [2,0].

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции кривых второго порядка (коник) с кратными вырождающимися фокальными поверхностями. Конгруэнцией (k, κ) (соответственно $[k, \kappa]$ или $\{k, k\}$) называется конгруэнция коник в P_3, у которой k фокальных поверхностей (соответственно $2k$ или $3k$) вырождаются в k различных линий, 2κ фокальных поверхностей вырождаются в κ различных точек.

В данной работе рассматриваются конгруэнции коник с двумя двукратными фокальными поверхностями, вырождающимися в линии, то есть конгруэнции $[2,0]$.

§1. Построение репера. Теорема существования.

Определение 1. Конгруэнцией $\mathcal{L}$ называется конгруэнция кривых второго порядка, обладающая следующими свойствами: 1/ существуют две фокальные поверхности (S_i) ($i, j, \kappa = 1, 2$), вырождающиеся в линии, причем они являются сдвоенными, 2/ касательные ℓ_i к линиям (S_i) не инцидентны плоскости коники.

Поместим вершины A_i подвижного репера $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ в фокальные точки коники, описывающие линии (S_i), вершину A_3 — в полюс прямой $A_1 A_2'$ относительно коники. Пусть ℓ есть прямая, проходящая через точку A_3 и пересекающая прямые ℓ_i.

.Обозначим буквами B_i точки пересечения с прямой ℓ прямых ℓ_i. Вершину A_4 репера R совмещаем с точкой прямой ℓ, являющейся четвертой гармонической к точке A_3 относительно точек B_i.

Инфинитезимальные перемещения репера R определяются деривационными формулами:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4), \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{3}$$

Уравнения коники относительно репера R (при соответствующей нормировке вершин репера) запишутся в виде:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{4}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{L}$ имеет вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (-1)^j\Gamma_1^{31}\omega_i, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ij}\omega_j,$$
$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ij}\omega_j, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k,$$

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k\omega_k, \tag{5}$$
$$d\Gamma_1^{31} + \Gamma_1^{31}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + [(\Gamma_1^{31})^2\Gamma_3^{41} - \Gamma_4^{31}]\omega_1 + [\Gamma_4^{32} - (\Gamma_1^{31})^2\Gamma_3^{42}]\omega_2 = 0,$$

где

$$\omega_i^4 = \omega_i.$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Т е о р е м а I. Конгруэнции $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При внешнем дифференцировании системы уравнений (5) получаем систему квадратичных уравнений:

$$[(\Gamma_1^{31})^2\Delta\Gamma_3^{41} - \Delta\Gamma_4^{31}]\wedge\omega_1 + [\Delta\Gamma_4^{32} - (\Gamma_1^{31})^2\Delta\Gamma_3^{42}]\wedge\omega_2 + A\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0,$$
$$\Delta\Gamma_3^{ij}\wedge\omega_j = 0, \quad \Delta\Gamma_3^{4k}\wedge\omega_k = 0, \quad \Delta\Gamma_4^{ij}\wedge\omega_j = 0, \tag{6}$$
$$\Delta\Gamma_4^{3k}\wedge\omega_k = 0, \quad \Delta a^k\wedge\omega_k = 0,$$

где

$$A = 2\Gamma_1^{31}[\Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{21} - \Gamma_1^{31}(\Gamma_3^{12} + \Gamma_3^{21}) + 2(\Gamma_3^{41}\Gamma_4^{32} - \Gamma_3^{42}\Gamma_4^{31})],$$
$$\Delta\Gamma_3^{ij} = d\Gamma_3^{ij} + \Gamma_3^{ij}(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + (-1)^j\Gamma_3^{4i}(\Gamma_3^{ij}\Gamma_1^{31} - \Gamma_4^{ij})\omega_i,$$
$$\Delta\Gamma_3^{4i} = d\Gamma_3^{4i} + \Gamma_3^{4i}(\omega_i^i - \omega_3^3) + (-1)^i[\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{41}\Gamma_3^{42} + (-1)^j\Gamma_3^{ij}]\omega_j, \tag{7}$$
$$\Delta\Gamma_4^{ij} = d\Gamma_4^{ij} + \Gamma_4^{ij}(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) + (-1)^j[\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij} + (-1)^i\Gamma_4^{3i}\Gamma_3^{ij}]\omega_i,$$

$$\Delta a^i = da^i + a^i(\omega_i^i - \omega_4^4) + [(-1)^i(a^i\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{4j} - 3\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{ij}) - \Gamma_4^{ji} - 2\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{3j}]\omega_j. \quad (7)$$

Замкнутая система (5),(6)- в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{L}$ с произволом двух функций двух аргументов.

§2.Конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$.

О п р е д е л е н и е 2.Конгруэнцией $\mathcal{L}^\circ$ называется конгруэнция $\mathcal{L}$,обладающая следующими свойствами: I/касательные к линиям (A_i) пересекаются, 2/точка A_3 является характеристической точкой плоскости коники.

Т е о р е м а 2.Конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Учитывая в уравнениях (5) условия I/, 2/ определения 2,получаем для конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$ определяющую её систему уравнений Пфаффа:

$$\omega_i^j = \omega_i^3 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0\,,\quad \omega_3^i = \Gamma_3^{12}\omega_j\,,\quad \omega_4^i = \Gamma_4^{12}\omega_j\,,$$
$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k\omega_k\,,\quad d\Gamma_3^{12} + 2\Gamma_3^{12}(\omega_1^1 + \omega_2^2) = 0, \quad (8)$$
$$d\Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{12}(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) = 0.$$

Дифференцируем внешним образом систему уравнений (8).Присоединяя к системе (8) полученные квадратичные уравнения, видим,что замкнутая система,определяющая конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$,- в инволюции и её решение существует с произволом одной функции двух аргументов.

Нормируя вершины A_α репера так,чтобы

$$a^i = 1\,, \quad (9)$$

получаем канонический репер конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$.Эта нормировка исключает из рассмотрения следующие классы конгруэнций: I/ $a^i = 0$, $a^j \neq 0$ -конгруэнции с двукратным фокусом A_i и четырехкратным фокусом A_j ,2/ $a^1 = a^2 = 0$ -конгруэнции с неопределенными фокальными поверхностями.

Матрица компонент деривационных формул канонического репера запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1^{1k}\omega_k & 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & \Gamma_2^{2k}\omega_k & 0 & \omega_2 \\ b\omega_2 & b\omega_1 & \Gamma_3^{3k}\omega_k & 0 \\ p\omega_2 & p\omega_1 & 0 & \Gamma_4^{4k}\omega_k \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\Gamma_3^{3i} = \tfrac{1}{2}(\Gamma_1^{1i} + \Gamma_2^{2i} - 1)\,,\quad \Gamma_4^{4i} = \tfrac{1}{2}[1 - 3(\Gamma_1^{1i} + \Gamma_2^{2i})],$$
$$\Gamma_3^{12} = b,\quad \Gamma_4^{12} = p. \quad (11)$$

причем имеет место конечное соотношение

$$3(\Gamma_2^{22} - \Gamma_1^{11}) + 5(\Gamma_1^{12} - \Gamma_2^{21}) = 0. \quad (12)$$

§3.Геометрические свойства конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$

Т е о р е м а 3. Конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$ имеют две невырождающиеся фокальные поверхности (F_i) .Характеристическая точка A_3 инцидентна прямой F_1F_2 .Сдвоенные вырождающиеся фокальные поверхности (A_i)являются плоскими линиями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения фокальных точек и фокальных семейств конгруэнции коник имеем систему уравнений

$$x^1(x^2+x^3 b)\omega_1+x^2(x^1+x^3 b)\omega_2=0,\ x^1\omega_1+x^2\omega_2=0,$$
$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^1=0 \qquad (13)$$

Исключая из этой системы отношения $\omega_1 : \omega_2$, получаем систему уравнений

$$x^1x^2(x^1-x^2)=0,\ (x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0 \qquad (14)$$

Из системы уравнений (14), кроме фокальных точек (A_i), которые являются сдвоенными, находим еще два фокуса конгруэнции коник:

$$F_1=A_1+A_2+\sqrt{2}A_3\ ,\quad F_2=A_1+A_2-\sqrt{2}A_3 \qquad (15)$$

Отсюда следует инцидентность точки A_3 прямой F_1F_2. Дифференцируя аналитические точки F_i с учетом матрицы деривационных формул репера (10), убеждаемся, что поверхности (F_i) не вырождаются. Справедливость заключительной части теоремы следует из того, что при любом натуральном n выполняется равенство:

$$(d^{(n)}A_iA_1A_2A_4)=0.$$

Т е о р е м а 4. Фокальные семейства на поверхностях (F_1), (F_2) соответствурт одному семейству торсов прямолинейной конгруэнции (F_1F_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейной конгруэнции (F_1F_2) определяются уравнением

$$(\omega_1+\omega_2)(\omega_1-\omega_2)=0. \qquad (16)$$

Подставляя координаты точек F_1 и F_2 в систему уравнений (13), заключаем, что фокальные семейства $\omega_1+\omega_2=0$ поверхностей (F_1) и (F_2) соответствуют семейству торсов

$$\omega_1+\omega_2=0 \qquad (17)$$

прямолинейной конгруэнции (F_1F_2).

С л е д с т в и е . Пфаффово уравнение $\omega_1+\omega_2=0$ определяет сдвоенное фокальное семейство конгруэнции $\mathcal{L}$.

Т е о р е м а 5. Конгруэнции $\mathcal{L}^0$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/касательные к линиям $\omega_1-\omega_2=0$, $\omega_1+\omega_2=0$ на поверхностях (A_3) и (A_4) пересекают прямую A_1A_2 в точках E и E^*, гармонически делящих точки A_i, 2/каждая из поверхностей (A_4), (E), (E^*) является плоскостью $(A_1A_2A_4)$, 3/ $(A_1A_4;R_1R_2)=-(A_2A_4;T_1T_2)$, где $R_i(T_i)$ —точки пересечения касательных к линиям $\omega_i=0$ на поверхности (E) (соответственно (E^*)) с прямой A_1A_4 (A_2A_4), 4/существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) [1], 5/прямые A_3A_4 образуют связку с центром в точке

$$P=pA_3-bA_4.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Действительно, используя матрицу деривационных формул (10), получаем

$$(dA_3)_{\omega_1-\omega_2=0}=(\omega_3^3)_{\omega_1-\omega_2=0}A_3+b\omega_1E, \qquad (18)$$

$$(dA_4)_{\omega_1-\omega_2=0}=(\omega_4^4)_{\omega_1-\omega_2=0}A_4+p\omega_1 E,$$

$$(dA_3)_{\omega_1+\omega_2=0}=(\omega_3^3)_{\omega_1+\omega_2=0}A_3-b\omega_1 E^*, \qquad (18)$$

$$(dA_4)_{\omega_1+\omega_2=0}=(\omega_4^4)_{\omega_1+\omega_2=0}A_3-p\omega_1 E^*,$$

где

$$E=A_1+A_2\,,\quad E^*=A_1-A_2\,.$$

2/Так как при любом натуральном числе n имеют место равенства

$$(d^{(n)}A_4A_1A_2A_4)=0,\ (d^{(n)}EA_1A_2A_4)=0,\ (d^{(n)}E^*A_1A_2A_4)=0, \qquad (19)$$

то каждая из поверхностей $(A_4),(E),(E^*)$ совпадает с плоскостью $(A_1A_2A_4)$.

3/Касательные к линиям $\omega_i=0$ на поверхности (E) пересекают ребро A_1A_4 в точках

$$R_1=(\Gamma_1^{12}-\Gamma_2^{22})A_1+A_4\,,\quad R_2=(\Gamma_1^{11}-\Gamma_2^{21})A_1+A_4\,. \qquad (20)$$

На поверхности (E^*) касательные к линиям $\omega_i=0$ пересекают ребро A_2A_4 в точках

$$T_1=(\Gamma_1^{12}-\Gamma_2^{22})A_2-A_4\,,\ T_2=(\Gamma_1^{11}-\Gamma_2^{21})A_2+A_4\,. \qquad (21)$$

Из соотношений (20) и (21) видно, что $(A_1A_4;R_1R_2)=-(A_2A_4;T_1T_2)$.

4/Условия одностороннего расслоения прямолинейных конгруэнций (A_3A_4) и (A_1A_2), ассоциированных с конгруэнцией $\mathcal{L}$, тождественно удовлетворяются.

5/Точка P принадлежит прямой A_3A_4, причем

$$dP=(2\omega_4^4+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2)P. \qquad (22)$$

Следовательно, совокупность прямых A_3A_4 является связкой с центром в точке P. Теорема доказана.

Обозначим буквой P^* точку, для которой

$$(A_3A_4;P^*P)=-1, \qquad (23)$$

то есть

$$P^*=pA_3+bA_4\,. \qquad (24)$$

Т е о р е м а 6. Поверхности (A_3) и (P^*) являются невырождающимися линейчатыми квадриками, пересекающимися по сдвоенной кривой второго порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя аналитическую прямую $[A_3A_i]$ (соответственно $[P^*A_i]$) вдоль линии $\omega_i=0$ получаем

$$d[A_3A_i]=(\omega_3^3+\omega_i^i)[A_3A_i],$$

$$d[P^*A_i]=(-\tfrac{5}{2}\omega_i^i-\tfrac{7}{2}\omega_j^j+\tfrac{1}{2}\omega_1+\tfrac{1}{2}\omega_2)[P^*A_i]. \qquad (25)$$

Значит, линии $\omega_i=0$ являются прямолинейными образующими поверхностей (A_3) и (P^*). Уравнения квадрик (A_3) и (P^*) имеют, соответственно, вид:

$$2x^1x^2-2bx^3x^4-p(x^4)^2=0, \qquad (26)$$

$$2px^1x^2-2bpx^3x^4-p^2(x^4)^2+3b^2(x^3)^2=0. \qquad (27)$$

Квадрики (A_3) и (P^*) пересекаются по сдвоенной конике

$$\Phi\equiv 2x^1x^2-p(x^4)^2=0\,,\ x^3=0\,. \qquad (28)$$

С л е д с т в и я. 1/Прямая $A_3E\,(A_3E^*)$ является касательной к линии $\omega_1-\omega_2=0$ $(\omega_1+\omega_2=0)$ на квадрике (26). 2/Точками пересечения прямой A_3A_4 с квадриками (26) и (27) (отличными от точек A_3 и P^*) являются точки

$$K_1=pA_3-2bA_4', \quad K_2=pA_3-3bA_4. \tag{29}$$

3/Точки A_1 и A_2 являются сдвоенными характеристическими точками коники Φ [2].

Действительно,

$$d\Phi \equiv x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)=0.$$

Исключая семейство линий $\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4=0$, вдоль которого коника Φ неподвижна в плоскости $x^3=0$, мы получаем, что вдоль любого другого направления коника (28) имеет сдвоенные характеристические точки A_i.

Л и т е р а т у р а

1.С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций, М., ГИТТЛ, 1956.

2.Малаховский В.С., Конгруэнции кривых второго порядка, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство. Геом.сб., вып.3, Труды Томского ун-та, т.168, 1963, 61–65.

С к р ы д л о в а Е.В.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(C\mathcal{L})_{1,2}$ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ – вырожденные конгруэнции [1] пар фигур, порожденные коникой C и прямой $\mathcal{L}$, не имеющей с коникой общих точек и не лежащей в плоскости коники. В конгруэнциях $(C\mathcal{L})_{1,2}$ коники C образуют однопараметрическое семейство, а прямые $\mathcal{L}$ — двупараметрическое (прямолинейную конгруэнцию). Построен геометрически фиксированный репер конгруэнций $(C\mathcal{L})_{1,2}$, подробно исследованы некоторые частные классы конгруэнций $(C\mathcal{L})_{1,2}$.

§1. Репер конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$.

В конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ каждой прямой $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ соответствует единственная коника C однопараметрического семейства (C), полным прообразом которой является линейчатая поверхность $(\mathcal{L})_C$.

Пусть N — точка пересечения прямой $\mathcal{L}$ с плоскостью соответствующей ей коники C. В дальнейшем ограничимся рассмотрением конгруэнций $(C\mathcal{L})_{1,2}$ общего типа, а именно когда:

1/ N не инцидентна характеристике плоскости коники C,

2/ N не является фокальной точкой луча $\mathcal{X}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{X})$,

3/касательная плоскость к поверхности (N) не проходит через точки A_i, $(i,j,k=1,2)$ репера R.

Отнесем конгруэнцию $(C\mathcal{X})_{1,2}$ к подвижному реперу $R=\{A_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3,4)$,деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1.1}$$

где ω_α^β -формы Пфаффа,удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{1.3}$$

Пусть вершина A_3 репера R совпадает с точкой N, A_1 и A_2 инцидентны конике C и полярно сопряжены N относительно коники C ,вершина A_4 вместе с точкой N гармонически разделяет фокусы луча $\mathcal{X}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{X})$.

В силу допущенных исключений ,имеем:

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \neq 0, \quad \omega_3^4 \neq 0, \tag{1.4}$$

следовательно,формы Пфаффа

$$\omega_3^i = \omega^i \tag{1.5}$$

можно принять в качестве базисных линейно независимых

форм конгруэнции $(C\mathcal{X})_{1,2}$.

