Библіотека Положительныхъ Наукъ, издаваемая Э. К. Гартье и К°.

ОГЮСТЪ КОНТЪ.

КУРСЪ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ФИЛОСОФІИ

(Auguste Comte,—Cours de Philosophie Positive).

Полный переводъ съ послѣдняго 5-го французскаго изданія подъ редакціею, съ примѣчаніями и статьями Профессоровъ **С. Е. Савича, С. П. Глазенапа, О. Д. Хвольсона, Д. И. Менделѣева, К. А. Тимирязева, А. С Лаппо-Данилевскаго, И. М. Гревса** и **Н. О. Лосскаго**, съ приложеніемъ статьи Профессора **Н. И. Карѣева.**

въ 6 томахъ.

Томъ I, Отдѣлъ 2-й.

Философія математики и механики подъ редакціей Приватъ-доцента Имп. Спб. Университета С. Е. Савича, лекціи 10—18 (конецъ) и введеніе къ I тому.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Книжный Магазинъ Т-ва „ПОСРЕДНИКЪ“
В. О., 8 линія. № 9.
1900.

Содержаніе 2 Отдѣла I тома:

Стр.

Приложеніе: Введеніе къ I тому Прив.-Доц. Имп. Спб. Университета **С. Е. Савича.** (Слѣдуетъ помѣстить въ началѣ тома).

10 лекція. Общій обзоръ геометріи 143

11 лекція. Общія соображенія о специальной или предварительной геометріи 162

12 лекція. Основная идея общей или аналитической геометріи 174

13 лекція. Общая геометрія двухъ измѣреній 191

14 лекція. Объ общей геометріи трехъ измѣреній 209

15 лекція. Философскія соображенія объ основныхъ принципахъ раціональной механики 221

16 лекція. Общій обзоръ статики 240

17 лекція. Общій обзоръ динамики 264

18 лекція. Общія теоремы раціональной механики 282

Заглавный листъ и оглавленіе къ I тому.

ОТЪ ИЗДАТЕЛЯ.

Переводы всѣхъ 6 томовъ были начаты въ одно и тоже время разными специальными сотрудниками. Нынѣ всѣ оканчиваются и 3 тома печатаются одновременно въ разныхъ типографіяхъ. Все изданіе окончится въ 1900 г.

Причины замедлившія противъ желанія издателя выходъ I тома, устранены въ отношеніи къ правильному выходу, въ краткихъ промежуткахъ, остальныхъ томовъ.

ОГЮСТЪ КОНТЪ.

КУРСЪ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ФИЛОСОФІИ.

Томъ I.

Библіотека Положительныхъ Наукъ, издаваемая Э. К. Гартье и К°.

ОГЮСТЪ КОНТЪ.

КУРСЪ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ФИЛОСОФІИ

(Auguste Comte,—Cours de Philosophie Positive).

Полный переводъ съ послѣдняго 5-го французскаго изданія подъ редакціею, съ примѣчаніями и статьями Профессоровъ **С. Е. Савича, С. П. Глазенапа, О. Д. Хвольсона, Д. И. Менделѣева, К. А. Тимирязева, А. С Лаппо-Данилевскаго, И. М. Гревса** и **Н. О. Лосскаго**, съ приложеніемъ статьи Профессора **Н. И. Карѣева**.

въ 6 томахъ.

Томъ I.

Философія Математики

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Книжный Магазинъ Т-ва „ПОСРЕДНИКЪ“
В. О., 8 линія. № 9.
1900.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 27 Марта 1900 г.

Оглавленіе I-го тома.

Стр.

От редактора перваго тома, Прив.-Доц. *С. Е. Савича* VII—XVI.
Предисловіе автора 1
1-я лекція. Цѣль этого курса, или общія соображенія о природѣ и значеніи положительной философіи . . 3
Синоптическая таблица курса положительной философіи. . . . . (къ стр. 25)
2-я лекція. Изложеніе плана этого курса, или общія соображенія объ іерархіи положительныхъ наукъ . . 25

Анализъ.

3-я лекція. Философскія соображенія о совокупности математическихъ наукъ 48
4-я лекція. Общій взглядъ на математическій анализъ . . 67
5-я лекція. Общія соображенія объ исчисленій прямыхъ функцій. 80
6-я лекція. Сравнительное изложеніе различныхъ общихъ точекъ зрѣнія, со которыхъ можно разсматривать исчисленіе косвенныхъ функцій. 92
7-я лекція. Общій обзоръ исчисленія косвенныхъ функцій. 111
8-я лекція. Общія соображенія о варьяціонномъ исчисленіи. 128
9-я лекція. Общія соображенія объ исчисленіи конечныхъ разностей 137

Геометрія.

10-я лекція. Общій обзоръ геометріи 143
11-я лекція. Общія соображенія о спеціальной или предварительной геометріи 162
12-я лекція. Основная идея общей или аналитической геометріи 174
13-я лекція. Общая геометрія двухъ измѣреній 191
14-я лекція. Объ общей геометріи трехъ измѣреній. . . . 209

Механика.

15-я лекція. Философскія соображенія объ основныхъ принципахъ раціональной механики 221
16-я лекція. Общій обзоръ статики 240
17-я лекція. Общій обзоръ динамики 264
18-я лекція. Общія теоремы раціональной механики 282

ОТЪ РЕДАКТОРА ПЕРВАГО ТОМА.

Принимая на себя редакцію той части курса положительной философіи Огюста Конта, которая относится къ наукамъ математическимъ — анализу, геометріи и механикѣ, — я имѣлъ въ виду снабдить переводъ подстрочными примѣчаніями, чтобы пояснить и гдѣ нужно исправить и дополнить изложеніе Конта.

Но за три четверти вѣка, протекшихъ со времени появленія труда Конта, математическія науки сильно подвинулись впередъ: накопилось много новаго матеріала, и самые принципы, лежащіе въ основаніи высшей математики, получили новое освѣщеніе и толкованіе; даже на понятіяхъ, относящихся къ элементарной алгебрѣ и геометріи, ясно отразился прогрессъ математической мысли. При такихъ условіяхъ комментаріи къ Конту должны были бы принять слишкомъ широкіе размѣры. Съ другой стороны изложеніе Конта, не смотря на его удивительный талантъ популяризаціи наиболѣе отвлеченныхъ математическихъ понятій и самыхъ сложныхъ результатовъ, достигнутыхъ наукой, едва ли будетъ доступно для лицъ, совершенно незнакомыхъ съ высшей математикой: въ такомъ случаѣ дополненія и исправленія тѣмъ менѣе могли бы разсчитывать хотя бы на самый ограниченный кругъ читателей не-математиковъ; послѣдніе же и сами въ большинствѣ случаевъ легко замѣтятъ всѣ существенные пробѣлы Конта. По этимъ соображеніямъ я рѣшился не дѣлать частныхъ замѣчаній по отдѣльнымъ пунктамъ изложенія Конта и ограничиться лишь краткой характеристикой воззрѣній Конта на основные вопросы математики; такое рѣшеніе казалось мнѣ тѣмъ болѣе правильнымъ, что прямыя ошибки, вкравшіяся въ изложеніи Конта, были довольно подробно указаны знаменитымъ французскимъ математикомъ Ж. Бертраномъ въ статьѣ, помѣщенной въ Revue de deux Mondes.

Отведя математикѣ обширное мѣсто въ своемъ курсѣ положительной философіи, Контъ самую философію математики понималъ совершенно иначе, чѣмъ понимается это обыкновенно современными учеными. Философское изложеніе математики состоитъ нынѣ главнымъ образомъ въ критикѣ основныхъ опредѣленій, положеній и аксіомъ, на которыхъ построена наука, и въ анализѣ методовъ дедукціи, ею примѣняемыхъ. Обобщеніе понятія о числѣ, начиная съ цѣлаго положительнаго числа и кончая, съ одной стороны, комплексными числами и кватерніонами, а съ другой — идеальными числами, строгое установленіе понятія о функціи, о предѣлѣ и т. д. составляютъ главные пункты, на которыхъ сосредоточивается въ настоящее время вниманіе философіи математики. Въ подтвержденіе такого взгляда можно указать на цѣлый рядъ сочиненій, посвященныхъ именно изложенію самыхъ первоначальныхъ понятій анализа, напр., Таннери „Введеніе въ теорію функцій отъ одной перемѣнной“ (1886 г.), Штольцъ „Лекціи по общей ариѳметикѣ“, Бирманъ „Теорія аналитическихъ функцій“ и т. д. Съ другой стороны критика геометрическихъ аксіомъ и разъясненіе смысла самыхъ первоначальныхъ элементовъ геометріи и составляетъ главный предметъ трудовъ знаменитаго соотечественника нашего Лобачевскаго и его многочисленныхъ комментаторовъ и толкователей.

Всѣ эти изслѣдованія вполнѣ входили бы въ составъ „положительной“ философіи, какъ ее понималъ Контъ, но во времена Конта указанные вопросы мало останавливали вниманіе математиковъ; отдѣльныя же попытки такого характера, сдѣланныя до Конта, или остались ему неизвѣстными, или не обратили на себя его вниманія. Контъ по этому принималъ всѣ бывшія въ то время ходячія опредѣленія и аксіомы и не искалъ строгаго ихъ обоснованія,—я имѣю здѣсь въ виду главнымъ образомъ разсужденія Конта по поводу мнимыхъ или комплексныхъ чиселъ (лекція V, стр. 88 и сл.).

Еще менѣе, чѣмъ догматически строгое изложеніе основныхъ понятій математики интересовалъ Конта генезисъ этихъ понятій; въ этомъ отношеніи онъ ограничивается только указаніемъ на происхожденіе понятія о пространствѣ и основныхъ геометрическихъ представленій о различныхъ геометрическихъ протяженностяхъ, т. е. о тѣлѣ, поверхности, линіи и точкѣ (лекція X, стр. 144 и сл.); онъ приписывалъ имъ исключительно эмпирическій характеръ и совершенно отрицалъ самую возможность представленія иныхъ протяженностей, кромѣ тѣла; точки, линіи и поверхностей суть для Конта тѣла, имѣющія три, два или одно изъ измѣреній на столько малыхъ, что вниманіе лица, мыслящаго о протяженности, не можетъ сосредоточиться на этихъ малыхъ измѣреніяхъ.

Не останавливаясь здѣсь на разборѣ этихъ взглядовъ Конта, позволяю себѣ указать читателю на замѣчанія, сдѣланныя по этому предмету профессоромъ Каринскимъ въ статьѣ его „Объ истинахъ самоочевидныхъ“.

Оставляя въ сторонѣ и догматическое установленіе основныхъ математическихъ понятій, и тѣмъ болѣе генезисъ ихъ, Контъ все свое вниманіе сосредоточиваетъ на ознакомленіи читателя съ главными фактами математическихъ наукъ, съ результатами, достигнутыми этими науками къ его времени. Болѣе всего его интересуетъ правильное ограниченіе предѣловъ различныхъ частей математики, установленіе цѣли и мѣста каждаго ея отдѣла, вообще систематизація накопившагося матеріала, а затѣмъ—краткое описаніе, если можно такъ сказать, пріемовъ рѣшенія главнѣйшихъ вопросовъ анализа, геометріи и механики.

Для характеристики объема математическихъ свѣдѣній, которыми обладалъ Контъ, или, по крайней мѣрѣ, которыми онъ подѣлился съ своими читателями, прежде всего слѣдуетъ указать, что Контъ, увлеченный своими философскими работами, хотя и занимался преподаваніемъ математики и, повидимому, останавливался на нѣкоторыхъ чисто математическихъ вопросахъ, но вообще не имѣлъ возможности внимательно слѣдить за дальнѣйшими успѣхами этой науки; такъ, напр., въ его изложенiи не встрѣчается указанiй на труды Гаусса и Абеля, появившiеся въ печати до изданiя курса положительной философiи.

Сравнивая объемъ излагаемыхъ Контомъ свѣдѣнiй по анализу и геометрiи со 2-мъ изданiемъ (1814 года) весьма извѣстнаго курса Лакруа „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral", можно легко провѣрить, что почти всѣ вопросы, разсмотрѣнные Контомъ, входили въ курсъ Лакруа, который въ свое время составлялъ почти энциклопедiю математическихъ знанiй, заключавшихся въ программахъ высшихъ учебныхъ заведенiй. Исключенiе представляютъ части собственно аналитической геометрiи, касающiяся системъ координатъ, уравненiй геометрическихъ мѣстъ, и т д,; надо при этомъ отмѣтить, что теорiя кривыхъ и поверхностей втораго порядка, составляющая нынѣ главный предметъ этой геометрiи, совсѣмъ не изложены въ курсѣ Конта. Подобнымъ же образомъ „Аналитическая механика" Лагранжа послужила основанiемъ для послѣдней части перваго тома.

Указанiя на классическiе труды по математикѣ, давшiе главный матерiалъ для философскихъ размышленiй Конта, въ достаточной мѣрѣ выяснятъ читателю съ внѣшней стороны содержанiе части курса Конта, посвященной изложенiю основанiй математики. Разсмотримъ теперь схему, въ которой Контъ расположилъ весь указанный матерiалъ.

Контъ всю математику дѣлилъ сперва на два отдѣла: на абстрактную и на конкретную; къ первой онъ относилъ собственно анализъ (исчисленiе), а ко второй—геометрiю, механику и термологiю; послѣднюю часть онъ излагалъ вмѣстѣ съ физикой только изъ опасенiя, чтобы сильное отступленiе отъ принятаго порядка не повредило въ общемъ мнѣнiи его курсу.

Предметъ абстрактной математики, по мысли Конта, заключается въ измѣренiи однихъ величинъ, неизвѣстныхъ, съ помощью другихъ, извѣстныхъ, на основанiи точныхъ соотношенiй, существующихъ между ними. Эти точныя соотношенiя между величинами измѣренными (извѣстными) и подлежащими измѣренiю (неизвѣстными) должны быть непремѣнно выражены черезъ опредѣленныя простыя операцiи (сложенiе, вычитанiе, умноженiе и т. д.), число которыхъ Контъ ограничиваетъ десятью. Установленiе зависимостей между неизвѣстными и извѣстными величинами, или, другими словами, составленiе уравненiй между ними есть задача конкретной математики, рѣшенiе же уравненiй—задача абстракной математики. Теоретически, говоритъ Контъ, конкретная математика распадается на столько частей, сколько можно представить себѣ группъ естественныхъ явленiй; въ дѣйствительности, по мнѣнiю Конта, въ его время она состояла только изъ трехъ частей—геометрiи, механики и термологiи; можно надѣяться, говоритъ Контъ, что неорганическая физика войдетъ современемъ въ составъ конкретной математики, но нѣтъ никакого положительнаго основанiя расчитывать на распространенiе приложенiй анализа за означенные предѣлы.

Рѣшить уравненiе—значитъ указать явнымъ образомъ, какъ искомая величина выражается черезъ данныя. Найти численное значенiе искомой величины съ помощью явнаго выраженiя ея черезъ данныя,—значенiе, соотвѣтствующее опредѣленнымъ численнымъ значенiямъ данныхъ величинъ—составляетъ задачу ариѳметики; самое же рѣшенiе уравненiй есть дѣло алгебры въ обширномъ смыслѣ этого слова; предметъ алгебры, по опредѣленію Конта, состоитъ въ обращеніи неявныхъ зависимостей неизвѣстныхъ величинъ отъ извѣстныхъ въ явныя.

Ариѳметика и алгебра исчерпывали бы все содержаніе абстрактной математики, если бы составленіе уравненій для различныхъ классовъ естественныхъ явленій,—такихъ уравненій, которыя заключали бы только данныя и искомыя величины,—не встрѣчало никакихъ затрудненій на практикѣ.

Но сложность нѣкоторыхъ естественныхъ явленій и сложность тѣхъ зависимостей между измѣренными и подлежащими измѣренію величинами, которыя соотвѣтствуютъ этимъ явленіямъ, съ одной стороны, и ограниченность числа операцій, съ помощью которыхъ указанныя зависимости должны выразиться, создаетъ большія затрудненія для составленія уравненій и заставляетъ математиковъ прибѣгнуть къ введенію въ уравненія, выражающія законы естественныхъ явленій, особыхъ вспомогательныхъ величинъ. Абстрактной математикѣ приходится имѣть дѣло такимъ образомъ съ двумя категоріями уравненій — въ однихъ заключаются только неизвѣстныя и данныя, въ другихъ же, сверхъ того, еще и вспомогательныя величины. Рѣшеніе уравненій перваго класса составляетъ, какъ указано выше, предметъ алгебры или прямаго исчисленія функцій. Рѣшеніе же втораго класса уравненій распадается на двѣ части—исключеніе вспомогательныхъ величинъ, т. е. приведеніе данныхъ зависимостей къ другимъ, заключающимъ только искомыя и данныя величины, и затѣмъ—рѣшеніе преобразованныхъ такимъ образомъ уравненій по обычнымъ пріемамъ алгебры. Первая часть рѣшенія уравненій, заключающихъ вспомогательныя величины, составляетъ предметъ особой отрасли математики—косвеннаго исчисленія функцій. Составъ косвеннаго исчисленія опредѣляется характеромъ тѣхъ вспомогательныхъ величинъ, которыя вводятся при составленіи уравненій, т. е. такъ называемыхъ безконечно малыхъ приращеній и предѣловъ отношеній этихъ приращеній или производныхъ.

Въ современномъ своемъ видѣ исчисленіе косвенное распадается на три части: дифференціальное, интегральное и варьяціонное исчисленіе; задача перваго есть установленіе зависимости между вспомогательными величинами, соотвѣтственно существующей зависимости между самыми величинами; интегральное исчисленіе представляетъ главную часть исчисленія косвенныхъ функцій; его непосредственной задачей и является переходъ отъ уравненій, заключающихъ вспомогательныя величины, къ уравненіямъ между подлежащими непосредственному изслѣдованію величинами. Варьяціонное исчисленіе преслѣдуетъ еще болѣе высокую и болѣе трудную задачу—сдѣлать предметомъ исчисленій самое составленіе уравненій — насколько, конечно, эта задача можетъ быть рѣшаема независимо отъ изученія законовъ естественныхъ явленій.

Не останавливаясь на описаніи дальнѣйшихъ подраздѣленій, которыя Контъ вводитъ при изложеніи анализа, считаю необходимымъ отмѣтить, что двѣ крупныя отрасли математическаго анализа не нашли себѣ мѣста въ схемѣ Конта — теорія чиселъ и теорія вѣроятностей. О теоріи чиселъ Контъ упоминаетъ мелькомъ, говоря о численномъ рѣшеніи алгебраическихъ уравненій; свойства чиселъ, независящія отъ системы счисленія составляютъ, по опредѣленію Конта, предметъ этой науки, являющейся только дополненіемъ къ обыкновенной ариѳметикѣ, вспомогательнымъ орудіемъ для численнаго рѣшенія уравненій.

Въ *численномъ* рѣшеніи алгебраическихъ уравненій теоріи чиселъ, какъ извѣстно, не играетъ никакой роли и не имѣетъ съ ними даже внѣшней связи. Незнакомство Конта съ этой теоріей, не входившей въ програму политехнической школы, и является конечно главной причиной такой существенной ошибки. Этимъ же обстоятельствомъ отчасти объясняется и то обстоятельство, почему Контъ такъ мало обратилъ вниманія на критику понятія о числѣ вообще.

Отсутствіе въ общей системѣ математическаго анализа теоріи вѣроятностей Контъ объясняетъ во второмъ томѣ своего труда незначительностью практическихъ примѣненій теоріи; вообще же этотъ пропускъ приписывается чисто личнымъ соображеніямъ — именно извѣстному нерасположенію Конта къ Лапласу, автору трактата о теоріи вѣроятностей, который по справедливости до настоящаго времени является главнымъ сочиненіемъ по этому предмету.

Но нельзя не отмѣтить здѣсь и того обстоятельства, что теорія вѣроятностей не находитъ себѣ мѣста въ схемѣ, построенной Контомъ для систематизаціи математическаго анализа. Контъ не рѣшался отнести теорію вѣроятностей ни къ конкретной математикѣ, потому что основныя понятія теоріи вѣроятностей носятъ чисто спекулятивный, а не конкретный, эмпирическій характеръ, ни къ абстрактной, ибо теорія вѣроятностей совсѣмъ не занимается разрѣшеніемъ уравненій, составленныхъ прочими отдѣлами конкретной математики, т. е. геометріей, механикой и термологіей.

Пропускъ теоріи вѣроятностей самъ Контъ во II томѣ своего курса оправдываетъ, какъ я уже сказалъ, главнымъ образомъ малымъ числомъ приложеній, которыя эта теорія можетъ имѣть. По этому поводу онъ высказывается совершенно скептически о возможности приложенія математическаго анализа къ наукамъ соціальнымъ и вообще къ органической физикѣ. Огромное значеніе, пріобрѣтенное статистическимъ методомъ изслѣдованія, построенномъ на теоріи вѣроятностей, и колоссальное развитіе операцій по страхованію жизни, основанныхъ исключительно на той же теоріи, представляетъ полное опроверженіе чрезмѣрному въ этомъ отношеніи скептицизму Конта и еще болѣе усиливаетъ значеніе пропуска, допущеннаго имъ, можетъ быть, дѣйствительно по причинамъ совершенно ненаучнаго характера.

Чтобы хотя въ самыхъ общихъ чертахъ характеризовать воззрѣнія Конта на основные вопросы математики, я остановлюсь на двухъ-трехъ пунктахъ, имѣющихъ болѣе общее значеніе,

Въ этомъ отношеніи на первомъ мѣстѣ слѣдуетъ поставить разсужденіе Конта о мнимыхъ и отрицательныхъ числахъ.—Духъ математическаго анализа заключается, говоритъ Контъ, именно въ томъ, чтобы разсматривать величины исключительно съ точки зрѣнія ихъ взаимныхъ отношеній и независимо отъ всякой мысли объ опредѣленномъ численномъ значеніи ихъ (valeur déterminée). На этомъ основаніи математикъ обязанъ допускать безразлично всякія выраженія, которыя могутъ встрѣтиться при алгебраическихъ преобразованіяхъ, иначе, говоритъ Контъ, пострадала бы общность его разсужденій; всѣ затрудненія при введеніи мнимыхъ величинъ возникаютъ исключительно отъ смѣшенія понятій о зависимости между величинами съ понятіемъ о ихъ численномъ значеніи или алгебраической точки зрѣнія съ ариѳметической. Тоже разсужденіе, по словамъ Конта, вполнѣ разрѣшаетъ, по крайней мѣрѣ, съ чисто умозрительной точки зрѣнія, и всѣ вопросы, возникающіе относительно отрицательныхъ чиселъ; всѣ же сомнѣнія въ удовлетворительности послѣдняго объясненія носятъ метафизическій характеръ.

Такой взглядъ не устранилъ, однако, сомнѣній математиковъ; упорныя размышленія привели къ иному и болѣе правильному обоснованію операцій надъ мнимыми числами, и теперь метафизическими кажутся ссылки Конта на духъ математическаго анализа, будто бы требовавшій распространенія безъ всякихъ дополнительныхъ разсужденій операцій надъ обыкновенными числами и на числа комплексныя.

Очень занималъ Конта вопросъ объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій любой степени. Указавъ на современное положеніе этой теоріи, Контъ подробно останавливается на вопросѣ о томъ, возможно ли такое рѣшеніе для уравненій всякой степени; при этомъ онъ склонялся къ отрицательному отвѣту, однако, по соображеніямъ, носящимъ отчасти метафизическій характеръ, столь ненавистный ему; именно Контъ находилъ, что сложность формы, въ которой должно представиться рѣшеніе, дѣлаетъ его недоступнымъ для слабыхъ силъ ума человѣческаго. Доказательство Абеля невозможности алгебраическаго рѣшенія уравненій степени выше четвертой, хотя и напечатанное нѣсколько раньше выхода въ свѣтъ курса Конта, было ему еще неизвѣстно.

Контъ очень внимательно останавливался на анализѣ понятія объ уравненіи и функціи, т. е. о видѣ или характерѣ зависимости одной величины отъ другой; онъ пытался установить понятіе объ аналитической функціи—т. е. рѣшить вопросъ, въ настоящее время еще останавливающій вниманіе математиковъ. Контъ однако считалъ этотъ вопросъ гораздо проще, чѣмъ онъ на самомъ дѣлѣ оказывается, и рѣшеніе, которое онъ даетъ этому вопросу, неудовлетворительно. Контъ говоритъ именно, что въ выраженіяхъ зависимости однихъ величинъ отъ другихъ могутъ входить въ любой комбинаціи десять опредѣленныхъ операцій (сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень, извлеченіе корня, логариѳмированіе, показательныя, прямыя и обратныя круговыя функціи), но при этомъ не оговариваетъ, должно ли въ каждое уравненіе входить конечное число такихъ операцій и комбинацій ихъ, или число операцій и комбинацій остается неограниченнымъ; изъ дальнѣйшихъ разсужденій Конта нельзя выяснить, которое изъ этихъ рѣшеній онъ самъ принималъ. Онъ допускаетъ, съ одной стороны, и безконечные ряды и говоритъ о разложеніи функцій въ ряды, а въ такомъ случаѣ нѣкоторыя изъ указанныхъ выше простѣйшихъ функцій (напр. хотя бы тригонометрическія) могутъ быть выражены безчисленными повтореніями другихъ простѣйшихъ операцій. Съ другой стороны, если ограничить понятіе о функціи только конечнымъ числомъ операцій, названныхъ Контомъ основными, то его опредѣленіе явится узкимъ, такъ какъ подъ него не подойдутъ тѣ разложенія въ ряды, о которымъ говоритъ самъ Контъ.

Несмотря на недостатки изложеннаго опредѣленія понятія объ аналитической функціи, нельзя не признать, что Контъ совершенно правильно указалъ на главное затрудненіе, возникающее при выраженіи законовъ естественныхъ явленій математическими формулами—именно на ограниченность числа вышедшихъ въобиходъ функцій, свойства которыхъ были бы и просты, и хорошо всѣмъ извѣстны.

Заканчивая свое разсужденіе объ аналитической функціи, Контъ останавливается и на вопросѣ, возможно ли ожидать введенія въ анализъ новыхъ функцій, которыя давали бы возможность расширить область аналитическихъ уравненій. И въ этомъ отношеніи Контъ склоняется къ отрицательному отвѣту, опровергнутому, однако, дальнѣйшимъ ходомъ науки,—достаточно въ этомъ отношеніи указать хотя бы на то положеніе, которое нынѣ занимаютъ въ анализѣ эллиптическія функціи.

Изложеніе трансцендентнаго анализа занимаетъ три главы перваго тома, почти $^1/_6$ часть его. Контъ останавливается отдѣльно на воззрѣніяхъ Лейбница, Ньютона и Лагранжа; онъ считаетъ концепцію послѣдняго наиболѣе философской, хотя и наименѣе удобной для приложенія; наоборотъ, система Лейбница, хотя она и нашла себѣ наибольшее примѣненіе, кажется ему совершенно нефилософской, даже нелогичной. Теорія Ньютона занимаетъ, по мнѣнію Конта, среднее мѣсто между этими двумя системами. Контъ ожидаетъ, что въ дальнѣйшемъ должна первенствующее мѣсто занять теорія Лагранжа, прочія же сохранятъ только историческое значеніе. Такое предпочтеніе системѣ Лагранжа Контъ основываетъ на томъ, что въ послѣдней трансцендентный анализъ приводится къ обыкновенному алгебраическому анализу, и такимъ образомъ изъ абстрактной математики изгоняется самое понятіе о предѣлахъ, которое представляется ему нефилософскимъ. Дальнѣйшее развитіе науки пока не оправдало еще ожиданій Конта; понятіе о предѣлѣ не изгнано изъ анализа; однако, отличительной чертой современнаго научнаго изложенія теоріи предѣловъ именно и является стремленіе придать этой теоріи чисто алгебрическій характеръ.

Дальнѣйшіе успѣхи косвеннаго исчисленія — т. е. анализа трансцендентнаго—Контъ ожидалъ отъ веденія въ это исчисленіе новыхъ вспомогательныхъ величинъ. Ничто, говоритъ Контъ, не можетъ заставить насъ навсегда ограничиться разсмотрѣніемъ только безконечно малыхъ величинъ и предѣловъ; напротивъ, возможность при составленіи уравненій, которыя должны выражать законы естественныхъ явленій, пользоваться новыми классами величинъ будетъ способствовать расширенію математическаго изслѣдованія законовъ природы; исчисленія, связанныя съ новыми величинами, могутъ открыть новые горизонты для всего математическаго анализа.