Уравнения коники C с учетом соответствующей нормировки вершин и система пфаффовых уравнений конгруэнции $(C\mathcal{X})_{1,2}$ в репере R запишутся соответственно в виде:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0; \tag{1.6}$$

$$\omega_i^j = \Gamma_i^j \omega_3^4, \quad \omega_i^3 = a_i \omega_3^4 + \omega^j, \quad \omega_i^4 = b_i \omega_3^4,$$

$$\omega_3^4 = \Gamma_{3k}^4 \omega^k, \quad \omega_4^i = \Gamma_{4j}^i \omega^j + (-1)^j \mu \omega^i, \tag{1.7}$$

$$\omega_4^3 = \Gamma_{4k}^3 \omega^k, \quad 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = p\omega_3^4.$$

Здесь и далее суммирование по индексам i,j не производится, $i \neq j$.Исследуя систему (I 7),убеждаемся,что конгруэнции $(C\mathcal{X})_{1,2}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а I. Касательная плоскость к поверхности (A_3) пересекает прямую A_1A_2 в точке,которая вместе с вершинами A_1, A_2 и одним из фокусов луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) образует гармоническую четверку.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Координаты s,t фокусов sA_1+tA_2 луча A_1A_2 конгруэнции (A_1A_2) находятся из уравнения

$$(b_1 s + b_2 t)(\Gamma_{32}^4 t - \Gamma_{31}^4 s) = 0, \tag{1.8}$$

т.е.точка

$$F = \Gamma_{32}^4 A_1 + \Gamma_{31}^4 A_2 \tag{1.9}$$

является фокальной,а

$$F^{*}=\Gamma^{4}_{32}A_1-\Gamma^{4}_{31}A_2 \qquad (1.10)$$

-четвертой гармонической ей относительно вершин A_1 и A_2.

Касательная плоскость поверхности (A_3) в точке A_3 задается точками

$$A_3,\ \bar{A}=A_1+\Gamma^4_{31}A_4,\ \ \bar{\bar{A}}=A_2+\Gamma^4_{32}A_4. \qquad (1.11)$$

Имеем

$$(A_3\bar{A}\bar{\bar{A}}F^{*})=0, \qquad (1.12)$$

что и требовалось доказать.

Пронормируем вершины репера R таким образом, чтобы единичная точка E_{12} прямой A_1A_2 совпадала с фокусом F луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2). В этом случае будем иметь

$$\Gamma^4_{31}=\Gamma^4_{32}=\gamma, \qquad (1.13)$$

$$\omega^1_1-\omega^2_2=\lambda_\kappa\omega^\kappa. \qquad (1.14)$$

§2. Условия инцидентности всех коник однопараметрического семейства (C) инвариантной квадрике.

Поставим задачу-найти условия, при которых все коники однопараметрического семейства (C) принадлежат некоторой инвариантной квадрике Q. Уравнение такой квадрики в общем случае может быть записано в виде

$$Q=(x^3)^2-2x^1x^2+2(a_{14}x^1+a_{24}x^2+a_{34}x^3+\tfrac{1}{2}a_{44}x^4)x^4=0. \qquad (2.1)$$

Дифференцируя уравнение (2.I) с помощью уравнений стационарности точки

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega^\alpha_\beta+\theta x^\alpha,\ \ (\mathcal{D}\theta=0), \qquad (2.2)$$

получим условия инвариантности квадрики

$$\Gamma^j_i-a_{i4}b_i=0, \qquad (2.3)$$

$$a_i+a_{i4}+b_ia_{34}=0, \qquad (2.4)$$

$$p+a_{14}b_2+a_{24}b_1+2a_{34}=0, \qquad (2.5)$$

$$da_{i4}+\omega^j_4+a_{i4}(2\omega^3_3-\omega^i_i-\omega^4_4)-a_{j4}\omega^j_i-a_{34}\omega^3_i- -a_{44}\omega^4_i+2a_{i4}a_{34}\omega^4_3=0, \qquad (2.6)$$

$$da_{34}-\omega^3_4-a_{\kappa4}\omega^\kappa+a_{34}(\omega^3_3-\omega^4_4)-a_{44}\omega^4_3+2(a_{34})^2\omega^4_3=0, \qquad (2.7)$$

$$\tfrac{1}{2}da_{44}-a_{\kappa4}\omega^\kappa_4-a_{34}\omega^3_4+a_{44}(\omega^3_3-\omega^4_4)+a_{34}a_{44}\omega^4_3=0. \qquad (2.8)$$

Условия (2.3)-(2.8) полностью определяют коэффициенты $a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}$ квадрики Q и специализируют определенным образом семейство (C) коник C.

Осуществляя замыкание и продолжение системы уравнений (I.7), (2.3)-(2.8), находим, что конгруэнции $(C\mathfrak{X})_{1,2}$, у которых все коники C однопараметрического семейства (C) принадлежат некоторой инвариантной квадрике Q, существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

§3. Конгруэнции $(C\mathfrak{X})^Q_{1,2}$

О п р е д е л е н и е I, Конгруэнциями $(C\mathfrak{X})^Q_{1,2}$ называются конгруэнции $(C\mathfrak{X})_{1,2}$, обладающие следующими свойствами: I/ все коники C семейства (C) принадлежат квадрике Q, относительно которой прямые A_1A_2 и $\mathcal{L}$ находятся в полярном соответствии; 2/ пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и $(\mathcal{L})$ расслояема [5] в направлении от $(\mathcal{L})$ к (A_1A_2); 3/ поверхность (A_4) касается плоскости $(A_1A_2A_4)$ в точке A_4.

Для конгруэнций $(C\mathcal{L})^{Q}_{1,2}$ выполняются равенства

$$a_{i4}=0\,, \tag{3.1}$$

тогда из соотношений (2,3)-(2.5) получим

$$\Gamma^{j}_{i}=0\,,\quad a_i+b_i\omega^4_3=0\,,\quad p+2a_{34}=0. \tag{3.2}$$

Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) приводятся к виду

$$\omega^1_4\wedge\omega^2+\omega^2_4\wedge\omega^1=0\,, \tag{3.3}$$

$$\omega^1_4\wedge\omega^4_1+\omega^2_4\wedge\omega^4_2=0\,, \tag{3.4}$$

$$\omega^1\wedge\omega^4_1+\omega^2\wedge\omega^4_2=0\,, \tag{3.5}$$

откуда будем иметь

$$\mu=0\,, \tag{3.6}$$

$$b_1=b_2=b. \tag{3.7}$$

Уравнения (2.6) с учетом равенств (3.I),(3.2.),(3.6),(3.7) дают

$$\left(a_{44}-\frac{p^2}{4}\right)b\gamma=\frac{p}{2}\,, \tag{3.8}$$

$$\omega^1_4=\frac{p}{2}\omega^2,\qquad \omega^2_4=\frac{p}{2}\omega^1. \tag{3.9}$$

Условие 3 определения I аналитически записывается в виде

$$\omega^3_4=0. \tag{3.10}$$

Замыкая уравнения (3.9) совместно с

$$\omega^4_1=\omega^4_2\,, \tag{3.11}$$

получим

$$b(\omega^1_1-\omega^2_2)=\omega^1-\omega^2. \tag{3.12}$$

Последнюю нормировку вершин репера R осуществим таким образом, чтобы

$$p=2\,, \tag{3.13}$$

при этом единичная точка $E_{34}=A_3+A_4$ прямой A_3A_4 совмещается с фокусом луча $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$.

Из уравнений (2.7),(2.8) с учетом (3.2),(3.IO),(3.I3) будем иметь

$$\omega^3_3-\omega^4_4=(2-a_{44})\omega^4_3\,, \tag{3.14}$$

$$da_{44}+2a_{44}(1-a_{44})\omega^4_3=0. \tag{3.15}$$

Соотношение (3.8) при нормировке (3.I3) дает

$$\gamma=\frac{1}{b(a_{44}-1)}\,, \tag{3.16}$$

тогда

$$\omega^4_3=\frac{1}{b(a_{44}-1)}\left(\omega^1+\omega^2\right). \tag{3.17}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции $(C\mathcal{L})^{Q}_{1,2}$ записывается в виде

$$\omega^j_i=0\,,\ \ \omega^3_i=\omega^4_i+\omega^j,\ \ \omega^4_i=b\omega^4_3,\ \ \omega^i_4=\omega^j,$$
$$\omega^3_4=0\,,\ \ \omega^4_3=\frac{1}{b(a_{44}-1)}(\omega^1+\omega^2),\ 2\omega^3_3-\omega^1_1-\omega^2_2=2\omega^4_3\,, \tag{3.18}$$
$$b(\omega^1_1-\omega^2_2)=\omega^1-\omega^2,\ \ \omega^3_3-\omega^4_4=(2-a_{44})\omega^4_3.$$

Продолжая систему (3.18), получим

$$d b + (b^2 - \tfrac{1}{2})(\omega^1 + \omega^2) = 0. \qquad (3.19)$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $(C\mathcal{L})^{Q}_{1,2}$ определяются вполне интегрируемой системой пфаффовых уравнений (3.15), (3.18), (3.19)

Квадрика Q, инцидентная всем коникам C семейства (C), имеет вид:

$$Q = (x^3)^2 - 2x^1x^2 - 2x^3x^4 + a_{44}(x^4)^2 = 0. \qquad (3.20)$$

Обозначим

$$E^*_{12} = A_1 - A_2, \quad E^*_{34} = A_3 - A_4 \quad - \qquad (3.21)$$

— точки, которые вместе с точками E_{12} и E_{34}, вершинами репера A_1, A_2 и A_3, A_4 соответственно образуют гармонические четверки.

Т е о р е м а 3. Конгруэнции $(C\mathcal{L})^{Q}_{12}$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) вместе с точками A_1 и A_2 образуют гармоническую четверку; 2/пара прямолинейных конгруэнций $(E_{12}E_{34})$ и $(E^*_{12}E^*_{34})$ расслояема в направлении от $(E_{12}E_{34})$ к $(E^*_{12}E^*_{34})$; 3/плоскости коник C образуют пучок; 4/одна из фокальных поверхностей луча $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ вырождается в линию; 5/линейчатая поверхность $(\mathcal{L})_C$ является торсом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Фокусы $sA_1 + tA_2$ луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнением

$$s^2 - t^2 = 0, \qquad (3.22)$$

следовательно, вместе с точками A_1 и A_2 они образуют гармоническую четверку. 2/Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции $(E_{12}E_{34})$ к прямолинейной конгруэнции $(E^*_{12}E^*_{34})$

$$\begin{gathered}
2\omega_3^4 \wedge (\omega_4^1 + \omega_4^2) + (\omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge (\omega_3^2 - \omega_3^1 + \omega_4^2 - \omega_4^1) + \\
+ (\omega_3^3 - \omega_4^4) \wedge (\omega_3^1 + \omega_3^2 - \omega_4^1 - \omega_4^2) = 0, \\
\omega_3^1 \wedge (\omega_1^4 + \omega_2^4 - \omega_1^3 + \omega_2^3) + \omega_3^2 \wedge (\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_1^3 - \omega_2^3) + \\
+ \omega_4^1 \wedge (-\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_1^3 + \omega_2^3) + \omega_4^2 \wedge (\omega_1^4 - \omega_2^4 + \omega_1^3 + \omega_2^3) = 0, \\
2(\omega_1^3 + \omega_2^3) \wedge \omega_3^4 + (-\omega_1^3 + \omega_2^3 - \omega_1^4 + \omega_2^4) \wedge (\omega_1^1 - \omega_2^2) + \\
+ (\omega_1^3 + \omega_2^3 - \omega_1^4 - \omega_2^4) \wedge (\omega_3^3 - \omega_4^4) = 0.
\end{gathered} \qquad (3.23)$$

в силу системы (3.18) удовлетворяются тождественно. 3/Характеристика плоскости коники C

$$b(x^1 + x^2) + x^3 = 0, \quad x^4 = 0 \qquad (3.24)$$

может быть задана точками E^*_{12} и $M = A_2 - bA_3$. Имеем

$$d[E^*_{12}M] = (\omega_1^1 + \omega_2^2 - b\omega^1 - b\omega^2)[E^*_{12}M], \qquad (3.25)$$

т.е. характеристика неподвижна и плоскости коник C образуют пучок. 4/Точка E_{34} является фокусом луча $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$, причем

$$dE_{34} = \omega_3^3 E_{34} + \left[\frac{3 - a_{44}}{b(a_{44} - 1)} A_4 + E_{12}\right](\omega^1 + \omega^2), \qquad (3.26)$$

что и требовалось доказать. 5/Линейчатая поверхность $(\mathcal{L})_C$ и торсы прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ задаются соответственно уравнениями

$$\omega_3^4 = 0, \qquad (3.27)$$

$$(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0. \qquad (3.28)$$

Сравнивая (3.27),(3.28), убеждаемся, что $(\mathcal{L})_c$-торс. Теорема доказана.

Рассмотрим конгруэнцию (C_1) коник C_1, определяемых уравнениями

$$Q = 0, \quad x^3 = 0. \qquad (3.29)$$

Т е о р е м а 4. I/Точки A_i и точки пересечения коники C_1 с прямой $E_{12} A_4$ являются фокальными точками коники C_1, причем фокусы A_i сдвоены, 2/конгруэнция (C_1) коник C_1 расслояема [2],[3] к характеристике семейства плоскостей коник C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений для определения фокальных точек коники C_1 имеет вид:

$$x^1 x^2 (x^1 - x^2) = 0, \quad x^3 = 0,$$
$$a_{44} (x^4)^2 - 2 x^1 x^2 = 0. \qquad (3.30)$$

Разрешая эту систему, получим: а/ $x^i = 0$, т.е. точка A_j является сдвоенным фокусом, б/ $x^1 - x^2 = 0$, в этом случае фокальными являются точки $E_{12} \pm \sqrt{\frac{2}{a_{44}}}\, A_4$, что и требовалось доказать.

2/Условия расслоения от конгруэнции (C_1) коник C_1 к характеристике семейства плоскостей коник C имеют вид:

$$\mathscr{b}(\omega_2^1 \wedge \omega_1^4 + \omega_2^3 \wedge \omega_2^4) - \omega_2^3 \wedge \omega_2^4 = 0,$$

$$d\mathscr{b} \wedge \omega_2^3 - 2\mathscr{b}^2(\omega_4^1 + \omega_4^2) \wedge \omega_2^4 + \mathscr{b}[\mathscr{b}\mathscr{D}(\omega_4^4 - \omega_2^2) - \mathscr{D}\omega_2^3] = 0,$$

$$\frac{\mathscr{b}\, da_{44}}{2} \wedge (\omega_1^4 + \omega_2^4) + \frac{1}{2}\mathscr{b} a_{44} \mathscr{D}(\omega_1^4 + \omega_2^4) - \mathscr{b}\mathscr{D}(\omega_4^1 + \omega_4^2) -$$
$$- \mathscr{b}\, da_{44} \wedge \omega_2^4 + \frac{3}{2} a_{44} [\mathscr{b}(\omega_4^4 - \omega_1^1) - \omega_1^3] \wedge \omega_2^4 - \frac{\mathscr{b} a_{44}}{2} \mathscr{D}\omega_2^4 +$$
$$+ \left[\frac{1}{2} a_{44} (\omega_1^4 + \omega_2^4) - (\omega_4^1 + \omega_4^2)\right] \wedge [\mathscr{b}(\omega_4^4 - \omega_2^2) - \omega_2^3] = 0,$$

$$\frac{1}{2}\mathscr{b}\, da_{44} \wedge [\mathscr{b}(\omega_2^2 - \omega_1^1) - \omega_1^3 + \omega_2^3] + \frac{1}{2}\mathscr{b}\, da_{44} \mathscr{D}(\omega_2^3 - \omega_1^3) +$$
$$+ \frac{1}{2}\mathscr{b}^2 a_{44} \mathscr{D}(\omega_2^2 - \omega_1^1) - \frac{1}{2} a_{44}\, d\mathscr{b} \wedge (\omega_2^3 - \omega_1^3) + \qquad (3.31)$$
$$+ a_{44} [\mathscr{b}(\omega_4^4 - \omega_1^1) - \omega_1^3] \wedge [\mathscr{b}(\omega_4^4 - \omega_2^2) - \omega_2^3] = 0,$$

$$\frac{1}{2}\mathscr{b}\, da_{44} \wedge (\omega_1^4 + \omega_2^4) + \frac{1}{2}\mathscr{b} a_{44} \mathscr{D}(\omega_1^4 + \omega_2^4) - \mathscr{b}\mathscr{D}(\omega_4^1 + \omega_4^2) -$$
$$- \mathscr{b}\, da_{44} \wedge \omega_1^4 + \frac{3}{2} a_{44} \left[\frac{\mathscr{b}}{2}(\omega_4^4 - \omega_2^2) - \omega_2^3\right] \wedge \omega_1^4 - \frac{1}{2}\mathscr{b} a_{44} \mathscr{D}\omega_1^4 +$$
$$+ \left[\frac{1}{2} a_{44} (\omega_1^4 + \omega_2^4) - (\omega_4^1 + \omega_4^2)\right] \wedge [\mathscr{b}(\omega_4^4 - \omega_1^1) - \omega_1^3] = 0,$$

$$d\mathscr{b} \wedge \omega_1^3 - 2\mathscr{b}^2(\omega_4^1 + \omega_4^2) \wedge \omega_1^4 + \mathscr{b}[\mathscr{b}\mathscr{D}(\omega_4^4 - \omega_1^1) - \mathscr{D}\omega_1^3] = 0,$$

$$\mathscr{b}(\omega_1^2 \wedge \omega_2^4 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^4) - \omega_1^3 \wedge \omega_1^4 = 0,$$

где $\mathcal{D}$ -символ внешнего дифференцирования.

В силу системы (3.18) уравнения (3.31) удовлетворяются тождественно, что и доказывает утверждение теоремы.

§4. Расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$.