Воззрѣнія Конта на геометрію можно привести къ слѣдующимъ положеніямъ: конечная задача геометріи—измѣреніе длинъ, площадей и объемовъ; главное содержаніе ея—изученіе свойствъ геометрическихъ протяженностей, изученіе, которое является только средствомъ для достиженія основной ея цѣли. Геометрія распадается на двѣ существенно различныя части: свойства прямой линіи и прямолинейныхъ фигуръ и тѣлъ должны быть изучены непосредственно; здѣсь геометрія является чисто естественной наукой; теорія прямой линіи и фигуръ, изъ нея составленныхъ, служитъ основаніемъ всей геометріи, такъ какъ она даетъ возможность установить уравненія между измѣренными и подлежащими измѣренію величинами, которыя должны послужить предметомъ изслѣдованія абстрактной части математики.

Всѣ же прочіе вопросы геометріи могутъ быть приведены къ чисто аналитическимъ задачамъ: величина, положеніе и форма геометрическихъ протяженностей могутъ быть изучаемы совершенно отвлеченно, съ помощью чиселъ; приводимость вопроса о величинѣ въ геометріи къ аналитическомому вопросу о числахъ очевидна; изслѣдованіе положенія приводится къ тому же вопросу съ помощью различныхъ координатныхъ системъ, форма же геометрическихъ протяжимостей является сама по себѣ лишь слѣдствіемъ взаимнаго расположенія точекъ фигуры.

Итакъ, въ геометріи, на основаніи эмпирическихъ данныхъ, изучается прямая линія и фигуры, ею образуемыя. Эта теорія даетъ возможность составить уравненія, въ которыхъ свойства протяженностей—величина, положеніе и форма—выражаются алгебраическими соотношеніями, и вся геометрія затѣмъ, такъ сказать, поглощается анализомъ.

Выше я уже указывалъ, что Контъ, признавая геометрію за естественную науку, основанную на наблюденіи, не останавливается на вопросѣ, какія именно положенія геометріи носятъ чисто эмпирическій характеръ, и какія являются результатами дедукціи, положеніями науки чисто спекулятивной. Теорія прямолинейныхъ фигуръ и тѣлъ, составляя ту часть геометріи, которая, по мнѣнію Конта, должна быть изучаема безъ помощи анализа, конечно не вся состоитъ изъ данныхъ, полученныхъ эмпирическимъ путемъ.

Существенною особенностью воззрѣній Конта на геометрію является совершенное исключеніе построенія, какъ метода и какъ цѣли геометрическихъ изслѣдованій. Надо признать, что въ этомъ отношеніи взглядъ Конта до сихъ поръ остается господствующимъ въ области чистой математики, и только въ прикладной математикѣ построительные методы начинаютъ вновь отвоевывать ту роль, которою они пользовались въ изслѣдованіяхъ геометровъ съ древнихъ временъ до восемнадцатаго вѣка.

Съ точки зрѣнія метода геометрію Контъ дѣлитъ на двѣ части: геометрія спеціальная или геометрія древнихъ изучаетъ формы, каждую отдѣльно, стараясь послѣдовательно раскрыть всѣ ихъ свойства; геометрія же новая или общая разсматриваетъ вопросы, поставленные относительно всѣхъ формъ вообще. Первый способъ изслѣдованія долженъ быть сохраненъ, по мнѣнію Конта, только по отношенію къ геометріи прямой линіи, прямолинейныхъ фигуръ и тѣлъ; всѣ же остальныя изслѣдованія должны быть поставлены по методу новой геометріи. Приложеніе анализа, которое обыкновенно считается отличительнымъ признакомъ новой или декартовой геометріи, не составляетъ, по мнѣнію Конта, характерной черты отличія между геометріею новой и древней. Контъ придавалъ большое значеніе изложенію геометріи по названному имъ новымъ методу и составилъ даже отдѣльный учебникъ „Аналитической геометріи“, гдѣ пытался провести полностью свою мысль. Какъ въ указанномъ учебникѣ, такъ и въ курсѣ философіи онъ останавливался послѣдовательно на слѣдующихъ вопросахъ, которые онъ считалъ имѣющими общій интересъ для всѣхъ формъ, и потому являющимися основными вопросами новой геометріи: на опредѣленіи числа точекъ, необходимыхъ для построенія кривой, на составленіи уравненій касательныхъ, на опредѣленіи центра и діаметровъ, на соприкасаніи, на вычисленіи площадей и дугъ; подобные вопросы разсмотрѣны имъ и по отношеніи по поверхностямъ.

Примѣръ Конта въ отношеніи методологическаго дѣленія геометріи не нашелъ прямыхъ подражателей, и до сихъ поръ дѣленіе геометріи на три части—собственно геометріи, къ которой кромѣ элементарной, присоединяется и геометрія высшая, на аналитическую геометрію (т. е. на приложеніе алгебры къ геометріи) и на приложеніе трансцендентнаго анализа къ геометріи сохраняется въ математикѣ; первыя два излагатся по тому пріему, который Контъ назвалъ спеціальнымъ, а послѣдній — по общему; характернымъ же признакомъ, отдѣляющимъ древнюю геометрію отъ новой, считается именно приложеніе анализа.

Изложеніе механики Контъ начинаетъ съ доказательства того совершенно правильнаго положенія, что механика, какъ наука о движеніи, не можетъ быть сведена къ чистому анализу и навсегда должна сохранить характеръ естественной науки, основанной на извѣстныхъ общихъ данныхъ, установленныхъ изъ наблюденія. Въ предметъ механики не входитъ, говоритъ Контъ, изслѣдованіе свойствъ силъ, производящихъ движенія; она занимается опредѣленіемъ результатовъ совмѣстнаго воздѣйствія нѣсколькихъ силъ на тѣло, когда дѣйствіе каждой отдѣльной силы извѣстно, или наоборотъ—по дѣйствительному движенію опредѣляетъ тѣ простыя, изъ которыхъ составлено сложное движеніе.

Свойство инерціи, приписываемое нами тѣламъ, есть, по мнѣнію Конта, совершенная фикція, безусловно противорѣчащая результатамъ наблюденія, показывающаго, что тѣла не находятся въ пассивномъ состояніи, а постоянно воздѣйствуютъ одно на другое; введеніе свойства инерціи въ механику только потому не приводитъ къ абсурду, что тамъ разсматривается движеніе независимо отъ причинъ, его порождающихъ, и что поэтому всякое воздѣйствіе тѣлъ одно на другое можно замѣнить внѣшней силой, приписывая самому тѣлу совершенно пассивное состояніе.

Свойство инерціи Контъ отличаетъ отъ закона инерціи, представляющаго основной законъ природы, подтверждаемый нашими наблюденіями. Вторымъ закономъ движенія Контъ считаетъ законъ Ньютона равенства дѣйствія противодѣйствію, а третьимъ—принципъ независимости или сосуществованія движенія (сложеніе движеній). Принципъ же пропорціональности силъ приращенію скорости (ускоренію) Контъ считаетъ только слѣдствіемъ послѣдняго закона.

Самыя силы, разсматриваемыя въ механикѣ, Контъ дѣлитъ на *мгновенныя*, дѣйствующія какъ толчки, т. е. внезапно измѣняющія скорость движенія, но затѣмъ уже оставляющія ее безъ перемѣны, и на *ускорительныя*, которыя въ теченіе нѣкотораго времени измѣняютъ послѣдовательно *скорость движенія*.

На указанныхъ трехъ физическихъ законахъ движенія и изложенныхъ опредѣленіяхъ и основывается вся теоретическая механика, которую Контъ дѣлитъ сперва на статику и динамику, а затѣмъ на механику твердыхъ и механику жидкихъ тѣлъ.

Статика можетъ быть, говоритъ Контъ, трактована или самостоятельно, на основаніи опредѣленнаго и достаточно общаго отдѣльнаго принципа равновѣсія, или какъ частный случай той части динамики, которая занимается движеніемъ, порождаемымъ силами мгновенными.

Придавая извѣстное значеніе послѣднему методу, Контъ отдаетъ съ чисто философской точки зрѣнія предпочтеніе собственно статическому методу и считаетъ, что *принципъ возможныхъ скоростей*, введенный Лагранжемъ въ механику, является достаточно общимъ и совершенно самостоятельнымъ принципомъ статики, при чемъ доказательства Лагранжа считаетъ окончательно устраняющимъ всякія возраженія противъ этого принципа.

Переходя къ динамикѣ, Контъ, установивъ извѣстныя зависимости между пространствомъ, временемъ, скоростью и ускореніемъ, останавливается довольно долго надъ теоріей *уподобленія* движеній; онъ сравниваетъ такое уподобленіе съ соприкасаніемъ кривыхъ, и указываетъ, что съ этой точки зрѣнія изученіе движеній производилось бы путемъ сравненія его съ простѣйшимъ, наиболѣе близкимъ къ нему движеніемъ.

Затѣмъ Контъ устанавливаетъ, что всѣ уравненiя механики могутъ быть связаны въ одну общую формулу на основанiи принципа д'Аламбера.

Послѣднюю главу перваго тома Контъ посвящаетъ изложенiю открытыхъ геометрами основныхъ законовъ равновѣсiя и движенiя; эти общiя теоремы механики Контъ сводитъ къ слѣдующимъ пунктамъ: условiя равновѣсiя системъ и условiя устойчивости; принципъ сохраненiя движенiя центра тяжести; принципъ площадей, живыхъ силъ и неизмѣняемой площади; затѣмъ принципъ наименьшаго дѣйствiя и сосуществованiя малыхъ качанiй.

С. Савичъ.

Десятая лекція.

Общій обзоръ геометріи.

Послѣ общаго объясненія, приведеннаго въ третьей лекціи относительно философскаго характера конкретной математики, и сопоставленія его съ характеромъ абстрактной математики, мнѣ не нужно здѣсь доказывать особо, что на геометрію слѣдуетъ смотрѣть какъ на настоящую естественную науку, которая только гораздо проще и потому гораздо совершеннѣе, чѣмъ всякая другая. Это неизбѣжное превосходство геометріи достигнуто въ сущности благодаря примѣненію математическаго анализа,—примѣненію, для котораго геометрія представляетъ особыя удобства,—и обыкновенно вводитъ въ заблужденіе относительно истинной природы этой основной науки, признаваемой нынѣ большинствомъ за науку чисто раціональную, совершенно независящую отъ наблюденія. Тѣмъ не менѣе для всякаго, кто со вниманіемъ разсмотритъ характеръ геометрическихъ разсужденій, даже при современномъ состояніи абстрактной геометріи очевидно, что, хотя изучаемые тамъ факты связаны между собою гораздо тѣснѣе, чѣмъ относящіеся ко всѣмъ другимъ наукамъ, все таки по отношенію къ каждому тѣлу, изслѣдуемому геометрами, всегда существуетъ извѣстное число первоначальныхъ явленій, которыя не устанавливаются разсужденіемъ, могутъ быть построены слѣдовательно только на наблюденіи и составляютъ необходимое основаніе для всѣхъ другихъ выводовъ. На общее заблужденіе въ этомъ отношеніи надо смотрѣть, какъ на остатокъ вліянія духа метафизики, такъ долго господствовавшаго даже въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Независимо отъ своего логическаго значенія, этотъ ложный взглядъ постоянно представляетъ огромныя неудобства въ приложеніяхъ раціональной геометріи, такъ какъ затрудняетъ переходъ отъ конкретнаго къ абстрактному.

Научное превосходство геометріи зависитъ вообще отъ того, что разсматриваемыя ею явленія по необходимости наиболѣе общи и наиболѣе просты изъ всѣхъ. Не только всѣ тѣла въ природѣ, очевидно, могутъ служить предметомъ какъ геометрическихъ такъ и механическихъ изслѣдованій, но кромѣ того, явленія геометрическія имѣли-бы мѣсто, если даже предположить, что всѣ части вселенной остаются неподвижными. Геометрія, такимъ образомъ, по своей природѣ представляетъ большую общность, чѣмъ механика. Въ тоже время ея явленія проще, такъ какъ они, очевидно, не зависятъ отъ явленій механическихъ въ то время, какъ послѣднія по необходимости усложняются первыми.

Тоже самое имѣетъ мѣсто, если сравнить геометрію съ абстрактной термологіей, которую нынѣ, послѣ работъ г. Фурье, можно считать, какъ я указалъ въ третьей лекціи, за новую общую вѣтвь конкретной математики. Дѣйствительно, явленія термическія, разсматриваемыя даже независимо отъ динамическихъ явленій, почти постоянно сопровождающихъ ихъ, особенно въ жидкихъ тѣлахъ, по необходимости зависятъ отъ геометрическихъ обстоятельствъ, такъ какъ форма тѣлъ сильно вліяетъ на распредѣленіе теплоты.

По всѣмъ этимъ различнымъ соображеніямъ мы въ предъидущемъ должны были поставить геометрію на первомъ мѣстѣ въ конкретной математикѣ, такъ какъ изученіе ея, кромѣ самостоятельнаго его значенія, служитъ еще необходимымъ основаніемъ для остальныхъ частей математики.

Прежде чѣмъ приступить непосредственно къ философскому изученію различныхъ изслѣдованій, образующихъ содержаніе современной геометріи, нужно составить себѣ ясное и точное представленіе объ общемъ назначеніи этой науки, разсматривая ее во всей совокупности. Въ этомъ и заключается предметъ настоящей лекціи.

Обыкновенно геометрію опредѣляютъ очень неясно и совершенно неправильно, ограничиваясь представленіемъ ея какъ *науки о протяженности*. Это опредѣленіе слѣдовало бы прежде всего улучшить, указавъ для большей точности, что геометрія имѣетъ цѣлью *измѣреніе* протяженности. Но и такое опредѣленіе, хотя въ сущности и точное, было-бы само по себѣ недостаточно, ибо столь неопредѣленное указаніе совсѣмъ не можетъ познакомить съ истиннымъ общимъ характеромъ геометріи.

Чтобы достичъ этой цѣли, я считаю нужнымъ предварительно разъяснить два основныя понятія, очень простыя сами по себѣ, но чрезвычайно затемненныя примѣненіемъ метафизическихъ соображеній.

На первомъ мѣстѣ я ставлю понятіе о *пространствѣ*, послужившее для метафизиковъ предметомъ стольких софистическихъ разсужденій и такихъ пустыхъ и дѣтскихъ споровъ. Если это понятіе привести къ положительному его смыслу, то окажется, что оно состоитъ просто въ томъ, что вмѣсто разсмотрѣнія протяженности въ самыхъ тѣлахъ, мы представляемъ ихъ въ нѣкоторой неопредѣленной средѣ, которая, по нашему предположенію, заключаетъ въ себѣ всѣ тѣла вселенной. Это понятіе возникаетъ естественнымъ образомъ изъ наблюденія, именно какъ представленіе объ *отпечаткѣ*, который тѣло, помѣщенное въ жидкость, оставляетъ въ ней. Дѣйствительно, ясно, что съ геометрической точки зрѣнія такой *отпечатокъ* можетъ быть подставленъ вмѣсто самого тѣла, и разсужденія наши ни въ чемъ не измѣнятся.

Что же касается физической природы этаго неопредѣленнаго *пространства*, то для большей простоты мы должны представлять его себѣ подобнымъ той дѣйствительной средѣ, въ которой мы живемъ, такъ что если бы эта среда была не газообразной, а жидкой, то мы и геометрическое *пространство* представляли бы себѣ жидкимъ. Это обстоятельство, однако, очевидно имѣетъ совершенно второстепенное значеніе и и главная цѣль подобнаго представленія—дать намъ только возможность разсматривать протяженность независимо отъ самого тѣла. Легко понять à priori важность этого основнаго представленія, такъ какъ оно позволяетъ намъ изучать геометрическія явленія сами по себѣ, отбросивъ всѣ другія явленія, постоянно сопровождающія первыя въ тѣлахъ физическихъ, но не имѣющія однако на нихъ ни какого вліянія. Прочная постановка подобнаго отвлеченія должна считаться первымъ шагомъ на пути раціональнаго изученія геометріи, которое было бы невозможно, если бы намъ необходимо было вмѣстѣ съ формой и величиной тѣлъ принимать во вниманіе и всѣ другія ихъ физическія свойства. Примѣненіе подобной гипотезы—самой древней, можетъ быть, философской идеи, созданной человѣческимъ духомъ—настолько стало теперь обычнымъ, что намъ трудно точно измѣрить все ея значеніе и оцѣнить послѣдствія, которыя бы имѣло бы ея устраненіе.

Геометрическія соображенія, получивъ указаннымъ образомъ абстрактный характеръ, сдѣлались не только проще, но и пріобрѣли большую общность. До тѣхъ поръ, пока протяженность разсматривалась въ связи съ самыми тѣлами, за предметъ изслѣдованія можно было брать только дѣйствительно существующія въ природѣ формы, что чрезвычайно ограничивало поле геометрическихъ изслѣдованій. Наоборотъ, представляя себѣ протяженность въ *пространствѣ*, человѣческій духъ можетъ разсматривать всѣ формы, которыя только возможно вообразить; это обобщеніе необходимо, чтобы дать геометріи совершенно раціональный характеръ.

Второе геометрическое представленіе, которое мы должны предварительно разсмотрѣть, есть представленіе о различныхъ видахъ протяженности, обозначаемыхъ словами *тѣло*, *) *поверхность*, *линія* и даже *точка*, обычное объясненіе коихъ такъ мало удовлетворительно.

Хотя, очевидно, невозможно вообразить себѣ какую нибудь протяженность, лишенную безусловно хотя-бы одного изъ трехъ основныхъ измѣреній, тѣмъ не менѣе неоспоримо, что во множествѣ случаевъ, имѣющихъ даже непосредственное практическое значеніе, геометрическія задачи зависятъ только отъ двухъ измѣреній, разсматриваемыхъ отдѣльно отъ третьяго, и даже отъ одного измѣренія, разсматриваемаго отдѣльно отъ двухъ другихъ. Съ другой стороны, помимо указаннаго прямого основанія, изученіе протяженности одного измѣренія, а затѣмъ двухъ измѣреній является, очевидно, необходимой подготовительной ступенью для облегченія изученія собственно тѣлъ, т. е. тѣлъ трехъ измѣреній, непосредственное изслѣдованіе которыхъ было бы слишкомъ сложно. Въ силу только что изложенныхъ двухъ общихъ соображеній геометры вынуждены разсматривать отдѣльно протяженности по отношенію къ одному, двумъ или всѣмъ тремъ измѣреніямъ.

Человѣческій духъ создалъ себѣ общія понятія о *поверхности* и *линіи* именно съ тѣмъ, чтобы имѣть возможность постоянно сосредоточивать вниманіе на протяженности только одного или двухъ измѣреній. Гиперболическія выраженія, обыкновенно употребляемые геометрами для опредѣленія этихъ понятій, приводятъ къ неправильному

*) Лакруа правильно возражаетъ противъ выраженія „твердое тѣло“ (Solide) принятаго у геометровъ для обозначенія тѣла вообще. Дѣйствительно, очевидно, что, когда мы хотимъ разсмотрѣть отдѣльно нѣкоторую часть неопредѣленнаго *пространства*, представляющагося газообразнымъ, то мы въ воображеніи дѣлаемъ твердою внѣшнюю его оболочку, такъ что для нашего ума *линія* и *поверхность*—такія-же *твердыя тѣла*, какъ и тѣло вообще. Можно даже замѣтить, что чаще всего, дабы легче представить себѣ, какъ тѣла входятъ одно въ другое, мы должны воображать *тѣла* пустыми внутри, что особенно ясно показываетъ неудобство употребленія термина *твердое тѣло*.

ихъ пониманію. Назначеніе понятій о поверхности и линіи, разсматриваемыхъ самихъ по себѣ, состоитъ исключительно въ томъ, чтобы дать намъ возможность съ большей легкостью разсуждать объ этихъ двухъ видахъ протяженности, совершенно отстраняя все то, что здѣсь не должно быть принимаемо въ соображеніе. Достаточно съ этой цѣлью вообразить себѣ, что измѣреніе, которое желательно исключить, уменьшается все болѣе и болѣе, въ то время какъ другія измѣренія остаются безъ измѣненія, и доходитъ до такихъ предѣловъ малости, что уже неможетъ сосредоточить на себѣ нашего вниманія. Именно этимъ способомъ естественно пріобрѣтается истинное понятіе о *поверхности*, а повтореніемъ той-же операціи—т. е. устраненіемъ ширины подобному тому, какъ раньше была устроена глубина,—и понятіе о *линіи*. Наконецъ, если повторить этотъ процессъ еще разъ, мы дойдемъ до понятія о *точкѣ* или о протяженности, разсматриваемой только относительно мѣста, совершенно независимо отъ величины ея и по этому предназначенной исключительно для точнаго указанія на положеніе. Кромѣ того, очевидно, поверхности свойственно вообще точно отдѣлять тѣла другъ отъ друга; въ свою очередь, линіи раздѣляютъ поверхности, и, съ своей стороны, отдѣляются точками. Это соображеніе, значеніе котораго часто слишкомъ преувеличивается, должно занимать однако только второстепенное мѣсто.

И такъ, въ дѣйствительности мы всегда представляемъ себѣ поверхности и линіи съ тремя измѣреніями; въ самомъ дѣлѣ, не возможно вообразить себѣ какую бы то нибыло поверхность иначе, какъ чрезвычайно тонкую пластинку, и линію иначе, какъ безконечно тонкую нить. Очевидно даже, что степень малости, придаваемая каждымъ индивидуумомъ измѣреніемъ, которыя онъ хочетъ устранить, не всегда тождественна, такъ какъ она зависитъ отъ остроты его обычныхъ геометрическихъ наблюденій. Впрочемъ, этотъ недостатокъ однообразія не влечетъ за собою никакого дѣйствительнаго неудобства, такъ какъ для того, чтобы поверхность и линія удовлетворяли основному условію своего назначенія, достаточно, если каждый представитъ себѣ измѣренія, подлежащія устраненію, меньшими, чѣмъ всѣ тѣ, величину которыхъ онъ имѣлъ случай опредѣлять въ своихъ ежедневныхъ наблюденіяхъ.

Безъ сомнѣнія, слѣдуетъ сожалѣть, что до сихъ поръ еще въ трудѣ, подобномъ нашему, надо приводить такія простыя объясненія, какъ предъидущее, но я считалъ необходимымъ бѣгло указать на эти соображенія въ виду того онтологическаго тумана, которымъ ложныя воззрѣнія на предметъ обыкновенно покрываютъ эти первоначальныя понятія. Изъ вышеизложеннаго видно, насколько лишены всякаго здраваго смысла фантастическія разсужденія метафизиковъ объ основаніяхъ геометріи. Надо также замѣтить, что обыкновенно эти первоначальныя идеи излагаются геометрами недостаточно философскимъ образомъ, такъ какъ они, напримѣръ, располагаютъ понятія о различныхъ видахъ протяженностей въ порядкѣ, абсолютно противоположномъ ихъ естественной связи, что при элементарномъ преподаваніи часто порождаетъ весьма серьезныя затрудненія.

Установивъ эти предварительныя положенія, мы теперь прямо можемъ перейти къ общему опредѣленію геометріи, постоянно считая цѣлью ея *измѣреніе* протяженностей.

Въ этомъ отношеніи здѣсь необходимо остановиться на внимательномъ разсмотрѣніи предмета, исходя изъ различія трехъ родовъ протяженностей, такъ какъ самое понятіе объ *измѣреніи* по отношенію къ поверхностямъ и объемамъ не вполнѣ тождественно съ измѣреніемъ линій; безъ такого изслѣдованія мы составили-бы себѣ ложное понятіе о природѣ геометрическихъ вопросовъ.

Если мы возьмемъ слово *измѣреніе* въ его прямомъ и общемъ математическомъ значеніи, т. е. только въ смыслѣ вычисленія *отношеній* между какими-нибудь однородными величинами, то слѣдуетъ принять во вниманіе, что въ геометріи *измѣреніе* площадей и объемовъ, въ противоположность измѣренію линій, даже въ самыхъ простыхъ и благопріятныхъ случаяхъ, никогда не понимается, какъ непосредственно выполнимое. Сравненіе двухъ линій признается за прямое сравненіе, но двѣ площади или два объема, наоборотъ, всегда сравниваются только косвенно. Въ самомъ дѣлѣ, понятно, что двѣ линіи могутъ быть налагаемы одна на другую, но, очевидно, наложеніе двухъ поверхностей и тѣмъ болѣе двухъ тѣлъ выполнить въ большинствѣ случаевъ совершенно невозможно; даже тамъ, гдѣ такого рода сравненіе на практикѣ безусловно осуществимо, оно всегда оказывается неудобнымъ и не можетъ быть проведено съ полной точностью. Поэтому необходимо объяснить, въ чемъ собственно говоря состоитъ истинное геометрическое измѣреніе поверхности или объема.

Для указанной цѣли надо принять во вниманіе, что какова-бы ни была форма тѣла, всегда существуетъ извѣстное число болѣе или менѣе легко опредѣляемыхъ линій, зная длины которыхъ можно точно вычислить площадь или объемъ всего тѣла. Геометрія, считая эти линіи единственными доступными для непосредственнаго измѣренія величинами, задается цѣлью вывести, исходя изъ опредѣленія этихъ только линій, отношеніе искомыхъ площадей или объемовъ къ единицѣ площади или единицѣ объема. Такимъ образомъ общей задачей геометріи по отношенію къ поверхностямъ или тѣламъ является приведеніе всѣхъ сравненій ихъ площадей или объемовъ къ простымъ сравненіямъ нѣкоторыхъ линій.

Кромѣ огромнаго облегченія, приносимаго такимъ преобразованіемъ для самаго измѣренія площадей и объемовъ, изъ него-же, если это преобразованіе разсматривать шире и болѣе научнымъ образомъ, вытекаетъ возможность привести къ задачамъ о линіяхъ всѣ вопросы, которые можно поставить относительно поверхностей и тѣлъ съ точки зрѣнія ихъ величины. Таково часто наиболѣе важное назначеніе геометрическихъ выраженій, опредѣляющихъ площади или объемы въ функціи соотвѣтствующихъ линій.

Изъ предъидущаго не слѣдуетъ, однако, что непосредственныя сравненія площадей или объемовъ другъ съ другомъ никогда не производятся, но такія измѣренія не считаются чисто геометрическими и въ нихъ видятъ только иногда необходимое, но очень рѣдко примѣнимое дополненіе геометріи, вызываемое несовершенствомъ или трудностью дѣйствительно раціональныхъ пріемовъ. Такимъ именно образомъ часто опредѣляютъ объемъ тѣла и въ нѣкоторыхъ случаяхъ даже его площадь на основаніи его вѣса. Точно также въ другихъ случаяхъ, когда можно замѣстить объемъ даннаго тѣла равнымъ ему объемомъ жидкости, устанавливаютъ непосредственно сравненіе двухъ объемовъ, пользуясь свойствомъ жидкихъ тѣлъ легко принимать всякія формы, какія намъ угодно придать имъ; но всѣ способы этого рода—чисто механическія, и раціональная геометрія по необходимости должна отбросить ихъ.

Чтобы сдѣлать нагляднѣе различіе между этими пріемами и истинно геометрическими измѣреніями, я укажу на одинъ весьма замѣчательный примѣръ, а именно на способъ, съ помощью котораго Галилей опредѣлилъ отношеніе площади обыкновенной циклоиды къ площади производящаго круга. Геометрія въ его время стояла еще слишкомъ низко, чтобы дать раціональное рѣшеніе такой задачи, и потому Галилей пытался найти это отношеніе прямымъ опытомъ. Взвѣсивъ по возможности точно двѣ пластинки изъ одного и того-же вещества и одной и той-же толщины, изъ коихъ одна имѣла форму круга, а другая описанной имъ циклоиды, Галилей нашелъ, что послѣдняя была постоянно въ три раза тяжелѣе первой. Отсюда онъ заключилъ, что площадь циклоиды равна тройной площади производящаго круга, и получилъ такимъ образомъ результатъ, согласный съ истиннымъ рѣшеніемъ, найденнымъ позднѣе Паскалемъ и Валлисомъ. Такой успѣхъ, который, впрочемъ, не ввелъ Галилея въ заблужденіе, зависитъ, конечно, отъ крайней простоты искомаго дѣйствительнаго отношенія; легко понять неизбѣжную недостаточность подобнаго рода пріемовъ даже въ тѣхъ случаяхъ, когда они практически осуществимы.

Изъ всего предыдущаго ясно видно, въ чемъ собственно состоятъ части геометріи, относящіяся къ поверхностямъ и тѣламъ, но не такъ отчетливо опредѣляется характеръ геометріи линій, такъ какъ мы для упрощенія изложенія какъ бы признали, что измѣреніе линій производится непосредственно; нужно поэтому дополнить объясненіе по отношенію къ линіямъ.