О п р е д е л е н и е 2. Расслояемыми конгруэнциями $(C\mathcal{L})_{1,2}$ называются конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$, для которых: 1/ пары прямолинейных конгруэнций $(E_{12}A_3)$, (A_iA_4) расслояемы в направлении от $(E_{12}A_3)$ к (A_iA_4); 2/ характеристические точки граней $(A_iA_3A_4)$ принадлежат прямой $\mathcal{L}$; 3/ прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) является параболической.

Т е о р е м а 5. Расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналитически условия определения 2 записываются в виде

$$(\omega^i-\omega^j)\wedge\omega^3_j+(\omega^j_j-\omega^i_i)\wedge\omega^i_j+(\omega^4_i+\omega^4_j)\wedge\omega^i_4-\omega^4_3\wedge\omega^3_4=0, \quad (4.1)$$

$$\omega^j_i\wedge(\omega^j-\omega^i)+\omega^4_3\wedge\omega^j_4=0, \quad (4.2)$$

$$\omega^3_i\wedge(\omega^i_i-\omega^j_j)-\omega^j_i\wedge\omega^i-\omega^i_j\wedge\omega^j-(\omega^4_i+\omega^4_j)\wedge\omega^3_4=0, \quad (4.3)$$

$$\Gamma^i_{4j}=0, \quad (4.4)$$

$$b_1=-b_2=b, \quad (4.5)$$

причем, в силу невырождения конгруэнций (A_iA_4) в линейчатые поверхности

$$\operatorname{rang}(\omega^j_i,\ \omega^3_i,\ \omega^j_4,\ \omega^3_4)=2. \quad (4.6)$$

В силу (4.4), (4.5) имеем

$$\omega^1_4=\mu\omega^1,\quad \omega^2_4=-\mu\omega^2, \quad (4.7)$$

$$\omega^4_1+\omega^4_2=0. \quad (4.8)$$

Учитывая (4.7) в (4.2) получим

$$\omega^2_1=\tfrac{1}{2}\mu\omega^4_3,\quad \omega^1_2=-\tfrac{1}{2}\mu\omega^4_3. \quad (4.9)$$

Разность уравнений (4.1) с учетом (4.9) приводится к виду:

$$\gamma(a_1+a_2)+1=0, \quad (4.10)$$

откуда

$$\omega^3_1+\omega^3_2=0. \quad (4.11)$$

Продолжая уравнения (4.7), (4.8), будем иметь:

$$d\mu+\mu(\omega^3_3-\omega^4_4)+\Gamma^3_{41}\omega^1-\Gamma^3_{42}\omega^2=0, \quad (4.12)$$

$$\omega^1_1-\omega^2_2=\lambda\omega^4_3. \quad (4.13)$$

При внешнем дифференцировании уравнений (4.9) получаем квадратичные уравнения

$$(-\Gamma^3_{41}\omega^1+\Gamma^3_{42}\omega^2)\wedge\omega^4_3+\mu(\omega^1-\omega^2)\wedge\omega^4_1+2(b\mu-a_1)\omega^4_3\wedge\omega^2=0, \quad (4.14)$$

$$\omega^3_1\wedge(\omega^1-\omega^2)=0. \quad (4.15)$$

Из (4.15) следует равенство

$$2\gamma a_1+1=0, \quad (4.16)$$

тогда

$$\omega^3_i=\tfrac{1}{2}(\omega^j-\omega^i). \quad (4.17)$$

Из уравнений (4.1), (4.3) при этом получим

$$\omega_4^3 = \alpha\,\omega_3^4, \tag{4.18}$$

$$\lambda = \mu, \tag{4.19}$$

то есть

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = \mu\,\omega_3^4 \tag{4.20}$$

Уравнение (4.14) теперь приводит к соотношению

$$4\mu\beta\gamma - 2\gamma^2\alpha + 1 = 0. \tag{4.21}$$

Замыкая уравнения (4.17), получим

$$2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0. \tag{4.22}$$

Последнюю нормировку вершин репера осуществим таким образом, чтобы

$$\mu = 1, \tag{4.23}$$

тогда

$$\omega_3^3 - \omega_4^4 = \alpha\gamma\,(\omega^2 - \omega^1). \tag{4.24}$$

Обозначим

$$\alpha\gamma = \varphi. \tag{4.25}$$

Учитывая (4.21), будем иметь

$$\omega_4^3 = \varphi\,(\omega^1 + \omega^2), \tag{4.26}$$

$$\omega_4^4 - \omega_3^3 = \varphi\,(\omega^1 - \omega^2), \tag{4.27}$$

$$\omega_1^4 = \tfrac{1}{2}\varphi\,\omega_3^4 - \tfrac{1}{4}(\omega^1 + \omega^2). \tag{4.28}$$

Продолжая систему (4.26)-(4.28), получим

$$d\varphi + (\varphi^2 + \tfrac{1}{2})(\omega^2 - \omega^1) = 0, \tag{4.29}$$

$$\gamma + \gamma\varphi^2 - \frac{\varphi}{2} = 0, \tag{4.30}$$

откуда

$$\omega_3^4 = \frac{\varphi}{2(1+\varphi^2)}\,(\omega^1 + \omega^2). \tag{4.31}$$

Замыкание уравнения (4.31) приводит к соотношению

$$1 + 2\varphi^2 = 0. \tag{4.32}$$

Из (4.30), (4.32) следует

$$\varphi = \gamma. \tag{4.33}$$

Таким образом, расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ определяются системой уравнений Пфаффа

$$\begin{gathered}
\omega_i^j = \tfrac{1}{2}(-1)^j\omega_3^4, \quad \omega_i^3 = \tfrac{1}{2}(\omega^j - \omega^i), \quad \omega_i^4 = \tfrac{1}{2}(-1)^i(\omega^i + \omega^j),\\
\omega_3^4 = \varphi(\omega^1 + \omega^2), \quad \omega_4^i = (-1)^j\omega^i, \quad \omega_4^3 = \omega_3^4,\\
2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = \omega_3^4, \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = \varphi(\omega^1 - \omega^2),
\end{gathered} \tag{4.34}$$

где φ определяется соотношением (4.32).

Система (4.34) является вполне интегрируемой, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 6. Расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/ прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) является связкой прямых с центром в точке E_{12}; 2/ характеристика плоскости коники C неподвижна и касается коники C; 3/ прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) расслояема к прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$, 4/ сложные отношения точек, образуемые на прямых A_iA_4 вершинами репера и точками пересечения этих прямых с касательными плоскостями к поверхностям (A_j) и (A_3), равны, 5/ касательные плоскости к поверхностям (A_1), (A_2), (A_3) инцидентны одной прямой

A_3K , где $K=A_1+A_2+2\varphi A_4$; касательные к линии $\omega^1-\omega^2=0$ на поверхностях $(A_1),(A_2),(A_3)$ пересекаются в точке K , поверхность (K) вырождается в линию, 6/поверхности (A_3) и (A_4) -плоские, 7/прямолинейная конгруэнция $(\mathcal{L})$ является конгруэнцией W^* [4].

Доказательство. I/Имеем

$$dE_{12}=(\omega_1^1+\omega_2^1)E_{12}, \tag{4.35}$$

так как

$$d[A_1A_2]=(\omega_1^1+\omega_2^2)[A_1A_2]+\omega_1^3[A_3E_{12}]+\omega_1^4[A_4E_{12}] \tag{4.36}$$

и

$$rang\,(\omega_1^3,\omega_1^4)=2, \tag{4.37}$$

то семейство (A_1A_2)-связка. 2/Характеристика плоскости коники C

$$x^1-x^2-2\varphi x^3=0,\quad x^4=0 \tag{4.38}$$

имеет полюсом относительно коники точку

$$P=A_1-A_2-2\varphi A_3, \tag{4.39}$$

причем P принадлежит конике, Следовательно, коника C касается характеристики в точке P . Так как характеристика проходит через неподвижную точку E_{12} и

$$dP=(\omega_1^1+\omega_1^2-2\varphi\omega_3^1)P, \tag{4.40}$$

то она неподвижна. 3/Условия одностороннего расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$

$$\omega_2^3\wedge\omega^1+\omega_2^4\wedge\omega_4^1=0,$$

$$\omega_1^3\wedge\omega^1+\omega_1^4\wedge\omega_4^1-\omega_2^3\wedge\omega^2-\omega_2^4\wedge\omega_4^2=0, \tag{4.41}$$

$$\omega_1^3\wedge\omega^2+\omega_1^4\wedge\omega_4^2=0,$$

в силу системы (4.34) удовлетворяются тождественно. 4/Имеем

$$dA_i=\omega_i^iA_i+\tfrac{1}{2}[(\omega^j-\omega^i)A_3+(-1)^j(\omega^i+\omega^j)B_i], \tag{4.42}$$

$$dA_3=\omega_3^3A_3+\omega^kC_k, \tag{4.43}$$

где

$$B_i=\varphi A_j-A_4,\quad C_i=A_i+\varphi A_4. \tag{4.44}$$

Утверждение теоремы доказывает равенство

$$(B_1,C_2;A_2,A_4)=(B_2,C_1;A_1A_4)=2 \tag{4.45}$$

5/Справедливость утверждения следует из формул (4.42)-(4.44) и следующих

$$dA_i\big|_{\omega^1-\omega^2=0}=(\ldots)A_i+\frac{(-1)^i}{\varphi}\omega^iK, \tag{4.46}$$

$$dA_3\big|_{\omega^1-\omega^2=0}=\omega_3^3A_3+\omega^1K, \tag{4.47}$$

$$dK=(\omega_1^1+\omega_2^2+2\varphi\omega_4^1)K+(\omega^1+\omega^2)(A_4-A_3-2\varphi A_2). \tag{4.48}$$

6/Имеем

$$dA_4=\omega_4^4A_4+\omega^k\mathfrak{D}_k, \tag{4.49}$$

где

$$\mathfrak{D}_i=(-1)^jA_i+\varphi A_3. \tag{4.50}$$

Так как

$$d\,[A_3 C_1 C_2] = -\omega_3^3 [A_3 C_1 C_2], \qquad (4.51)$$

$$d[A_4 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2] = (2\omega_4^4 - \omega_3^3)[A_4 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2], \qquad (4.52)$$

то поверхности (A_3) и (A_4) являются плоскостями. 7/Фокальные поверхности (F_i) прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ описываются точками

$$F_1 = E_{34}\ , \quad F_2 = E_{34}^{*}\ . \qquad (4.53)$$

Асимптотические линии на этих поверхностях задаются одним и тем же уравнением

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = 0\,, \qquad (4.54)$$

следовательно, прямолинейная конгруэнция $(\mathcal{L})$ является конгруэнцией W. Теорема доказана.

Литература.

I. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. 3, I973, 4I-49.

2. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. "Труды геом. семинара", М., ВИНИТИ АН СССР, I97I, т. 3, I93-220.

3. Похила М.М., Пары многообразий квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. 2, I97I, 43-54.

4. Фиников С.П., Теория конгруэнций, ГИТТЛ, М., I950.

5. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М., I956.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 5 I974

Скрылова Е.В.

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ $(C\mathcal{L})_{2,1}$ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$ пар фигур-коник C и прямых $\mathcal{L}$, в которых семейство (C) коник C является двупараметрическим (конгруэнцией), а семейство $(\mathcal{L})$ прямых $\mathcal{L}$ – однопараметрическим (линейчатой поверхностью) [I].

В конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$ каждой конике C конгруэнции (C) соответствует единственная прямая $\mathcal{L}$ линейчатой поверхности $(\mathcal{L})$, полным прообразом которой является однопараметрическое семейство $(C)_{\mathcal{L}}$ коник C.

Построен геометрически фиксированный репер конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$. Исследованы расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$.

§I. Репер конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$.

Отнесем конгруэнцию $(C\mathcal{L})_{2,1}$ к реперу $R = \{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4)$, в котором вершина A_3 является точкой пересечения плоскости коники C с соответствующей ей прямой $\mathcal{L}$, вершины A_i $(i,j,k = 1,2)$ инцидентны конике C и полярно сопряжены точке A_3 относительно коники C, вершина A_4 расположена на прямой $\mathcal{L}$.

Деривационные формулы репера R имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{1.3}$$

В дальнейшем исключим из рассмотрения случаи, когда : I/точка A_3 описывает прямую $\mathcal{L}$; 2/касательная плоскость к поверхности $(\mathcal{L})$ в точке A_3 инцидентна точкам A_i.

В силу сделанных исключений будем иметь:

$$\omega_3^i \neq 0. \tag{1.4}$$

Так как семейство $(\mathcal{L})$ -линейчатая поверхность, то

$$\operatorname{rang}(\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2) = 1, \tag{1.5}$$

следовательно, можно положить

$$\omega_4^i = b^i \omega_3^1. \tag{1.6}$$

Пронормируем вершины репера R таким образом, чтобы единичная точка E_{12} прямой A_1A_2 была инцидентна касательной плоскости к поверхности $(\mathcal{L})$ в точке A_3. Тогда

$$\omega_3^1 = \omega_3^2. \tag{1.7}$$

Характеристические точки M_j плоскостей $(A_iA_3A_4)$ определяются формулами

$$M_j = -b^j A_3 + A_4. \tag{1.8}$$

В случае, когда

$$\operatorname{rang}(\omega_i^j, \omega_3^j, \omega_4^j) = 1 \tag{1.9}$$

и плоскости $(A_iA_3A_4)$ описывают однопараметрические семейства, через точки M_j проходят характеристики этих плоскостей.

Вершину A_4 репера R поместим в четвертую гармоническую к точке A_3 относительно точек M_j.

Тогда

$$b_1 = -b_2 = b \tag{1.10}$$

Уравнения коники C с учетом соответствующей нормировки вершин и система пфаффовых уравнений конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$ запиш тся соответственно в виде

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered}\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = \lambda^k\omega_k, \quad \omega_3^2 = \omega_3^1, \\ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^i = (-1)^j b\,\omega_3^1, \quad 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = a^k\omega_k, \\ \omega_4^3 = \mu\,\omega_3^1 + b^2\omega_3^4 + b(\omega_1^2 - \omega_2^1), \\ \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_1^2 + \omega_2^1 - 2b\,\omega_3^4 = c\,\omega_3^1,\end{gathered} \tag{1.12}$$

где формы Пфаффа

$$\omega_i^4 = \omega_i \tag{1.13}$$

приняты за базисные.

Анализируя систему (I.I2) заключаем, что конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$ существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.

Зак. 10314.

Т е о р е м а I. Точки пересечения с прямой A_1A_2 касательных плоскостей к поверхности $(\mathfrak{X})$ в точках A_3 и A_4 гармонически делят точки A_1 и A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$dA_3 = \omega_3^3 A_3 + \omega_3^1 E_{12} + \omega_3^4 A_4 ,$$

$$dA_4 = \omega_4^4 A_4 + \omega_4^3 A_3 + \omega_4^1 E_{12}^*$$

где $E_{12}^* = A_1 - A_2$ -четвертая гармоническая точка к E_{12} относительно A_1 и A_2, что и требовалось доказать.

§2. Расслояемые конгруэнции $(C\mathfrak{X})_{2,1}$.

О п р е д е л е н и е I. Расслояемыми конгруэнциями $(C\mathfrak{X})_{2,1}$ называются конгруэнции $(C\mathfrak{X})_{2,1}$ с расслоением от конгруэнции (C) коник C к линейчатой поверхности $(\mathfrak{X})$ (см. [2], [3]).

Т е о р е м а 2. Существуют два класса расслояемых конгруэнций $(C\mathfrak{X})_{2,1}$ -конгруэнции $(C\mathfrak{X})^1_{2,1}$ определяемые с произволом десяти функций одного аргумента, и конгруэнции $(C\mathfrak{X})^2_{2,1}$, определяемые с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для расслояемых конгруэнций $(C\mathfrak{X})_{2,1}$ имеют место следующие аналитические условия:

$$\omega_3^i \wedge \omega_i^j = 0 , \tag{2.1}$$

$$\omega_i^3 \wedge \omega_3^j + \omega_i \wedge \omega_4^j = 0 , \tag{2.2}$$

$$(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge \omega_3^i + 2\,\omega_3^4 \wedge \omega_4^i = 0 , \tag{2.3}$$

$$(\omega_1^3 - \omega_2^3) \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0 . \tag{2.4}$$

Из уравнений (2.3) получим

$$(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge \omega_3^1 = 0 , \tag{2.5}$$

$$\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 = 0 . \tag{2.6}$$

Равенство (2.6) приводит к следующему конечному соотношению

$$b(\Gamma_3^{41} \lambda^2 - \Gamma_3^{42} \lambda^1) = 0 . \tag{2.7}$$

Рассмотрим сначала расслояемые конгруэнции $(C\mathfrak{X})_{2,1}$ назовем их конгруэнциями $(C\mathfrak{X})^1_{2,1}$ для которых

$$b \neq 0 . \tag{2.8}$$

Из (2.I), (2.5), (2.6) для конгруэнций $(C\mathfrak{X})^1_{2,1}$ будем иметь

$$\omega_i^j = \Gamma_i^j \omega_3^1 , \tag{2.9}$$

$$2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = a\,\omega_3^1 , \tag{2.10}$$

$$\omega_3^4 = \Gamma_3^4 \omega_3^1 . \tag{2.11}$$

Уравнения (2.2) дают

$$(\omega_1^3 - \omega_2^3) \wedge \omega_3^1 - (\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_4^1 = 0 , \tag{2.12}$$

откуда, с учетом (2.4) получим

$$\omega_3^1 = \lambda\,(\omega_1 + \omega_2) , \tag{2.13}$$

$$(\omega_1^3 - \omega_2^3) \wedge \omega_3^1 = 0 . \tag{2.14}$$

Равенства (2.2) и (2.I4) приводят к конечным соотношениям

$$\Gamma^{31}_1 - \Gamma^{32}_1 - b = 0, \qquad (2.15)$$

$$\Gamma^{31}_1 + \Gamma^{32}_2 - \Gamma^{32}_1 - \Gamma^{31}_2 = 0. \qquad (2.16)$$

Пфаффова система уравнений конгруэнций $(C\mathcal{X})^1_{2,1}$ с учетом последних соотношений записывается в виде:

$$\omega^j_i = \Gamma^j_i \omega^1_3, \quad \omega^3_i = \Gamma^3_i \omega^1_3 - b\omega_i, \quad \omega^i_3 = \lambda(\omega_1 + \omega_2),$$

$$\omega^4_3 = \Gamma^4_3 \omega^1_3, \quad \omega^1_4 = b\omega^1_3, \quad \omega^2_4 = -\omega^1_4, \quad \omega^3_4 = \Gamma^3_4 \omega^1_3, \qquad (2.17)$$

$$2\omega^3_3 - \omega^1_1 - \omega^2_2 = a\omega^1_3, \quad \omega^1_1 - \omega^2_2 = f\omega^1_3.$$

Конгруэнции $(C\mathcal{X})^1_{2,1}$ определяются системой (2.17) и её замыканием с произволом десяти функций одного аргумента.

Расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{X})_{2,1}$, для которых

$$b = 0, \qquad (2.18)$$

назовем конгруэнциями $(C\mathcal{X})^2_{2,1}$.

Условия расслоения от конгруэнции (C) коник C к линейчатой поверхности $(\mathcal{X})$ для конгруэнций $(C\mathcal{X})^2_{2,1}$ принимают вид:

$$\omega^i_3 \wedge \omega^j_i = 0, \quad \omega^3_i \wedge \omega^j_3 = 0,$$
$$(2\omega^3_3 - \omega^1_1 - \omega^2_2) \wedge \omega^1_3 = 0. \qquad (2.19)$$

Таким образом конгруэнции $(C\mathcal{X})^2_{2,1}$ определяются системой уравнений Пфаффа

$$\omega^j_i = \Gamma^j_i \omega^1_3, \quad \omega^3_i = \Gamma^3_i \omega^1_3, \quad \omega^1_3 = \lambda^k \omega_k,$$

$$\omega^2_3 = \omega^1_3, \quad \omega^4_3 = \Gamma^{4k}_3 \omega_k, \quad \omega^1_4 = 0, \quad \omega^2_4 = 0,$$
$$\omega^3_4 = \Gamma^3_4 \omega^1_3, \quad 2\omega^3_3 - \omega^1_1 - \omega^2_2 = a\omega^1_3, \quad \omega^1_1 - \omega^2_2 = f\omega^1_3 \qquad (2.20)$$

Анализируя эту систему, убеждаемся, что конгруэнции $(C\mathcal{X})^2_{2,1}$ определяются с произволом двух функций двух аргументов.

§3. Геометрические свойства расслояемых конгруэнций $(C\mathcal{X})_{2,1}$.

Т е о р е м а 3. Конгруэнции $(C\mathcal{X})^1_{2,1}$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/точки A_3 и A_4 описывают кривые линии на поверхности $(\mathcal{X})$, 2/плоскости $(A_i A_3 A_4)$ образуют однопараметрические семейства, 3/прямолинейные конгруэнции $(A_i A_3), (A_i A_4)$ имеют по одному семейству соответствующих торсов, 4/характеристическая точка плоскости коники C инцидентна касательной плоскости поверхности $(\mathcal{X})$ в точке A_3, характеристическая точка грани $(A_1 A_2 A_4)$ принадлежит касательной плоскости к поверхности $(\mathcal{X})$ в точке A_4, 5/касательная плоскость к поверхности $(\mathcal{X})$ в точке A_3 пересекает плоскость коники C по характеристике однопараметрического семейства плоскостей, соответствующего семейству $(C)_{\mathcal{X}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Имеем

$$dA_3 = \omega^3_3 A_3 + (A_1 + A_2 + \Gamma^4_3 A_4)\omega^1_3, \qquad (3.1)$$

$$dA_4 = \omega^4_4 A_4 + [b(A_1 - A_2) + \Gamma^3_4 A_3]\omega^1_3. \qquad (3.2)$$

2/Так как

$$d[A_iA_3A_4] = (\omega_i^i + \omega_3^3 + \omega_4^4)[A_iA_3A_4] + \tag{3.3}$$
$$+ \{\Gamma_i^j (A_jA_3A_4) + [A_iA_jA_4] + (-1)^j b[A_iA_3A_j]\},$$

то семейства плоскостей $(A_iA_3A_4)$ -однопараметрические.
3/Торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_3), (A_iA_4) определяются соответственно уравнениями

$$\omega_3^1 (\Gamma_i^j \omega_3^4 - \omega_i) = 0, \tag{3.4}$$

$$\omega_3^1 (\Gamma_i^j \omega_3^4 + (-1)^j b\,\omega_i^3) = 0, \tag{3.5}$$

откуда следует утверждение теоремы.
4/Характеристические точки M_4, M_3 соответственно плоскостей $(A_1A_2A_3)$ и $(A_1A_2A_4)$ определяются формулами

$$M_4 = \Gamma_3^4 \lambda (A_1 + A_2) - A_3, \tag{3.6}$$

$$M_3 = \Gamma_4^3 \lambda b (A_1 - A_2) + b\lambda (\Gamma_2^3 - \Gamma_1^3) A_4. \tag{3.7}$$

Имея ввиду (3.I),(3.2), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. 5/Характеристика плоскости коники C семейства $(C)_\chi$ определяется уравнениями

$$x^1 - x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{3.8}$$

т.е.совпадает с прямой $E_{12}A_3$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 4. Конгруэнции $(C\mathcal{I})^2_{2,1}$ обладают следующими геометрическими свойствами: I/касательные плоскости к поверхностям (A_i) проходят через точку A_4; 2/плоскости

$(A_iA_3A_4)$, $(A_1A_2A_4)$ описывают однопараметрические семейства, причем характеристики плоскостей $(A_iA_3A_4)$ пересекаются в точке A_4, 3)прямолинейные конгруэнции (A_iA_4), $(E_{12}A_4)$, $(E^*_{12}A_4)$ вырождаются в линейчатые поверхности, 4/все коники C семейства $(C)_\chi$ инцидентны инвариантной квадрике.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Справедливость утверждения следует из формулы

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_3^1 [\Gamma_i^j A_j + \Gamma_i^3 A_3] + \omega_i A_4. \tag{3.9}$$

2/Имеем

$$d(A_iA_3A_4) = -\omega_j^j (A_iA_3A_4) + [\Gamma_i^j (A_jA_3A_4) + (A_iA_jA_4)], \tag{3.10}$$

$$d(A_1A_2A_4) = -\omega_3^3 (A_1A_2A_4) + \omega_3^1 [\Gamma_1^3 (A_3A_2A_4) +$$
$$+ \Gamma_2^3 (A_1A_3A_4) + \Gamma_4^3 (A_1A_2A_3), \tag{3.11}$$

следовательно, плоскости $(A_iA_3A_4)$, $(A_1A_2A_4)$ образуют однопараметрические семейства.
Характеристика плоскости $(A_iA_3A_4)$ задается уравнениями

$$x^i \Gamma_i^j + x^3 = 0, \quad x^j = 0, \tag{3.12}$$

т.е.проходит через точку A_4.
3/Так как

$$\operatorname{rang} (\omega_i^j, \omega_i^3, \omega_4^j, \omega_4^3) = 1,$$
$$\operatorname{rang} (\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_1^2 + \omega_2^1, \omega_1^3 + \omega_2^3, \omega_4^1, \omega_4^3) = 1,$$
$$\operatorname{rang} (\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_1^2 - \omega_2^1, \omega_1^3 - \omega_2^3, \omega_4^3) = 1, \tag{3.13}$$

то семейства $(A_i A_4)$, $(E_{12} A_4)$, $(E^{\kappa}_{12} A_4)$ являются линейчатыми поверхностями.

4/Все коники C принадлежат конусу

$$Q = (x^3)^2 - 2x^1 x^2 = 0 \qquad (3.14)$$

Дифференцируя уравнение (3.14) с помощью уравнений стационарности точки

$$dx^{\alpha} = -x^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta} + \theta x^{\alpha}, \quad (\mathcal{D}\theta = 0), \qquad (3.15)$$

получим

$$dQ \equiv 2(\theta - \omega^3_3) Q \pmod{\omega^1_3}, \qquad (3.16)$$

то есть при фиксированной прямой $\mathcal{L}$ конус Q инвариантен. Что и требовалось доказать.

§4. Конгруэнции K.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнциями K называются конгруэнции $(C\mathcal{L})^2_{2,1}$, у которых точка A_4 неподвижна.

Система пфаффовых уравнений конгруэнций K имеет вид (2.20), где

$$\Gamma^3_4 = 0. \qquad (4.1)$$

Конгруэнции K существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Линейчатая поверхность $(\mathcal{L})$ конгруэнций K является конусом с вершиной в точке A_4.

Т е о р е м а 5. Конгруэнция (C) коник C расслояема к линейчатым поверхностям $(A_i A_4)$, $(E_{12} A_4)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия расслоения от конгруэнции (C) коник C к линейчатым поверхностям

$(A_i A_4)$, $(E_{12} A_4)$ записываются в виде:

$$(2\omega^j_3 - \omega^3_i)\wedge\omega^j_i = 0, \quad \omega^i_j\wedge\omega^3_i + \omega_j\wedge\omega^3_4 = 0,$$

$$(\omega^i_i + \omega^j_j - 2\omega^3_3)\wedge\omega^j_i + \omega^3_i\wedge\omega^j_3 + \omega_i\wedge\omega^j_4 = 0,$$

$$\omega^3_i\wedge(2\omega^3_3 - \omega^1_1 - \omega^2_2) + 2\omega^3_j\wedge\omega^j_i - 2\omega^i_3\wedge\omega^j_i - \qquad (4.2)$$

$$-2\omega^4_3\wedge\omega^j_4 + \omega_i\wedge\omega^3_4 = 0,$$

$$\omega^3_j\wedge\omega^3_i + \omega^i_j\wedge\omega^j_i + \omega^3_i\wedge\omega^i_3 + \omega_j\wedge\omega^j_4 - \omega^4_3\wedge\omega^3_4 = 0,$$

$$\omega^j_i\wedge(\omega^3_i + \omega^3_j) + \omega_i\wedge\omega^3_4 = 0,$$

$$(\omega^3_i + \omega^3_j)\wedge(2\omega^3_3 - \omega^i_i - \omega^j_j + \omega^j_i + \omega^i_j) + (\omega^i_i - \omega^j_j + \omega^i_j - \omega^j_i)\wedge\omega^3_j = 0,$$

$$2\omega^1_3\wedge(\omega^3_1 + \omega^3_2) + 2\omega^4_3\wedge\omega^3_4 + 2\omega^1_4\wedge(\omega_1 - \omega_2) + (\omega^1_1 - \omega^2_2)\wedge(\omega^2_1 - \omega^1_2) = 0,$$

$$2\omega^3_1\wedge\omega^3_2 + 2(\omega_1 + \omega_2)\wedge\omega^1_4 + (\omega^2_1 + \omega^1_2)\wedge(\omega^1_1 - \omega^2_2 + \omega^1_2 - \omega^2_1) = 0,$$

$$-2\omega^3_1\wedge\omega^3_2 + \frac{1}{2}(\omega^1_1 - \omega^2_2 - \omega^2_1 + \omega^1_2)\wedge(2\omega^3_3 - \omega^1_1 - \omega^2_2 + \omega^2_1 + \omega^1_2) = 0.$$

Равенства (4.2), (4.3) в силу системы (2.20), (4.1) удовлетворяются тождественно, следовательно, расслоения имеют место. Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

1. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 41-49.

2. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. "Труды геом.семинара", М., ВИНИТИ АН СССР, 1971, т.3, 193-220

3. Похила М.М., Пары многообразий квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2, 1971, 43-54.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Т к а ч Г.П.

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛОЙ И ТОЧКОЙ.

§I. Расслояемые пары T .

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассмотрим двупараметрическое семейство пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 - парабола, а $F_2 \equiv B$ -точка не инцидентная плоскости параболы. Назовем такое многообразие парой T .

Из рассмотрения исключается случай, когда касательная плоскость α_B к поверхности (B) касается параболы F_1 или параллельна плоскости параболы.

Отнесем пару T к каноническому реперу $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ Вершина A репера выбирается в такой точке параболы F_1, в которой касательная ℓ' к параболе параллельна прямой m, линии пересечения плоскости α_B с плоскостью параболы, $\bar e_3 = \overline{AB}$, вектор $\bar e_1$ направлен по диаметру параболы, причем конец его M_0 лежит на линии m , вектор $\bar e_2$ направлен по касательной к параболе в точке A .

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA=\omega^{\alpha}e_{\alpha},\quad d\bar{e}_{\alpha}=\omega_{\alpha}^{\beta}\,\bar{e}_{\beta},\quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^{α}, ω_{α}^{β} удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha}=\omega^{\beta}\wedge\omega_{\beta}^{\alpha},\quad \mathcal{D}\omega_{\alpha}^{\beta}=\omega_{\alpha}^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}^{\beta} \tag{1.2}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \tag{1.3}$$

Исключая из рассмотрения случай, когда в расширенном аффинном пространстве число параметров, от которых зависят несобственные прямые плоскостей парабол понижается, т.е. становится меньше двух, примем формы Пфаффа

$$\omega_i=\omega_i^3$$

за независимые первичные формы пары T.

Уравнения параболы и система уравнений Пфаффа относительно канонического репера R примут вид:

$$(x^2)^2-2px^1=0,\ x^3=0, \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}\omega^{\alpha}=\Gamma^{\alpha k}\omega_k,\quad \omega_j^i=\Gamma_j^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\\ \omega_1^1=\Gamma_1^{1k}\omega_k,\quad d\ln p-\omega_1^1+2\omega_2^2=\Gamma^k\omega_k,\\ \omega^1+\omega^3+\omega_3^1+\omega_3^3=0,\quad (i,j,k=1,2).\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по этим индексам суммирование не производится.

Анализируя систему (I.5), находим, что пара T существует и определяется с произволом восьми функций двух аргументов.

Определение I. Расслояемой парой T называется пара T, обладающая следующими свойствами: I/ прямолинейные конгруэнции (ℓ') и (BM_0) образуют двусторонне расслояемую пару, 2/ существуют односторонние аффинные расслоения от конгруэнции (F_1) и прямолинейной конгруэнции (AB) к конгруэнции (α_B)[I].

Теорема I. Расслояемая пара T существует и определяется с произволом четырех функций одного аргумента.

Доказательство. Для расслояемой пары T выполняются условия:

$$\omega^1+\omega^3=0,\quad \omega_2^1=0. \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}(d\ln p-\omega_1^1+2\omega_2^2-\omega_1+2\vartheta)\wedge\omega_2=0,\\ \omega^1\wedge\vartheta+\omega^2\wedge\omega_2=0,\quad \omega_1\wedge\vartheta-\omega_1^2\wedge\omega_2=0,\\ (2\omega^1+\omega_3^1)\wedge\vartheta=0,\quad (2\omega^2+\omega_3^2)\wedge\omega_2=0,\\ (\omega_1^2-\omega_3^2)\wedge\omega_2=0,\quad (\omega_1^2-\omega_3^2)\wedge\omega^1=0,\end{gathered} \tag{1.7}$$

где

$$\vartheta=\omega_1+\omega_1^1.$$

Из последних двух уравнений системы (I.7) получаем конечные соотношения

$$\Gamma_1^{21}-\Gamma_3^{21}=0, \tag{1.8}$$

$$\Gamma^{11}(\Gamma_1^{22}-\Gamma_3^{22})=0. \tag{1.9}$$

Так как прямые ℓ' расслояемой пары T образуют конгруэнцию, то ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} \Gamma^{11} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma^{12} & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1.10}$$

равен двум, следовательно,

$$\Gamma^{11}\neq 0. \tag{1.11}$$

Соотношение (I.9) приводится к виду .

$$\Gamma_1^{22}-\Gamma_3^{22}=0. \tag{1.12}$$

ИЗ (I.8) и (I.12) имеем

$$\omega_1^2-\omega_3^2=0. \tag{1.13}$$

Замыкание уравнения (I.I3) дает квадратичное уравнение

$$\omega_3^2\wedge\vartheta=0. \tag{1.14}$$

Присоединяя (I.I4) к системе (I.7) и преобразуя её, получаем

$$\begin{gathered} \Gamma^1=-(1+2\Gamma_1^{11}), \quad 2\Gamma^{21}=-\Gamma_3^{21}, \\ \Gamma_1^{12}=\Gamma_1^{21}=\Gamma_3^{21}, \quad \Gamma_3^1=\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11}), \\ (1+\Gamma_1^{11})\left[2\Gamma^{12}+\Gamma_3^{12}(1-2\Gamma^{11})\right]=0, \\ (1+\Gamma_1^{11})\left[\Gamma_3^{22}-(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma_1^{11})\right]=0. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Рассмотрим случай

$$1+\Gamma_1^{11}=0.$$

Тогда

$$\vartheta=0,$$

а это противоречит тому, что многообразие плоскостей α_B должно быть двумерным. Следовательно,

$$1+\Gamma_1^{11}\neq 0. \tag{1.16}$$

Из (I.I5) имеем:

$$\begin{gathered} \Gamma^{12}=\tfrac{1}{2}\Gamma_3^{12}(2\Gamma^{11}-1), \\ \Gamma_3^{22}=(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma_1^{11}). \end{gathered} \tag{1.17}$$