Съ этой цѣлью достаточно указать на различіе между прямой и кривыми линіями, такъ какъ только измѣреніе первой считается непосредственно возможнымъ, измѣреніе же вторыхъ всегда признается косвеннымъ. Хотя иногда наложеніе безусловно осуществимо даже для кривыхъ линій, тѣмъ не менѣе, очевидно, что дѣйствительно раціональная геометрія должна его по необходимости отбросить, такъ какъ этотъ способъ, даже когда онъ примѣнимъ, не представляетъ достаточной точности. Поэтому общей цѣлью геометріи линій постоянно является приведеніе измѣренія кривыхъ линій къ измѣренію прямыхъ, и, слѣдовательно, съ болѣе широкой точки зрѣнія, приведеніе всѣхъ вопросовъ относительно величинъ, связанныхъ съ различными кривыми, къ задачамъ относящимся только къ прямымъ линіямъ. Что бы понять возможность такого преобразованія, нужно замѣтить, что во всякой кривой постоянно связаны извѣстныя прямыя, длина которыхъ можетъ вполнѣ опредѣлить длину кривой. Такъ по длинѣ радіуса круга можно, очевидно, опредѣлить длину окружности; такимъ же образомъ длина эллипса зависитъ отъ длины его двухъ осей; длина циклоиды — отъ діаметра производящага круга и т. д.; если вмѣсто изслѣдованія длины всей кривой требуется опредѣлить вообще длину какой нибудь дуги ея, то достаточно къ различнымъ опредѣляющимъ кривую прямолинейнымъ параметрамъ прибавить длину хорды данной дуги или же координаты ея крайнихъ точекъ. Нахожденіе отношенія между длиной кривой линіи и длиной подобныхъ прямыхъ линій представляетъ по существу общую задачу той части геометріи, которая занимается изученіемъ линій.

Сопоставляя это соображеніе съ изложенными выше замѣчаніями относительно поверхностей и тѣлъ, можно составить себѣ весьма ясное понятіе о геометріи во всей ея совокупности, признавъ ея общей цѣлью приведеніе сравненій всѣхъ родовъ протяженностей—объемовъ, площадей и длины—къ сравненіямъ однихъ прямыхъ линій, единственнымъ, признаваемымъ непосредственно выполнимыми и которыя, очевидно, не могутъ быть приведены къ другимъ, болѣе легкимъ. Такое опредѣленіе, какъ мнѣ кажется, въ одно и тоже время не только ясно выражаетъ истинный характеръ геометріи, но и даетъ возможность однимъ взглядомъ охватить всю ея пользу и совершенство.

Что бы вполнѣ закончить это важное объясненіе, мнѣ остается указать, какъ въ геометріи можетъ существовать отдѣлъ, относящійся къ прямой линіи, что на первой взглядъ кажется несовмѣстимымъ съ принципомъ, по которому измѣреніе этого класса линій должно постоянно считаться непосредственнымъ.

Измѣреніе прямыхъ линій, дѣйствительно, представляется непосредственнымъ по отношенію къ кривымъ и ко всѣмъ другимъ разсматриваемымъ въ геометріи предметамъ. Тѣмъ не менѣе очевидно, что измѣреніе прямой линіи можно считать непосредственнымъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣйствительно возможно наложить на прямую единицу мѣры. Я уже имѣлъ случай по другому поводу въ третьей лекціи подробно разъяснить, что при этомъ очень часто встрѣчаются непобѣдимыя трудности, и тогда приходится ставить измѣреніе искомой прямой въ зависимость отъ другихъ аналогичныхъ измѣреній, которыя могутъ быть осуществлены непосредственно. По необходимости, слѣдовательно, на первомъ мѣстѣ становится особый отдѣлъ геометріи, исключительно посвященный изученію прямой линіи, и имѣющей цѣлью опредѣлять однѣ прямыя линіи съ помощью другихъ, на основаніи соотношеній, свойственныхъ различнымъ фигурамъ, составляемымъ этими прямыми. Это введеніе въ геометрію, кажущееся, такъ сказать, совершенно незамѣтнымъ при разсмотрѣніи всей совокупности науки, можетъ, однако, получить весьма широкое развитіе, если задаться мыслью изучить его во всемъ объемѣ. Эта часть геометріи, очевидно, особенно важна для насъ: такъ какъ всѣ геометрическія измѣренія по возможности должны быть приведены къ измѣренію прямыхъ линій, то неосуществимость подобнаго измѣренія повлекла бы за собой неполноту рѣшенія всѣхъ геометрическихъ вопросовъ,

Такова естественная связь основныхъ частей раціональной геометріи. Чтобы при общемъ ея изученіи слѣдовать дѣйствительно догматическому порядку, надо, очевидно, прежде всего разсмотрѣть геометрію линій, начиная съ прямыхъ, затѣмъ перейти къ геометріи поверхностей и закончить геометріей тѣлъ. Несомнѣнно, должно даже удивляться, что не всегда слѣдуютъ указанной методической классификаціи, вытекающей такъ просто изъ самой природы науки.

Опредѣливъ точно общій и конечный предметъ геометрическихъ изслѣдованій, надо теперь разсмотрѣть эту науку съ точки зрѣнія объема каждой изъ трехъ ея основныхъ частей.

Съ этой точки зрѣнія геометрія, по природѣ своей, можетъ очевидно получить распространеніе совершенно неопредѣленное, такъ какъ измѣреніе линій, площадей и объемовъ по необходимости представляетъ столько отдѣльныхъ задачъ, сколько можно вообразить себѣ различныхъ формъ, поддающихся точному опредѣленію; число же подобныхъ формъ, очевидно, безконечно.

Геометры ограничивали прежде свои изслѣдованія разсмотрѣніемъ наиболѣе простыхъ формъ, которыя природа давала имъ непосредственно, или которыя составлялись изъ этихъ первоначальныхъ элементовъ путемъ наименѣе сложныхъ комбинацій, но со времени Декарта они поняли, что для вполнѣ философскаго построенія науки слѣдовало бы по необходимости включить туда вообще всѣ возможныя формы. Такимъ образомъ геометры пріобрѣли разумную увѣренность въ томъ, что новая абстрактная геометрія непремѣнно охватитъ, какъ частные случаи, всѣ различныя реальныя формы, существующія въ внѣшнемъ мірѣ, и никогда не будетъ захвачена въ расплохъ. Если бы, наоборотъ, геометры навсегда ограничились разсмотрѣніемъ только естественныхъ формъ, неподготовляясь къ этому общимъ изученіемъ и спеціальнымъ изслѣдованіемъ извѣстныхъ простѣйшихъ гипотетическихъ формъ, то несомнѣнно, что въ моментъ дѣйствительнаго примѣненія геометріи чаще всего и возникали бы непобѣдимыя трудности. Необходимость изслѣдованія по возможности всѣхъ формъ, которыя можно точно представить себѣ, составляетъ такимъ образомъ основной принципъ дѣйствительно раціональной геометріи.

Самаго поверхностнаго изслѣдованія достаточно, чтобы дать понять, что подобныя формы представляютъ совершенно безконечное разнообразіе. По отношенію къ кривымъ линіямъ, если разсматривать ихъ какъ слѣды, оставляемые подчиненнымъ извѣстному закону движеніемъ точки, понятно, что мы вообще будемъ имѣть столько различныхъ кривыхъ, сколько можно представить себѣ различныхъ законовъ движенія, которое, очевидно, можетъ происходить, слѣдуя безконечному множеству самыхъ разнообразныхъ условій, хотя при этомъ иногда и можетъ случиться, что новыя условія движенія дадутъ уже полученныя при другихъ обстоятельствахъ линіи. Такъ, ограничиваясь только плоскими кривыми, можно указать, что если точка движется, оставаясь постоянно на одинаковомъ разстояніи отъ неподвижной точки, то она произведетъ окружность; если сумма или разность разстоянія точки отъ двухъ неподвижныхъ точекъ будетъ величиной постоянной, то описанная кривая будетъ эллипсомъ или гиперболой; если произведеніе этихъ разстояній будетъ величиной постоянной, то получится совершенно иная кривая; если точка постоянно равно удалена отъ неподвижной точки и неподвижной прямой, то она опишетъ параболу; если точка будетъ двигаться по кругу въ то время, какъ кругъ будетъ катиться по прямой линіи, то она опишетъ циклоиду; если точка будетъ двигаться вдоль прямой въ то время, какъ эта прямая, закрѣпленная въ одномъ изъ концовъ своихъ, вращается по какому-нибудь закону, то получатся вообще такъ называемыя спирали, которыя однѣ могутъ, очевидно, дать столько совершенно различныхъ кривыхъ, сколько можно сдѣлать предположеній о различныхъ отношеніяхъ между поступательнымъ и вращательнымъ движеніями и т. д. Каждая изъ этихъ различныхъ кривыхъ можетъ затѣмъ дать новыя кривыя съ помощью различныхъ общихъ построеній, придуманныхъ геометрами и производящихъ развертки, эпициклоиды, фокусныя кривыя и т. д. Наконецъ, очевидно, еще большее разнообразіе существуетъ среди кривыхъ двоякой кривизны.

Формы поверхностей, если послѣднія разсматривать, какъ производимыя движеніемъ линій, представятъ, конечно, еще болѣе разнообразія. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ формы могутъ измѣняться не только въ зависимости, какъ мы видѣли и относительно линій, отъ безконечнаго числа различныхъ законовъ, которымъ можетъ быть подчинено движеніе производящихъ линій, но, кромѣ того, еще и въ зависимости отъ предположеній объ измѣненіяхъ природы самихъ производящихъ линій, измѣненіяхъ, которыя не могутъ имѣть мѣста относительно кривой, такъ какъ описывающія ихъ точки не могутъ имѣть опредѣленной фигуры. Слѣдовательно два весьма различныхъ класса условій могутъ заставить измѣняться форму поверхностей, тогда какъ форма линій зависитъ только отъ одного класса подобныхъ условій. Безполезно указывать отдѣльно рядъ примѣровъ, которые могли бы подтвердить существованіе вдвойнѣ безконечнаго множества формъ, принимаемыхъ поверхностями. Чтобы составить себѣ объ этомъ нѣкоторое понятіе, достаточно обратить вниманіе на чрезвычайное разнообразіе, которое представляетъ классъ такъ называемыхъ *линейчатыхъ* поверхностей, т. е. поверхностей, образованныхъ движеніемъ прямой линіи, къ которымъ относятся поверхности цилиндрическія, коническія, болѣе общій видъ развертывающихся поверхностей вообще и т. д. Что же касается тѣлъ, то по отношенію къ нимъ нельзя сдѣлать особаго замѣчанія, такъ какъ они отличаются другъ отъ друга только ограничивающими ихъ поверхностями.

Что-бы закончить этотъ общій обзоръ геометріи, надо прибавить, что поверхности сами по себѣ представляютъ новый общій способъ составленія новыхъ кривыхъ, такъ какъ всякую кривую можно разсматривать, какъ мѣсто пересѣченія двухъ поверхностей. Этимъ именно путемъ и были получены впервые линіи, на которыя можно смотрѣть, какъ на дѣйствительно открытыя геометрами, ибо природа дала непосредственно только прямую линію и окружность. Какъ извѣстно, эллипсъ, парабола и гипербола, единственныя кривыя, вполнѣ изученныя древними, были вначалѣ разсматриваемы, какъ мѣсто пересѣченія круговаго конуса съ плоскостью въ различныхъ ея положеніяхъ. Очевидно, что, примѣняя всѣ эти общія способы составленія линій и поверхностей, можно получить безусловно безконечный рядъ отдѣльныхъ формъ, исходя только изъ крайне небольшого числа фигуръ, непосредственно данныхъ наблюденіями.

Наконецъ, всѣ прямые способы образованія новыхъ формъ потеряли почти все свое значеніе съ тѣхъ поръ, какъ раціональная геометрія въ рукахъ Декарта получила свой окончательный характеръ. Дѣйствительно, какъ мы убѣдимся особо въ двѣнадцатой лекціи, изобрѣтеніе новыхъ формъ приводится теперь къ составленію уравненій и нѣтъ ничего легче, какъ построеніе новыхъ линій и новыхъ поверхностей съ помощью произвольнаго измѣненія вводимыхъ въ уравненія функцій. Въ этомъ отношеніи указанный простой и абстрактный пріемъ несравненно плодотворнѣе прямыхъ геометрическимъ способовъ, хотя бы и развитыхъ съ помощью самаго сильнаго воображенія, направленнаго исключительно на этотъ рядъ идей. Кромѣ того, только что указанный пріемъ самымъ общимъ и наиболѣе понятнымъ образомъ объясняетъ намъ безконечное по необходимости разнообразіе геометрическихъ формъ, соотвѣтствующее разнообразію аналитическихъ функцій. Наконецъ, онъ не менѣе ясно показываетъ, что различныя формы поверхностей должны быть еще многочисленнѣе, чѣмъ формы линій, потому что линіи аналитически выражаются уравненіями съ двумя перемѣнными, тогда какъ поверхности даютъ мѣсто уравненіямъ съ тремя перемѣнными, которыя, конечно, представляютъ большее разнообразіе.

Указанныхъ выше соображеній достаточно, чтобы установить совершенно опредѣленно безконечное, строго говоря, распространеніе, которое по своей природѣ допускаетъ каждая изъ трехъ главныхъ частей геометріи, а именно ученіе о линіяхъ, поверхностяхъ и тѣлахъ, какъ слѣдствіе безконечнаго разнообразія самихъ подлежащихъ измѣренію величинъ.

Что-бы окончательно составить себѣ точное и достаточно широкое понятіе о природѣ геометрическихъ изслѣдованій, необходимо теперь возвратиться къ указанному выше общему опредѣленію, чтобы представить его съ новой точки зрѣнія, безъ чего совокупность науки будетъ нами понята только весьма несовершеннымъ образомъ.

Считая цѣлью геометріи измѣреніе всякого рода линій, площадей и объемовъ, т. е., какъ я это объяснилъ, приведеніе всѣхъ геометрическихъ сравненій къ простымъ сравненіямъ прямыхъ линій, мы, очевидно, имѣемъ то преимущество, что указываемъ общее назначеніе ея, очень точное и легко понятное.

Но если, устраняя всякое опредѣленіе, мы изслѣдуемъ дѣйствительный составъ геометріи, то сначала приведенное выше опредѣленіе покажется намъ слишкомъ узкимъ, такъ какъ несомнѣнно, что большая часть изслѣдованій, входящихъ въ составъ современной геометріи, повидимому совершенно не имѣетъ цѣлью *измѣреніе* протяженностей. Это именно соображеніе, вѣроятно, и удерживаетъ въ геометріи употребленіе нѣкоторыхъ неясныхъ опредѣленій, заключающихъ въ себѣ все только потому, что они ничего не характеризуютъ. Тѣмъ не менѣе, несмотря на такое серьезное возраженіе, я считаю возможнымъ настойчиво указывать на измѣреніе протяженностей, какъ на общую и однообразную цѣль всей геометріи, включая въ нее притомъ всѣ вопросы, нынѣ дѣйствительно входящіе въ ея составъ. Въ самомъ дѣлѣ, если вмѣсто того, чтобы ограничиться разсмотрѣніемъ отдѣльныхъ геометрическихъ изслѣдованій, мы постараемся выяснить главные вопросы, по сравненію съ которыми всѣ другіе, какъ бы они важны ни были, должны считаться только второстепенными, то мы въ концѣ концовъ признаемъ, что *измѣреніе* линій, площадей и объемовъ есть неизмѣнная, иногда *прямая*, а чаще всего *косвенная* цѣль всѣхъ геометрическихъ изслѣдованій. Это общее положеніе имѣетъ капитальную важность, такъ какъ только одно оно и можетъ дать нашему опредѣленію все его значеніе; по этому необходимо представить по этому предмету нѣсколько болѣе подробныхъ разъясненій.

Разсматривая со вниманіемъ геометрическія изслѣдованія, неимѣющія, повидимому, никакого отношенія къ измѣренію протяженностей, мы найдемъ, что они состоятъ по существу своему въ изученіи различныхъ *свойствъ* отдѣльныхъ линій или отдѣльныхъ поверхностей, т. е. выражаясь точнѣе, въ изученіи различныхъ способовъ происхожденія, или, по крайней мѣрѣ, опредѣленія, соотвѣтствующаго каждой разсматриваемой формѣ. Легко, однако, установить самымъ общимъ образомъ необходимую связь такого изслѣдованія съ вопросомъ объ *измѣреніи:* для него наиболѣе полное по возможности знаніе свойствъ каждой формы есть необходимое введеніе. Это положеніе доказываютъ два одинаково важныхъ, хотя и совершенно различныхъ по природѣ соображенія.

Первое, чисто научное, заключается въ замѣчаніи, что если бы по отношенію къ отдѣльнымъ линіямъ или поверхностямъ были извѣстны только тѣ характеристическія свойства, при помощи которыхъ геометры впервые опредѣлили эти линіи или поверхности, то чаще всего было бы невозможно рѣшать вопросъ объ измѣреніи ихъ. Дѣйствительно, легко понять, что различныя опредѣленія, допускаемыя нѣкоторой формой, не всѣ равно удобны для этой цѣли, и что часто въ этомъ отношеніи встрѣчаются даже совершенныя противоположности. Съ другой стороны, такъ какъ первоначальное опредѣленіе каждой формы немогло быть избрано именно въ цѣляхъ измѣренія, то, очевидно, вообще нельзя ожидать, чтобы первое опредѣленіе было наиболѣе удобнымъ для измѣренія; отсюда вытекаетъ необходимость искать новыя опредѣленія, т. е. по мѣрѣ возможности изучить свойства данной формы. Предположимъ, напримѣръ, что окружность была бы опредѣлена, какъ кривая, которая, при той же длинѣ, заключаетъ наибольшую площадь, что является, конечно, свойствомъ, вполнѣ ее характеризующимъ; очевидно, что при такой исходной точкѣ встрѣтились бы непобѣдимыя трудности при рѣшеніи основныхъ задачъ, относящихся къ выпрямленію или квадратурѣ этой кривой. A priori ясно, что свойство окружности, по которой всѣ ея точки находятся на равномъ разстояніи отъ одной неподвижной точки, должно по необходимости лучше удовлетворять требованію изслѣдованія такого рода, хотя и это свойство, строго говоря, не есть самое удобное для измѣренія. Точно также развѣ Архимедъ могъ бы найти площадь параболы, если бы объ этой кривой онъ зналъ только, что она представляетъ сѣченіе конуса съ круговымъ основаніемъ плоскостью, параллельной образующей конуса? Чисто теоретическія работы предыдущихъ геометровъ, занимавшихся преобразованіемъ этого первоначальнаго опредѣленія, очевидно, и послужили необходимыми предварительными данными для прямаго рѣшенія этой задачи. Тоже замѣчаніе, и еще съ большимъ основаніемъ, относится къ поверхностямъ. Чтобы составить себѣ объ этомъ правильное представленіе, достаточно сравнить, напримѣръ, по отношенію къ вопросу о кубатурѣ или о квадратурѣ, обыкновенное опредѣленіе шара съ другимъ, несомнѣнно одинаково характеризующимъ его: шаръ есть поверхность, заключающая наибольшій объемъ при той же площади.

Мнѣ не нужно приводить еще другихъ примѣровъ, чтобы вообще убѣдить въ необходимости возможно болѣе широкаго изученія свойствъ каждой линіи или поверхности для облегченія изслѣдованія вопросовъ о выпрямленіи и опредѣленіи площадей и объемовъ,—изслѣдованія, составляющаго конечную цѣль геометріи. Можно даже сказать, что главная трудность задачъ этого рода состоитъ въ примѣненіи въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ наиболѣе подходящаго къ природѣ данной задачи свойства. Поэтому, продолжая въ видахъ бо́льшей точности указывать на измѣреніе протяженностей, какъ на общее назначеніе геометріи, мы найдемъ въ изложенномъ первомъ соображеніи, относящемся прямо къ самой сущности предмета, ясное доказательство необходимости включить въ геометрію насколько возможно глубокое изученіе различныхъ способовъ образованія или опредѣленія каждой формы.

Второе соображеніе, имѣющее по крайней мѣрѣ равную съ первымъ важность, состоитъ въ томъ, что подобное изученіе необходимо для установленія въ геометріи раціональнаго отношенія конкретнаго къ абстрактному.

Геометрія, какъ я выше сказалъ, должна разсматривать всѣ возможныя формы, допускающія точное опредѣленіе; отсюда, какъ мы уже замѣтили, по необходимости вытекаетъ, что всѣ вопросы, относящіеся къ какимъ бы то ни было формамъ, существующимъ въ природѣ, непремѣнно неявнымъ образомъ войдутъ въ область абстрактной геометріи, если предположить, что она уже достигла своего совершенства. Но когда дѣйствительно нужно перейти къ конкретной геометріи, то постоянно встрѣчается серьезное затрудненіе — опредѣлить съ достаточнымъ приближеніемъ, къ какому изъ различныхъ абстрактныхъ типовъ надо отнести реальныя линіи или поверхности, которыя требуется изучить; чтобы установить подобное отношеніе особенно необходимо познакомится съ наибольшимъ по возможности числомъ свойствъ каждой разсматриваемой въ геометріи формы.

Дѣйствительно, если бы мы постоянно ограничивались однимъ первоначальнымъ опредѣленіемъ линіи или поверхности, то предполагая даже, что при этомъ условіи мы были бы въ состояніи измѣрить ихъ (что на основаніи перваго соображенія чаще всего оказалось бы невозможнымъ), такой результатъ почти всегда былъ бы совершенно безполезнымъ на практикѣ, такъ какъ обыкновенно мы не были бы въ состояніи узнать форму, встрѣтивъ ее въ природѣ. Для этого нужно, чтобы именно то единственное свойство формы, на которое обратили вниманіе геометры, могло быть удостовѣрено внѣшними обстоятельствами; на такое чисто случайное совпаденіе, хотя оно иногда и возможно, очевидно нельзя разсчитывать. Такимъ образомъ, только увеличивая насколько возможно число характеристическихъ свойствъ каждой абстрактной формы, мы можемъ обезпечить себѣ впередъ возможность узнать эту форму въ конкретномъ ея состояніи и такимъ образомъ извлечь пользу изъ нашихъ теоретическихъ работъ, провѣряя каждый разъ то именно опредѣленіе, которое можетъ быть установлено непосредственно. При данныхъ условіяхъ, подобное опредѣленіе почти всегда оказывается единственнымъ, и наоборотъ измѣняется для одной и той же формы при измѣненіи обстоятельствъ, что вдвойнѣ подтверждаетъ необходимость указаннаго изученія,

Въ этомъ отношеніи небесная геометрія представляетъ намъ самый замѣчательный примѣръ, отлично разъясняющій общую необходимость подобныхъ изслѣдованій. Въ самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно, Кеплеръ доказалъ, что именно эллипсъ есть та кривая, которую планеты описываютъ вокругъ солнца и спутники вокругъ планетъ. Было ли однако возможно это важное открытіе, обновившее всю астрономію, если бы мы на всегда ограничились разсмотрѣніемъ эллипса только какъ сѣченія круговаго конуса наклонною плоскостью? Очевидно, что такое опредѣленіе не выдержало бы подобной провѣрки. Самое извѣстное свойство эллипса, именно, что сумма разстояній каждой его точки отъ двухъ неподвижныхъ точекъ есть величина постоянная, по самой своей природѣ даетъ больше возможности узнать кривую въ этомъ случаѣ, но даже и оно не можетъ быть примѣнено непосредственно. Единственная же особенность, которая могла быть непосредствено провѣрена Кеплеромъ, является слѣдствіемъ зависимости между длиной фокусныхъ разстояній точекъ эллипса и направленіемъ этихъ разстояній; только это отношеніе допускаетъ астрономическое толкованіе и выражаетъ законъ, связывающій разстояніе планеты отъ солнца со временемъ, прошедшимъ отъ начала обращенія планеты. Поэтому нужно было, чтобы чисто умозрительныя работы греческихъ геометровъ о свойствахъ коническихъ сѣченій представили цѣлый рядъ различныхъ точекъ зрѣнія на способы построенія этихъ кривыхъ, чтобы Кеплеръ могъ перейти отъ абстрактнаго къ конкретному, выбравъ изъ всѣхъ характеристическихъ свойствъ сѣченія то именно, которое легче всего можно было провѣрить для планетныхъ орбитъ.

Я могу указать еще на одинъ примѣръ того-же рода, относящійся къ поверхностямъ и касающійся важнаго вопроса о фигурѣ земли. Если-бы мы не знали никакихъ другихъ свойствъ шара кромѣ первоначальнаго опредѣленія, что всѣ его точки находятся на равномъ разстояніи отъ одной внутренней точки, то какимъ образомъ—когда-бы то ни было—могли мы открыть, что поверхность земли шарообразна? Для этого необходимо было прежде всего изъ указаннаго опредѣленія шара вывести нѣкоторыя свойства его, которыя можно было повѣрить съ помощью наблюденій, производимыхъ исключительно на поверхности, напримѣръ, что между длиною пути, пройденнаго вдоль меридіана по направленію къ полюсу, и угловою высотою этого полюса надъ горизонтомъ въ каждой точкѣ существуетъ для шара постоянное отношеніе. Очевидно тѣмъ же путемъ и притомъ послѣ очень длиннаго ряда предварительныхъ умозрѣній была установлена впослѣдствіи, что земля не строго шарообразна, а имѣетъ форму эллипсоида вращенія.

Послѣ такихъ примѣровъ было бы, конечно, совершенно излишнимъ приводить другіе, тѣмъ болѣе, что каждый легко можетъ самъ увеличить число ихъ. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ легко будетъ провѣрить, что безъ весьма широкаго знакомства съ различными свойствами каждой формы переходъ отъ абстрактнаго къ конкретному въ геометріи былъ-бы чисто случайнымъ, и вслѣдствіе этого наукѣ не доставало-бы одного изъ ея самыхъ существенныхъ основаній.

Въ такомъ видѣ представляются два общія соображенія, вполнѣ доказывающія необходимость введенія въ геометрію цѣлаго ряда изслѣдованій, прямой цѣлью которыхъ не служитъ *измѣреніе* протяженностей, хоть мы все таки признаемъ это измѣреніе за конечную цѣль всей геометріи.

Мы можемъ, слѣдовательно, сохранить философскія преимущества, вытекающія изъ ясности и точности этого опредѣленія, и вмѣстѣ съ тѣмъ подвести подъ него вполнѣ раціональнымъ, хотя и косвеннымъ образомъ, всѣ извѣстныя геометрическія изслѣдованія, считая, что не относящіеся повидимому къ *измѣренію* протяженностей предназначены или для подготовленія рѣшенія окончательныхъ задачъ, или для облегченія примѣненія полученныхъ рѣшеній.

Признавая такимъ образомъ, въ видѣ общаго положенія, внутреннюю и необходимую связь изученія свойствъ линій и поверхностей съ составляющими конечный предметъ геометріи изслѣдованіями, мы безъ сомнѣнія должны согласиться, что въ своихъ работахъ геометры совсѣмъ не должны быть стѣснены обязательствомъ не терять никогда изъ виду такую связь. Зная разъ на всегда, какъ важно видоизмѣнять насколько возможно способы построенія каждой формы, геометры должны заниматься этими изслѣдованіями, неостанавливаясь непосредственно на вопросѣ, какую пользу принесетъ то или другое спеціальное свойство для выпрямленія кривыхъ, квадратуры или кубатуры. Они только безполезно затрудняли-бы свои собственныя изслѣдованія, если бы придавали несоотвѣтствующее значеніе постоянному установленію такой координаціи. Человѣческій духъ и въ этомъ отношеніи долженъ поступать, какъ онъ поступаетъ и во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, когда, намѣтивъ себѣ только въ общихъ чертахъ назначеніе извѣстнаго изслѣдованія, онъ напрягаетъ всѣ усилія исключительно для того, что двигать его какъ можно дальше, совершенно устраняя изъ виду указанное соотношеніе, постоянное разсмотрѣніе котораго только усложнило-бы всѣ его работы.