Продолжая систему уравнений

$$\omega_3^1=\Gamma_3^{12}\omega_2, \quad \omega_3^2=\Gamma_3^{12}\vartheta,$$

получим

$$d\Gamma_3^{12}=0.$$

Следовательно

$$\Gamma_3^{12}=\mathrm{Const}.$$

Замкнутая система уравнений, определяющая расслояемую пару T запишется в виде:

$$\omega^1+\omega^3=0,\quad \omega_3^1+\omega_3^3=0,\quad \omega_2^1=0,\quad \omega_1^2-\omega_3^2=0,$$

$$\omega_3^1=\Gamma_3^{12}\omega_2,\quad \omega_3^2=\Gamma_3^{12}\vartheta,\quad \omega_2^2=-\Gamma_1^{11}(\omega_1+\omega_3^1),$$

$$\omega^1=\Gamma^{11}(\omega_1+\omega_3^1)-\tfrac{1}{2}\omega_3^1,\quad \omega^2=-\tfrac{1}{2}(1+\Gamma_1^{11})\Gamma_3^{12}\omega_1+\Gamma^{22}\omega_2, \tag{1.18}$$

$$d\ln p-\omega_1^1+2\omega_2^2=-(1+2\Gamma_1^{11})\omega_1+\Gamma^2\omega_2,\quad d\Gamma_3^{12}=0,$$

$$d\Gamma_1^{11}\wedge(\omega_1+\omega_3^1)-\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11})\,\omega_1\wedge\omega_2=0,$$

$$d\Gamma^{11}\wedge(\omega_1+\omega_3^1)-\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11})\Gamma^{11}\,\omega_1\wedge\omega_2=0, \tag{1.19}$$

$$d\Gamma^{22}\wedge\omega_2-\left[2\Gamma^{22}\Gamma_1^{11}-\tfrac{1}{2}(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma_1^{11})\right]\omega_1\wedge\omega_2=0,$$

$$d\Gamma^2\wedge\omega_2-2d\Gamma_1^{11}\wedge\omega_1+\left[4\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11})-\Gamma^2\Gamma_1^{11}\right]\omega_1\wedge\omega_2=0.$$

Система (I.18),(I.19) – в инволюции и определяет решение с произволом четырех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 2. Расслояемые пары T обладают следующими свойствами: I/точка A является фокальной точкой параболы F_1, 2/конгруэнция (BM_0)-цилиндрическая. Касательные на поверхности (C) (где C -середина отрезка AB) к линиям, соответствующим линиям тени на поверхности (B), параллельны вектору $\bar{e}_2$, 3/координатные линии $\omega_2=0$ соответствуют одному семейству торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ'), 4/существует одностороннее аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (AM_0) к конгруэнции (α_B).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Система уравнений для определения фокальных точек параболы F_1 конгруэнции (F_1) приводится к виду

$$(x^2)^2-2px^1=0,\quad x^3=0,$$

$$x^2\Big\{(x^2)^4(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma_1^{11})+(x^2)^3p\left[\Gamma^2-2\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11})+\right.$$

$$\left.+(x^2)^2 2p\left[\Gamma^{22}+p(1+2\Gamma_1^{11})+\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11})(2-\Gamma^{11})-\tfrac{1}{2}\Gamma_3^{12}\Gamma_1^{11}(2\Gamma^{11}-1)\right]-\right. \tag{1.20}$$

$$-x^2 2p^2\left[\Gamma^{11}\Gamma^2+\tfrac{1}{2}(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma_1^{11})\right]+4p^2\left[\Gamma^{11}(p-\Gamma^{22})-(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma^{11})(2\Gamma^{11}-1)\right]\Big\}=0.$$

откуда непосредственно следует, что точка A -фокальная.

2/Имеем:

$$d(\bar{e}_1-\bar{e}_3)=(\omega_1+\omega_3^1)(\Gamma_1^{11}\bar{e}_1+\bar{e}_3).$$

$$dC=\Gamma^{11}(\omega_1+\omega_3^1)(\bar{e}_1-\bar{e}_3)+(\omega^2+\tfrac{1}{2}\omega_3^2)\bar{e}_2.$$

Отсюда следует, что торсы $\omega_1+\omega_3^1=0$ прямолинейной конгруэнции (BM_0) являются цилиндрическими поверхностями и что касательные к линиям $\omega_1+\omega_3^1=0$ на поверхности (C), соответствующим линиям тени поверхности (B), параллельны вектору $\bar{e}_2$.

Данное утверждение следует из рассмотрения уравнения торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ'):

$$\omega^1\omega_2=0.$$

4/Условия одностороннего аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции (AM_0) к конгруэнции (α_B) приводятся к виду:

$$\omega_1 \wedge \vartheta - \omega_1^2 \wedge \omega_2 = 0,$$

$$\omega^1 \wedge \vartheta + \omega^2 \wedge \omega_2 = 0. \qquad (1.21)$$

Квадратичные уравнения (I.2I) полностью содержатся в системе (I.7). Теорема доказана.

§2. Пары T^*.

Определение 2. Парой T^* называется расслояемая пара T, у которой поверхность (M_0) является огибающей плоскостей парабол F_1 и линии $\omega_1 \pm \omega_2 = 0$ асимптотические линии поверхности (A).

Теорема 3. Пара T^* существует и определяется с произволом одной функции одного аргумента.

Доказательство. Пара T^* определяется системой уравнений (I.I8), (I.I9) и условиями

$$\omega^3 + \omega_1 = 0, \qquad (2.1)$$

$$1 + \Gamma_1^{11} + \Gamma^{22} = 0. \qquad (2.2)$$

Учитывая (2.I) и (2.2) в системе уравнений (I.I8), (I.I9) запишем замкнутую систему дифференциальных уравнений пары T^*:

$$\omega^1 + \omega^3 = 0, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_j^i = 0, \quad \omega_3^i = 0,$$
$$\omega^1 = \omega_1, \quad \omega^2 = -(1+a)\,\omega_2, \quad \omega_1^1 = a\,\omega_1, \qquad (2.3)$$
$$d\ln p - 3\omega_1^1 = -(1+2a)\,\omega_1 + \Gamma^2\omega_2, \quad \tfrac{1}{2}\, d\ln a = \vartheta,$$

$$d\Gamma^2 \wedge \omega_2 - a\,\Gamma^2 \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \qquad (2.4)$$

где

$$a = \Gamma_1^{11}.$$

Из (2.3) и (2.4) непосредственно следует, что произвол существования пары T^* – одна функция одного аргумента.

Теорема 4. Пары T^* обладают следующими свойствами: I/координатная сеть на поверхности (M_0)-сопряжена, 2/асимптотические линии на поверхностях (A), (B) и (M_0) соответствуют, 3/существуют только четыре фокальные точки параболы F_1 конгруэнции (F_1), 4/прямая AB является общей аффинной нормалью поверхностей (A) и (B), 5/аффинная нормаль поверхности (M_0) лежит в координатной плоскости $x^2 = 0$, 6/аффинные нормали поверхностей (A) и (M_0) пересекаются в точке $\bar{N} = \bar{A} - \frac{1}{a}\bar{e}_3$, координатная сеть на поверхности (N) -сопряжена, 7/конгруэнция аффинных нормалей поверхности (M_0)-цилиндрическая, причем собственный фокус луча этой конгруэнции является серединой отрезка NM_0, 8/поверхности (A) и (B) -инвариантные квадрики.

Доказательство. I/-2/ утверждения теоремы непосредственно следуют из рассмотрения уравнения

$$(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2 = 0, \qquad (2.5)$$

которое определяет асимптотические линии на поверхностях (A), (B) и (M_0).

3/Уравнения (I.20), определяющие фокальные точки параболы

F_1, пары T^κ примут вид:

$$(x^2)^2 - 2px^1 = 0, \quad x^3 = 0,$$

$$x^2\{(x^2)^3 p\Gamma^2 + 2p(x^2)^2[p(1+2a) - (1+a)] + 4p^3\} = 0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Следствие. В расширенном аффинном пространстве несобственная точка параболы F_1 является сдвоенной фокальной точкой.

4/ Вектор аффинной нормали поверхности (A)

$$\bar{\ell} = \{0,0,1\}$$

совпадает с вектором аффинной нормали поверхности (B), то есть, прямая AB -общая аффинная нормаль этих поверхностей.

5/-6/ Уравнения аффинных нормалей поверхностей (A) и (M_0) запишутся в виде

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0,$$

$$x^1 - ax^3 - 1 = 0, \quad x^2 = 0.$$

Точка пересечения этих аффинных нормалей определяется формулой:

$$\bar{N} = \bar{A} - \frac{1}{a}\bar{e}_3 \tag{2.6}$$

Уравнение асимптотических линий поверхности (N) имеет вид:

$$\frac{4+a}{a}(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 = 0,$$

откуда следует, что координатная сеть линий на поверхности (N) -сопряжена.

7/ Уравнения для определения фокусов

$$\bar{F} = \bar{M}_0 + \lambda(a\bar{e}_1 + \bar{e}_3) \tag{2.7}$$

и торсов конгруэнции аффинных нормалей поверхности (M_0) соответственно примут вид:

$$2a\lambda + 1 = 0, \tag{2.8}$$

$$a\omega_1\omega_2 = 0. \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) следует, что конгруэнция аффинных нормалей-цилиндрическая, т.е. одно семейство её торсов состоит из цилиндров.

Середина K отрезка M_0N определяется формулой:

$$\bar{K} = \bar{A} + \frac{1}{2}\bar{e}_1 - \frac{1}{2a}\bar{e}_3.$$

Из (2.7) и (2.8) находим, что K -собственный фокус луча конгруэнции (M_0N) аффинных нормалей поверхности (M_0).

8/ Асимптотические линии поверхности (A) определяются уравнением (2.5), векторы

$$\bar{E}_i = \bar{e}_1 - \bar{e}_3 + (-1)^i(1+a)\bar{e}_2 \quad - \tag{2.10}$$

- векторы касательных к этим линиям.

Имеем

$$d\bar{E}_1 = a\omega_1\bar{e}_1 - a(1+a)\omega_1\bar{e}_2 + [\omega_1 + (1+a)\omega_2]\bar{e}_3$$

Следовательно,

$$(d\bar{E}_1)_{\omega_1 - \omega_2 = 0} = a\omega_1\bar{E}_1,$$

значит линии $\omega_1 - \omega_2 = 0$ -прямые.

Аналогично, для вектора касательной $\bar{E}_2$ к линии $\omega_1 + \omega_2 = 0$, имеем

$$(d\bar{E}_2)_{\omega_1+\omega_2=0} = a\omega_1 \bar{E}_2 .$$

Так как поверхность (A) имеет две серии прямолинейных образующих, то она является квадрикой. Её уравнение имеет вид:

$$Q_A \equiv 2(1+a)(x^1+x^3) - (1+a)^2(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0. \qquad (2.11)$$

Учитывая уравнения стационарности

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha - \omega^\alpha$$

точки аффинного пространства, убеждаемся, что

$$dQ_A = 2a\omega_1 Q_A .$$

Следовательно, Q_A -инвариантная квадрика.

Аналогично доказываем, что поверхность (B) -квадрика. Её уравнение имеет вид:

$$Q_B \equiv 2(1+a)(x^1+x^3-1) - (1+a)^2(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0 . \quad (2.12)$$

Так как

$$dQ_B = 2a\omega_1 Q_B ,$$

то квадрика (2.I2)-инвариантна.

Литература

I. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.

"Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Калининград, I973, вып.3, с.I43-I52.

2. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., I956,

3. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. (Тр. Калининградского ун-та), I97I, 2, 5-I9.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Феденко А.С.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП СЕРИИ A.

Однородное пространство G/H мы называем периодическим порядка k, если существует такой автоморфизм Φ группы Ли G, что: 1/ $\Phi^k = id$, 2/ H содержится в подгруппе G^Φ всех Φ-неподвижных точек и содержит компоненту единицы группы G^Φ. В работе [I] дана локальная классификация периодических однородных пространств, основными группами которых являются классические компактные группы, а также некоторые некомпактные классические группы. В настоящей статье завершается локальная классификация периодических однородных пространств с классическими основными группами серии A. Как и в [I], мы будем пользоваться следующей теоремой:

Конечная группа автоморфизмов связной группы Ли оставляет инвариантной некоторую максимальную компактную подгруппу.

Группа $SU(p,q)$.

Эта группа состоит из комплексных матриц порядка $p+q$ с единичным определителем, оставляющих инвариантной эрмитову форму

$$-z^1\bar z^1 - \dots - z^p \bar z^p + z^{p+1}\bar z^{p+1} + \dots \mp z^{p+q}\bar z^{p+q}.$$

Алгебра Ли $su(p,q)$ группы $SU(p,q)$ состоит из матриц

$$B = \begin{bmatrix} M_1 & M_3 \\ \bar M_3^t & M_2 \end{bmatrix},$$

где M_1, M_2 – косоэрмитовы матрицы порядков p и q, M_3 – произвольная $p\times q$ матрица, $tr M_1 + tr M_2 = 0$. Максимальная компактная подгруппа K группы $SU(p,q)$ состоит из матриц (L_1, L_2), где L_1 и L_2 есть унитарные матрицы порядков p и q.

В силу указанной выше теоремы, достаточно рассмотреть лишь те автоморфизмы группы $SU(p,q)$, которые являются продолжениями автоморфизмов группы K. В свою очередь, автоморфизмы группы K описываются с помощью результатов работы [I].

Рассмотрим автоморфизм

$$\Phi : A \longmapsto TAT^{-1} \tag{1}$$

группы K, порождаемой матрицей

$$T = (\varepsilon_1 E_{n_1}, \dots, \varepsilon_s E_{n_s}, \varepsilon_{s+1} E_{n_{s+1}}, \dots, \varepsilon_r E_{n_r}),$$

где E_{n_i} – единичная матрица порядка n_i и $|\varepsilon_i| = 1$. Этот автоморфизм распространяется на группу $SU(p,q)$, причем группа $SU(p,q)^\Phi$ изоморфна группе

$$S(U(p_1,q_1)\times\ldots\times U(p_\ell,q_\ell)).$$

Исследуем автоморфизм

$$\Phi:\ A\longmapsto T\bar{A}T^{-1} \tag{2}$$

группы K, порождаемой матрицей

$$T=(P_1,\ldots,P_\tau,E_{n_1},Q_1,P_{\tau+1},\ldots,P_s,E_{n_2},Q_2), \tag{3}$$

где

$$Q_1=\begin{bmatrix}0 & E_{\kappa_1}\\ -E_{\kappa_1} & 0\end{bmatrix},\quad Q_2=\begin{bmatrix}0 & -E_{\kappa_2}\\ E_{\kappa_2} & 0\end{bmatrix},\quad P_i=\begin{bmatrix}0 & E_{m_i}\\ \varepsilon_i E_{m_i} & 0\end{bmatrix}.$$

$|\varepsilon_i|=1$, среди $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\tau$ нет комплексно сопряженных, также как и среди $\varepsilon_{\tau+1},\ldots,\varepsilon_s$. Этот автоморфизм распространяется на всю группу $SU(p,q)$. Найдем подгруппу $SU(p,q)^\Phi$ и соответствующую ей подалгебру $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{su}(p,q)$. Матрицы B алгебры $\mathfrak{h}$ являются решениями уравнения

$$BT=T\bar{B}. \tag{4}$$

Разобьем матрицу B на клетки в соответствии с разложением (3) матрицы T: $B=(B_{ij})$. Тогда из уравнения (4) получим, что $B_{\tau+1,\tau+1}$ и $B_{s+3,s+3}$ -вещественные кососимметрические матрицы, $B_{\tau+1,s+3}$ -произвольная вещественная матрица и $B_{s+3,\tau+1}=B^t_{\tau+1,s+3}$. Как известно [2], матрицы

$$\begin{bmatrix}B_{\tau+1,\tau+1} & B_{\tau+1,s+3}\\ B_{s+3,\tau+1} & B_{s+3,s+3}\end{bmatrix}.$$

образуют алгебру Ли $\mathfrak{so}(p_1,q_1)$. Рассмотрим матрицы

$$T=\begin{bmatrix}0 & E_{\kappa_1} & 0 & 0\\ -E_{\kappa_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -E_{\kappa_2}\\ 0 & 0 & E_{\kappa_2} & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}B_{\tau+2,\tau+2} & B_{\tau+2,s+4}\\ B_{s+4,\tau+2} & B_{s+4,s+4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34}\\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44}\end{bmatrix} \tag{5}$$

Из уравнения (4) следует, что матрица (5) подобна матрице

$$\begin{bmatrix}M_{11} & M_{13} & M_{12} & M_{14}\\ \bar{M}^t_{13} & M_{33} & M^t_{14} & M_{34}\\ -\bar{M}_{12} & \bar{M}_{14} & \bar{M}_{11} & -\bar{M}_{13}\\ \bar{M}^t_{14} & -\bar{M}_{34} & -\bar{M}^t_{13} & \bar{M}_{33}\end{bmatrix} \tag{6}$$

где матрицы M_{11} и M_{33} косоэрмитовы, M_{12} и M_{34}-симметрические M_{13} и M_{14} -произвольные. Как известно [2], матрицы (6) образуют алгебру Ли $\mathfrak{sp}(p_2,q_2)$.