Общее объясненіе, только что изложенное мною, тѣмъ болѣе необходимо, что по самой природѣ предмета изученіе различныхъ свойствъ каждой линіи и каждой поверхности по необходимости занимаетъ наибольшую часть совокупности геометрическихъ изслѣдованій. Дѣйствительно, вопросы, непосредственно относящіеся къ выпрямленію, квадратурамъ и кубатурамъ, очевидно, сами по себѣ для каждой разсматриваемой формы весьма немногочислены. Наоборотъ, изученіе свойствъ одной и той-же формы представляетъ собою для человѣческаго духа естественнымъ образомъ неограниченное поле, на которомъ онъ постоянно можетъ надѣяться дѣлать новыя открытія. Такъ, напримѣръ, хотя геометры, несомнѣнно, съ большимъ или меньшимъ усердіемъ, но безъ всякаго дѣйствительнаго перерыва, уже въ теченіе двадцати вѣковъ занимаются изученіемъ коническихъ сѣченій, они далеко еще не считаютъ исчерпаннымъ даже этотъ простой предметъ и, конечно, можно быть увѣреннымъ, что, продолжая имъ заниматься, ученые откроютъ еще новыя неизвѣстныя свойства всѣхъ этихъ кривыхъ. Если подобныя изслѣдованія значительно замедлились въ теченіе послѣдняго вѣка, то это еще не значитъ, что онѣ закончились; замедленіе объясняется, какъ я сейчасъ покажу, только тѣмъ, что философская революція, произведенная въ геометріи трудами Декарта, должна была особенно уменьшить значеніе подобныхъ изслѣдованій.

Изъ предыдущихъ соображеній слѣдуетъ, что область геометріи по необходимости безконечна не только вслѣдствіе разнообразія подлежащихъ разсмотрѣнію формъ, но также еще и вслѣдствіе различія точекъ зрѣнія, съ которыхъ одна и та же форма можетъ быть изучаема. Это послѣднее положеніе даетъ даже самую общую и полную идею о совокупности геометрическихъ изслѣдованій: изъ него видно, что эти изслѣдованія состоятъ въ сущности въ сведеніи всѣхъ тѣхъ геометрическихъ явленій, которыя каждая линія или каждая поверхность можетъ представить, къ одному основному явленію, разсматриваемому какъ первоначальное опредѣленіе.

Указавъ въ такомъ общемъ и вмѣстѣ съ тѣмъ точномъ видѣ конечную цѣль геометріи и выяснивъ, какъ эта наука и при такомъ опредѣленіи заключаетъ въ себѣ весьма обширный классъ изслѣдованій, на первый взглядъ повидимому совсѣмъ не входящихъ въ ея область, я долженъ теперь разсмотрѣть еще во всей совокупности методъ построенія геометріи. Это послѣднее объясненіе необходимо для дополненія изложеннаго выше перваго обзора философскаго характера геометріи. Въ данную минуту я ограничусь только указаніемъ на самое общее соображеніе, такъ какъ это важное и основное понятіе должно быть развито и разъяснено въ слѣдующихъ лекціяхъ.

Совокупность всѣхъ геометрическихъ вопросовъ можно изучать, слѣдуя двумъ настолько различнымъ методамъ, что вслѣдствіе этого возникаютъ, такъ сказать, двѣ геометріи, философскій характеръ которыхъ, какъ мнѣ кажется, до сихъ поръ не былъ еще понятъ надлежащимъ образомъ.

Выраженіе *синтетическая* и *аналитическая* геометрія, обыкновенно употребляемыя для обозначенія этихъ отдѣловъ, даютъ о нихъ весьма ложное понятіе. Я предпочелъ бы во многихъ отношеніяхъ чисто историческія названія *геометрія древнихъ* и *новая геометрія*, покрайней мѣрѣ не вводящія въ заблужденіе относительно истиннаго характера этихъ наукъ; однако съ настоящаго времени я предполагаю употреблять совершенно правильные термины *спеціальная геометрія* и *геометрія общая*, которые, какъ мнѣ кажется, надлежащимъ образомъ и точно характеризуютъ истинную природу обоихъ методовъ.

Дѣйствительно, строго говоря, коренное различіе между нашимъ взглядомъ на геометрію со временъ Декарта и способами, которыми древніе изслѣдовали геометрическіе вопросы, состоитъ совсѣмъ не въ употребленіи исчисленія, какъ это обыкновенно признается. Съ одной стороны несомнѣнно, что пользованіе исчисленіемъ не было совершенно чуждо и древнимъ геометрамъ, такъ какъ въ своей геометріи они постоянно и очень широко примѣняли теорію пропорцій, представлявшую для нихъ, какъ средство дедукцій, дѣйствительный, хотя и весьма несовершенный эквивалентъ нашей современной алгебры. Можно даже примѣнять исчисленіе для полученія извѣстныхъ геометрическихъ рѣшеній гораздо шире, чѣмъ то дѣлали древніе геометры, и всетаки эти рѣшенія сохранятъ по существу характеръ древней геометріи; это обстоятельство очень часто имѣетъ мѣсто по отношенію къ задачамъ геометріи двухъ или трехъ измѣреній, обыкновенно обозначаемымъ именемъ *опредѣленныхъ*. Съ другой стороны, какъ бы велико ни было значеніе исчисленія въ современной геометріи, многія рѣшенія, полученныя безъ помощи алгебры, могутъ иногда обнаруживать характеристическія черты, отличающія новую геометрію отъ геометріи древнихъ, хотя вообще говоря анализъ составляетъ необходимую ея принадлежность; для примѣра, я укажу на методъ Роберваля для проведенія касательныхъ, столь современный по природѣ своей и всетаки въ нѣкоторыхъ случаяхъ приводящій къ совершенно полнымъ рѣшеніямъ задачъ безъ всякой помощи исчисленія. Итакъ, два пути, которымъ человѣческій духъ можетъ слѣдовать въ геометріи, нужно отличать главнымъ образомъ вовсе не на основаніи примѣняемаго тамъ орудія дедукцій.

Какъ мнѣ кажется, основное различіе, до сихъ поръ еще недостаточно понятое, состоитъ въ самой природѣ изслѣдуемыхъ вопросовъ. Дѣйствительно, геометрія, если разсматривать ее во всемъ ея объемѣ и предположить, что она уже достигла полнаго совершенства, должна, какъ мы это видѣли, съ одной стороны охватить всевозможныя формы, и съ другой стороны—открыть всѣ свойства каждой формы. На основаніи этого двойнаго требованія геометрію можно изучать, слѣдуя двумъ, существенно отличнымъ другъ отъ друга планамъ: или собирать вмѣстѣ всѣ вопросы, относящіеся къ одной и той же формѣ, какъ бы различны они ни были, и отдѣлять вопросы, относящіеся къ различнымъ тѣламъ, какая бы аналогія между ними ни существовала; или же, наоборотъ, соединять въ одну систему всѣ подобныя изслѣдованія, къ какимъ бы формамъ они ни относились, и раздѣлять вопросы, касающіеся дѣйствительно различныхъ свойствъ одного и того же тѣла. Однимъ словомъ, всю геометрію можно располагать или по отношенію къ изучаемымъ формамъ или по отношенію къ изслѣдуемымъ явленіямъ. Первый планъ, наиболѣе естественный, былъ принятъ древними, второй, несравненно болѣе раціональный, принятъ новѣйшими геометрами со временъ Декарта.

Дѣйствительно, главной отличительной чертой древней геометріи являлось изученіе различныхъ линій и поверхностей одной за другой, и переходъ къ изслѣдованію новой формы совершался только послѣ того, какъ было признано исчерпаннымъ уже все, что могли представить интереснаго извѣстныя до того времени формы. При такомъ способѣ изслѣдованій весь трудъ, потраченный на предыдущія, при переходѣ къ изученію новой кривой, не могъ принести никакой прямой существенной помощи, кромѣ умственнаго развитія, которое давало геометрамъ предыдущее упражненіе. Какъ бы ни было велико въ дѣйствительности сходство вопросовъ, предложеныхъ относительно двухъ различныхъ формъ, полнота свѣдѣній, пріобрѣтенная относительно одной формы, ничуть не избавляла геометра отъ необходимости предпринять всю совокупность изслѣдованій вторично. Вслѣдствіе этого успѣхъ науки никогда не былъ обезпеченъ; нельзя было впередъ имѣть увѣренность въ полученіи какого нибудь рѣшенія задачи, какъ бы велика ни была аналогія между предложенной и уже рѣшенными задачами. Такъ, напримѣръ, опредѣленіе касательныхъ къ тремъ коническимъ сѣченіямъ не принесло никакой раціональной помощи при проведеніи касательной къ какой нибудь новой кривой, какъ напримѣръ, къ конхоидѣ, циссоидѣ и т. д. Однимъ словомъ, геометрія древнихъ была, согласно предложенному выше выраженію, по существу *спеціальной*.

Въ современной системѣ геометрія, наоборотъ, носитъ безусловно *общій* характеръ, т. е. относится къ всѣмъ возможнымъ формамъ. Прежде всего очень легко понять, что всѣ геометрическіе вопросы, имѣющіе извѣстный интересъ, можно поставить относительно всѣхъ возможныхъ формъ. Это прямо видно относительно главныхъ задачъ, составляющихъ, на основаніи приведенныхъ въ этой лекціи объясненій, конечную цѣль геометріи, т. е. относительно выпрямленія кривыхъ, квадратуръ и кубатуръ. Но это замѣчаніе не менѣе неоспоримо даже и относительно изслѣдованій различныхъ свойствъ линій и поверхностей; наиболѣе существенныя изъ нихъ, какъ напримѣръ, задачи о касательныхъ линіяхъ и плоскостяхъ, теорія кривизны и т. д., очевидно имѣютъ общее значеніе для всѣхъ возможныхъ формъ. Крайне малочисленныя изслѣдованія, относящіяся дѣйствительно только къ одной или другой формѣ въ отдѣльности, имѣютъ всегда только весьма второстепенное значеніе. Установивъ это положеніе, можемъ сказать, что новѣйшая геометрія по существу своему состоитъ въ отвлеченіи всѣхъ вопросовъ, относящихся къ одному и тому-же геометрическому явленію, отъ формъ, въ которомъ это явленіе можетъ быть наблюдаемо, съ цѣлью самостоятельнаго и наиболѣе общаго изслѣдованія ихъ. Приложеніе построенныхъ такимъ образомъ общихъ теорій къ спеціальному опредѣленію явленія въ каждой отдѣльной формѣ можетъ считаться только второстепеннымъ трудомъ и производится по неизмѣннымъ правиламъ, успѣхъ которыхъ обезпеченъ заранѣе. Однимъ словомъ, эта работа принадлежитъ къ тому же классу, къ которому относится и опредѣленіе численнаго значенія данной аналитической формулы; единственной заслугой ея можетъ оказаться представленіе въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ рѣшенія, доставляемаго по необходимости общимъ методомъ, со всей простотой и изяществомъ, которыя возможны по отношенію къ разсматриваемой линіи или поверхности. Истинное значеніе придается только постановкѣ и полному рѣшенію новаго вопроса, относящагося къ какой угодно формѣ, и только подобныя работы считаются дѣйствительно подвигающими науку впередъ. Вниманіе геометровъ освобождается такимъ образомъ отъ изученія особенностей отдѣльныхъ формъ и всецѣло направляется къ общимъ вопросамъ; благодаря этому они могли возвыситься до разсмотрѣнія новыхъ геометрическихъ понятій, примѣненіе которыхъ къ изученнымъ древними кривымъ дало возможность открыть важныя свойства этихъ кривыхъ, свойства, древними даже и неподозрѣваемыя. Такой характеръ приняла геометрія со времени глубокой революціи, произведенной Декартомъ въ общей системѣ этой науки.

Простого указанія на основной характеръ каждой изъ двухъ геометрій, конечно, вполнѣ достаточно, чтобы огромное и необходимое превосходство новой геометріи сдѣлалось очевиднымъ. Можно даже сказать, что до великаго открытія Декарта основанія раціональной геометріи ни въ абстрактномъ, ни въ конкретномъ отношеніи на самомъ дѣлѣ не были окончательно установлены. Дѣйствительно, если разсматривать науку съ отвлеченной точки зрѣнія, то понятно, что если бы новые геометры продолжали до безконечности, какъ это они дѣлали до Декарта и нѣкоторое время послѣ него, идти по слѣдамъ древнихъ и прибавляли нѣсколько новыхъ кривыхъ къ весьма малому числу уже извѣстныхъ, то прогрессъ, какъ бы быстръ онъ ни былъ, даже послѣ длиннаго ряда вѣковъ оказался бы весьма незначительнымъ по сравненію съ общей системой геометріи и безконечнымъ разнообразіемъ формъ, которыя оставалось бы еще изучить. Наоборотъ, при рѣшеніи каждаго вопроса по пріему новѣйшихъ геометровъ число геометрическихъ задачъ, подлежащихъ рѣшенію, разъ на всегда по отношенію ко всѣмъ возможнымъ формамъ, уменьшается соотвѣтственнымъ образомъ. Съ другой точки зрѣнія, благодаря совершенному отсутствію общихъ методовъ, древніе геометры во всѣхъ своихъ изслѣдованіяхъ были предоставлены вполнѣ своимъ собственнымъ силамъ и не имѣли ни какой увѣренности въ томъ, что они рано или поздно добьются рѣшенія. Если это несовершенство науки и способствовало въ высшей степени проявленію ихъ удивительной проницательности, все таки оно должно было очень замедлять успѣхи науки; объ этомъ обстоятельствѣ можно составить себѣ нѣкоторое понятіе, принявъ во вниманіе, какъ много времени употребили они для изученія коническихъ сѣченій. Новая геометрія, обезпечивая нашему духу неизмѣнное движеніе впередъ, позволяетъ, наоборотъ, наилучшимъ образомъ использовать всѣ силы нашего разума, которыя древніе должны были часто тратить на весьма второстепенные вопросы.

Не менѣе глубокое различіе обнаруживается между этими двумя системами, если разсматривать геометрію въ конкретномъ отношеніи. Дѣйствительно, мы уже замѣтили выше, что отношеніе конкретнаго къ абстрактному въ геометріи можетъ быть твердо установлено на раціональныхъ началахъ только въ томъ случаѣ, если наши изслѣдованія будутъ прямо обращены на всевозможныя формы.

Если изучать линіи или поверхности одну за другою, то, каково бы ни было число изученныхъ формъ, по необходимости, однако, всегда очень незначительное, примѣненіе подобныхъ теорій къ дѣйствительно существующимъ въ природѣ формамъ будетъ всегда имѣть случайный характеръ, такъ какъ ничто не обезпечиваетъ, что эти формы дѣйствительно входятъ въ число изслѣдованныхъ геометрами абстрактныхъ типовъ. Напримѣръ, безъ сомнѣнія есть что-то случайное въ счастливомъ соотношеніи, которое удалось установить между умозрѣніями греческихъ геометровъ о коническихъ сѣченіяхъ и опредѣленіемъ истинныхъ планетныхъ орбитъ. Продолжая вести по тому-же плану геометрическія изслѣдованія, не было вообще никакого основанія надѣяться на подобныя совпаденія и было-бы даже возможно, что въ такихъ спеціальныхъ работахъ изслѣдованія геометровъ направились-бы именно на абстрактныя формы, совершенно неосуществимыя, и оставили-бы въ сторонѣ другія формы, которыя могли бы получить важныя и непосредственныя приложенія. Очевидно, по крайней мѣрѣ, что ничто не давало положительной гарантіи въ безусловной примѣнимости геометрическихъ умозрѣній. Совершенно иначе стоитъ дѣло въ новѣйшей геометріи: уже потому только, что въ ней изслѣдуются общіе вопросы, касающіеся всѣхъ возможныхъ формъ, мы заранѣе получаемъ полную увѣренность, что встрѣчающіяся во внѣшнемъ мірѣ формы не могутъ не подойти подъ какую нибудь теорію, если только разсматриваемое ею геометрическое явленіе представится на самомъ дѣлѣ.

Изъ этихъ различныхъ соображеній видно, что система геометріи древнихъ носитъ на себѣ отпечатокъ дѣтства науки, которая становится вполнѣ раціональной только послѣ произведенной Декартомъ философской революціи; но съ другой стороны очевидно, что съ самаго начала геометрія могла быть изучаема только такимъ *спеціальнымъ* образомъ. *Общая* геометрія была-бы совершенно не возможна и даже необходимость ея не была-бы понятна, если-бы длинный рядъ спеціальныхъ работъ относительно наиболѣе простыхъ формъ не далъ предварительно основанія для концепціи Декарта и не сдѣлалъ-бы очевидной невозможность придерживаться постоянно первоначальной философіи геометріи.

Если придать этому соображенію всю возможную точность, то изъ него слѣдуетъ даже заключить, что хотя геометрія, названная мною *общей*, и должна быть теперь признана единственной истинной догматической геометріей, изложеніемъ существа которой мы и ограничимся,—тогда какъ спеціальная геометрія представляетъ главнымъ образомъ только историческій интересъ, все таки при раціональномъ изложеніи геометріи нельзя совершенно отбросить послѣднюю. Можно, конечно, какъ это дѣлается вотъ уже почти цѣлое столѣтіе, не заимствовать прямо изъ геометріи древнихъ всѣ доставленные ею результаты; наиболѣе обширныя и трудныя изслѣдованія, входившія въ составъ этой геометріи, представляются теперь обыкновенно только съ помощью новыхъ методовъ; но по самой природѣ предмета безусловно невозможно обойтись совсѣмъ безъ помощи метода древнихъ, который, что-бы ни было, всегда останется и догматически первой основой науки, какъ онъ былъ ею исторически. Причину такого положенія дѣла очень легко понять: *общая* геометрія, какъ мы это сейчасъ установимъ, по существу основана на примѣненіи исчисленія, на преобразованіи геометрическихъ соображеній въ аналитическія, а такой способъ изслѣдованія нельзя прилогать непосредственно въ самомъ его началѣ. Мы знаемъ, что примѣненіе математическаго анализа по самой природѣ его никогда не можетъ служить исходной точкой науки; такое примѣненіе возможно тогда только, когда наука разработана уже достаточно глубоко, чтобы установить для разсматриваемыхъ явленій уравненія, которыя могутъ послужить основаніемъ для аналитическихъ работъ. Какъ только эти основныя уравненія найдены, анализъ позволяетъ вывести изъ нихъ множество слѣдствій, существованіе которыхъ нельзя было сначала даже и подозрѣвать; анализъ сообщитъ наукѣ высокую степень совершенства какъ съ точки зрѣнія общности понятій, такъ и относительно ихъ взаимнаго согласованія. Но, очевидно, математическаго анализа одного только всегда недостаточно для установленія самыхъ основаній какой нибудь естественной науки, ни даже для новаго доказательства этихъ основаній, если онѣ уже найдены. Въ этомъ отношеніи ничто не можетъ замѣнить прямого изученія предмета до тѣхъ поръ, пока оно дастъ возможность открыть точныя зависимости явленій. Пытаться ввести науку съ самаго начала въ область исчисленія значило-бы желать придать теоріямъ, относящимися къ дѣйствительнымъ явленіямъ, характеръ простыхъ логическихъ пріемовъ и такимъ образомъ лишить ихъ необходимой связи съ реальнымъ міромъ. Однимъ словомъ такая философская операція, если бы даже она и не содержала по необходимости въ себѣ самой нѣкотораго противорѣчія, очевидно, могла-бы только вновь погрузить науку въ область метафизики, отъ которой человѣческому духу только съ такимъ трудомъ удалось окончательно освободиться.

Поэтому геометрія древнихъ по природѣ своей постоянно будетъ неизбѣжно занимать первое мѣсто, болѣе или менѣе обширное, во всей системѣ геометрическихъ знаній. Она составляетъ безусловно необходимое введеніе въ *общую* геометрію; въ такіе именно предѣлы мы должны заключить ее при совершенно догматическомъ изложеніи. Я разсмотрю въ слѣдующей лекціи прямо эту *спеціальную* или *предварительную* геометрію, сокративъ ее до безусловно необходимыхъ предѣловъ, чтобы впослѣдствіи посвятить себя философскому изслѣдованію одной *общей* или *окончательной* геометріи, единственной вполнѣ раціональной и составляющей въ настоящее время по существу все содержаніе науки.

---

*

Одиннадцатая лекція.

Общія соображенія о спеціальной или предварительной геометріи.

Такъ какъ геометрическій методъ древнихъ, на основаніи указанныхъ въ концѣ прошлой лекціи соображеній, долженъ неизбѣжно занять мѣсто введенія въ общую догматическую систему геометріи, чтобы дать необходимыя основанія для *общей* геометріи, то намъ нужно прежде всего установить, въ чемъ собственно состоитъ предварительная функція *спеціальной* геометріи, которая такимъ образомъ и будетъ заключена въ самые тѣсные предѣлы.

Разсматривая геометріи древнихъ съ этой точки зрѣнія, легко убѣдиться, что по отношенію къ теоріи линій можно ограничить ее однимъ изученіемъ прямой линіи, затѣмъ квадратурой прямолинейныхъ плоскихъ фигуръ, и, наконецъ, кубатурой тѣлъ, ограниченныхъ плоскостями. Элементарныя предложенія, относящіяся къ этимъ тремъ основнымъ вопросамъ, представляютъ дѣйствительно необходимую исходную точку для всѣхъ геометрическихъ изслѣдованій; одни эти предложенія могутъ быть получены только прямымъ изученіемъ предмета, тогда какъ, наоборотъ, полная теорія всѣхъ другихъ формъ, даже окружности и относящихся къ ней площадей и объемовъ, могутъ теперь войти вполнѣ въ составъ *общей* или *аналитической* геометріи потому, что указанные первоначальные элементы даютъ уже уравненія, достаточныя для примѣненія исчисленія къ геометрическимъ вопросамъ, примѣненія, невозможнаго безъ этого предварительнаго условія.

Изъ приведеннаго соображенія слѣдуетъ, что обыкновенно элементарной геометріи дается бо́льшій объемъ, чѣмъ то безусловно необходимо, такъ какъ кромѣ прямой линіи, многоугольниковъ и многогранниковъ туда включаются также кругъ и сферическія тѣла, которыя можно также хорошо изучать и аналитическимъ путемъ, какъ, напримѣръ, и коническія сѣченія. Непродуманное поклоненіе старинѣ несомнѣнно въ значительной степени содѣйствуетъ сохраненію такой непослѣдовательности метода; но такъ какъ это поклоненіе не помѣшало ввести въ область новѣйшей геометріи теорію коническихъ сѣченій, то надо думать, что противоположный по отношенію къ круговымъ формамъ и до сихъ поръ еще повсемѣстный обычай имѣетъ за собою какое-нибудь другое основаніе; самое понятное объясненіе этого обстоятельства заключается въ томъ важномъ неудобствѣ, которое возникало-бы при постановкѣ средняго образованія вслѣдствіе отсрочки до очень отдаленной эпохи чисто математическаго образованія рѣшенія нѣкоторыхъ существенныхъ задачъ, могущихъ получить непосредственное и постоянное примѣненіе въ множествѣ важныхъ случаевъ. Дѣйствительно, если поступать наиболѣе раціональнымъ образомъ, то только съ помощью интегральнаго исчисленія можно было-бы получить интересующіе насъ результаты относительно измѣренія длины или площади круга, или поверхности шара и т. д., результаты, полученные древними съ помощью чрезвычайно простыхъ соображеній. Это неудобство имѣло-бы весьма мало значенія для лицъ, предназначающихъ себя для изученія математическихъ наукъ, и для нихъ было-бы сравнительно гораздо важнѣе слѣдовать вообще совершенно раціональному пути; такъ какъ, однако, обратные случаи встрѣчаются гораздо чаще, то необходимо было въ такъ называемой элементарной геометріи сохранить столь существенныя теоріи. Допуская все значеніе подобнаго соображенія и не ограничивая предварительную геометрію строго необходимыми элементами, можно даже признать полезнымъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ включать туда еще нѣкоторыя весьма важныя изслѣдованія, обыкновенно устраняемыя изъ нея, напримѣръ, относительно коническихъ сѣченій, циклоиды и т. д., чтобы ввести въ элементарный курсъ наибольшее по возможности количество общеполезныхъ знаній, хотя, даже съ точки зрѣнія экономія времени, было-бы гораздо предпочтительнѣе слѣдовать наиболѣе раціональному пути.

Въ этомъ отношеніи я здѣсь не долженъ принимать во вниманіе ту пользу, которую можетъ принести обычное распространеніе геометрическаго метода древнихъ за необходимые и свойственные ему предѣлы благодаря болѣе глубокому знакомству съ этимъ методомъ и вытекающему отсюда поучительному сравненію его съ новѣйшимъ методомъ. Эти выгоды при изученіи каждой науки связаны съ ходомъ изложенія, названнымъ нами *историческимъ*, и отъ нихъ слѣдуетъ умѣть открыто отказываться, если необходимость слѣдовать пути строго *догматическому* прочно установлена. Мы знаемъ, какъ важно, послѣ усвоенія всѣхъ частей науки наиболѣе раціональнымъ образомъ, изучить, для пополненія нашего развитія, *исторію* науки и такимъ образомъ обстоятельно сравнить различные методы, послѣдовательно примѣнявшіеся человѣчествомъ; но эти два ряда изслѣдованій должны быть, какъ мы видѣли, тщательно отдѣлены другъ отъ друга. Однако, въ данномъ случаѣ, современный геометрическій методъ слишкомъ еще новъ и потому, можетъ быть, надлежало бы, чтобы лучше охарактеризовать его путемъ сравненія, сначала изслѣдовать по методу древнихъ нѣсколько вопросовъ, которые по природѣ своей должны бы съ раціональной точки зрѣнія входить въ новую геометрію.

Какъ бы то ни было, устраняя теперь всѣ эти второстепенныя соображенія, мы увидимъ, что введеніе въ геометрію, которое можно разсматривать только по методу древнихъ, приводится, строго говоря, къ изученію прямой линіи, площадей многоугольниковъ и многогранниковъ. Вѣроятно даже, что въ концѣ концовъ элементарная геометрія и будетъ обыкновенно ограничена этими необходимыми предѣлами, когда основныя аналитическія понятія станутъ болѣе общеизвѣстными и когда изученіе совокупности математики будетъ всѣми признана за философское основаніе общаго образованія.

Если указанная предварительная часть геометріи, которую нельзя построить съ помощью исчисленія, приводится, по самой природѣ, къ ряду основныхъ изслѣдованій, весьма ограниченныхъ по своему объему, то, съ другой стороны, несомнѣнно, что дальнѣйшее ея сокращеніе невозможно, хотя въ послѣднее время, злоупотребляя истиннымъ аналитическимъ духомъ науки, было сдѣлано нѣсколько попытокъ представить съ чисто алгебраической точки зрѣнія доказательства главныхъ теоремъ элементарной геометріи. Такимъ именно образомъ пытались было доказать простыми абстрактными соображеніями математическаго анализа постоянство отношенія между тремя углами прямолинейнаго треугольника, основное предложеніе теоріи подобныхъ треугольниковъ, измѣреніе прямоугольниковъ, параллелипипедовъ и т. д., однимъ словомъ тѣ именно геометрическія предложенія, которыя можно получить только прямымъ изученіемъ предмета, и гдѣ исчисленія не въ состояніи оказать никакой помощи. Я бы совершенно не указывалъ здѣсь на подобныя заблужденія, если-бы они не были вызваны очевиднымъ намѣреніемъ довести до высшей степени совершенства философскій характеръ геометріи, съ самаго начала введя ее въ область приложенія математическаго анализа. Но слѣдуетъ тщательно отмѣтить основную ошибку, допущенную нѣкоторыми геометрами въ этомъ отношеніи, такъ какъ она вытекаетъ изъ необдуманнаго преувеличенія тенденціи, весьма естественной теперь и высоко философской, побуждающей все болѣе и болѣе расширять примѣненіе анализа въ математическихъ изслѣдованіяхъ. Созерцаніе колоссальныхъ результатовъ, достигнутыхъ человѣческимъ духомъ на этомъ пути, должно было невольно заставить вѣрить, что даже основанія конкретной математики могутъ быть установлены на простыхъ аналитическихъ соображеніяхъ. Такія заблужденія намъ придется отмѣтить не только по отношеніи къ одной геометріи: въ скоромъ времени мы будемъ имѣть случай указать совершенно аноличныя по отношеніи механикѣ, по поводу мнимыхъ аналитическихъ доказательствъ параллелограма силъ. Это логическое смѣшеніе имѣетъ теперь даже болѣе значенія въ механикѣ, гдѣ оно до сихъ поръ дѣйствительно содѣйствуетъ распространенію метафизическаго тумана надъ общимъ характеромъ этой науки, тогда какъ, по крайней мѣрѣ въ геометріи, подобныя абстрактныя соображенія до сихъ поръ оставались какъ то внѣ науки и не успѣли войти въ обыкновенное ея изложеніе.

Слѣдуя представленнымъ въ этомъ трудѣ принципамъ философіи математики, нѣтъ надобности долго настаивать на объясненіи неправильности такого способа изученія. Дѣйствительно, мы уже видѣли, что исчисленіе есть и можетъ быть только средствомъ дедукціи и потому примѣнять его для установленія элементарныхъ понятій какой бы то ни было науки значитъ понимать его совершенно превратно; на чемъ же будутъ основаны при такой операціи наши аналитическія разсужденія? Подобная работа въ дѣйствительности не только не совершенствуетъ философскаго характера науки, но является поворотомъ къ метафизическому ея состоянію, такъ какъ она стремится представить реальныя познанія въ видѣ простыхъ логическихъ отвлеченій.

Изслѣдуя въ самихъ себѣ эти мнимыя аналитическія доказательства основныхъ предложеній элементарной геометріи, легко можемъ убѣдиться въ ихъ неизбѣжной безсодержательности. Всѣ они основаны на ложномъ пониманіи принципа *однородности*, истинное общее содержаніе котораго я разъяснилъ въ пятой лекціи. Въ этихъ доказательствахъ предполагается, что указанный принципъ совершенно недопускаетъ сосуществованія въ одномъ и томъ-же уравненіи чиселъ, полученныхъ изъ различныхъ конкретныхъ сравненій, что очевидно, невѣрно и явнымъ образомъ противорѣчитъ обычнымъ пріемамъ геометровъ. Точно также легко видѣть, что примѣняя законъ однородности въ такомъ произвольномъ и неправильномъ значеніи, съ той-же кажущейся строгостью можно *доказать* предложенія, абсурдность которыхъ будетъ ясна съ перваго взгляда. Напримѣръ, изучая внимательно пріемъ, съ помощью котораго пробовали аналитически доказать, что сумма всѣхъ трехъ угловъ прямолинейнаго треугольника постоянно равна двумъ прямымъ, мы увидимъ, что онъ основанъ на такомъ предварительномъ положеніи: если два треугольника имѣютъ по два угла равныхъ, то и третьи углы будутъ также равны. Если допустить этотъ первый пунктъ, то указанное отношеніе весьма точно и просто получается сразу. Однако, аналитическое соображеніе, на основаніи котораго желали установить это предварительное предложеніе, носитъ такой характеръ, что если-бы оно было справедливо, то, разсуждая въ обратномъ порядкѣ, мы вполнѣ строго пришли-бы къ очевидно абсурдному заключенію, что двухъ сторонъ треугольника безъ угловъ совершенно достаточно для опредѣленія третьей стороны. Подобнаго-же рода замѣчанія можно сдѣлать и относительно всѣхъ остальныхъ доказательствъ этого рода и софизмы ихъ такимъ образомъ будутъ обнаружены совершенно ясно.

Чѣмъ болѣе мы должны здѣсь разсматривать геометрію, какъ аналитическую нынѣ по существу науку, тѣмъ болѣе необходимо было предупредить умы противъ указаннаго неправильнаго употребленія математическаго анализа, благодаря которому могла-бы даже возникнуть мысль, что можно совершенно обойтись безъ геометрическаго наблюденія и установить самыя основы этой естественной науки на чисто-алгебраическихъ отвлеченностяхъ. Я долженъ былъ придать особенное значеніе характеристикѣ заблужденій, связанныхъ съ нормальнымъ развитіемъ человѣческаго духа потому, что въ послѣднее время они были, такъ сказать, освящены формальнымъ одобреніемъ одного весьма выдающагося геометра, авторитетъ котораго имѣетъ весьма большое вліяніе на постановку элементарнаго преподаванія геометріи.

По этому предмету я считаю нужнымъ еще замѣтить, что во многихъ отношеніяхъ слишкомъ часто, какъ мнѣ кажется, упускали изъ виду безусловно присущій геометріи характеръ естественной науки. Это замѣчаніе легко провѣрить, обративъ вниманіе на длинный рядъ безполезныхъ попытокъ геометровъ строго *доказать*, не съ помощью исчисленія, а путемъ другихъ построеній, нѣкоторыя основныя предложенія элементарной геометріи. Чтобы въ этомъ отношеніи мы ни дѣлали, очевидно, что въ геометріи нельзя избавиться отъ необходимости отъ времени до времени прибѣгать къ простому непосредственному наблюденію, какъ средству для полученія извѣстныхъ результатовъ. Если изучаемыя этой наукой явленія, благодаря ихъ чрезвычайной простотѣ, гораздо болѣе связаны между собою, чѣмъ относящіяся ко всякой другой естественной наукѣ, то тѣмъ не менѣе необходимо должно существовать нѣсколько явленій, которыя не могутъ быть получены путемъ дедукціи, и сами служатъ исходными пунктами. Ради большаго раціональнаго совершенства науки слѣдуетъ сводить такія явленія къ наименьшему числу—это неоспоримо, тѣмъ не менѣе было бы абсурдомъ пытаться освободиться отъ нихъ совершенно. Приэтомъ я долженъ признаться, что, по моему мнѣнію, нѣкоторое преувеличеніе противъ безусловно необходимаго числа полученныхъ такимъ образомъ путемъ непосредственнаго наблюденія геометрическихъ понятій, если только эти понятія достаточно просты, представляетъ гораздо менѣе дѣйствительныхъ неудобствъ, чѣмъ обращеніе къ сложнымъ и косвеннымъ доказательствамъ даже въ томъ случаѣ, если съ логической точки зрѣнія послѣднія безукоризненны.

Послѣ изложенной по возможности точной характеристики истиннаго догматическаго назначенія геометріи древнихъ, приведенной къ наименьшему необходимому для нея объему, намъ слѣдуетъ разсмотрѣть вкратцѣ каждую изъ ея главныхъ составныхъ частей. Я считаю возмозныымъ ограничиться здѣсь разсмотрѣніемъ первой и самой обширной ея части, посвященной изученію прямой линіи. Два другіе отдѣла, квадратура многоугольниковъ и кубатура многогранниковъ, по самой своей природѣ не могутъ дать никакихъ важныхъ философскихъ соображеній, отличныхъ отъ указанныхъ нами въ предыдущей лекціи, при разсмотрѣніи вопроса объ измѣреніи площадей и объемовъ вообще.

Конечная задача, которая постоянно имѣется въ виду при изученіи прямой линіи, состоитъ, собственно говоря, въ опредѣленіи однихъ элементовъ прямолинейной фигуры при посредствѣ другихъ, что позволяетъ всегда косвенно изслѣдовать прямую линію, въ какихъ бы обстоятельствахъ она ни находилась. Эту основную задачу можно рѣшать съ помощью двухъ общихъ пріемовъ, по природѣ совершенно отличныхъ другъ отъ друга, а именно графически и алгебраически. Первый пріемъ, хотя и весьма несовершенный, мы однако разсмотримъ сначала потому, что онъ вытекаетъ само собою изъ прямого изученія предмета, второй же, гораздо болѣе совершенный во многихъ важныхъ отношеніяхъ, можетъ быть разсмотрѣнъ только впослѣдствіи, такъ какъ что онъ основанъ на предварительномъ знакомствѣ съ первымъ.

Графическое рѣшеніе состоитъ въ произвольномъ *представленіи* фигуры въ тѣхъ-же или въ особенности въ измѣненныхъ въ нѣкоторой пропорціи размѣрахъ. Первый способъ мы здѣсь указываемъ только вообще, для памяти, какъ наиболѣе простой и прежде всего представляющійся уму, такъ какъ, очевидно, на практикѣ онъ почти непримѣнимъ. Наоборотъ, второй способъ допускаетъ весьма обширныя и полезныя приложенія; до сихъ поръ еще мы постоянно пользуемся имъ во многихъ важныхъ случаяхъ нетолько для того, чтобы точно представить формы тѣлъ и ихъ взаимное положеніе, но даже для дѣйствительнаго опредѣленія геометрическихъ величинъ, когда мы не нуждаемся въ особенно большой точности. Древніе, въ виду несовершенства ихъ геометрическихъ познаній, гораздо шире пользовались этимъ пріемомъ, долгое время единственнымъ доступнымъ для нихъ даже въ наиболѣе важныхъ точныхъ опредѣленіяхъ. Такъ, напримѣръ, Аристархъ Самосскій, измѣряя относительное разстояніе солнца и луны отъ земли, наносилъ свои измѣренія на треугольникѣ, построенномъ съ наибольшей по возможности точностью и подобномъ прямоугольному треугольнику, образованному тремя небесными тѣлами въ тотъ моментъ, когда луна находилась въ квадратурѣ и когда, слѣдовательно, для опредѣленія треугольника достаточно было наблюсти уголъ на землѣ. Самъ Архимедъ, хотя и ввелъ первый въ геометрію числовыя опредѣленія, нѣсколько разъ прибѣгалъ къ подобнымъ же пріемамъ. Даже созданіе тригонометріи не заставило отказаться отъ нихъ вполнѣ, хотя значительно уменьшало примѣненіе этихъ пріемовъ. Греки и арабы продолжали пользоваться ими во многихъ изслѣдованіяхъ, гдѣ мы теперь считаемъ употребленіе исчисленія неизбѣжнымъ.

Точное воспроизведеніе какой-нибудь фигуры въ различныхъ масштабахъ не можетъ представить никакихъ серьезныхъ теоретическихъ трудностей, когда всѣ части предложенной фигуры находятся въ одной плоскости; но если предположить, какъ это случается чаще всего, что части ея находятся въ разныхъ плоскостяхъ, то мы встрѣтимся съ новыми классами геометрическихъ соображеній. Искусственно построенная фигура, постоянно плоская, въ томъ случаѣ не будетъ совершенно вѣрнымъ изображеніемъ истинной фигуры; поэтому прежде всего нужно будетъ точно установить способъ воспроизведенія фигуры, что даетъ мѣсто различнымъ системамъ *проэкцій*. Затѣмъ мы должны еще опредѣлить, по какому закону соотвѣтствуютъ другъ другу геометрическія явленія въ обѣихъ фигурахъ. Это соображеніе вызываетъ новый рядъ геометрическихъ изслѣдованій, конечная цѣль которыхъ состоитъ собственно въ отысканіи способовъ замѣны рельефныхъ построеній плоскими. Древнимъ пришлось разрѣшить нѣсколько элементарныхъ задачъ подобнаго рода для тѣхъ случаевъ, гдѣ мы теперь пользуемся сферической тригонометріей, главнымъ-же образомъ для задачъ, относящихся къ небесной сферѣ. Таково было назначеніе ихъ *аналеммъ* и другихъ плоскихъ фигуръ, долгое время замѣнявшихъ употребленіе исчисленія. Изъ этого видно, что древніе дѣйствительно знали элементы того, что мы теперь называемъ *начертательной геометріей*, хотя они и не поставили этой науки самостоятельно.

Я считаю удобнымъ бѣгло указать здѣсь на истинный характеръ начертательной геометріи, хотя, какъ наука существенно практическая, она не должна бы занимать мѣста въ этомъ трудѣ.

Всѣ вопросы геометріи трехъ измѣреній, если разсматривать ихъ графическія рѣшенія, представляютъ одну общую свойственную имъ только трудность: построенія въ пространствѣ, необходимыя для разрѣшенія подобнаго рода задачъ, — построенія, почти всегда невыполнимыя,— приходится замѣнять равнозначущими построеніями на плоскости, которыя приводили бы окончательно къ тому же результату. Безъ этой неизбѣжной замѣны всякое рѣшеніе подобнаго рода было бы, очевидно, неполнымъ и совершенно неприложимымъ на практикѣ, хотя въ теоріи построенія въ пространствѣ обыкновенно предпочтительнѣе, какъ болѣе непосредственныя.

Задача начертательной геометріи—дать общіе методы для выполненія указаннаго преобразованія; для этой цѣли она была создана и обращена въ самостоятельную однородную систему геніальнымъ усиліемъ мысли нашего знаменитаго Монжа. Онъ прежде всего нашелъ однообразный способъ для изображенія тѣлъ фигурами, начерченными на одной плоскости, *проектируя* данныя тѣла на двѣ различныя плоскости, обыкновенно перпендикулярныя другъ къ другу, и затѣмъ предполагая, что одна изъ нихъ вращается около линіи ихъ пересѣченія до совпаденія съ продолженіемъ другой; въ этой системѣ плоскостей, или въ другой, ей равнозначущей, для указаннаго изображенія достаточно было представить себѣ, что точки и линіи опредѣляются своими проекціями, а поверхности—проекціями ихъ производящихъ.

Установивъ эту точку зрѣнія, Монжъ подвергъ глубокому анализу отдѣльныя изслѣдованія своихъ предшественниковъ, произведенныя при помощи множества безсвязныхъ методовъ; поставивъ себѣ, въ прямомъ и общемъ видѣ, вопросъ, въ чемъ должны постоянно заключаться задачи этого рода, онъ пришелъ къ выводу, что онѣ всегда могутъ быть сведены къ очень небольшому числу неизмѣнныхъ отвлеченныхъ вопросовъ, которыя можно разрѣшить отдѣльно разъ навсегда съ помощью однообразныхъ операцій и которыя, по своему содержанію, частью относятся къ касанію, частью-же къ пересѣченію поверхностей.

Установивъ простые и вполнѣ общіе методы для графическаго рѣшенія этихъ двухъ видовъ задачъ, мы можемъ уже считать всѣ геометрическіе вопросы, къ которымъ приводятъ различныя искусства, какъ напр. строительная механика, обработка камней и дерева, перспектива, гномоника, фортификація и т. д., просто частными случаями общей теоріи, неизмѣнное приложеніе которой всегда приведетъ къ правильному рѣшенію; на практикѣ мы можемъ еще облегчить это рѣшеніе, умѣло пользуясь частными условіями каждаго отдѣльнаго случая.

Это важное открытіе заслуживаетъ особаго вниманія со стороны философовъ, изучающихъ совокупность всѣхъ результатовъ человѣческой дѣятельности, такъ какъ оно является только первымъ и, до сихъ поръ, единственнымъ законченнымъ шагомъ на пути ко всеобщему обновленію человѣческой техники, которое должно придать всѣмъ нашимъ искусствамъ точный и раціональный характеръ, столь необходимый для ихъ дальнѣйшаго развитія.

Въ самомъ дѣлѣ, такая революція неизбѣжно должна была начаться съ того класса промышленныхъ работъ, которые по существу тѣснѣе всего связаны съ самой простой, совершенной и древней наукой; она постепенно захватитъ, хотя и не такъ легко, всѣ остальныя области человѣческихъ дѣйствій, Мы скоро будемъ даже имѣть случай замѣтить, что самъ Монжъ, который глубже чѣмъ кто-либо другой проникъ въ философію практическихъ искусствъ, попытался для механической техники создать теорію, которая соотвѣтствовала-бы теоріи, столь удачно составленной имъ для техники геометріи; однако, въ этомъ случаѣ и въ виду значительно большихъ трудностей, ему удалось довольно ясно намѣтить только путь, который должно избрать для будущихъ изысканій этого рода.

Какое-бы значеніе ни имѣли идеи начертательной геометріи, однако очень важно не заблуждаться относительно ея истиннаго и только ей присущаго назначенія, какъ это дѣлали—въ особенности въ первое время послѣ изобрѣтенія Монжа—тѣ, которые видѣли въ новомъ методѣ средство для расширенія общей и отвлеченной области раціональной геометріи. Позднѣйшія обстоятельства не оправдали этихъ необоснованыхъ надеждъ. И, въ самомъ дѣлѣ, не очевидно-ли, что начертательная геометрія можетъ имѣть значеніе только въ качествѣ прикладной науки, какъ истинная теорія основанныхъ на геометріи искусствъ? Съ точки зрѣнія отвлеченной науки, она не можетъ создать ни одного дѣйствительно новаго класса геометрическихъ умозрѣній. Нельзя терять изъ виду, что прежде чѣмъ перейти въ область начертательной геометріи, всякая геометрическая задача должна быть сначала разрѣшена при помощи теоретической геометріи и, какъ мы видѣли, эти рѣшенія должны быть затѣмъ переработаны для практическаго пользованія въ томъ отношеніи, что построенія въ пространствѣ замѣняются построеніями на плоскости; эта та подстановка и представляетъ собою въ дѣйствительности единственную характерную функцію начертательной геометріи.

Слѣдуетъ, однако, замѣтить здѣсь, что съ точки зрѣнія умственнаго развитія, изученіе начертательной геометріи представляетъ серьезное философское значеніе, независимо отъ ея высокой практической пользы. Она имѣетъ огромное преимущество передъ другими науками, пріучая представлять себѣ въ пространствѣ иногда очень сложныя геометрическія построенія и заставляя слѣдить за ихъ постояннымъ соотвѣтствіемъ съ дѣйствительно начерченными фигурами; она самымъ вѣрнымъ и правильнымъ образомъ и въ высокой степени развиваетъ то важное качество человѣческаго ума, которое называется *воображеніемъ* въ узкомъ смыслѣ слова, и которое, въ элементарномъ и положительномъ значеніи его, заключается въ ясномъ и легкомъ представленіи обширной и сложной совокупности воображаемыхъ предметовъ, какъ будто-бы они находились передъ глазами.

Наконецъ, чтобы закончить наше бѣглое изложеніе общей природы начертательной геометріи, мы, опредѣляя ея логическій характеръ, должны замѣтить, что если по пріемамъ своихъ рѣшеній, она относится къ геометріи древнихъ, то, съ другой стороны, она приближается къ современной геометріи по характеру задачъ, входящихъ въ ея составъ. Эти задачи дѣйствительно въ высшей степени замѣчательны по той общности, которая, какъ мы видѣли въ прошлой лекціи, составляетъ истинное и существенное отличіе современной геометріи; всѣ ея методы постоянно предназначаются для примѣненія къ любымъ формамъ, причемъ всѣ частности, отвѣчающія каждой отдѣльной формѣ, могутъ играть только вполнѣ подчиненную роль. Такимъ образомъ въ начертательной геометріи рѣшенія получаются графическимъ путемъ, какъ въ геометріи древнихъ, и носятъ характеръ общности, какъ въ современной геометріи.

Послѣ этого важнаго отступленія,—необходимость котораго, читатель, безъ сомнѣнія признаетъ—перейдемъ къ философскому изслѣдованію *спеціальной* геометріи, причемъ будемъ все время разсматривать ее въ возможно узкихъ предѣлахъ, лишь какъ необходимое введеніе въ *общую* геометрію. Разсмотрѣвъ въ достаточной степени графическое рѣшеніе основной задачи, относящейся къ прямой линіи, — т. е. вопросъ объ опредѣленіи по какимъ-нибудь даннымъ элементамъ прямолинейной фигуры остальныхъ ея элементовъ — мы должны теперь изслѣдовать въ общемъ видѣ алгебраическое ея рѣшеніе.

Это второе рѣшеніе—объ очевидномъ превосходствѣ котораго было-бы здѣсь безполезно говорить,—по самой природѣ вопроса, неизбѣжно примыкаетъ къ геометрической системѣ древнихъ, хотя логическій пріемъ, которымъ при этомъ пользуются, заставлялъ обыкновенно совершенно не кстати отдѣлять ихъ одно отъ другого. Такимъ образомъ намъ здѣсь представляется случай провѣрить съ очень важной точки зрѣнія то, что мы доказали въ предшествующей лекціи лишь въ общихъ чертахъ,—а именно, что существенное отличіе современной геометріи отъ геометріи древнихъ слѣдуетъ видѣть не въ примѣненіи исчисленія. Истинные творцы нашей тригонометріи—какъ прямолинейной, такъ и сферической—въ дѣйствительности древніе, но только въ ихъ рукахъ она была гораздо менѣе совершенна, такъ какъ ихъ алгебраическія свѣдѣнія были крайне незначительны. Въ этой лекціи, — а не въ тѣхъ, какъ можно было ожидать сначала, которыя мы далѣе посвятимъ философскому изслѣдованію *общей* геометріи,—слѣдуетъ опредѣлить истинный характеръ этой важной предварительной теоріи, обыкновенно неправильно относимой къ такъ называемой аналитической геометріи и являющейся на самомъ дѣлѣ лишь дополненіемъ собственно *элементарной геометріи.*

Всѣ прямолинейныя фигуры могутъ быть разбиты на треугольники; поэтому, очевидно, вполнѣ достаточно умѣть опредѣлить по даннымъ элементамъ треугольника его остальные элементы, и *полигонометрія* приведется, такимъ образомъ, къ простой *тригонометріи.*

Существенное затрудненіе при алгебраическомъ рѣшеніи такого вопроса заключается въ составленіи трехъ независимыхъ уравненій между углами и сторонами треугольника; если три такія уравненія будутъ найдены, то всѣ тригонометрическіе вопросы очевидно будутъ сведены къ одному только исчисленію. При разсмотрѣніи съ самой общей точки зрѣнія вопроса объ установленіи этихъ уравненій, намъ непосредственно представятся два существенно различныхъ способа введенія угловъ въ исчисленіе: можно ввести прямо самые углы или пропорціональныя имъ круговыя дуги, или-же, напротивъ, подставить вмѣсто нихъ извѣстныя прямыя линіи, напримѣръ, хорды, стягивающія соотвѣтствующія угламъ дуги,—которыя поэтому обыкновенно называются ихъ тригонометрическими линіями.

Изъ этихъ двухъ тригонометрическихъ системъ сначала могла быть принята только вторая, какъ единственная примѣнимая на практикѣ, такъ какъ состояніе геометріи позволяло тогда съ достаточною легкостью найти точныя соотношенія между сторонами треугольника и тригонометрическими линіями его угловъ, тогда какъ установить уравненія между сторонами и самыми углами треугольника было въ то время совершенно невозможно. Теперь рѣшеніе можно получить съ одинаковою легкостью какъ при помощи второй, такъ и при помощи первой системы, и поэтому указанная причина предпочтенія второй системы утратила свое значеніе. Но, тѣмъ не менѣе, геометры должны были добровольно принять систему, допущенную сначала по необходимости: та-же причина, въ силу которой можно было съ большою легкостью получить тригонометрическія уравненія, должна обусловливать, какъ это легко понять à priori, и гораздо большую простоту этихъ уравненій: въ нихъ входятъ только прямыя линіи, тогда какъ другія уравненія составлены между прямыми линіями и дугами окружности. Это соображеніе тѣмъ болѣе важно, что здѣсь нужны въ высшей степени простыя формулы, такъ какъ онѣ должны быть постоянно примѣняемы во всѣхъ математическихъ наукахъ, а также и во всѣхъ ихъ приложеніяхъ

Правда, можно возразить, что если данъ уголъ, то на самомъ дѣлѣ всегда дана величина самаго угла, а не какой-нибудь тригонометрической его линіи, что если неизвѣстенъ уголъ, то надо найти величину именно угла, а не величину какой-нибудь изъ его тригонометрическихъ линій. Поэтому кажется, что эти линіи представляютъ собою только безполезное посредствующее звѣно между сторонами и углами треугольника, что ихъ слѣдуетъ, въ концѣ концовъ, исключать, и что введеніе ихъ, повидимому, никакъ не можетъ упростить поставленной нами себѣ задачи. Въ самомъ дѣлѣ, важно объяснить съ большею общностью и строгостью, чѣмъ это обыкновенно дѣлается, громадную дѣйствительную пользу указаннаго пріема. Дѣло въ томъ, что введеніе вспомогательныхъ величинъ дѣлитъ всю задачу тригонометріи на двѣ существенно различныя части: первая изъ нихъ занимается переходомъ отъ угловъ къ тригонометрическимъ линіямъ и обратно, тогда какъ вторая ставитъ себѣ цѣлью опредѣленіе сторонъ треугольника по тригонометрическимъ линіямъ его угловъ, и обратно. Ясно, что первая изъ этихъ двухъ основныхъ задачъ, по самой природѣ своей, можетъ быть вполнѣ разъ навсегда рѣшена и сведена къ числовымъ таблицамъ, путемъ изслѣдованія всѣхъ возможныхъ угловъ, такъ какъ ея рѣшеніе зависитъ только отъ этихъ угловъ, и совершенно не зависитъ отъ частныхъ случаевъ треугольниковъ, въ которыхъ эти углы въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ могутъ встрѣчаться; рѣшеніе-же втораго вопроса—по крайней мѣрѣ *числовое* рѣшеніе — непремѣнно должно быть повторено все съ самаго начала для каждаго новаго треугольника, подлежащаго разсмотрѣнію. Вотъ почему первая часть всей работы, которая, навѣрное, была-бы самою трудною, обыкновенно не принимается въ разсчетъ, такъ какъ она заранѣе выполнена; но если-бы задача не была такимъ образомъ разбита на части, тогда мы были-бы вынуждены выполнять съ самаго начала все вычисленіе въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ. Таково основное свойство принятой нами системы тригонометріи; въ самомъ дѣлѣ, она не представляла-бы никакого дѣйствительнаго преимущества, если-бы для каждаго подлежавшаго разсмотрѣнію угла приходилось постоянно вычислять его тригонометрическую линію, и обратно: посредствующее звѣно явилось-бы скорѣе помѣхою, чѣмъ облегченіемъ.

Чтобы ясно представить себѣ истинную природу этой теоріи, будетъ полезно сравнить ее съ другою, еще болѣе важною, которая должна приводить къ аналогичному результату какъ съ точки зрѣнія алгебраической, такъ, въ особенности, и съ точки зрѣнія ариѳметической: мы говоримъ о замѣчательной теоріи логариѳмовъ. Дѣлая философскую оцѣнку значенія этой теоріи, мы видимъ, въ самомъ дѣлѣ, что общій результатъ ея заключается въ дѣленіе всѣхъ возможныхъ ариѳметическихъ дѣйствій на двѣ различныя части, изъ которыхъ первая, самая сложная, можетъ быть выполнена разъ навсегда заранѣе, такъ какъ она зависитъ только отъ разсматриваемыхъ чиселъ, нисколько не завися отъ различныхъ соотношеній, которыя могутъ существовать между ними; цѣль ея—представить всѣ числа въ видѣ данныхъ степеней нѣкотораго постояннаго числа. Вторая часть задачи, которую необходимо надо повторять съ самаго начала для каждой новой формулы, подлежащей вычисленію, сводится къ выполненію надъ этими степенями соотвѣтствующихъ дѣйствій, безконечно болѣе простыхъ. Я ограничиваюсь однимъ указаніемъ на эту аналогію, которую каждый легко можетъ развить самъ.

Далѣе мы должны обратить вниманіе еще на одно замѣчательное свойство принятой нами системы тригонометріи, являющееся теперь уже второстепеннымъ, но вначалѣ имѣвшее большое значеніе: опредѣленіе угловъ по ихъ тригонометрическимъ линіямъ, и обратно, допускаетъ ариѳметическое рѣшеніе, безъ предварительнаго разрѣшенія соотвѣтствующей алгебраической задачи; только оно и является прямо необходимымъ для собственныхъ цѣлей тригонометріи. Несомнѣнно, что древніе могли построить тригонометрію именно благодаря этой ея особенности. Соотвѣтствующія изслѣдованія были тѣмъ легче, что древніе, естественно, за тригонометрическую линію приняли хорду; таблицы были частью уже заранѣе составлены для совершенно другой цѣли, благодаря трудамъ Архимеда надъ вопросомъ о спрямленіи окружности, изъ коихъ дѣйствительно можно было опредѣлить извѣстный рядъ хордъ; вслѣдствіе этого, когда Гиппархъ позднѣе построилъ тригонометрію, ему пришлось только пополнить эти вычисленія надлежащими вставками. Все это рельефно выясняетъ историческую связь указанныхъ идей.

Чтобы вполнѣ закончить этотъ бѣглый философскій очеркъ тригонометріи, надо теперь указать, что то же соображеніе, которое заставило насъ замѣнить углы и дуги окружности, въ цѣляхъ упрощенія уравненій, прямыми линіями, побуждаетъ насъ не ограничиваться одною тригонометрическою линіей, какъ это дѣлали древніе, а ввести совмѣстно нѣсколько, чтобы усовершенствовать всю систему, выбирая линіи наиболѣе удобныя для алгебраическихъ дѣйствій въ томъ или другомъ случаѣ. Въ этомъ отношеніи ясно, что число тригонометрическихъ линій само по себѣ ничѣмъ не ограничено: если онѣ опредѣляются дугами, которыя, обратно, въ свою очередь опредѣляются тригонометрическими линіями на основанія нѣкотораго закона, устанавливающими ихъ взаимную зависимость, то эти линіи могутъ быть подставляемы въ уравненія вмѣсто дугъ. Арабскіе ученые, ограничивавшіеся наиболѣе простыми построеніями, а затѣмъ и современные математики послѣдовательно довели число прямыхъ тригонометрическихъ линій до четырехъ или пяти; но это число можетъ быть доведено и до гораздо болѣе высокой цифры.