Если одно из чисел $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\tau$ равно какому-либо из чисел $\varepsilon_{r+1},\dots,\varepsilon_s$, например, $\varepsilon_1=\varepsilon_{r+1}$, то

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{1,r+3} \\ B_{r+3,1} & B_{r+3,r+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & L_{13} & 0 \\ 0 & \bar{L}_{11} & 0 & \bar{L}_{13} \\ \bar{L}_{13}^{t} & 0 & L_{33} & 0 \\ 0 & L_{13} & 0 & \bar{L}_{33} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

где L_{11}, L_{33} -косоэрмитовы матрицы, а L_{13} -произвольная комплексная матрица. Известно [2], что алгебра Ли матриц (7) изоморфна $\mathfrak{u}(p_3,q_3)$. Предположим теперь, что среди $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r$ есть число, комплексно сопряженное с каким-либо из чисел $\varepsilon_{r+1},\dots,\varepsilon_s$, например, $\varepsilon_s=\bar{\varepsilon}_r$. Тогда

$$\begin{bmatrix} B_{rr} & B_{rs} \\ B_{sr} & B_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 \\ 0 & \bar{N}_1 & \varepsilon_r \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_r N_2^{t} & N_3 & 0 \\ \bar{N}_2^{t} & 0 & 0 & \bar{N}_3 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

где N_1, N_3 -косоэрмитовы матрицы, а N_2 -произвольная комплексная матрица. Алгебра Ли матриц (8) изоморфна $\mathfrak{u}(p_4,q_4)$. Если для какого-либо из чисел $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r$, например, ε_1, среди чисел $\varepsilon_{r+1},\dots,\varepsilon_s$ нет равных ε_1 или комплексно сопряженных с ним, то

$$B_{11} = (S_1, \bar{S}_2), \qquad (9)$$

где S_1 -косоэрмитова матрица. Алгебра Ли матриц (9) изоморфна алгебре $\mathfrak{u}(p_5)$. Наконец, легко показать, что все матрицы B_{ij}, отличные от рассмотренных выше, являются нулевыми. Таким образом, подгруппа $SU(p,q)^{\Phi}$, соответствующая автоморфизму (2), изоморфна группе

$$S(U(p_1,q_1)\times\dots\times U(p_\ell,q_\ell)\times O(p_{\ell+1},q_{\ell+1})\times S_p(p_{\ell+2},q_{\ell+2}))$$

Если $p=q$, то возможен автоморфизм (I), порождаемый матрицей

$$T = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит в этом случае из матриц

$$\begin{bmatrix} M & L \\ L & M \end{bmatrix},$$

где M_1 -косоэрмитова матрица, а L -эрмитова матрица, и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C})$. При $p=q$ можно рассмотреть также автоморфизм (2), порожденный матрицей (I0). Подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из матриц

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ \bar{M}_2 & \bar{M}_1 \end{bmatrix}$$

где M_1 -косоэрмитова матрица, а M_2 -комплексная симметрическая матрица, и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C})$.

Рассмотрим теперь произведение автоморфизма (2) с матрицей (I0) и автоморфизма (I) с матрицей

$$T=(\varepsilon_1 E_p,\ \varepsilon_2 E_p)\ ,\ \varepsilon_1\neq\varepsilon_2\ ,$$

оставляющего подгруппу K точечно неподвижной. Возможны два различных случая. Если $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\neq\overline{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)}$, то подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из матриц

$$B=(M,\bar{M}),$$

где M -косоэрмитова матрица и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{su}(p)$. Во втором случае алгебра $\mathfrak{h}$ состоит из матриц

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -\bar{M}_2 & \bar{M}_1 \end{bmatrix},$$

где M_1 -косоэрмитова матрица, а M_2 -комплексная кососимметрическая матрица, и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{so}^*(2p)$.

Группа $SU^*(2n)$.

$SU^*(2n)$ есть группа матриц из $SL(2n,\mathbb{C})$, которые перестановочны с преобразованием

$$(z^1,\dots,z^n,z^{n+1},\dots,z^{2n})\mapsto(\bar{z}^{n+1},\dots,\bar{z}^{2n},-\bar{z}^1,\dots,-\bar{z}^n)$$

пространства $\mathbb{C}^{2n}$. Алгебра Ли $\mathfrak{su}^*(2n)$ группы $SU^*(2n)$ состоит из матриц

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ -L_2 & L_1 \end{bmatrix},$$

где L_1, L_2 -комплексные матрицы порядка n, $t+L_1+t+L_2=0$. Максимальная компактная подгруппа K группы $SU^*(2n)$ есть группа $Sp(n)$, её алгебра Ли $\mathfrak{k}$ состоит из матриц

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -\bar{M}_2 & \bar{M}_1 \end{bmatrix},$$

где M_1 -косоэрмитова матрица, а M_2 -комплексная кососимметрическая матрица.

Известно [3], что любой автоморфизм группы $Sp(n)$ с точностью до сопряженности в группе внутренних автоморфизмов, имеет вид (I), где

$$T=(e^{i\alpha_1}E_{n_1},\dots,e^{i\alpha_r}E_{n_r},e^{-i\alpha_1}E_{n_1},\dots,e^{-i\alpha_r}E_{n_r}) \qquad (11)$$

$$e^{i\alpha_p}\neq e^{i\alpha_q}\ ,\ \text{если}\ p\neq q\ ,\ e^{i\alpha_{r-1}}=-1\ ,\ e^{i\alpha_r}=1.$$

Этот автоморфизм распространяется на всю группу $SU^*(2n)$ причем подгруппа $SU^*(2n)^{\Phi}$ изоморфна группе

$$S(GL(n_1,\mathbb{C})\times\cdots\times GL(n_{\tau-2},\mathbb{C})\times U^*(2n_{\tau-1})\times U^*(2n_\tau)).$$

Автоморфизм группы $SU^*(2n)$, оставляющий точечно неподвижной подгруппу K, имеет вид

$$\Phi:\ A\longmapsto(\bar{A}^{-1})^t. \qquad (12)$$

Соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{su}^*(2n)$ задается формулой

$$\varphi:\ B\longmapsto-\bar{B}^t.$$

Рассмотрим произведение автоморфизма (I) с матрицей (II) на автоморфизм (I2). Подалгебра $\mathfrak{h}$, соответствующая подгруппе неподвижных точек, состоит из матриц B, удовлетворяющих условию

$$BT=-TB^t,$$

где T есть матрица (II). Разбивая матрицу B на клетки, соответствующие разложению матрицы (II), получаем, что отличны от нулевых лишь те клетки, которые перечислены ниже. Матрица

$$\begin{bmatrix} B_{\tau-1,\tau-1} & B_{\tau-1,\tau} & B_{\tau-1,2\tau-1} & B_{\tau-1,2\tau} \\ B_{\tau,\tau-1} & B_{\tau,\tau} & B_{\tau,2\tau-1} & B_{\tau,2\tau} \\ B_{2\tau-1,\tau-1} & B_{2\tau-1,\tau} & B_{2\tau-1,2\tau-1} & B_{2\tau-1,2\tau} \\ B_{2\tau,\tau-1} & B_{2\tau,\tau} & B_{2\tau,2\tau-1} & B_{2\tau,2\tau} \end{bmatrix}$$

имеет вид (6) и поэтому соответствующая подалгебра есть $\mathfrak{sp}(p,q)$. Матрица

$$\begin{matrix} B_{11} & B_{1,\tau+1} \\ B_{\tau+1,1} & B_{\tau+1,\tau+1} \end{matrix}$$

имеет вид

$$\begin{matrix} B_{11} & B_{1,\tau+1} \\ -\bar{B}_{1,\tau+1} & \bar{B}_{11} \end{matrix}$$

где B_{11} – косоэрмитова матрица, а $B_{1,\tau+1}$ – комплексная кососимметрическая матрица или $B_{1,\tau+1}=0$. Таким образом, в рассматриваемом случае подгруппа $SU^*(2n)^\Phi$ изоморфна группе

$$S(U(n_1)\times\cdots\times U(n_{\tau-2})\times O^*(2n_{\tau-1})\times Sp(p,q)).$$

Группа $SL(n,\mathbb{C})$.

$SL(n,\mathbb{C})$ есть группа всех комплексных матриц порядка n с единичным определителем, её алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ состоит из всех комплексных матриц порядка n с нулевым следом. Максимальная компактная подгруппа K группы $SL(n,\mathbb{C})$ есть группа $SU(n)$. Известно [4], что любой непрерывный автоморфизм группы $SL(n,\mathbb{C})$ может быть представлен в виде (I) или

$$\Phi:\ A\longmapsto T(A^{-1})^tT^{-1}, \qquad (13)$$

где

$$T\in SL(n,\mathbb{C}).$$

Зак. 10314.

Рассмотрим сначала автоморфизм (I). Как и в случае группы $SL(n,\mathbb{R})$ показывается (см.[I]), что в качестве T надо брать жорданову матрицу, удовлетворяющую условию

$$T^k = E,$$

т.е. матрицу

$$T = (\varepsilon_1 E_1, \ldots, \varepsilon_r E_{n_r}), \qquad (14)$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ -различные корни k -ой степени из I. Подгруппа $SL(n,\mathbb{C})^\Phi$ имеет в данном случае вид

$$S(GL(n_1,\mathbb{C}) \times \cdots \times GL(n_r,\mathbb{C})).$$

Перейдем к автоморфизму (I3). Как и в случае группы $SL(n,\mathbb{R})$ показывается (см.[I]), что матрица T может выбираться с точностью до замены

$$T \to STS^t,$$

где $S \in SL(n,\mathbb{C})$. В соответствии с теоремой, указанной в начале статьи, будем искать автоморфизмы (I3) группы $SL(n,\mathbb{C})$, оставляющие инвариантной максимальную компактную подгруппу $K = SU(n)$. Пусть матрица A унитарна, т.е. $\bar{A}^t = A^{-1}$. Поэтому

Потребуем, чтобы матрица $T(A^{-1})^t T^{-1}$ также была унитарной:

$$A^t(\bar{T}^t T) = (\bar{T}^t T)A^t.$$

Итак, матрица $\bar{T}^t T$ перестановочна со всякой унитарной матрицей. Отсюда следует, что

$$\bar{T}^t T = \alpha E, \qquad (15)$$

где $\alpha^n = 1$. Так как матрица $\bar{T}^t T$ имеет вещественные неотрицательные диагональные элементы, то (I5) приводится к виду

$$\bar{T}^t T = E,$$

т.е. матрица T унитарна.

Таким образом, для классификации периодических автоморфизмов (I3) группы $SL(n,\mathbb{C})$ достаточно ограничиться унитарными матрицами T. Далее, как и в случае группы $SU(n)$ (см.[I]) показывается, что матрицу T можно привести к виду

$$T = (P_1, \ldots, P_r, Q_1, Q_2), \qquad (16)$$

где

$$Q_1 = E, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \quad P_i = \begin{bmatrix} 0 & E_{k_i} \\ \varepsilon_i E_{k_i} & 0 \end{bmatrix},$$

$\varepsilon_i^{p_i} = 1, \varepsilon_i \neq \pm 1$, среди $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ нет комплексно сопряженных.

Пусть $\mathfrak{h}$ -подалгебра в алгебре $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, соответствующая подгруппе $SL(n,\mathbb{C})^\Phi$ для автоморфизма (I3). Матрица $B \in \mathfrak{h}$ удовлетворяет уравнению

$$BT = -TB^t. \qquad (17)$$

где T есть матрица (I6). Представляя матрицу B в клеточном виде, получаем из (I7):

$$B_{ii} P_i = -P_i B_{ii}^t, \quad 1 \le i \le \tau \tag{18}$$

Полагая

$$B_{ii} = \begin{bmatrix} L & M \\ N & Q \end{bmatrix},$$

получаем из уравнения (17)

$$M^t = \varepsilon_i M, \quad Q = L^t, \quad N = \varepsilon_i N^t.$$

Отсюда $M^t = \varepsilon_i^2 M^t$, $N = \varepsilon_i^2 N$. Так как $\varepsilon_i^2 \ne 1$, то $M = 0$, $N = 0$. Итак,

$$B_{ii} = (L, L^t) \tag{19}$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$B_{ij} P_j = -P_i B_{ji}^t, \quad B_{ji} P_i = -P_j B_{ij}^t,$$
$$1 \le i, j \le \tau, \quad i \ne j.$$

Полагая

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix}, \quad B_{ji} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix},$$

получаем из (17)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_j L_2 & L_1 \\ \varepsilon_j L_4 & L_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} M_2^t & M_4^t \\ \varepsilon_i M_1^t & \varepsilon_i M_3^t \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_i M_2 & M_1 \\ \varepsilon_i M_4 & M_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L_2^t & L_4^t \\ \varepsilon_j L_1^t & \varepsilon_j L_3^t \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Из (20) и (21) получаем

$$\varepsilon_j L_2 = M_2^t, \quad \varepsilon_i M_2 = L_2^t \Rightarrow L_2 = \varepsilon_i M_2^t = \bar{\varepsilon}_j M_2^t.$$

Так как $\varepsilon_i \ne \bar{\varepsilon}_j$, то $L_2 = M_2 = 0$. Аналогично получим

$$L_1 = 0,\ L_3 = 0,\ L_4 = 0,\ M_1 = 0,\ M_3 = 0,\ M_4 = 0.$$

Итак,

$$B_{ij} = 0, \quad 1 \le i, j \le \tau, \quad i \ne j.$$

Аналогично можно получить равенства

$$B_{i,\tau+1} = 0, \quad B_{\tau+1,i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \tau, \tau+2,$$
$$B_{j,\tau+2} = 0, \quad B_{\tau+2,j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \tau, \tau+1.$$

Уравнение

$$B_{\tau+1,\tau+1} Q_1 = -Q_1 B_{\tau+1,\tau+1}^t \quad (Q_1 = E)$$

говорит о том, что матрицы $B_{\tau+1,\tau+1}$ образуют алгебру Ли $\Diamond(p, \mathbb{C})$. Из уравнения

$$B_{\tau+2,\tau+2} Q_2 = -Q_2 B_{\tau+2,\tau+2}^t$$

вытекает, что матрица $B_{\tau+2,\tau+2}$ имеет вид

$$B_{\tau+2,\tau+2} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & -N_1^t \end{bmatrix}, \tag{22}$$

где N_2, N_3 -комплексные симметрические матрицы, а N_1 - произвольная комплексная матрица. Известно [2], что матрицы (22) образуют алгебру Ли $\mathfrak{sp}(m,\mathbb{C})$. Таким образом, подгруппа $SL(n,\mathbb{C})^{\Phi}$, соответствующая автоморфизму Э (13), имеет вид:

$$S(\widetilde{GL}(n_1)\times\dots\times\widetilde{GL}(n_{\tau-2})\times O(n_{\tau-1},\mathbb{C})\times Sp(n_\tau,\mathbb{C})).$$

где группа $\widetilde{GL}(n_i)$ изоморфна группе $GL(n_i,\mathbb{C})$ и состоит из матриц вида (19).

Рассмотрим сопряжение алгебры $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ относительно подалгебры $\mathfrak{su}(n)$:

$$B \longrightarrow -\bar{B}^t. \tag{23}$$

Это отображение не является автоморфизмом комплексной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, но является автоморфизмом вещественной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. В этом случае подалгебра неподвижных элементов имеет вид $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(n)$.

Рассмотрим автоморфизм вещественной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, являющийся произведением дифференциала автоморфизма (I) и сопряжения (23):

$$\varphi:\ B \longrightarrow -T\bar{B}^t T^{-1}, \tag{24}$$

где T есть матрица (14). Найдем матрицы B подалгебры

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^{\varphi}$ из уравнения $BT = -T\bar{B}^t$. (25)

Представляя матрицу B в клеточном виде, получаем из (25):

$$B_{ii} = -\bar{B}_{ii}^t, \quad 1 \le i \le \tau, \tag{26}$$

$$\varepsilon_j B_{ij} = -\varepsilon_i \bar{B}_{ji}^t, \quad \varepsilon_i B_{ji} = -\varepsilon_j \bar{B}_{ij}^t, \tag{27}$$

$$1 \le i, j \le \tau, \quad i \ne j.$$

Из уравнений (27) следует

$$B_{ij} = -\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\bar{B}_{ji}^t = -\overline{\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right)}\bar{B}_{ji}^t \tag{28}$$

Возможны следующие случаи:

1/ $\varepsilon_j \ne -\varepsilon_i$. Тогда из (28) следует

$$B_{ij} = 0.$$

2/ $\varepsilon_j = -\varepsilon_i$. Тогда из (28) получаем

$$B_{ji} = \bar{B}_{ij}^t.$$

Итак, в случае 2/ мы приходим к матрице

$$\begin{bmatrix} B_{ii} & B_{ij} \\ \bar{B}_{ij}^t & B_{jj} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где B_{ii}, B_{jj} -косоэрмитовы матрицы, а B_{ij} -произвольная комплексная матрица. Известно [2], что матрицы (29) образуют алгебру Ли $\mathfrak{u}(p,q)$. Таким образом, подгруппа

$SL(n,\mathbb{C})^{\Phi}$,соответствующая автоморфизму (24) алгебры $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, изоморфна группе

$$S(U(p_1,q_1)\times\cdots\times U(p_s,q_s)).$$

Рассмотрим автоморфизм вещественной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, являющийся произведением дифференциала автоморфизма (I3) и сопряжения (23):

$$B\longrightarrow T\bar{B}T^{-1},$$

где T есть матрица (I6). Матрицы B подалгебры $\mathfrak{h}$ находятся из уравнений

$$BT=T\bar{B}.$$

Группа $SL(n,\mathbb{C})^{\Phi}$ имеет вид

$$S(\underline{GL}(n_1)\times\cdots\times\underline{GL}(n_p)\times GL(m,\mathbb{R})\times U^{*}(2m_2)),$$

где $\underline{GL}(n_i)$ есть группа, состоящая из матриц

$$V(n_i)=(W(n_i),\bar{W}(n_i),\quad W(n_i)\in GL(n_i\,\mathbb{C})$$

и изоморфная группе $GL(n_i,\mathbb{C})$.