Но, вмѣсто того, чтобы прибѣгать къ геометрическимъ построеніямъ, которыя сдѣлались бы въ концѣ концевъ очень сложными, можно съ крайнею легкостью, при помощи одного замѣчательнаго пріема, обыкновенно недостаточно широко понимаемаго, получить столько новыхъ тригонометрическихъ линій, сколько ихъ можетъ потребоваться для аналитическихъ преобразованій. Пріемъ этотъ заключается въ слѣдующемъ: не увеличивая непосредственно числа тригонометрическихъ линій, принадлежащихъ каждой разсматриваемой дугѣ, вводятъ новыя линіи, предполагая, что эта дуга опредѣляется съ помощью тригонометрическихъ линій другой дуги, являющейся очень простой функціи дуги первоначальной. Такъ, напримѣръ, для облегченія вычисленія угла часто опредѣляютъ не его синусъ, а синусъ его половины, или синусъ двойного угла. Подобное построеніе *косвенныхъ* тригонометрическихъ линій очевидно, болѣе плодотворно, чѣмъ всѣ непосредственные геометрическіе пріемы ихъ построенія. Такимъ образомъ можно утверждать, что число тригонометрическихъ линій, которыми дѣйствительно пользуются въ настоящее время геометры, на самомъ дѣлѣ безконечно: аналитическія преобразованія, такъ сказать, каждую минуту могутъ заставить насъ увеличить ихъ число при помощи только что объясненнаго пріема.

Линіямъ, полученнымъ косвеннымъ путемъ, не было только дано спеціальнаго названія, за исключеніемъ относящихся къ дугѣ, дополнительной къ первоначальной, ибо необходимость такого названія недостаточно часто ощущалась геометрами; благодаря этому обстоятельству и распространился ошибочный взглядъ относительнаго истиннаго объема всей системы тригонометрическихъ линій.

Множественность тригонометрическихъ линій должна очевидно, вызывать еще третій основной вопросъ тригонометріи—изученіе соотношеній между этими различными линіями. Не зная этихъ соотношеній, мы совсѣмъ не могли бы пользоваться для цѣлей анализа всѣмъ разнообразіемъ вспомогательныхъ величинъ, неимѣющихъ при томъ иного назначенія. Кромѣ того, благодаря только что изложеннымъ соображеніямъ, ясно, что эта существенная часть тригонометріи—хотя и чисто подготовительная—можетъ достигнуть, по самой природѣ своей, безконечныхъ размѣровъ, если разсматривать ее во всей ея общности, тогда какъ двѣ другія части по необходимости ограничены строго опредѣленными рамками.

Мнѣ нѣтъ надобности добавлять, что эти три основныя части тригонометріи должны быть изучаемы не въ томъ порядкѣ, въ которомъ, какъ мы видѣли, онѣ должны были развиваться въ силу общей природы самаго вопроса, а какъ разъ въ обратномъ: третья часть, очевидно, не зависитъ отъ двухъ другихъ, а вторая,—отъ той, которая представилась намъ самою первою, т. е. отъ самаго рѣшенія треугольниковъ; на этомъ основаніи рѣшеніе треугольника должно быть изучаемо послѣ первыхъ двухъ частей, и тѣмъ болѣе важнымъ представляется указать естественное возникновеніе частей тригонометріи.

Было бы безполезно разсматривать здѣсь отдѣльно сферическую тригонометрію, такъ какъ она не допускаетъ никакого спеціальнаго философскаго изслѣдованія: хотя она, благодаря важности и многочисленности своихъ примѣненій, и является существенной частью геометріи, но въ настоящее время на нее, во всей ея совокупности, нельзя смотрѣть иначе, какъ на простое приложеніе прямолинейной тригонометріи, которая даетъ непосредственно ея основныя уравненія, замѣняя сферическій треугольникъ соотвѣтствующимъ трехграннымъ угломъ.

Я счелъ нужнымъ привести все это краткое изложеніе философіи тригонометріи,—которая могла бы, впрочемъ, привести и ко многимъ еще другимъ интереснымъ выводамъ,—чтобы ясно показать на важномъ примѣрѣ строгую связь и послѣдовательное развѣтвленіе, обнаруживаемыя наиболѣе, повидимому, простыми задачами элементарной геометріи.

Итакъ, разсмотрѣвъ съ достаточной для цѣлей этого труда подробностью истинный характеръ *спеціальной* геометріи, приведенной къ единственному догматическому назначенію—доставить *общей* геометріи необходимое предварительное основаніе, мы должны теперь обратить все наше вниманіе на истинную геометрію, разсматривая ее во всей ея совокупности съ наиболѣе раціональной точки зрѣнія. Но для этого сначала необходимо внимательно изслѣдовать великую первоначальную идею Декарта, на которой общая геометрія всецѣло основывается. Это и будетъ предметомъ изложенія слѣдующей лекціи.

Двѣнадцатая лекція.

Основная идея общей или аналитической геометріи

Такъ какъ *общая* геометрія всецѣло основана на преобразованіи геометрическихъ соображеній въ равнозначущія аналитическія, то мы прежде всего должны разсматрѣть непосредственно и какъ можно глубже ту прекрасную мысль, на основаніи которой Декартъ единообразно установилъ постоянную возможность такого соотношенія.

Если даже отвлечься отъ огромнаго значенія этой мысли для самой геометріи, которую она значительнымъ образомъ усовершенствовала, или вѣрнѣе, всецѣло перенесла на раціональную почву, то все-же философское изученіе замѣчательнаго открытія Декарта должно представить для насъ высокій интересъ, особенно въ виду того, что такое изученіе съ совершенной очевидностью опредѣлитъ общій методъ, которымъ необходимо пользоваться, чтобы установить отношенія между абстрактнымъ и конкретнымъ при помощи аналитическаго представленія явленій природы.

Во всей математической философіи нѣтъ ни одной мысли, которая въ бо̀льшей мѣрѣ заслуживала-бы нашего вниманія.

Для того, чтобы простыми аналитическими отношеніями возможно было изобразить всю совокупность геометрическихъ явленій, которыя можно себѣ вообразить, необходимо, само собой, прежде всего установить общій способъ аналитическаго представленія самихъ предметовъ, въ которыхъ происходятъ эти явленія, т. е. подлежащихъ разсмотрѣнію линій и поверхностей. Если мы такимъ образомъ будемъ всегда разсматривать самый предметъ съ чисто-аналитической точки зрѣнія, то легко понять, что съ той-же точки зрѣнія мы можемъ разсматривать и всѣ проявленія, свойственныя этому предмету.

Чтобы сдѣлать возможнымъ представленіе геометрическихъ формъ при помощи аналитическихъ уравненій, необходимо сначала преодолѣть одну основную трудность, а именно — привести общіе элементы геометрическихъ понятій къ простымъ численнымъ понятіямъ; однимъ словомъ, подставить въ геометріи на мѣсто *качественныхъ* сужденій сужденія *количественныя*.

Для этой цѣли замѣтимъ сначала что всѣ геометрическія идеи необходимо относятся къ слѣдующимъ тремъ основнымъ категоріямъ: къ величинѣ, къ формѣ и къ положенію изучаемыхъ протяженностей.

Что касается первой категоріи, то она, очевидно, не представляетъ никакого затрудненія, и непосредственно сводится къ числовымъ идеямъ. Относительно второй категоріи необходимо замѣтить, что, по своей природѣ, она всегда можетъ быть сведена къ третьей: форма тѣла, очевидно, зависитъ отъ взаимнаго расположенія разныхъ точекъ, изъ которыхъ оно состоитъ, и всякая идея о положеніи заключаетъ неизбѣжнымъ образомъ идею о формѣ; точно также всякое обстоятельство, относящееся къ формѣ можетъ быть выражено черезъ обстоятельство положенія.

Дѣйствительно, такъ и поступалъ человѣческій умъ, чтобы получить аналитическое изображеніе геометрическихъ формъ, такъ какъ основная мысль аналитической геометріи непосредственно относится только къ положенію. Итакъ, вся элементарная трудность сводится, въ сущности, къ подстановкѣ на мѣсто идей о положеніи равнозначущихъ идей о величинахъ. Таково непосредственное назначеніе основной мысли, на которой Декартъ построилъ общую систему аналитической геометріи.

Съ этой точки зрѣнія весь его философскій трудъ заключался только въ полномъ обобщеніи элементарнаго пріема, который можно считать присущимъ самой природѣ человѣческаго духа, такъ какъ онъ, можно сказать, безсознательно примѣняется всякимъ умомъ, даже наиболѣе посредственнымъ. Дѣйствительно, когда приходится опредѣлять положеніе предмета, не указывая на него прямо, мы постоянно прибѣгаемъ къ одному способу потому, очевидно, что другого и быть не можетъ: мы относимъ этотъ предметъ къ другимъ, положеніе которыхъ извѣстно, указывая величину какихъ-либо геометрическихъ элементовъ, при помощи которыхъ искомый предметъ связанъ съ извѣстными *).

Эти элементы представляютъ то, что Декартъ, а за нимъ и другіе геометры, назвали *координатами* разсматриваемой точки; этихъ координатъ необходимо должно быть двѣ, когда заранѣе извѣстно, въ какой плоскости находится данная точка, и три, если она можетъ находиться въ любой части пространства.

Мы можемъ составить столько-же различныхъ системъ координатъ, сколько различныхъ построеній можемъ представить себѣ для того, чтобы опредѣлить положеніе точки какъ на плоскости, такъ и въ пространствѣ: слѣдовательно, число этихъ системъ можетъ быть увеличено до безконечности. Но какая-бы система ни была принята, въ ней постоянно идеи положенія будутъ сведены къ простымъ идеямъ величинъ, такъ что перемѣщеніе точки мы будемъ разсматривать, какъ результатъ численныхъ измѣненій въ величинѣ ея координатъ.

Разсмотримъ сначала самый простой случай, а именно—геометрію на плоскости; положеніе точки на плоскости чаще всего опредѣляется большими или меньшими разстояніями ея отъ двухъ постоянныхъ прямыхъ, которыя предполагаются извѣстными и называются *осями*; обыкновенно принимается, что эти оси перпендикулярны другъ къ другу. Эта система, въ виду ея простоты, примѣняется чаще всѣхъ другихъ; но иногда геометры пользуются еще множествомъ другихъ системъ. Такъ, положеніе точки на плоскости можетъ быть опредѣлено ея разстояніями

---

*) Такъ, напримѣръ, мы опредѣляемъ обыкновенно положеніе мѣстностей на земномъ шарѣ при помощи ихъ разстояній отъ экватора и отъ перваго меридіана.

отъ двухъ постоянныхъ точекъ, или ея разстояніемъ отъ одной постоянной точки и направленіемъ этого разстоянія, опредѣляемаго величиной угла, который оно образуетъ съ извѣстной прямой: такая система называется системой *полярныхъ координатъ* и послѣ разсмотрѣнной выше является наиболѣе употребительной.

Можно опредѣлить еще положеніе точки съ помощью угловъ, образуемыхъ прямыми, соединяющими перемѣнную точку съ двумя постоянными точками, и прямой, проходящей черезъ эти постоянныя точки, или разстояніями перемѣнной точки отъ постоянной прямой и постоянной точки и т. д. Словомъ, нѣтъ ни одной геометрической фигуры, при помощи которой нельзя-бы было составить нѣкоторую систему координатъ, болѣе или менѣе удобную для примѣненія.

По этому поводу необходимо сдѣлать одно общее замѣчаніе: въ геометріи на плоскости каждая система координатъ сводится къ опредѣленію точки пересѣченіемъ двухъ линій, причемъ обѣ онѣ подчинены извѣстнымъ условіямъ, опредѣляющимъ ихъ положеніе; одно изъ этихъ условій остается перемѣннымъ,—то одно, то другое, въ зависимости отъ разсматриваемой системы. Въ самомъ дѣлѣ, нельзя представить себѣ иного способа построенія точки, помимо опредѣленія ея пересѣченіемъ нѣкоторыхъ двухъ линій.

Такъ, въ наиболѣе употребительной системѣ, въ системѣ *прямолинейныхъ координатъ* въ собственномъ смыслѣ слова, точка опредѣляется пересѣченіемъ двухъ прямыхъ, причемъ каждая изъ этихъ прямыхъ всегда остается параллельной постоянной оси, и только разстояніе ея отъ этой оси мѣняется; въ полярной системѣ—пересѣченіемъ окружности перемѣннаго радіуса съ постояннымъ центромъ и подвижной прямой, вращающейся по условію вокругъ этого центра. Если мы обратимся къ другимъ системамъ, то точка можетъ быть опредѣляема пересѣченіемъ двухъ круговъ, или какихъ-либо другихъ линій и т. д. Словомъ, назначая величину одной изъ координатъ точки въ какой-бы то ни было системѣ координатъ, мы этимъ самымъ по необходимости опредѣляемъ нѣкоторую линію, на которой данная точка должна находиться.

Геометры древности уже сдѣлали это существенное замѣчаніе, послужившее основаніемъ ихъ метода *геометрическихъ мѣстъ*, который они чрезвычайно удачно примѣняли для направленія своихъ изслѣдованій относительно разрѣшенія *опредѣленныхъ* геометрическихъ задачъ; они въ отдѣльности оцѣнивали вліяніе каждаго изъ двухъ условій, которыми была опредѣлена точка, прямо или косвенно входившая въ предложенную задачу. Именно общая систематизація этого метода и послужила для Декарта непосредственнымъ поводомъ къ тѣмъ изслѣдованіямъ, которыя привели его къ основанію аналитической геометріи.

Установивъ съ достаточной ясностью эти предварительныя соображенія, на основаніи которыхъ идеи положенія, а съ ними вмѣстѣ неявнымъ образомъ и всѣ элементарныя геометрическія представленія могутъ быть сведены къ простымъ числовымъ соображеніямъ, мы можемъ уже теперь перейти къ прямому и общему разсмотрѣнію великой идеи Декарта относительно аналитическаго изображенія геометрическихъ формъ. Это разсмотрѣніе и составитъ предметъ изложенія настоящей лекціи.

Для большей легкости я и впредь ограничусь пока разсмотрѣніемъ геометріи двухъ измѣреній, которою только и занимался самъ Декартъ; затѣмъ мнѣ придется отдѣльно разсмотрѣть съ той же точки зрѣнія особенности поверхностей и кривыхъ двоякой кривизны.

Объяснивъ пріемы выраженія аналитическаго положеніе точки на плоскости, можно легко доказать, что, какими-бы свойствами линія ни была опредѣлена, всегда такое опредѣленіе можно замѣнить соотвѣтственнымъ уравненіемъ между двумя перемѣнными координатами точки, описывающей эту линію; такое уравненіе и послужитъ аналитическимъ выраженіемъ взятой нами линіи, и всѣмъ явленіямъ, связаннымъ съ кривой, будутъ соотвѣтствовать извѣстныя алгебраическія измѣненія ея уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ, если предположить, что точка движется на плоскости не подчиняясь никакимъ условіямъ, которыя могли бы предъустановить ея движеніе, то какую-бы систему координатъ мы ни приняли, намъ всегда, очевидно, придется считать координаты данной точки двумя перемѣнными величинами, совершенно независимыми другъ отъ друга. Но если, напротивъ, эта точка должна описывать нѣкоторую опредѣленную линію, то намъ, очевидно, придется признать, что координаты нашей точки, въ какомъ-бы положеніи она ни находилась, сохраняютъ нѣкоторое постоянное и точное соотношеніе, которое, разумѣется, можетъ быть выражено соотвѣтствующимъ уравненіемъ; это уравненіе и явится яснымъ и точнымъ аналитическимъ опредѣленіемъ разсматриваемой линіи, такъ какъ оно будетъ выражать алгебраическое свойство, присущее исключительно координатамъ всѣхъ точекъ этой линіи. Дѣйствительно, не трудно понять, что если точка не подчинена никакому условію, то ея положеніе опредѣляется только тогда, когда даны въ отдѣльности обѣ ея координаты; если-же точка должна находиться на опредѣленной линіи, то достаточно одной координаты, чтобы вполнѣ опредѣлить ея положеніе. Вторая координата въ этомъ случаѣ явится опредѣленной *функціей* первой, или, другими словами, между обѣими координатами должно существовать нѣкоторое опредѣленное *уравненіе*, по природѣ своей соотвѣтствующее уравненію той линіи, на которой точка должна постоянно оставаться. Однимъ словомъ, если каждая изъ двухъ координатъ точки опредѣляетъ ея положеніе на нѣкоторой линіи, то обратно—условіе, что точка должна постоянно находиться на нѣкоторой опредѣленной линіи, равносильно условію, что задается величина одной изъ координатъ, которая, въ этомъ случаѣ, является вполнѣ зависящей отъ другой. Аналитическое соотношеніе, выражающее эту зависимость, можетъ быть обнаружено съ большей или меньшей трудностью; но его существованіе, очевидно, всегда должно быть признано, даже въ томъ случаѣ, когда наши современныя средства недостаточны для того, чтобы его обнаружить. При помощи этого простого соображенія можно въ наиболѣе общемъ видѣ доказать необходимость изображенія линій аналитическими уравненіями, независимо отъ частныхъ повѣрокъ, относящихся къ тому или другому опредѣленію линіи, на которыя обыкновенно опирается это основное предложеніе. 9 с и.

Обратно, принявъ конечную точку нашихъ разсужденій за исходную, также легко выяснить, что каждое уравненіе съ двумя перемѣнными необходимо должно быть въ опредѣленной системѣ координатъ изображено нѣкоторой линіей, причемъ одного только такого соотношенія безъ всякихъ иныхъ признаковъ вполнѣ достаточно для точнаго опредѣленія этой линіи. Научное назначеніе послѣдней—останавливать вниманіе непосредственно на общемъ ходѣ рѣшеній даннаго уравненія, которое такимъ образомъ будетъ изображено наиболѣе нагляднымъ и простымъ способомъ.

Это изображеніе уравненій является однимъ изъ основныхъ и важнѣйшихъ преимуществъ аналитической геометріи: благодаря ему она въ высшей степени способствовала усовершенствованію самаго анализа, не только указывая ясно опредѣленную цѣль и неисчерпаемую область приложенія, совершенно абстрактнымъ изслѣдованіямъ, но еще болѣе непосредственно, давая математикамъ новое философское средство для аналитическаго разсужденія, которое ничѣмъ инымъ не можетъ быть замѣнено.

Дѣйствительно, чисто алгебраическое изслѣдованіе уравненія несомнѣнно съ полнѣйшей точностью опредѣляетъ его рѣшенія, но только каждое въ отдѣльности, такъ что общій ходъ рѣшенія можетъ быть найденъ только при помощи длиннаго и утомительнаго ряда численныхъ сравненій, послѣ котораго умственная дѣятельность становится обыкновенно вполнѣ истощенной. Напротивъ—геометрическое мѣсто уравненія, предназначенное только для нагляднаго и точнаго изображенія всей совокупности этихъ сравненій, позволяетъ разсматривать эту совокупность непосредственно, вполнѣ отвлекаясь отъ деталей сравненія; такимъ образомъ оно можетъ представлять нашему уму общій аналитическій обзоръ уравненій, придти къ которому при помощи иного способа намъ было-бы очень трудно въ виду невозможности ясно опредѣлить его объектъ.

Такъ, напримѣръ, очевидно, что простой взглядъ на логариѳмическую кривую или на кривую, выражаемую уравненіемъ $y = sinx$, позволяетъ судить съ большей ясностью объ общемъ ходѣ измѣненія логариѳмовъ различныхъ чиселъ или синусовъ въ зависимости отъ ея дугъ, чѣмъ это было бы возможно при самомъ тщательномъ изученіи логариѳмическихъ или тригонометрическихъ таблицъ.

Какъ извѣстно, этотъ методъ сдѣлался въ настоящее время совершенно элементарнымъ и примѣняется во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда требуется ясно уловить характеръ закона, связывающаго рядъ точныхъ наблюденій извѣстнаго рода.

Возвращаясь къ изображенію линій уравненіями—которое и служитъ основнымъ предметомъ нашего изслѣдованія—мы видимъ, что такое изображеніе настолько вѣрно, что линія не можетъ претерпѣть даже и самаго незначительнаго измѣненія безъ того, чтобы оно не вызвало соотвѣтствующаго измѣненія въ ея уравненіи. Это полное согласованіе часто создаетъ даже особыя затрудненія, такъ какъ въ нашей системѣ аналитической геометріи простыя перемѣщенія линій такъ-же замѣтно отражаются на уравненіяхъ ихъ, какъ и дѣйствительныя измѣненія ихъ величины или формы. Такимъ образомъ, мы могли-бы подвергнуться риску смѣшать аналитически одно явленіе съ другимъ, если-бы геометры не изобрѣли остроумнаго способа, спеціально предназначеннаго для того, чтобы постоянно различать эти явленія.

Этотъ методъ основанъ на томъ соображеніи, что хотя и нельзя аналитически по произволу измѣнять положенія кривой относительно осей координатъ, тѣмъ не менѣе можно различнымъ образомъ измѣнять положеніе самыхъ осей,—что, очевидно, имѣетъ такое-же значеніе. Затѣмъ уже, при помощи общихъ и очень простыхъ формулъ, которыми производится это перемѣщеніе осей, нетрудно узнать, являются-ли два различныя уравненія простымъ аналитическимъ выраженіемъ той-же линіи въ двухъ различныхъ ея положеніяхъ, или же эти уравненія относятся къ двумъ дѣйствительно различнымъ геометрическимъ мѣстамъ, такъ какъ въ первомъ случаѣ одно изъ данныхъ уравненій должно преобразоваться въ другое, при надлежащемъ измѣненіи осей и другихъ постоянныхъ разсматриваемой системы координатъ.

Впрочемъ, необходимо замѣтить по этому поводу, что общія неудобства указаннаго характера, повидимому, являются совершенно неизбѣжными въ аналитической геометріи. Мы видѣли, что идеи положенія являются единственными геометрическими идеями, которыя могутъ быть непосредственно сведены къ числовымъ представленіямъ; идеи же формы приводятся къ нимъ только въ томъ случаѣ, если мы будемъ разсматривать форму, какъ соотношеніе положенія; поэтому, первое время анализъ необходимо долженъ смѣшивать явленія формы съ явленіями положенія, которыя только одни непосредственно выражены въ уравненіяхъ.

Чтобы дополнить философское разъясненіе главнаго принципа, служащаго основой аналитической геометріи, я долженъ здѣсь указать на новое общее соображеніе, особенно, какъ мнѣ кажется, пригодное для того, чтобы достаточно рельефно обрисовать необходимость изображенія линій уравненіями съ двумя перемѣнными.

Дѣло въ томъ, что не только, какъ мы установили раньше, каждая опредѣленная линія неизбѣжно должна привести къ уравненію между двумя координатами любой ея точки, но кромѣ того, мы можемъ разсматривать каждое опредѣленіе линіи, какъ ея уравненіе въ соотвѣтствующей системѣ координатъ.

Этотъ принципъ намъ будетъ легко установить, если мы предварительно проведемъ строгую логическую грань между различными классами опредѣленій. Каждое опредѣленіе по необходимости должно строго удовлетворять слѣдующему условію: оно должно давать средство отличать опредѣляемый предметъ отъ всякаго другого, указывая на такое его свойство, которое принадлежитъ только ему одному. Но эта цѣль можетъ быть достигнута двумя весьма различными способами: мы можемъ ограничиться простымъ *отличительнымъ* опредѣленіемъ, т. е. указаніемъ на такое свойство предмета, которое, хотя и является вполнѣ исключительнымъ, тѣмъ не менѣе не указываетъ на происхожденіе предмета; или-же мы можемъ прибѣгнуть къ *объяснительному* опредѣленію, т. е. охарактеризовать предметъ такимъ свойствомъ, которое выражаетъ одинъ изъ способовъ его происхожденія. Напримѣръ, если мы будемъ разсматривать окружность, какъ линію, которая при одинаковомъ периметрѣ содержитъ наибольшую площадь, то, очевидно, будемъ имѣть опредѣленіе перваго рода; если-же мы изберемъ для опредѣленія окружности то ея свойство, что всѣ точки ея находятся на одинаковомъ разстояніи отъ нѣкоторой опредѣленной точки, или другое подобное свойство, то будемъ имѣть опредѣленіе второго рода.

Ясно, впрочемъ, что, говоря вообще, даже въ томъ случаѣ, когда мы знаемъ предметъ только по его *отличительному* опредѣленію, надо считать, что можетъ быть найдено и его *объяснительное* опредѣленіе; оно явится неизбѣжнымъ результатомъ послѣдующаго изученія даннаго предмета.

Теперь уже понятно, что къ простымъ *отличительнымъ* опредѣленіямъ никакъ нельзя примѣнить общее соображеніе, о которомъ мы упоминали выше, говоря, что каждое опредѣленіе линіи неизбѣжно является ея уравненіемъ въ нѣкоторой системѣ координатъ. Эту мысль мы можемъ распространить только на дѣйствительно *объяснительныя* опредѣленія.

Если ограничиться только послѣдними опредѣленіями, то указанный принципъ не трудно доказать. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, невозможно опредѣлить происхожденіе линіи, не указавъ нѣкотораго соотношенія между двумя простыми движеніями, вращательными или поступательными, на которыя въ каждый моментъ можно разложить движеніе описывающей кривую точки. Но если составить себѣ наиболѣе общее представленіе о томъ, что такое *система координатъ*, и допустить всевозможныя системы ихъ, то ясно, что упомянутое соотношеніе будетъ ничѣмъ инымъ, какъ уравненіемъ данной линіи въ нѣкоторой системѣ координатъ, природа которой будетъ соотвѣтствовать природѣ происхожденія этой линіи.

Такъ, напримѣръ, мы можемъ принять, что обыкновенное опредѣленіе окружности является непосредственно *полярнымъ уравненіемъ* этой кривой, если мы примемъ за полюсъ центръ ея. Точно также, элементарное опредѣленіе эллипса или гиперболы, какъ кривыхъ, происходящихъ отъ движенія нѣкоторой точки, причемъ сумма или разность разстояній этой точки отъ двухъ другихъ опредѣленныхъ точекъ остается постоянной, тотчасъ-же приводитъ къ уравненію разсматриваемыхъ линій $y \pm x = c$, если мы примемъ такую систему координатъ, въ которой положеніе точки опредѣляется ея разстояніями отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ, и допустимъ, что этими двумя полюсами являются данные фокусы; равнымъ образомъ обыкновенное опредѣленіе циклоиды прямо даетъ для этой кривой уравненіе $y = mx$, если принять за координаты каждой точки ту большую или меньшую дугу, которую она отмѣчаетъ на нѣкоторой окружности съ опредѣленнымъ радіусомъ, считая отъ точки касанія этой окружности съ постоянной прямой, и прямолинейное разстояніе этой точки касанія до нѣкотораго начала, взятаго на данной прямой. Также легко и аналогичнымъ путемъ можно провѣрить наше положеніе и относительно обычныхъ опредѣленій спиралей, эпициклоидъ и т. д. Во всѣхъ этихъ случаяхъ мы найдемъ, что существуетъ нѣкоторая система координатъ, въ которой можно непосредственно получить очень простое уравненіе предложенной линіи, изобразивъ только въ алгебраической формѣ условіе, налагаемое самымъ способомъ происхожденія данной линіи.

Помимо своего прямого значенія, какъ способа полнаго уясненія необходимости изображенія линіи уравненіемъ, приведенное выше разсужденіе, мнѣ кажется, можетъ принести дѣйствительную пользу для науки, такъ какъ точно характеризуетъ ту основную общую трудность, съ которой приходится сталкиваться при дѣйствительномъ составленіи этихъ уравненій, и, слѣдовательно, даетъ интересное указаніе на надлежащій путь для подобныхъ изслѣдованій; это тѣмъ болѣе важно, что для такихъ изслѣдованій, по самой природѣ ихъ, нельзя установить полныхъ и неизмѣнныхъ правилъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если каждое опредѣленіе линіи, или по крайней мѣрѣ тѣ изъ нихъ, которыя указываютъ на способъ ея происхожденія, даетъ намъ прямо уравненіе этой линіи въ извѣстной системѣ координатъ, или, вѣрнѣе, само является этимъ уравненіемъ, то изъ этого слѣдуетъ, что затрудненіе, часто испытываемое при нахожденіи уравненія нѣкоторой линіи—а это затрудненіе бываетъ очень большимъ—должно зависѣть, главнымъ образомъ, отъ того условія, которое обыкновенно ставятъ себѣ, — выразить аналитически эту линію въ данной системѣ координатъ, вмѣсто того, чтобы допустить одинаково всевозможныя системы. Въ аналитической геометріи не всѣ эти системы могутъ быть признаны одинаково удобными; по различнымъ соображеніямъ—главныя изъ нихъ мы разсмотримъ ниже—геометры почти всегда считаютъ необходимымъ относить кривыя къ прямолинейнымъ координатамъ въ собственномъ значеніи слова. Но изъ вышеизложеннаго легко понять, что часто эта единственная система не является именно той, къ которой уравненіе данной кривой будетъ непосредственно отнесено на основаніи опредѣленія ея; слѣдовательно, главная трудность въ составленіи уравненія линіи заключается, собственно говоря, въ извѣстномъ преобразованіи системы координатъ. Разумѣется, это разсужденіе никоимъ образомъ не подчиняетъ составленія уравненій настоящему общему законченному методу, успѣхъ котораго былъ-бы всегда и неизбѣжно обезпеченъ; такое предположеніе по самой природѣ вопроса является химеричнымъ; но указанная точка зрѣнія можетъ съ пользой пролить свѣтъ на тотъ путь, который слѣдуетъ примѣнять для достиженія предложенной цѣли. Составивъ сначала подготовительное уравненіе, прямо вытекающее изъ разсматриваемаго опредѣленія, необходимо будетъ, чтобы получить уравненіе относительно системы координатъ, принятой нами за окончательную, постараться выразить координаты, естественно соотвѣтствующія способу происхожденія данной линіи, въ функціи координатъ, принятыхъ нами за окончательныя.

Очевидно, что для этой то части работы и нельзя дать точныхъ и неизмѣнныхъ указаній. Можно только замѣтить, что въ нашемъ распоряженіи будетъ тѣмъ болѣе средствъ для разрѣшенія этой задачи, чѣмъ лучше мы будетъ знать истинную аналитическую геометрію, т. е. чѣмъ больше намъ будетъ извѣстно алгебраическихъ выраженій различныхъ геометрическихъ явленій.

Чтобы дополнить философское изложеніе принципа, служащаго основаніемъ аналитической геометріи, мнѣ остается указать на соображенія относительно выбора вообще наиболѣе удобной системы координатъ; это приведетъ насъ къ раціональному объясненію предпочтенія, единодушно оказываемаго обыкновенной прямолинейной системѣ. Это предпочтеніе до сихъ поръ было скорѣе дѣломъ эмпирически установившагося убѣжденія въ превосходствѣ этой системы, чѣмъ точнымъ результатомъ прямого и глубокаго анализа.

Чтобы сдѣлать опредѣленный выборъ между всѣми различными системами координатъ, необходимо тщательно отдѣлить двѣ общія точки зрѣнія, относящіяся къ аналитической геометріи и обратныя по своему смыслу: съ одной стороны отношеніе алгебры къ геометріи, основанное на выраженіи линій при помощи уравненій; съ другой—отношеніе геометріи къ алгебрѣ, основанное на изображеніи уравненій при помощи линій.

Очевидно, что во всякомъ изслѣдованіи общей геометріи эти двѣ точки зрѣнія неизбѣжно и постоянно переплетаются между собой, такъ какъ всегда приходится почти, такъ сказать, незамѣтно переходить то отъ геометрическихъ соображеній къ алгебраическимъ, то обратно— отъ алгебраическихъ соображеній къ геометрическимъ.

Но тѣмъ не менѣе, здѣсь намъ совершенно необходимо провести рѣзкую грань между обѣими точками зрѣнія; дѣйствительно, мы увидимъ, что разсматриваемый нами вопросъ о методѣ очень далекъ отъ того, чтобы оставаться однимъ и тѣмъ-же съ обѣихъ точекъ зрѣнія, такъ что безъ этого раздѣленія мы не могли-бы составить себѣ о немъ яснаго понятія.

Съ первой точки зрѣнія, если мы строго ее отдѣлимъ, единственнымъ мотивомъ предпочтенія той или другой системы координатъ можетъ быть только бо́льшая простота уравненія каждой линіи, и бо́льшая легкость составленія этого уравненія. Однако, легко убѣдиться, что съ этой точки зрѣнія не существуетъ и не можетъ существовать никакой системы координатъ, заслуживающей постояннаго предпочтенія передъ всѣми другими. Дѣйствительно, мы выше замѣтили, что для каждаго даннаго геометрическаго опредѣленія можно найти систему координатъ, въ которой уравненіе линіи получается непосредственно и въ которой оно, въ то же время, необходимо должно оказаться крайне простымъ; кромѣ того, эта система неизбѣжно измѣняется въ зависимости отъ природы характеризующаго кривую и разсматриваемаго нами свойства ея. Итакъ, въ этомъ смыслѣ прямолинейная система координатъ не всегда явилась бы наиболѣе удобной, хотя во многихъ случаяхъ она оказывается весьма подходящей; вѣроятно нѣтъ ни одной системы, которая, въ извѣстныхъ отдѣльныхъ случаяхъ, не была бы предпочтительнѣе ея и, точно также, каждой другой системы.

Напротивъ, съ второй точки зрѣнія, дѣло представляется въ совершенно иномъ видѣ. Въ самомъ дѣлѣ, не трудно установить, что, вообще говоря, обыкновенная прямолинейная система координатъ необходимо должна приспособляться легче, чѣмъ всякая другая, къ изображенію уравненій соотвѣтствующими геометрическими мѣстами, т. е. что въ ней это изображеніе постоянно проще и вѣрнѣе. Для доказательства этого положенія довольно принять во вниманіе, что каждая система координатъ имѣетъ цѣлью опредѣлить положеніе точки пересѣченіемъ двухъ линій. Поэтому, система наиболѣе удобная для представленія геометрическихъ *мѣстъ* будетъ та, въ которой эти двѣ линіи будутъ возможно болѣе простыми; это уже сразу ограничиваетъ поле нашего выбора однѣми *прямолинейными* системами. На самомъ дѣлѣ, кромѣ обыкновенной системы, пользующейся въ качествѣ координатъ разстояніями точки отъ двухъ постоянныхъ прямыхъ, очевидно существуетъ безконечное множество системъ, заслуживающихъ названія *прямолинейныхъ*, т. е. такихъ, гдѣ употребляются для опредѣленія точекъ только прямыя линіи; такой была-бы, напримѣръ, система, въ которой координатами каждой точки служили бы углы, образуемые двумя прямыми, соединяющими данную точку съ двумя постоянными точками, и прямой, соединяющей эти двѣ постоянныя точки. Поэтому наше первое замѣчаніе недостаточно для строгаго объясненія предпочтенія, единодушно отдаваемаго обыкновенной системѣ. Но, изслѣдуя съ болѣе глубокой точки зрѣнія природу всякой системы координатъ, мы нашли, кромѣ того, что каждая изъ двухъ линій, пересѣченіе которыхъ опредѣляетъ разсматриваемую точку, должна непремѣнно въ каждый моментъ среди условій, ее опредѣляющихъ, заключать одинъ только перемѣнный элементъ, дающій соотвѣтствующія значенія ординатъ, и нѣсколько другихъ постоянныхъ элементовъ; послѣдніе и представляютъ собою *оси* системы, если принять этотъ терминъ въ его наиболѣе широкомъ математическомъ значеніи. Перемѣнный элементъ необходимъ для того, чтобы можно было разсмотрѣть всѣ положенія, а постоянные—для того, чтобы имѣть средства для сравненія. Во всѣхъ *прямолинейныхъ* системахъ каждая изъ двухъ прямыхъ подчинена одному опредѣленному условію, а координата явится слѣдствіемъ перемѣннаго условія. Съ этой точки зрѣнія очевидно, вообще говоря, что въ системѣ, наиболѣе благопріятной для построенія геометрическихъ мѣстъ, по необходимости перемѣнное условіе для каждой прямой должно быть возможно проще, по скольку для этого не окажется необходимымъ усложнять постоянное условіе. Но изъ всѣхъ возможныхъ способовъ опредѣленія двухъ подвижныхъ прямыхъ самымъ удобнымъ для геометрическихъ изслѣдованій является тотъ, при которомъ направленіе каждой прямой остается неизмѣннымъ, и обѣ онѣ только болѣе или менѣе приближаются къ неподвижной оси, или удаляются отъ нея. Было бы, напримѣръ, очевидно, гораздо затруднительнѣе ясно представить себѣ перемѣщеніе точки, опредѣляемой пересѣченіемъ двухъ прямыхъ, изъ которыхъ каждая вращается вокругъ постоянной точки, образуя съ нѣкоторой осью больщій или меньшій уголъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ системѣ координатъ, о которой мы говорили выше. Таково дѣйствительное общее объясненіе основнаго свойства обыкновенной прямолинейной системы, которая, по своей природѣ, болѣе всѣхъ другихъ приспособлена для геометрическаго изображенія уравненій, такъ какъ легче всего даетъ возможность представить себѣ перемѣщеніе точки въ зависимости отъ измѣненія величины ея координатъ. Чтобы вполнѣ усвоить себѣ все значеніе нашего разсужденія, достаточно, напримѣръ, тщательно сравнить обыкновенную прямолинейную систему съ полярной, въ которой простое и легко составляемое геометрическое представленіе о двухъ прямыхъ, перемѣщающихся параллельно соотвѣтствующимъ осямъ, замѣняется сложной картиной безконечнаго множества концентрическихъ круговъ, пересѣкаемыхъ прямою, вращающейся по условію около постоянной точки. Впрочемъ, уже a priori легко представить себѣ, какое огромное значеніе должно имѣть для аналитической геометріи такое глубоко-элементарное свойство, которое должно проявляться на каждомъ шагу и значеніе котораго должно все болѣе возрастать во всѣхъ подобныхъ изслѣдованіяхъ *).

Если дальше развить наше разсужденіе, при помощи котораго мы доказали превосходство обыкновенной системы координатъ надъ всякой другой для цѣлей графическаго изображенія уравненій, то мы можемъ даже уяснить себѣ пользу, приносимую въ этомъ смыслѣ обычнымъ правиломъ — по возможности избирать взаимно перпендикулярныя оси координатъ предпочтительно передъ косоугольными. Для изображенія линій уравненіями, это второстепенное условіе не представляетъ какого-либо всеобщаго преимущества, какъ и сама природа системы (что мы и видѣли раньше); смотря по обстоятельствамъ, каждое другое

*) Я долженъ здѣсь ограничиться самымъ общимъ сравненіемъ, и поэтому не разсмотрѣлъ нѣсколькихъ другихъ элементарныхъ неудобствъ полярной системы, которыя, хотя и не имѣютъ такого глубокаго значенія, но тѣмъ не менѣе очень серьезны. Такъ, напримѣръ, полярная система не допускаетъ геометрическаго объясненія для знака радіуса вектора, и даже иногда указываетъ одну точку для нѣсколькихъ различныхъ рѣшеній, вслѣдствіе чего изображеніе уравненія въ этой системѣ неизбѣжно будетъ несовершенно. Но каковы бы ни были эти неудобства, мы не могли принимать ихъ во вниманіе для того, чтобы доказать общее превосходство обыкновенной прямолинейной системы, такъ какъ и кромѣ нея могутъ существовать нѣкоторыя системы, не страдающія подобными недостатками.

наклоненіе осей можетъ оказаться предпочтительнѣй въ этомъ отношеніи. Но, съ обратной точки зрѣнія, легко понять, что прямоугольныя оси постоянно позволяютъ проще и даже вѣрнѣе изображать уравненія. Наклонныя оси раздѣляютъ пространство на области, не вполнѣ тождественныя другъ съ другомъ; поэтому, если геометрическое мѣсто уравненія простирается черезъ всѣ эти области, то, въ силу одного лишь неравенства угловъ, въ очертаніи линіи произойдутъ измѣненія, которыя, не соотвѣтствуя какому-либо аналитическому различію, по необходимости исказятъ полную точность изображенія, примѣшиваясь къ результатамъ собственно алгебраическихъ сравненій.

Такъ, напримѣръ, уравненіе $x^m + y^m = c$, которое, въ виду своей полной симметричности, должно бы было изображаться кривой, состоящей изъ четырехъ тождественныхъ частей, въ косоугольной системѣ координатъ будетъ представлено линіей, состоящей изъ четырехъ неравныхъ частей. Ясно, что избѣжать этихъ неудобствъ можно только однимъ способомъ — предполагать, что уголъ между координатными осями прямой.

Предшествующее изслѣдованіе ясно намъ показало, что съ первой изъ основныхъ точекъ зрѣнія, постоянно комбинируемыхъ въ аналитической геометріи, прямолинейная система въ узкомъ смыслѣ слова не имѣетъ никакого постояннаго преимущества передъ всякой другой; но такъ какъ она въ этомъ смыслѣ нисколько не уступаетъ всякой другой системѣ, то ея безусловное и необходимое преимущество для цѣлей графическаго изображенія уравненій обезпечиваетъ за ней общее предпочтеніе, хотя, разумѣется, можетъ случиться, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ необходимость упростить уравненія и облегчить ихъ составленіе заставляетъ геометровъ примѣнять менѣе совершенныя системы. Дѣйствительно, всѣ наиболѣе существенныя теоріи общей геометріи, служащія для аналитическаго изображенія важнѣйшихъ геометрическихъ явленій, построены именно съ помощью прямолинейной системы. Если же признается необходимымъ выбрать другую систему, то почти всегда останавливаются на полярной системѣ, такъ какъ природа этой системы на столько противоположна природѣ прямолинейной системы, что уравненія, являющіяся въ послѣдней черезчуръ сложными, въ первой, вообще говоря, въ достаточной степени упрощаются. Полярныя координаты часто имѣютъ то преимущество, что имѣютъ болѣе прямое и болѣе естественное конкретное значеніе, какъ напримѣръ въ механикѣ, въ геометрическихъ вопросахъ, къ которымъ приводитъ теорія вращательныхъ движеній, и почти во всѣхъ случаяхъ небесной геометріи.

До сихъ поръ, чтобы упростить наше введеніе, мы разсматривали основной принципъ аналитической геометріи только въ примѣненіи къ плоскимъ кривымъ; ихъ изученіе было единственнымъ предметомъ великаго философскаго обновленія, произведеннаго Декартомъ. Теперь намъ предстоитъ, чтобы дополнить наше важное разъясненіе, показать въ общихъ чертахъ, какимъ образомъ эта основная мысль была распространена нашимъ знаменитымъ Клэро, около вѣка спустя, на общее изслѣдованіе поверхностей и линій двоякой кривизны. Намѣченныя выше соображенія позволяютъ мнѣ ограничиться бѣглымъ анализомъ только дѣйствительныхъ особенностей этого новаго случая.

Для полнаго аналитическаго опредѣленія положенія точки въ пространствѣ, очевидно, требуется, чтобы были даны значенія трехъ координатъ ея; такъ, напримѣръ, въ наиболѣе употребительной системѣ, соотвѣтствующей *прямолинейной* системѣ въ геометріи на плоскости, необходимо указать разстоянія точки отъ трехъ постоянныхъ плоскостей, причемъ обыкновенно принимаютъ, что эти три плоскости взаимно перпендикулярны; въ этомъ случаѣ точка является пересѣченіемъ трехъ плоскостей, неизмѣняющихъ своего направленія. Можно бы было также воспользоваться разстояніемъ подвижной точки отъ трехъ постоянныхъ точекъ; въ этомъ случаѣ точка опредѣлялась бы пересѣченіемъ трехъ сферическихъ поверхностей съ постоянными центрами. Точно также, положеніе точки можно опредѣлить, указавъ ея разстояніе отъ нѣкоторой постоянной точки и направленіе этого разстоянія, опредѣляемое двумя углами, образуемыми этой прямой съ двумя неизмѣнными осями; это будетъ *полярная* система, свойственная геометріи трехъ измѣреній; въ этомъ случаѣ точка опредѣляется пересѣченіемъ шаровой поверхности, обладающей неподвижнымъ центромъ, и двухъ прямыхъ конусовъ, съ круговыми основаніями, постоянными осями и неподвижной общей вершиной. Однимъ словомъ, и въ этомъ случаѣ, очевидно, имѣется безконечное разнообразіе различныхъ системъ координатъ, подобно тому, какъ мы это видѣли въ геометріи двухъ измѣреній.

Въ общемъ, необходимо положить, что точка въ пространствѣ всегда опредѣляется пересѣченіемъ какихъ-нибудь трехъ поверхностей, подобно тому, какъ на плоскости—пересѣченіемъ двухъ линій; всѣ условія, опредѣляющія каждую изъ этихъ трехъ поверхностей, должны обладать неизмѣннымъ характеромъ, за исключеніемъ одного, которое и даетъ соотвѣтствующую координату. Его геометрическое значеніе такимъ образомъ выражается въ томъ, что оно принуждаетъ точку лежать на данной поверхности. Теперь уже ясно, что если всѣ три координаты точки совершенно независимы другъ отъ друга, то точка можетъ занимать въ пространствѣ любое мѣсто. Но если точка должна постоянно оставаться на нѣкоторой поверхности, заданной какимъ-бы то ни было образомъ, то, очевидно, достаточно двухъ координатъ, чтобы опредѣлить въ каждый моментъ ея положеніе, такъ какъ данная поверхность замѣнитъ собою условіе, налагаемое третьей координатой. Поэтому, необходимо съ аналитической точки зрѣнія считать эту послѣднюю координату опредѣленной функціей двухъ другихъ, остающихся совершенно независимыми другъ отъ друга. Итакъ, между тремя перемѣнными координатами будетъ существовать нѣкоторое постоянное уравненіе, и притомъ только *единственное*, такъ какъ только въ такомъ случаѣ неопредѣленность положенія точки будетъ выражена вполнѣ точно. Это уравненіе всегда существуетъ, хотя найти его можетъ быть болѣе или менѣе затруднительно; оно будетъ служить аналитическимъ опредѣленіемъ данной поверхности, такъ какъ всѣ точки ея,—и только онѣ,—будутъ ему удовлетворять. Если поверхность претерпитъ какое-нибудь измѣненіе, хотя бы простое перемѣщеніе, то уравненіе должно будетъ претерпѣть соотвѣтствующее болѣе или менѣе значительное измѣненіе. Словомъ всѣ геометрическія явленія, свойственныя поверхностямъ, можно будетъ передать извѣстными равносильными имъ аналитическими условіями, свойственными уравненіямъ съ тремя неизвѣстными; задача аналитической геометріи трехъ измѣреній сведется именно къ нахожденію и разъясненію этой общей и необходимой гармоніи.

Наконецъ, если эту-же основную мысль мы разсмотримъ съ обратной точки зрѣнія, то увидимъ, что каждое уравненіе съ тремя перемѣнными можетъ быть, вообще говоря, выражено геометрически опредѣленной поверхностью, которая прежде всего будетъ опредѣляться тѣмъ характернымъ для нея свойствомъ, что координаты всѣхъ ея точекъ будутъ постоянно связаны соотношеніемъ, выраженнымъ даннымъ уравненіемъ. Это геометрическое мѣсто для одного и того же уравненія, очевидно, будетъ измѣняться вмѣстѣ съ системой координатъ, которая будетъ примѣнена для его построенія. Возьмемъ хотя-бы прямолинейную систему; очевидно, что въ уравненіи между тремя перемѣнными x, y, z каждое частное значеніе, данное z, приведетъ къ уравненію между x и y; геометрическое мѣсто этого уравненія будетъ нѣкоторой линіей, находящейся въ плоскости, параллельной плоскости xy и отдѣленной отъ этой плоскости разстояніемъ, равнымъ частному значенію, данному нами z. Такимъ образомъ, общее геометрическое мѣсто явится какъ бы составленнымъ изъ безконечной послѣдовательности линій, расположенныхъ другъ надъ другомъ въ ряду параллельныхъ плоскостей—если отвлечься отъ тѣхъ перерывовъ, которые могутъ представиться—и, слѣдовательно, образуетъ настоящую поверхность.

То-же самое мы нашли-бы и при разсмотрѣніи всякой иной системы координатъ, хотя намъ было-бы трудно прослѣдить геометрическое построеніе уравненія.

Таковъ основный принципъ—дополненіе къ первоначальной мысли Декарта—на которомъ построена общая геометрія поверхностей. Было бы безполезно повторять здѣсь всѣ наши соображенія, изложенныя выше, когда мы говорили о линіяхъ. Каждый самъ можетъ примѣнить ихъ къ поверхностямъ, частью чтобъ доказать, что каждое опредѣленіе поверхности на основаніи способа ея происхожденія въ дѣйствительности является непосредственнымъ уравненіемъ этой поверхности въ нѣкоторой системѣ координатъ, частью, чтобъ опредѣлить, какая система координатъ изъ всевозможныхъ различныхъ системъ является въ общемъ наиболѣе удобной. По этому поводу я только прибавлю, что необходимое превосходство обыкновенной прямолинейной системы для цѣлей графическаго изображенія уравненій, очевидно, возрастаетъ въ геометріи трехъ измѣреній сравнительно съ геометріей на плоскости; зависитъ это отъ несравненно большей сложности, связанной съ выборомъ всякой другой системы. Это утвержденіе можно очень наглядно провѣрить, если теперь разсмотрѣть для сравненія, напримѣръ, хотя бы полярную систему, которая для поверхностей такъ же, какъ и для линій,—и по тѣмъ же соображеніямъ—является наиболѣе употребительной послѣ прямолинейной системы въ собственномъ смыслѣ слова.

Чтобы дополнить общее изложеніе основного принципа аналитическаго изслѣдованія поверхностей, намъ придется въ четырнадцатой лекціи разсмотрѣть съ философской точки зрѣнія послѣднѣе очень важное усовершенствованіе, недавно внесенное Монжемъ въ самыя основы этой теоріи для того, чтобы классифицировать линіи въ естественныя группы по способу ихъ происхожденія, выразивъ ихъ алгебраически общими дифференціальными уравненіями или простыми уравненіями, содержащими произвольныя функціи.

Разсмотримъ теперь послѣднюю основную точку зрѣнія аналитической геометріи трехъ измѣреній. Она относится къ алгебраическому представленію кривыхъ, разсматриваемыхъ въ пространствѣ наиболѣе общимъ способомъ. Продолжая слѣдовать тому-же принципу, который мы здѣсь постоянно примѣняли, т. е. стараясь установить соотвѣтствіе между степенью неопредѣленности геометрическаго мѣста и степенью независимости перемѣнныхъ, мы убѣдимся, что, вообще говоря, когда точка должна быть расположена на нѣкоторой кривой, достаточно одной координаты для того, чтобы вполнѣ ее опредѣлить: наша точка будетъ построена пересѣченіемъ данной кривой съ поверхностью, опредѣляемой координатой. Итакъ, въ этомъ случаѣ остальныя двѣ координаты точки должны быть разсматриваемы какъ опредѣленныя и различныя функціи первой.

Изъ этого слѣдуетъ, что всякая линія, разсматриваемая въ пространствѣ, изображается аналитически уже не однимъ уравненіемъ, а совокупностью двухъ уравненій между тремя координатами любой ея точки. Дѣйствительно, ясно, съ другой стороны, что такъ какъ каждое изъ этихъ выраженій въ отдѣльности изображаетъ нѣкоторую поверхность, то ихъ совокупность изображаетъ данную линію, какъ пересѣченіе двухъ опредѣленныхъ плоскостей.

Таковъ наиболѣе общій способъ алгебраическаго изображенія линій въ геометріи трехъ измѣреній.

Этотъ принципъ обыкновенно разсматриваютъ съ черезчуръ узкой точки зрѣнія, когда говорятъ, что линія опредѣляется системой двухъ своихъ *проекцій* на двѣ координатныя плоскости. Такая система характеризуется аналитически той особенностью, что каждое изъ двухъ уравненій линіи содержитъ тогда уже лишь двѣ изъ трехъ координатъ, вмѣсто того, чтобы заключать въ себѣ всѣ три перемѣнныя вмѣстѣ.

Этотъ методъ, въ которомъ линія разсматривается, какъ пересѣченіе двухъ цилиндрическихъ поверхностей, параллельныхъ двумъ изъ трехъ осей координатъ, помимо того неудобства, что его примѣненіе ограничивается обыкновенной прямолинейной системой, отличается еще и тѣмъ недостаткомъ, что вводитъ безполезныя затрудненія въ аналитическое представленіе линій, такъ какъ комбинація двухъ цилиндрическихъ поверхностей далеко не всегда является наиболѣе удобной для составленія уравненія линіи.

Итакъ, если разсматривать это основное понятіе въ его наиболѣе общей формѣ, то въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ намъ нужно изъ безконечнаго множества тѣхъ поверхностей, которыя, пересѣкаясь попарно, могли бы служить для построенія данной линіи, выбрать пару, легче всего приводящую къ составленію искомаго уравненія, т. е. состоящую изъ наиболѣе извѣстныхъ поверхностей. Такъ, напримѣръ, если мы захотимъ аналитически изобразить окружность въ пространствѣ, мы очевидно должны предпочесть разсматривать ее, какъ пересѣченіе шаровой поверхности и плоскости, а не будемъ искать другой комбинаціи поверхностей, которая привела-бы къ такому-же результату.

На самомъ дѣлѣ, этотъ способъ представлять себѣ изображенія линій уравненіями въ аналитической геометріи трехъ измѣреній, по самой своей природѣ, влечетъ за собою неизбѣжное неудобство: онъ приводитъ къ нѣкоторому аналитическому смѣшенію въ виду того, что та-же самая линія въ той же системѣ координатъ можетъ быть выражена безчисленными парами уравненій, отвѣчающими безчисленнымъ парамъ поверхностей, которыя могутъ образовать данную линію; это обстоятельство можетъ представить нѣкоторыя затрудненія при распознаваніи линіи во всѣхъ алгебраическихъ видоизмѣненіяхъ, какія для нея возможны. Существуетъ, однако, общій и крайне простой методъ для устраненія этого недостатка, причемъ не исчезаютъ и преимущества, связанныя съ этимъ видомъ геометрическихъ построеній.

Въ самомъ дѣлѣ, для этого вполнѣ достаточно, какова-бы ни была аналитическая система, первоначально установленная для нѣкоторой линіи, умѣть вывести изъ нея систему, соотвѣтствующую одной парѣ поверхностей единообразнаго происхожденія,—напримѣръ, парѣ двухъ цилиндрическихъ поверхностей, проектирующихъ данную линію на двѣ координатныя плоскости; эти поверхности, очевидно, всегда останутся тождественными, какимъ-бы путемъ ни была получена линія, и измѣнятся только тогда, когда измѣнится сама линія. Итакъ, выбирая эту неизмѣнную систему, которая дѣйствительно является наиболѣе простой, мы, вообще говоря, будемъ въ состояніи изъ первоначальныхъ уравненій вывести уравненія, соотвѣтствующія этому частному построенію: для этого, при помощи двухъ послѣдовательныхъ исключеній, мы преобразуемъ ихъ въ два уравненія, содержащія только по двѣ перемѣнныхъ координаты и уже въ силу такого условія соотвѣтствующія двумъ проектирующимъ поверхностямъ.

Таково, въ дѣйствительности, главное значеніе этой геометрической комбинаціи; она даетъ намъ неизмѣнное и вѣрное средство для опредѣленія тождественности линій, не смотря на очень значительное иногда различіе ихъ уравненій.

Послѣ общаго разсмотрѣнія основного принципа аналитической геометріи въ наиболѣе элементарныхъ формахъ, представляемыхъ имъ, намъ остается еще, для дополненія въ философскомъ отношеніи нашего очерка, указать здѣсь на общія несовершенства, которыми до сихъ поръ еще страдаетъ этотъ принципъ, какъ относительно геометріи, такъ и относительно анализа.

Относительно геометріи необходимо замѣтить, что уравненія до сихъ поръ могутъ выражать только геометрическія мѣста полностью, а ни въ коемъ случаѣ не опредѣленныя части этихъ геометрическихъ мѣстъ. Однако, во многихъ случаяхъ было бы необходимо имѣть возможность выразить аналитически отрѣзокъ линіи или поверхности, и даже *прерывныя* линіи или поверхности, составленныя изъ ряда отрѣзковъ, принадлежащихъ различнымъ геометрическимъ фигурамъ, какъ напримѣръ периметръ многоугольника или поверхность многогранника. Термологія особенно часто приводитъ къ подобнымъ соображеніямъ, къ которымъ наша современная аналитическая геометрія оказывается безусловно неприложимой.

Тѣмъ не менѣе важно отмѣтить, что за послѣднѣе время изслѣдованія г. Фурье надъ прерывными функціями начинаютъ уже заполнять этотъ значительный пробѣлъ и этимъ самымъ уже ввели новое существенное усовершенствованіе въ основную мысль Декарта. Но этотъ способъ представленія разнородныхъ или частныхъ формъ основанъ на примѣненіи тригонометрическихъ рядовъ, расположенныхъ по синусамъ безконечнаго ряда кратныхъ дугъ, или-же на примѣненіи опредѣленныхъ интеграловъ, равносильныхъ этимъ рядамъ, но общіе интегралы которыхъ неизвѣстны; поэтому такой способъ является еще черезчуръ сложнымъ для того, чтобы онъ могъ быть непосредственно введенъ въ систему собственно аналитической геометріи.