Литература.

I. Феденко А.С., Пространства, определяемые эндоморфизмами групп Ли (Φ -пространства). Тр. геом. семинара. Ин-т науч. инф. АН СССР, I973, 4, 23I-267.

2. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., Мир, I964.

3. Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М., ИЛ, I949.

4. Дьёдонне Ж., Геометрия классических групп. М., Мир, I974.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 I974

Фунтикова Т.П.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(P\mathcal{L})_{2,1}$.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$ пар фигур $\{P,\mathcal{L}\}$,где P - точка, $\mathcal{L}$ -прямая [I]. Каждой точке P поверхности (P) соответствует единственная прямая $\mathcal{L}$ линейчатой поверхности $(\mathcal{L})$,полным прообразом которой является линия $\Gamma_{\mathcal{L}}$ на поверхности (P). Из рассмотрения исключаются конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$ с цилиндрической поверхностью $(\mathcal{L})$, а также случаи, когда прямая $\mathcal{L}$ инцидентна касательной плоскости к поверхности (P) в точке P и когда точка пересечения прямой $\mathcal{L}$ с касательной плоскостью к поверхности (P) в точке P принадлежит касательной к линии $\Gamma_{\mathcal{L}}$ в точке P .

Указаны ряд свойств конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$. Подробно исследованы конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$, у которых линии $\Gamma_{\mathcal{L}}$ являются асимптотическими линиями на поверхности (P) .

§I. Геометрическая характеристика конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$.

I. Канонический репер конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$.
Присоединим к каждой паре фигур $\{P,\mathcal{L}\}$ конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$

подвижный репер $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ следующим образом: вершину A репера поместим в текущую точку P поверхности (P), векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ расположим в касательной плоскости к поверхности (P), конец вектора $\bar{e}_1$ совместим с точкой пересечения касательной плоскости к поверхности (P) в точке P с соответствующей прямой $\mathcal{L}$ линейчатой поверхности $(\mathcal{L})$, вектор $\bar{e}_2$ направим по касательной к линии $\Gamma_{\mathcal{L}}$ в точке P, а вектор $\bar{e}_3$ -параллельно прямой $\mathcal{L}$, причем конец вектора $\bar{e}_3$ совместим с фокальной точкой луча прямолинейной конгруэнции $(A,\bar{e}_3)$.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^{\alpha}\bar{e}_{\alpha},\quad d\bar{e}_{\alpha}=\omega_{\alpha}^{\beta}\bar{e}_{\beta},\ (\alpha;\beta,\gamma=1,2,3), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha}=\omega^{\beta}\wedge\omega_{\beta}^{\alpha},\quad \mathcal{D}\omega_{\alpha}^{\beta}=\omega_{\alpha}^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}^{\beta}, \tag{1.2}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \tag{1.3}$$

Так как многообразие (P) точек P -двумерное, то в силу выбора репера

$$\operatorname{rang}\{\omega^1,\omega^2\}=2,$$

то есть

$$\omega^1\wedge\omega^2\neq 0. \tag{1.4}$$

Примем формы Пфаффа ω^1,ω^2 за независимые первичные формы конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$

Конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$ определяются замкнутой системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
cq-s-p=0,\\
q\,dc+c\,dq-ds-dp=0,\\
\omega^3=0,\ \omega_1^1=(a-1)\omega^1,\ \omega_1^2=b\omega^1-\omega^2,\ \omega_3^2=c\omega^1,\\
\omega_1^3=k\omega^1+l\omega^2,\ \omega_2^3=l\omega^1+m\omega^2,\ \omega_2^1=p\omega^1+q\omega^2,\\
\omega_2^2=n\omega^1+s\omega^2,\ \omega_3^1=-\omega^1,
\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\Delta a\wedge\omega^1=0,\ \Delta b\wedge\omega^1=0,\ \Delta c\wedge\omega^1=0,\ \Delta k\wedge\omega^1+$$

$$+\Delta l\wedge\omega^2=0,\ \Delta l\wedge\omega^1+\Delta m\wedge\omega^2=0,\ \Delta p\wedge\omega^1+$$

$$+\Delta q\wedge\omega^2=0,\quad \Delta n\wedge\omega^1+\Delta s\wedge\omega^2=0,$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta a&=da+(ap+bq+l)\omega^2,\\
\Delta b&=db+(bp-a-lc+bs)\omega^2,\\
\Delta c&=dc+(cp+1+2sc)\omega^2,\\
\Delta k&=dk+(2al+2ln+bm-ks+kp)\omega^2,\\
\Delta l&=dl,\\
\Delta m&=dm+(kq-3nm-am-2l(p-s))\omega^1,\\
\Delta p&=dp+(p^2-ps+m)\omega^2,
\end{aligned}$$

$$\Delta q = dq + (a-2-2n)\,q\,\omega^1,$$
$$\Delta n = dn + (np - p - bq)\,\omega^2,$$
$$\Delta s = ds + (cm - s - sn)\,\omega^1.$$

Исследуя систему уравнений (I.5), приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а I.I. Конгруэнции $(P\mathcal{X})_{2,1}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

2. Геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией $(P\mathcal{X})_{2,1}$.

Введем следующие обозначения

$$\bar{A}_\alpha = \bar{A} + \bar{e}_\alpha. \tag{1.6}$$

1/Прямолинейная конгруэнция (AA_1).

Фокусы F_1^i $(i,j=1,2)$ луча этой конгруэнции и соответствующие им фокальные семейства определяются формулами:

$$\bar{F}_1^1 = \bar{A}, \quad \omega^2 = 0, \tag{1.7}$$

$$\bar{F}_1^2 = \bar{A} + \frac{k}{\ell b + k}\,\bar{e}_1, \quad \omega_1^3 = 0. \tag{1.8}$$

2/Прямолинейная конгруэнция (AA_2).

Фокусы F_2^i луча AA_2 конгруэнции (AA_2) и соответствующие им фокальные семейства определяются формулами:

$$\bar{F}_2^1 = \bar{A}, \quad \omega^1 = 0, \tag{1.9}$$

$$\bar{F}_2^2 = \bar{A} + \frac{m}{q\ell - pm}\,\bar{e}_2, \quad \omega_2^3 = 0. \tag{1.10}$$

3/Прямолинейная конгруэнция (AA_3).

Фокальные семейства этой конгруэнции и собственный фокус её луча определяются формулами:

$$(c\omega^1 + \omega^2)\,\omega^1 = 0, \tag{1.11}$$

$$\bar{F} = \bar{A} + \bar{e}_3. \tag{1.12}$$

4/Касательная плоскость к поверхности $(\mathcal{X})$ в точке A_1 задается уравнением

$$b(x^1 - 1) - a x^2 = 0. \tag{1.13}$$

5/Деривационные формулы канонического репера линии $\Gamma_{\mathcal{X}}$ имеют вид:

$$\frac{dA}{ds} = \bar{e}_2, \quad \frac{d\bar{e}_1}{ds} = -\bar{e}_2 + \hat{\ell}\,\bar{e}_3,$$
$$\frac{d\bar{e}_2}{ds} = \hat{q}\,\bar{e}_1 + \hat{s}\,\bar{e}_2 + \hat{m}\,\bar{e}_3, \quad \frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\hat{s}\,\bar{e}_3, \tag{1.14}$$

где

$$ds = (\omega^2)_{\omega^1=0}, \quad \hat{q} = (q)_{\omega^1=0},$$
$$\hat{s} = (s)_{\omega^1=0}, \quad \hat{m} = (m)_{\omega^1=0}, \quad \hat{\ell} = (\ell)_{\omega^1=0}. \tag{1.15}$$

Соприкасающаяся плоскость α линии $\Gamma_{\mathcal{X}}$ задается уравнением

$$x^1 \hat{m} - x^3 \hat{q} = 0. \tag{1.16}$$

3.Некоторые геометрические свойства конгруэнции $(P\mathcal{X})_{2,1}$

Обозначим через ℓ линию пересечения касательной плоскости к поверхности (A) в точке A с касательной плоскостью к поверхности $(\mathcal{X})$ в точке A_1. Рассмотрим торс прямолинейной конгруэнции (AA_1) соответствующий фокальной поверхности (F_1^2). Так как

$$(d\bar{A}_1)_{\omega_1^3=0} = \omega^1(a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2), \tag{1.17}$$

то касательная к линии, высекаемой этим торсом на поверхности (A_1), определяется направляющим вектором $a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2$.

Из формул (I.6)-(I.I7) непосредственно вытекают следующие свойства конгруэнции $(P\mathcal{X})_{2,1}$:

I/Прямолинейные конгруэнции (AA_2), (AA_3) имеют по одному семейству соответствующих торсов(семейству $\omega^1=0$).

2/Касательная плоскость к фокальной поверхности $(F\ )$ проходит через прямую ℓ –касательную к линии $\Gamma_{\mathcal{X}}$ в точке A.

3/Торс $\omega^1=0$ прямолинейной конгруэнции (AA_3) является цилиндрической поверхностью.

4/Торсы $\omega_1^3=0$ прямолинейной конгруэнции (AA_1) высекают на поверхности (A_1) линии, касательные к которым в точке A_1 являются прямыми ℓ'.

Т е о р е м а I.2. Если соприкасающаяся плоскость α линии $\Gamma_{\mathcal{X}}$ в точке A параллельна соответствующей прямой $\mathcal{X}$, то линия $\Gamma_{\mathcal{X}}$ –плоская.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Из (I.I6) следует, что плоскость α параллельна прямой $\mathcal{X}$ при

$$\hat{q} = 0. \tag{1.18}$$

Из (I.I8) имеем:

$$((d^{(n)}\bar{A})_{\omega^1=0}, (d\bar{A})_{\omega^1=0}, (d^2\bar{A})_{\omega^1=0}) = ((d^{(n)}\bar{A})_{\omega^1=0}, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0,$$

$(n=1,2,3\ldots)$,

т.е.линия $\Gamma_{\mathcal{X}}$-плоская,причем она располагается в координатной плоскости $\{A, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Т е о р е м а I.3.Если касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ параллельна касательной плоскости к поверхности (A) в точке A, то поверхности (A) и $(\mathcal{X})$-конусы с вершиной в точке A_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ параллельна касательной плоскости к поверхности (A) в точке A, если

$$k=0,\ \ell=0. \tag{1.19}$$

Учитывая (I.I9) в замкнутой системе дифференциальных уравнений (I.5) находим:

$$b=0. \tag{1.20}$$

Подставляя (I.20) в систему (I.5) имеем:

$$a=0. \tag{1.21}$$

В силу уравнений (I.I9)-(I.2I) получаем:

$$(d\bar{A})_{\omega^2=0} = \omega^1\bar{e}_1,\quad (d\bar{e}_1)_{\omega^2=0} = -\omega^1\bar{e}_1, \tag{1.22}$$

то есть (A) -линейчатая поверхность с образующей AA_1. Так как

$$d\bar{A}_1 = 0, \tag{1.23}$$

то (A) и $(\mathcal{X})$ -конические поверхности. Теорема доказана.

Т е о р е м а I.3. Если поверхность $(\mathcal{X})$-торс с точкой ребра возврата A_1, то координатные линии на поверхности (A) сопряжены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поверхность $(\mathcal{X})$-торс, если выполняется

$$ac + b = 0. \tag{1.24}$$

Точкой ребра возврата при этом является точка

$$\bar{K} = \bar{A}_1 + a\bar{e}_3. \tag{1.25}$$

Точка A_1 является точкой ребра возврата торса $(\mathcal{X})$ при

$$a = 0. \tag{1.26}$$

Учитывая (I.24), (I.26) в системе (I.5) получаем:

$$\ell = 0. \tag{1.27}$$

Уравнение асимптотических линий на поверхности (A) имеет вид:

$$k(\omega^1)^2 + 2\ell\omega^1\omega^2 + m(\omega^2)^2 = 0. \tag{1.28}$$

Из (I.27) и (I.28) следует справедливость утверждения.

Т е о р е м а I.4. Если касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_2$ параллельна плоскости векторов $\bar{e}_2, \bar{e}_3$, то поверхность (A) -линейчатая с образующими $\Gamma_{\mathcal{X}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_2$ параллельна плоскости векторов $\bar{e}_2, \bar{e}_3$, если

$$p = 0, \quad q = 0. \tag{1.29}$$

Учитывая условие (I.29) в замкнутой системе дифференциальных уравнений (I.5), получаем

$$m = 0. \tag{1.30}$$

Из (I.30) и (I.29) следует, что

$$(d\bar{A})_{\omega^1=0} = \omega^2\bar{e}_2, \quad (d\bar{e}_2)_{\omega^1=0} = s\bar{e}_2,$$

т.е. линии $\Gamma_{\mathcal{X}}$ на поверхности (A) -прямые (поверхность (A)-линейчатая), что и требовалось доказать.

§2. Конгруэнции $(P\mathcal{X})^1_{2,1}$.

О п р е д е л е н и е 2.I. Конгруэнцией $(P\mathcal{X})^1_{2,1}$ называется конгруэнция $(P\mathcal{X})_{2,1}$, у которой линия $\Gamma_{\mathcal{X}}$ является асимптотической линией на поверхности (A).

Т е о р е м а 2.I. Конгруэнции $(P\mathcal{X})^1_{2,1}$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (I.28) следует, что линия $\Gamma_{\mathcal{X}}$ является асимптотической линией на поверхности (A), если

$$m = 0. \tag{2.1}$$

Анализируя замкнутую систему дифференциальных уравнений (I.5) с учетом условия (2.I), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2.2. Конгруэнции $(P\mathcal{X})^1_{2,1}$ обладают следующими свойствами: I/поверхности (A) и (A_1) имеют по одному семейству соответствующих асимптотических линий, 2/если точка A_1 является характеристической точкой координатной плоскости $\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_3\}$, то асимптотические линии на поверхностях (A) и (A_1) соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Из (I.5) следует:

$$\Delta a = \alpha\omega^1, \quad \Delta b = \beta\omega^1. \tag{2.2}$$

Уравнения асимптотических линий на поверхностях (A) и (A_1) имеют соответственно вид:

$$\omega^1[\kappa\omega^1 + 2\ell\omega^2] = 0, \tag{2.3}$$

$$\omega^1[(a\beta - b\alpha - abn + a\kappa c + ba - b^2 p + b\kappa)\omega^1 + 2\ell(ac+b)\omega^2] = 0. \tag{2.4}$$

Из (2.3),(2.4) следует, что поверхности (A) и (A_1) имеют по одному семейству соответствующих асимптотических линий.

2/Точка A_1 является характеристической точкой плоскости $\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_3\}$, если

$$b = 0 \tag{2.5}$$

Из (2.2)-(2.5) следует, что асимптотические линии на поверхностях (A) и (A_1) в этом случае соответствуют.

О п р е д е л е н и е 2.2. Конгруэнцией $(P\mathcal{L})^2_{2,1}$ называется конгруэнция $(P\mathcal{L})^1_{2,1}$, у которой I/сеть асимптотических линий на поверхности (A) совпадает с координатной сетью, 2/точка A_1 является характеристической точкой плоскости $\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_3\}$.

Т е о р е м а 2.3. Конгруэнции $(P\mathcal{L})^2_{2,1}$ существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.3) следует, что сеть асимптотических линий на поверхности (A) совпадает с координатной сетью, если

$$\kappa = 0. \tag{2.6}$$

Из (2.6),(2.I) и (I.5) имеем:

$$\omega^3_1 = \ell\omega^2, \quad \omega^3_2 = \ell\omega^1. \tag{2.7}$$

Осуществляя частичное продолжение подсистемы (2.7), получим:

$$d\ell = 2\ell(-\omega^3_3 + \omega^1 - p\omega^2). \tag{2.8}$$

Второе условие определения 2.2 выполняется при

$$b = 0. \tag{2.9}$$

Учитывая (2.9) в уравнении $\Delta b \wedge \omega^1 = 0$ системы (I.5), получаем

$$a + \ell c = 0. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.I0) в уравнение $\Delta a \wedge \omega^1 = 0$ той же системы, приходим к конечному соотношению

$$1 + cp = 0. \tag{2.11}$$

Из (2.II),(2.8) и (I.5) следует

$$dp = (-q - p^2)\omega^2 + p\omega^2_2 + \ell\omega^1. \tag{2.12}$$

Продолжая (2.I2), находим:

$$q = 0. \tag{2.13}$$

Таким образом, замкнутая система дифференциальных уравнений, определяющая конгруэнцию $(P\mathcal{L})^2_{2,1}$, имеет следующий вид:

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^1_1 = \left(\frac{\ell}{p} - 1\right)\omega^1, \quad \omega^2_1 = -\omega^2, \quad \omega^2_3 = -\frac{1}{p}\omega^1,$$

$$\omega^1_3 = -\omega^1, \quad \omega^3_1 = \ell\omega^2, \quad \omega^3_2 = \ell\omega^1, \quad \omega^1_2 = p\omega^1, \tag{2.14}$$

$$\omega_2^2 = n\omega^1 - p\,\omega^2,$$
$$dp = p\,\omega_2^2 - p^2\omega^2 + \omega_2^3, \qquad (2.14)$$
$$d\ell = 2\ell\,[\omega^1 - \omega_3^3 - p\,\omega^2],$$
$$\Delta n \wedge \omega^1 = 0.$$

Из (2.14) следует, что конгруэнции $(P\mathcal{L})^2_{2,1}$ существуют с произволом одной функции одного аргумента.

Т е о р е м а 2.4. Конгруэнции $(P\mathcal{L})^2_{2,1}$ обладают следующими свойствами: 1/каждая из поверхностей (A), $(\mathcal{L})$ является одной и той же линейчатой квадрикой Q, 2/проекция направляющего вектора аффинной нормали к поверхности $(\mathcal{L})$ в точке A_1 на касательную плоскость к поверхности (A) в точке A принадлежит касательной к линии, высекаемой торсом $c\omega^1 + \omega^2 = 0$ прямолинейной конгруэнции (AA_3) на поверхности (A), 3/центр квадрики Q проектируется: параллельно плоскости $x^1 = 0$ на прямую AA_1 в середину отрезка AA_1, параллельно плоскости $x^2 = 0$ на прямую AA_2 в середину отрезка, отсекаемого характеристикой плоскости $\{A, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ от прямой AA_2, параллельно плоскости $x^3 = 0$ на прямую $\mathcal{L}$ в середину отрезка A_1M, где M такая точка прямой $\mathcal{L}$, что касательная к линии (M) параллельна характеристике плоскости $\{A, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка A и соответствующая ей прямая $\mathcal{L}$ принадлежат квадрике

$$Q \equiv -\ell x^1x^2 + x^3 - x^1x^3 + p\,x^2x^3 = 0. \qquad (2.15)$$

Дифференцируя (2.15) с помощью уравнений стационарности точки

$$dx^\alpha = -x^\beta\omega_\beta^\alpha - \omega^\alpha, \qquad (2.16)$$

убеждаемся, что Q — инвариантная квадрика.

$$dQ = \left(\frac{\ell}{p}\omega^1 + n\omega^2 - 2p\omega^2\right)Q. \qquad (2.17)$$

Прямые AA_1, AA_2 являются прямолинейными образующими квадрики Q, т.е. поверхности (A) и $(\mathcal{L})$ являются одной и той же квадрикой.

2/Аффинная нормаль к поверхности $(\mathcal{L})$ в точке A_1 определяется направляющим вектором

$$\bar{\eta} = p\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \ell\bar{e}_3. \qquad (2.18)$$

Касательная к линии, высекаемой торсом $c\omega^1 + \omega^2 = 0$ прямолинейной конгруэнции (AA_3) на поверхности (A), определяется направляющим вектором

$$\bar{\nu} = \bar{e}_1 + \frac{1}{p}\bar{e}_2. \qquad (2.19)$$

Из (2.18), (2.19) следует справедливость данного утверждения.

3/Центр квадрики Q определяется точкой

$$\bar{O} = \bar{A} + \frac{1}{2}\left(\bar{e}_1 - \frac{1}{p}\bar{e}_2 + \frac{\ell}{p}\bar{e}_3\right). \qquad (2.20)$$

Характеристика плоскости $\{A, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ есть прямая

$$1 + x^2p - x^3 = 0, \quad x^1 = 0, \qquad (2.21)$$

которая пересекает прямую AA_2 в точке

$$\bar{N} = \bar{A} - \frac{1}{p}\bar{e}_2 \qquad (2.22)$$

Точка M прямой $\mathcal{L}$, в которой касательная к линии (M) параллельна прямой (2.21), определяется следующим образом:

$$\bar{M} = \bar{A}_1 + \frac{\ell}{p}\bar{e}_3 \qquad (2.23)$$

Из (2.22),(2.23) вытекает справедливость утверждения.

Теорема доказана.

Литература

I. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 41-49.

2. Фиников С.П., Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1950.

3. Скрыдлова Е.В., О вырожденных конгруэнциях линейных пар фигур. Материалы IУ Прибалтийской геометрической конференции. Тарту, 1973, 116- 118.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.5 1974

Хляпова Е.А.

О МНОГООБРАЗИЯХ $\{k+1, k, n\}$ В n-МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается $\frac{n+1}{2}$ – мерное многообразие пар фигур, порожденных $\frac{n-1}{2}$-плоскостью и квадратичным элементом-многообразие $\{k+1, k, n\}$ при $k = \frac{n-1}{2}$ [I].

По аналогии с односторонним аффинным расслоением пар конгруэнций в A_3 [2] вводится одностороннее аффинное расслоение семейств плоскостей в A_n и рассматриваются аффинные связности, ассоциированные с многообразием $\{k+1, k, n\}$.

§I. Ассоциированные аффинные связности.

Рассмотрим в n-мерном аффинном пространстве A_n многообразие $\{k+1, k, n\}$ т.е. многообразие пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1-центральный квадратичный элемент, а F_2 - k-плоскость, не инцидентная гиперплоскости квадратичного элемента, причем k-плоскости F_2 образуют $(k+1)$-параметрическое семейство, а многообразие центральных квадратичных элементов F_1 является многообразием $(k+1,k+1,n)^2$.

Будем предполагать инцидентность касательной плоскости α поверхности центров квадратичного элемента F_1 его гиперплоскости и непараллельность плоскости α линии пересечения k-плоскости F_2 и гиперплоскости квадратичного элемента F_1.

Индексы, встречающиеся в работе, принимают значения

$$i,j=1,2,\dots,n-1;\quad \hat i,\hat j,\hat k,\hat \ell,\hat m=1,2,\dots,\frac{n+1}{2};$$
$$\hat a,\hat b,\hat c=\frac{n+3}{2},\dots,n.$$

Исследование многообразия $\{k+1,k,n\}$ будем проводить в репере $\{A,\bar e_{\hat i},\bar e_{\hat a}\}$ вершина A которого совмещена с центром квадратичного элемента F_1, векторы $\bar e_i$ расположены в его гиперплоскости, вектор $\bar e_n$ вне её, причем векторы $\bar e_{\hat a}$ параллельны k-плоскости F_2, а векторы $\bar e_{\hat i}$ помещены в касательную плоскость поверхности (A).

Уравнения центрального квадратичного элемента F_1 и k-плоскости F_2 принимают соответственно вид:

$$a_{ij}x^ix^j-1=0,\quad x^n=0,\quad \det(a_{ij})\neq 0, \qquad (1)$$
$$x^{\hat i}=c^{\hat i}. \qquad (2)$$

Система пфаффовых уравнений многообразия $\{k+1,k,n\}$ записывается в виде:

$$\omega^{\hat a}=0,\quad \omega^n_i=\Lambda^n_{i,\hat i}\,\omega^{\hat i},\quad \omega^{\hat i}_{\hat a}=\Lambda^{\hat i}_{\hat a\hat j}\,\omega^{\hat j},$$
$$\omega^{\hat a}_{\hat i}=\Lambda^{\hat a}_{\hat i\hat j}\,\omega^{\hat j}\qquad (\Lambda^{\hat i}_{\hat i\hat j}=\Lambda^{\hat a}_{\hat j\hat i}), \qquad (3)$$
$$\theta^{\hat i}=\Lambda^{\hat i}_{\hat j}\,\omega^{\hat j},\qquad \theta_{ij}=\Lambda_{ij,\hat i}\,\omega^{\hat i},$$

где

$$\theta_{ij}=da_{ij}-a_{kj}\,\omega^k_i-a_{ik}\,\omega^k_j,$$
$$\theta^{\hat i}=dc^{\hat i}+c^{\hat j}\,\omega^{\hat i}_{\hat j}.$$

Замыкание системы уравнений (3) содержится в [1] и здесь не приводится.

Будем рассматривать $(k+1)$-мерную поверхность (A) как базу. К каждой точке этой поверхности присоединены $(k+1)$-мерная плоскость α, определяемая точкой A и векторами $\bar e_{\hat i}$ (касательная плоскость поверхности (A)) и k-мерная плоскость ℓ, определяемая точкой A и векторами $\bar e_{\hat a}$.

В многообразии $(k+1)$-мерных плоскостей α путем проектирования смежной $(k+1)$-мерной плоскости $\alpha+d\alpha$ на исходную плоскость α параллельно k-плоскости ℓ определяется аффинная связность с нулевым кручением. Формы кривизны $X^{\hat j}_{\hat i}$ этой связности имеют вид:

$$X^{\hat j}_{\hat i}=\mathcal{D}\omega^{\hat j}_{\hat i}-\omega^{\hat k}_{\hat i}\wedge\omega^{\hat j}_{\hat k}=\omega^{\hat a}_{\hat i}\wedge\omega^{\hat j}_{\hat a}=\frac{1}{2}B^{\hat j}_{\hat i\hat k\hat \ell}\,\omega^{\hat k}\wedge\omega^{\hat \ell}, \qquad (4)$$

где $B^{\hat j}_{\hat i\hat k\hat \ell}$ - тензор кривизны полученной связности B.

Аналогично в многообразии k-мерных плоскостей ℓ оснащением α индуцируется аффинная связность C с нулевым кручением и формами кривизны $Y^{\hat b}_{\hat a}$:

$$Y^{\hat b}_{\hat a}=\mathcal{D}\omega^{\hat b}_{\hat a}-\omega^{\hat c}_{\hat a}\wedge\omega^{\hat b}_{\hat c}=\omega^{\hat i}_{\hat a}\wedge\omega^{\hat b}_{\hat i}=\frac{1}{2}C^{\hat b}_{\hat a\hat j\hat k}\,\omega^{\hat j}\wedge\omega^{\hat k}. \qquad (5)$$

§2. Одностороннее аффинное расслоение.

Пусть имеется $(k+1)$-параметрическое семейство (ℓ)

κ-мерных плоскостей ℓ и m-параметрическое семейство H_m пучков γ параллельных $(\kappa+1)$-мерных плоскостей $(m = 0, 1, \dots n)$.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что существует одностороннее аффинное расслоение от семейства (ℓ) к семейству H_m, если: I/задано отображение φ, ставящее в соответствие каждой κ-плоскости ℓ семейства (ℓ) единственный пучок $\gamma = \varphi(\ell)$ семейства H_m, причем плоскость ℓ не инцидентна плоскости пучка γ, 2/к семейству (ℓ) плоскостей ℓ можно присоединить κ-параметрическое семейство $(\kappa+1)$-мерных поверхностей Σ, так чтобы касательные $(\kappa+1)$-мерные плоскости к каждой поверхности семейства Σ в точках пересечения с плоскостью ℓ семейства (ℓ) содержались в соответствующем пучке семейства H_m.

Пользуясь введенным определением, рассмотрим одностороннее аффинное расслоение от семейства (ℓ) плоскостей ℓ к семейству (α) плоскостей α многообразия $\{\kappa+1, \kappa, n\}$.

Точка, принадлежащая плоскости ℓ, запишется в виде

$$\bar{M} = \bar{A} + x^{\hat{a}} \bar{e}_{\hat{a}} .$$

Имеем

$$d\bar{M} = (\omega^{\hat{i}} + x^{\hat{a}} \omega^{\hat{i}}_{\hat{a}}) \bar{e}_{\hat{i}} + (dx^{\hat{a}} + x^{\hat{\ell}} \omega^{\hat{a}}_{\hat{\ell}}) \bar{e}_{\hat{a}} . \qquad (6)$$

Для того, чтобы эта касательная $(\kappa+1)$-мерная плоскость была параллельна $(\kappa+1)$-мерной плоскости α, необходимо и достаточно, чтобы

$$dx^{\hat{a}} + x^{\hat{b}} \omega^{\hat{a}}_{\hat{b}} = 0 \qquad (7)$$

Так как семейство поверхностей (M) κ-параметрическое, то система (7), состоящая из κ-уравнений, должна быть вполне интегрируемой. Требуя полную интегрируемость системы уравнений (7), получаем условия одностороннего аффинного расслоения семейств (ℓ) и (α) в виде:

$$\omega^{\hat{i}}_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{a}}_{\hat{i}} = 0 \qquad (8)$$

Т е о р е м а. Семейства (ℓ) и (α) многообразия $\{\kappa+1, \kappa, n\}$ односторонне аффинно расслояемы тогда и только тогда, когда формы кривизны связности C равны нулю.

Справедливость утверждения непосредственно вытекает из (5) и (8).

Л и т е р а т у р а.

I. Хляпова Е.А., Дифференциальная геометрия многообразий центральных квадратичных пар фигур в A_n. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, Калининград, 1973, 153-162.

2. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, Калининград, 1973, 149-152.

С е м и н а р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском университете.

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 16 мая 1973 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 10 октября 1973 года по 29 июня 1974 года.

10.10.1973. В.В. М а х о р к и н, Однопараметрические семейства квадрик.

17.10.1973. В.С. М а л а х о в с к и й, Касательно-оснащенные конгруэнции коник.

24.10.1973. Е.В. С к р ы д л о в а, Вырожденные конгруэнции $(CP)_{1,2}$.

31.10.1973. Г.П. Т к а ч, Расслояемые пары конгруэнций фигур в A_3.

14.11.1973. Т.П. Н о в о ж и л о в а, Вырожденные конгруэнции пар фигур, образованных эллипсом и прямой.

21.11.1973. В.Й. Б л и з н и к а с, (г. Вильнюс) О геометрии дифференциальных уравнений.

28.11.1973. В.М. О в ч и н н и к о в, Некоторые геометрические образы, ассоциированные с многообразием полуквадратичных пар фигур.

12.12.1973. В.В. М а х о р к и н, Многообразия кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства.

19.12.1973. Л.Г. К о р с а к о в а, Об одном классе расслояемых пар конгруэнций кривых второго порядка.

26.12.1973. Б.А. А н д р е е в, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным

пространством и пространством нуль-пар.

14.2.1974. Е.А. Х л я п о в а, О многообразиях $\{k+1, k, n\}$ в n-мерном аффинном пространстве.

20.2.1974. В.К. Б а р ы ш е в а (г. Томск) Эквиаффинная дифференциальная геометрия неголономного многообразия плоскостей в пятимерном пространстве.

28.2.1974. Г.Л. С в е ш н и к о в а, Об одном классе конгруэнций [2,0].

13.3.1974. А.В. С т о л я р о в, (г. Чебоксары), Проективно-дифференциальная геометрия сетей на регулярных гиперполосах.

14.3.1974. А.В. С т о л я р о в (г. Чебоксары), Геометрия сетей на гиперповерхностях и геометрия плоских многомерных сетей.

20.3.1974. Т.П. Н о в о ж и л о в а, Вырожденные конгруэнции пар фигур, образованных точками.

27.3.1974. В.И. К о з л о в а, О некоторых классах конгруэнций коник с двумя вырождающимися фокальными поверхностями.

3.4.1974. Г.Р. П о г а, Построение инвариантного оснащения вырожденных $(n-2)$-мерных гиперполос $C(\Gamma^{\tau}_{n-2})$ ранга τ многомерного проективного пространства P_n.

10.4.1974. Т.И. М и ш е н и н а, Фокальные образы нормально-центрированной гиперполосы CH^{τ}_{n-2} ранга τ в P_n.

17.4.1974. В.Н. Х у д е н к о, Многообразия субквадратичных элементов в многомерном проективном пространстве.

24.4.1974. И.М. С о к о л о в а, Конгруэнции оснащенных параболоидов в трехмерном эквиаффинном пространстве.

31.4.1974. И.В. Л я б з и н а, Связанные гиперполосы многомерного проективного пространства.

8.5.1974. М.С. Ж е б р а к, Конгруэнции пар фигур, образованных квадрикой и прямой в P_3.

14.5.1974. А.А.Л у ч и н и н (г.Томск), О неголономных многообразиях пар фигур в однородном пространстве.

20.5.1974. А.А.Л у ч и н и н (г.Томск), О неголономном многообразии пар точек.

29.6.1974. В.А.Т р у п п о в, (г.Иркутск), Геометрия некоторых гиперповерхностей.

Вышел межвузовский сборник "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (вып.5), который издается один раз в год при Калининградском государственном университете (цена–60 коп.).

В этом сборнике опубликованы следующие статьи:

А н д р е е в Б.А., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным пространством и пространством нуль-пар.

И в л е в Е.Т., Об оснащении многомерной гиперполосы пространства проективной связности.

Л у ч и н и н А.А., О неголономном многообразии пар точек.

М а л а х о в с к и й В.С., Некоторые проблемы дифференциальной геометрии многообразий фигур.

М а х о р к и н В.В., Многообразия кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства (I).

О в ч и н н и к о в В.М., Некоторые геометрические образы, ассоциированные с многообразием полуквадратичных пар фигур.

П о п о в Ю.И., М и ш е н и н а Т.И., Инвариантное оснащение распадающейся $(n-2)$-мерной гиперполосы CH^{τ}_{n-2} ранга τ многомерного проективного пространства P_n.

С в е ш н и к о в а Г.Л., Об одном классе конгруэнций [2,0].

С к р ы д л о в а Е.В., Вырожденные конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$ в трехмерном проективном пространстве.

С к р ы д л о в а Е.В., О вырожденных конгруэнциях $(C\mathcal{L})_{1,2}$ в трехмерном проективном пространстве.

Т к а ч Г.П., Расслояемые пары конгруэнций фигур в A_3.

Ф е д е н к о А.С., Периодические однородные пространства классических групп серии A.

Ф у н т и к о в а Т.П., Вырожденные конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$

Х л я п о в а Е.А., О многообразиях $\{k+1, k, n\}$ в n-мерном аффинном пространстве.

Заказы направлять по адресу: 236000 г.Калининград (обл), ул.Чернышевского, 56-а, университет, кафедра геометрии.
Цена сборника – 60 коп.

Редакционная коллегия:

Подписано к печати 19/УІІ-74 г. КУ 06177.
Заказ 10314. Тираж 500. Формат 60x84/16.
Объем 14,0 п. л. Уч.-изд. л. 11,45. Цена 60 коп.

Типография издательства «Калининградская правда».