Относительно анализа необходимо начать съ признанія, что невозможность изобразить геометрически уравненія, содержащія четыре, пять и болѣе перемѣнныхъ, подобно тому, какъ мы изображаемъ всѣ уравненія съ двумя и тремя перемѣнными, не можетъ быть приписана несовершенству нашей системы аналитической геометріи, такъ какъ она, очевидно, зависитъ отъ самой природы предмета. Анализъ неизбѣжно обладаетъ гораздо большей общностью, чѣмъ геометрія, такъ какъ относится ко всѣмъ возможнымъ явленіямъ; поэтому было-бы, съ философской точки зрѣнія, неправильно стараться въ однихъ только геометрическихъ явленіяхъ постоянно находить конкретное изображеніе всѣхъ законовъ, могущихъ быть выраженными при помощи анализа. Но существуетъ другое, менѣе важное несовершенство, которое дѣйствительно надо считать результатомъ самой точки зрѣнія, положенной нами въ основу аналитической геометріи.

Это несовершенство заключается въ томъ, что наше обычное изображеніе уравненій съ двумя и тремя перемѣнными при помощи линій и поверхностей, очевидно, всегда является болѣе или менѣе неполнымъ, такъ какъ при построеніи геометрическихъ мѣстъ, мы обращаемъ вниманіе только на вещественныя *рѣшенія* уравненія, и совершенно упускаемъ изъ виду *мнимыя*. Однако общій ходъ *мнимыхъ* рѣшеній, по своей природѣ, допускаетъ геометрическое изображеніе совершенно такъ же, какъ и ходъ рѣшеній вещественныхъ. Изъ этого упущенія слѣдуетъ, что графическое изображеніе уравненія постоянно является неполнымъ; иногда-же, когда уравненіе допускаетъ лишь мнимыя рѣшенія, неполнота изображенія обращается въ полнѣйшее отсутствіе его.

Однако, даже и въ этомъ послѣднемъ случаѣ, очевидно, слѣдовало-бы, съ геометрической точки зрѣнія, различать уравненія, настолько отличныя отъ другихъ, какъ напримѣръ слѣдующія:

$$x^2+y^2+1=0,\ \ x^4+y^4+1=0,\ \ y^2+e^x=0.$$

Помимо того извѣстно, что это основное несовершенство часто влечетъ за собою въ аналитической геометріи двухъ и трехъ измѣреній множество второстепенныхъ неудобствъ въ томъ смыслѣ, что нѣкоторыя аналитическія измѣренія не находятъ соотвѣтствія въ геометрическихъ явленіяхъ.

Одинъ изъ величайшихъ современныхъ геометровъ, г. Пуансо, представилъ весьма остроумное и простое соображеніе, еще не оцѣненное вообще по достоинству, которое, если уравненія не слишкомъ сложны, позволяетъ представить себѣ графическое изображеніе мнимыхъ рѣшеній, ограничиваясь изображеніемъ ихъ отношеній, когда эти отношенія вещественны *). Но это соображеніе, которому нетрудно было-бы придать болѣе общую и отвлеченную форму, до сихъ поръ мало пригодно для дѣйствительнаго примѣненія, такъ какъ методы алгебраическаго рѣшенія уравненій находятся еще въ стадіи крайняго несовершенства, и поэтому видъ мнимыхъ корней часто вполнѣ остается неизвѣстнымъ или же представляется черезчуръ сложнымъ. Необходимы новыя изслѣдованія въ томъ-же направленіи для того, чтобы можно было признать

*) Пуансо показалъ, напримѣръ, въ своемъ прекрасномъ „Мемуарѣ объ анализѣ дѣленій угла“, что уравненіе $x^2+y^2+a^2=0$, обыкновенно устраняемое какъ не представляющее геометрическаго мѣста, можетъ быть очень просто и ясно изображено равносторонней гиперболой, которая по отношенію къ этому уравненію играетъ ту же роль, какъ окружность по отношенію къ уравненію $x^2+y^2-a^2=0$.

этотъ существенный пробѣлъ въ нашей аналитической геометріи заполненнымъ.

Попытка философскаго изложенія основного принципа аналитической геометріи, содержащаяся въ этой главѣ, ясно показала намъ, что разсматриваемая нами наука имѣетъ главной цѣлью опредѣлить, вообще, аналитическое выраженіе для того или другого геометрическаго явленія, свойственнаго линіямъ и поверхностямъ, и обратно — открыть геометрическое толкованіе того или другаго аналитическаго соображенія.

Теперь намъ предстоитъ разсмотрѣть,—разумѣется, ограничиваясь самыми общими и важными вопросами,—какимъ образомъ геометрамъ дѣйствительно удалось установить эту прекрасную гармонію и тѣмъ придать геометріи, разсматриваемой въ всей ея совокупности, характеръ совершенной раціональности и простоты, въ такой высокой степени присущій ей въ настоящее время.

Таковъ будетъ главный предметъ двухъ слѣдующихъ лекцій; изъ нихъ одна будетъ посвящена общему изслѣдованію линій, другая — общему изслѣдованію поверхностей.

Тринадцатая лекція.

Общая геометрія двухъ измѣреній.

Вслѣдствіе общепринятаго до настоящаго времени порядка изложенія геометріи, истинное назначеніе аналитической геометріи понимается еще крайне несовершенно, далеко несоотвѣтственно взгляду, составленному о томъ же предметѣ истинными геометрами съ тѣхъ поръ, какъ распространеніе аналитическихъ понятій на раціональную механику позволило возвыситься до нѣкоторыхъ общихъ идей о математической философіи. Радикальный переворотъ, произведенный великой идеей Декарта, совершенно еще не оцѣненъ по достоинству въ современной постановкѣ математическаго преподаванія, даже высшаго. Удивительный методъ Декарта—въ томъ видѣ, въ которомъ онъ преподается и, главное, примѣняется—сначала какъ будто бы не имѣетъ иной дѣйствительной цѣли, кромѣ упрощенія изученія коническихъ сѣченій или нѣкоторыхъ другихъ кривыхъ, разсматриваемыхъ, однако, всегда одна за другой, въ соотвѣтствіи съ духомъ геометріи древнихъ, а такая цѣль, безъ сомнѣнія, представляется маловажной. До сихъ поръ еще невыяснено достаточно, что истинный отличительный характеръ современной геометріи, составляющій ея несомнѣнное преимущество, заключается въ томъ, что тамъ изучаются въ наиболѣе общей формѣ различные вопросы, относящіеся къ любымъ линіямъ и поверхностямъ, причемъ всѣ геометрическія соображенія и изслѣдованія преобразуются въ аналитическія. Замѣчательно, что во всѣхъ учрежденіяхъ, служащихъ высшему математическому образованію, — и даже въ наиболѣе знаменитыхъ, пользующихся заслуженной репутаціей,—до сихъ поръ еще не введенъ настоящій догматическій курсъ общей геометріи, въ ясномъ и полномъ изложеніи *).

Однако, такой систематическій очеркъ удобнѣе всего для того,

*) Рутина, которую приходится наблюдать въ этомъ дѣлѣ, особенно въ преподаваніи низшей математики, ясно показываетъ, что хотя со времени появленія геометріи Декарта прошло уже два столѣтія, тѣмъ не менѣе наше обычное математическое преподаваніе далеко еще не соотвѣтствуетъ настоящему положенію науки; это, главнымъ образомъ, зависитъ — чего никакъ нельзя скрывать,—отъ крайней бездарности большинства лицъ, которымъ поручается эта важная отрасль преподаванія, тогда какъ настоящіе авторитеты науки не могутъ оказывать постояннаго и правильнаго вліянія на направленіе математическаго преподаванія.

чтобы ясно обнаружить философскій характеръ математики, такъ какъ онъ съ совершенной точностью раскрылъ бы общую форму отношенія абстрактнаго къ конкретному въ математической теоріи любого класса естественныхъ явленій.

Эти соображенія достаточно ясно указываютъ, какую прямую и особую пользу—помимо его высокаго философскаго значенія—можетъ имѣть тотъ очеркъ, къ которому насъ приводитъ теперь планъ нашего труда.

Итакъ, намъ предстоитъ, исходя изъ основной идеи, изложенной въ предъидущей главѣ относительно аналитическаго представленія геометрическихъ формъ, разсмотрѣть, какимъ образомъ геометрамъ удалось привести всѣ вопросы общей геометріи къ вопросамъ чистаго анализа, и опредѣлить аналитическіе законы всѣхъ геометрическихъ явленій, т. е. алгебраическія видоизмѣненія, соотвѣтствующія имъ въ уравненіяхъ линій и поверхностей. Сначала я ограничусь только разсмотрѣніемъ кривыхъ, и даже плоскихъ кривыхъ, а общее изученіе поверхностей и линій двоякой кривизны отложу до слѣдующей лекціи. Общее направленіе этого труда заставляетъ насъ ограничиться философскимъ разсмотрѣніемъ наиболѣе важныхъ общихъ вопросовъ и, главное, устранить всякое примѣненіе къ частнымъ формамъ. Здѣсь мы должны имѣть въ виду только одну существенную цѣль: съ точностью установить, какимъ образомъ основная идея Декарта привела къ построенію общей системы геометріи на раціональныхъ и точныхъ основахъ. Каждое другое изслѣдованіе входило-бы въ рамки спеціальнаго курса по геометріи; но что касается даннаго вопроса, то разсмотрѣніе его неизбѣжно для разрѣшенія поставленной нами себѣ задачи. Разумѣется, можно понять á priori, какъ я указалъ въ предъидущей лекціи, что разъ только предметъ геометрическихъ изслѣдованій будетъ представленъ въ аналитическомъ видѣ, то всѣ признаки и явленія, свойственныя этому предмету, необходимо должны допускать подобное-же истолкованіе. Но ясно, что подобное разсужденіе ни въ коемъ случаѣ, даже съ чисто-философской точки зрѣнія, не можетъ избавить насъ отъ разсмотрѣнія дѣйствительнаго установленія этой общей гармоніи между геометріей и анализомъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы-бы составили себѣ о ней только смутное, неясное и совершенно недостаточное представленіе.

Первый и самый простой вопросъ, который можетъ быть предложенъ относительно извѣстной кривой, сводится къ нахожденію, по уравненію *) этой кривой, числа точекъ, необходимыхъ для ея опредѣленія. Помимо прямого значенія этого вопроса, до сихъ поръ не разсмотрѣннаго съ достаточно раціональной точки зрѣнія, я считаю необходимымъ подробнѣе остановиться на общемъ рѣшеніи указанной элементарной задачи, такъ какъ мнѣ кажется, что оно, въ виду крайней простоты соотвѣтствующихъ аналитическихъ пріемовъ, особенно пригодно по своему методу для уясненія истиннаго духа аналитической геометріи, т. е. необходимаго и постояннаго соотношенія между абстрактной и конкретной точками зрѣнія.

Чтобы вполнѣ разрѣшить эту задачу, необходимо различать два случая: 1) когда предложенная кривая аналитически опредѣляется своимъ

*) Для опредѣленности изложенія, я буду постоянно разсматривать въ этой и слѣдующей лекціи, если не будетъ сдѣлано особой оговорки, систему обыкновенныхъ прямолинейныхъ координатъ.

наиболѣе общимъ уравненіемъ, т. е. уравненіемъ, отвѣчающимъ всякому положенію кривой относительно осей и 2) когда кривая опредѣляется болѣе частнымъ и простымъ уравненіемъ, соотвѣтствующимъ только одному опредѣленному положенію кривой относительно осей.

Въ первомъ случаѣ очевидно, что условіе, заставляющее кривую проходить черезъ данную точку, равносильно, съ аналитической точки зрѣнія, условію, чтобы произвольныя постоянныя, содержащіяся въ общемъ уравненіи кривой, имѣли между собою соотношеніе, получающееся отъ подстановки въ данное уравненіе частныхъ координатъ этой точки. Поэтому, такъ какъ каждая точка подчиняетъ постоянныя нѣкоторому алгебраическому условію, то для полнаго опредѣленія кривой необходимо указать столько точекъ, сколько въ уравненіи содержится произвольныхъ постоянныхъ. Таково общее правило. Тѣмъ не менѣе слѣдуетъ замѣтить, что оно можетъ привести къ ошибочному заключенію и указать на слишкомъ большое число точекъ въ томъ случаѣ, если въ предложенномъ уравненіи число различныхъ членовъ, содержащихъ произвольныя постоянныя, будетъ меньше, чѣмъ число самыхъ постоянныхъ. Въ этомъ случаѣ, очевидно, пришлось-бы судить о числѣ точекъ, необходимыхъ для полнаго опредѣленія кривой, только по числу этихъ членовъ; съ геометрической точки зрѣнія, это правило означало-бы, что разсматриваемыя постоянныя могутъ подвергнуться нѣкоторымъ измѣненіямъ, которыя не имѣли-бы никакого вліянія на форму самой кривой.

Такой случай имѣлъ-бы мѣсто, если-бы мы, напримѣръ, опредѣлили окружности какъ кривую, описанную вершиной угла постоянной величины, вращающагося такимъ образомъ, что каждая изъ его сторонъ проходитъ черезъ заданную точку.

Необходимо, поэтому, для большей общности, отдѣльно считать число постоянныхъ, входящихъ въ уравненіе, и число членовъ, ихъ содержащихъ, и устанавливать затѣмъ число точекъ, необходимыхъ для полнаго опредѣленія кривой въ соотвѣтствіи съ меньшимъ изъ этихъ двухъ чиселъ, если только они не окажутся равными. Если-же кривая первоначально опредѣлена только уравненіемъ такого рода, который мы назвали выше *частнымъ*, то при помощи постояннаго и крайне простого преобразованія легко можно привести этотъ случай къ предъидущему, надлежащимъ способомъ *обобщая* предложенное уравненіе. Для этого достаточно отнести кривую, по извѣстнымъ формуламъ, къ новой системѣ осей, положеніе которой относительно данныхъ осей признавалось-бы неопредѣленнымъ. Если указанное преобразованіе не измѣнитъ существеннымъ образомъ аналитическаго состава первоначальнаго уравненія, то это будетъ служить доказательствомъ, что уравненіе было достаточно общимъ; въ противномъ случаѣ, оно приметъ общій форму, и тогда уже вопросъ легко будетъ разрѣшенъ при помощи только что установленнаго правила.

Можно даже замѣтить, чтобы еще упростить наше рѣшеніе, что подобное обобщеніе уравненія всегда, каково-бы ни было первоначальное уравненіе, введетъ три новыя произвольныя постоянныя, а именно: двѣ координаты новаго начала и наклоненіе новыхъ осей относительно старыхъ; такимъ образомъ, не производя даже вычисленія, мы будемъ въ состояніи узнать число произвольныхъ постоянныхъ, которыя войдутъ въ наиболѣе общее уравненіе и, слѣдовательно, прямо указать число точекъ, необходимыхъ для опредѣленія данной кривой въ тѣхъ случаяхъ, по крайней мѣрѣ, когда мы можемъ заранѣе быть увѣрены—какъ это бываетъ очень часто—что число членовъ, содержащихъ постоянныя, не будетъ меньше числа самыхъ постоянныхъ.

Чтобы показать, до какой степени легкости можно довести рѣшеніе этой задачи, слѣдуетъ замѣтить, что такъ какъ аналитическая операція, необходимая для рѣшенія задачи, сводится къ простому счету, то это перечисленіе можетъ быть сдѣлано еще ранѣе, чѣмъ будетъ получено уравненіе кривой, по одному ея геометрическому опредѣленію.

Въ самомъ дѣлѣ, достаточно съ этой точки зрѣнія разсмотрѣть данное опредѣленіе и установить, заданія сколькихъ точекъ, или прямыхъ—по величинѣ или по направленію—или круговъ оно требуетъ для полнаго опредѣленія предложенной кривой. При этихъ условіяхъ мы узнаемъ также заранѣе, сколько произвольныхъ постоянныхъ должно войти въ наиболѣе общее уравненіе этой кривой, принимая во вниманіе, что каждая постоянная точка, заданная опредѣленіемъ, повлечетъ за собой появленіе двухъ постоянныхъ, каждая заданная прямая—также двухъ, каждая заданная длина—одной, каждая заданная окружность—трехъ и т. д. Поэтому можно будетъ сейчасъ же судить о числѣ точекъ, необходимыхъ для опредѣленія кривой, съ такой же точностью, какъ если-бы мы имѣли передъ глазами полное общее уравненіе этой кривой, по крайней мѣрѣ, за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, когда число членовъ, содержащихъ произвольныя постоянныя, менѣе числа постоянныхъ. Но это ограниченіе часто можно будетъ признавать непримѣнимымъ, когда анализъ опредѣленія ясно покажетъ, что каждое измѣненіе установленныхъ имъ данныхъ,—будутъ-ли они измѣняться въ отдѣльности, или вмѣстѣ—повлечетъ за собой нѣкоторое измѣненіе кривой. Но въ тѣхъ случаяхъ, когда такое ограниченіе дѣйствительно должно имѣть мѣсто, изложенное соображеніе установитъ сначала лишь высшій предѣлъ искомаго числа; что же касается до самаго числа, то для его нахожденія придется, дѣйствительно, прибѣгнуть къ общему уравненію кривой.

До сихъ поръ я предполагалъ, что для опредѣленія кривой пользуются безусловно произвольными точками, но, чтобы дополнить методъ, необходимо разсмотрѣть тотъ случай, когда въ число ихъ вводятся *особыя* точки, т. е. точки, отличающіяся отъ всѣхъ другихъ какимъ нибудь характеристическимъ признакомъ, какъ, напримѣръ, такъ называемые *фокусы* въ коническихъ сѣченіяхъ, *вершины, центры*, точки *изгиба* и *возврата*. Всѣ эти точки характерны тѣмъ, что являются *единичными*, или, по крайней мѣрѣ, опредѣленными для данной кривой; поэтому каждая изъ ихъ координатъ является опредѣленной—извѣстной или неизвѣстной—функціей тѣхъ постоянныхъ, которыя точно характеризуютъ данную кривую. Поэтому, если мы зададимъ одну такую точку, то мы этимъ самымъ подчинимъ произвольныя постоянныя кривой двумъ алгебраическимъ условіямъ, что аналитически соотвѣтствуетъ заданію двухъ обыкновенныхъ точекъ. Итакъ, общее и крайне простое правило сводится въ этомъ случаѣ къ тому, чтобы считать за двѣ точки каждую *особую* точку, какимъ бы свойствомъ она ни была опредѣлена: соблюдая это условіе, можно пользоваться установленнымъ выше закономъ.

Каждое частное приложеніе изложенной мною общей теоріи было бы здѣсь не на мѣстѣ. Но тѣмъ не менѣе я считаю полезнымъ отмѣтить по поводу этого примѣненія, что число точекъ, необходимыхъ для полнаго опредѣленія каждой кривой, хотя и является очень важнымъ условіемъ, не связано, однако, такъ тѣсно, какъ можно бы было ожидать сначала, съ аналитической природой уравненія или съ геометрической формой линіи. Такъ, напримѣръ, слѣдуя указанному выше методу, можно найти, что обыкновенная парабола (и даже всѣ классы параболъ), логариѳмика, циклоида, Архимедова спираль и т. д., одинаково требуютъ четырехъ точекъ для своего опредѣленія, хотя между этими кривыми, столь различными по своей аналитической и геометрической природѣ, до сихъ поръ еще не удалось открыть ни одного другого общаго свойства. Тѣмъ не менѣе вѣроятно, что эта аналогія не является совершенно обособленной.

За второй интересный примѣръ, изъ основныхъ вопросовъ, относящихся къ общему изслѣдованію линій, я выберу опредѣленіе *центра* нѣкоторой плоской кривой. Такъ какъ съ геометрической точки зрѣнія центръ фигуры характеризуется тѣмъ свойствомъ, что онъ является серединой всѣхъ проходящихъ черезъ него хордъ, то отсюда, очевидно, слѣдуетъ, что если помѣстить въ него начало прямолинейной системы координатъ, то всѣ точки кривой, попарно, будутъ имѣть по отношенію къ такому началу равныя и противуположныя по знаку координаты. Поэтому можно прямо по уравненію нѣкоторой кривой судить о томъ, помѣщается ли начало координатъ въ ея центрѣ, или нѣтъ; для этого достаточно узнать только, нарушается-ли это уравненіе отъ единовременнаго измѣненія знаковъ двухъ перемѣнныхъ координатъ; въ томъ случаѣ, если въ уравненія входятъ только алгебраическія, раціональныя и цѣлыя функціи, это возможно лишь тогда, когда всѣ члены будутъ либо четной, либо нечетной степенью, въ зависимости отъ степени уравненія. Если при этихъ условіяхъ указанное измѣненіе знаковъ нарушаетъ уравненіе, то необходимо перенести начало координатъ въ неопредѣленную точку и попытаться такимъ образомъ воспользоваться двумя новыми произвольными перемѣнными, введенными этимъ измѣненіемъ въ наше уравненіе въ видѣ координатъ новаго начала, чтобы уравненіе пріобрѣло вышеуказанное свойство по отношенію къ новой системѣ осей.

Если удастся найти для координатъ новаго начала такія вещественныя значенія, что всѣ выраженія, благодаря которымъ уравненіе не имѣло указаннаго аналитическаго свойства, исчезнутъ, то кривая будетъ обладать центромъ, и по найденнымъ значеніямъ мы будемъ въ состояніи опредѣлить его положеніе; въ противномъ случаѣ будетъ доказано, что кривая не обладаетъ центромъ.

Среди вопросовъ общей геометріи двухъ измѣреній, полное рѣшеніе которыхъ зависитъ только отъ обыкновеннаго анализа, я считаю нужнымъ выдѣлить здѣсь одинъ вопросъ, относящійся къ опредѣленію условій *подобія* кривыхъ одного и того же *рода*, т. е. такихъ кривыхъ, которыя задаются однимъ и тѣмъ же опредѣленіемъ или могутъ быть выражены однимъ и тѣмъ же уравненіемъ, но отличаются другъ отъ друга значеніями нѣкоторыхъ произвольныхъ постоянныхъ, вліяющихъ на величину каждой изъ нихъ. Этотъ вопросъ самъ по себѣ является очень важнымъ и представляетъ особенное значеніе съ точки зрѣніи метода, такъ какъ геометрическое явленіе, подлежащее въ этомъ случаѣ аналитической характеристикѣ, очевидно, вполнѣ относится къ формѣ, а никакъ не къ положенію; какъ мы видѣли въ прошлой лекціи, это обстоятельство всегда приводитъ къ особаго рода затрудненіямъ, свойственнымъ нашей системѣ аналитической геометріи, въ которой только идеи положенія разсматриваются прямо и непосредственно.

Примѣненіе дифференціальнаго исчисленія сейчасъ-же привело-бы къ рѣшенію этой общей задачи, такъ какъ оно прямо распространило-бы на кривыя, какъ эти и слѣдуетъ, элементарное опредѣленіе подобія, установленное для прямолинейныхъ фигуръ. Дѣйствительно, было бы достаточно: во 1-хъ вычислить, по уравненію каждой изъ этихъ кривыхъ, уголъ *смежности* въ нѣкоторой точкѣ и выразить, что этотъ уголъ имѣетъ одинаковыя значенія для соотвѣтствующихъ точекъ обѣихъ кривыхъ; во 2-хъ, пользуясь дифференціальнымъ выраженіемъ длины безконечно — малаго элемента каждой кривой, установить, что между соотвѣтственными элементами обѣихъ кривыхъ существуетъ постоянное соотношеніе. Аналитическія условія подобія, такимъ образомъ, зависѣли бы отъ двухъ первыхъ производныхъ ординаты по абсциссѣ. Но эта задача можетъ быть рѣшена гораздо проще и въ то-же время въ такомъ-же общемъ видѣ, хотя и менѣе прямо, простымъ приложеніемъ обыкновеннаго анализа.

Для этого прежде всего необходимо замѣтить элементарное свойство, которымъ всегда обладаютъ двѣ подобныя фигуры любой формы, когда онѣ расположены *параллельно*, т. е. такимъ образомъ, что всѣ элементы каждый изъ двухъ фигуръ параллельны соотвѣтственно элементамъ другой; это очевидно, всегда возможно, благодаря подобію данныхъ фигуръ.

Нетрудно убѣдиться, что если въ этомъ положеніи соединить попарно соотвѣтственныя точки обѣихъ фигуръ, то всѣ соединяющія прямыя по необходимости встрѣтятся въ одной общей точкѣ, причемъ отрѣзки этихъ прямыхъ, заключенные между общей точкой и точками двухъ подобныхъ фигуръ, будутъ имѣть нѣкоторое постоянное отношеніе, равное отношенію обѣихъ фигуръ.

Изъ этого свойства, съ аналитической точки зрѣнія, вытекаетъ непосредственно, что если помѣстить начало прямолинейныхъ координатъ въ отмѣченную выше точку, то соотвѣтственныя точки двухъ подобныхъ кривыхъ будутъ постоянно обладать пропорціальными координатами, такъ что уравненіе первой кривой преобразуется въ уравненіе второй при замѣнѣ x черезъ mx и y черезъ my, гдѣ m будетъ нѣкоторая произвольная постоянная, равная линейному отношенію двухъ фигуръ. Примѣняя полярныя координаты z и φ и помѣщая полюсъ въ ту же самую точку, мы, чтобы сдѣлать уравненія тождественными, должны-бы были только въ одной изъ нихъ на мѣсто z поставить mz, не измѣняя φ.

Поэтому, очевидно, достаточно провѣрить это алгебраическое свойство, чтобы установить подобіе. Но если это алгебраическое свойство и отсутствуетъ, то отсюда нельзя еще прямо заключить, что данныя фигуры не подобны; можетъ случиться, что начало или полюсъ не находятся вовсе въ той единственной точкѣ, для которой эти отношенія имѣютъ мѣсто, или даже что двѣ кривыя не находятся въ данной моментъ въ параллельномъ положеніи.

Тѣмъ не менѣе, легко обобщить и дополнить нашъ методъ и съ той и съ другой стороны, хотя на первый взглядъ и кажется, что невозможно аналитически измѣнить взаимное положеніе двухъ кривыхъ. Но для этого достаточно только измѣнить, при помощи извѣстныхъ формулъ, одновременно и начало и направленіе осей въ системѣ прямолинейныя координатъ, или полюсъ и направленіе оси въ системѣ полярныхъ координатъ, производя это измѣненіе только въ одномъ изъ двухъ данныхъ уравненій.

Затѣмъ попытаемся придать тремъ произвольнымъ постояннымъ, введеннымъ этой операціей, такія значенія, чтобы измѣненное уравненіе пріобрѣло относительно другого то аналитическое свойство, о которомъ мы говорили выше. Если при нѣкотрыхъ вещественныхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ это отношеніе въ самомъ дѣлѣ будетъ имѣть мѣсто, то обѣ кривыя подобны; въ противномъ случаѣ будетъ доказано, что онѣ не подобны.

Хотя здѣсь не мѣсто останавливаться на частныхъ примѣненіяхъ изложенной теоріи, однако я считаю полезнымъ сдѣлать по этому поводу одно общее замѣчаніе. Во всѣхъ случаяхъ, когда уравненіе кривой, по возможности упрощенное выборомъ осей, будетъ содержать только одну произвольную постоянную, всѣ кривыя этого рода непремѣнно будутъ подобными. Можно еще усилить пользу этого замѣчанія въ томъ отношеніи, что, даже не обращаясь къ уравненію данной кривой, достаточно въ этихъ случаяхъ провѣрить, не зависитъ ли окончательное опредѣленіе величины линіи, на основаніи первоначальнаго геометрическаго опредѣленія ея, отъ одного единственнаго условія *). Если же, напротивъ, простѣйшее уравненіе кривой содержитъ *двѣ* произвольныя постоянныя или больше или-же, что совершенно равносильно, если по опредѣленію величина ея зависитъ отъ нѣсколькихъ различныхъ данныхъ, тогда такія кривыя будутъ *подобными* лишь при наличности извѣстныхъ соотношеній между этими постоянными или этими данными, соотношеній, которыя обыкновенно будутъ заключаться въ пропорціональности этихъ количествъ.

Такъ, напримѣръ, всѣ параболы одного порядка, и притомъ любаго, подобны между собою, также какъ и всѣ логориѳмическія кривыя, обыкновенныя циклоиды, всѣ окружности, и т. д.; тогда какъ два эллипса или напримѣръ, двѣ гиперболы подобны только въ томъ случаѣ, если ихъ оси пропорціональны.

Я ограничусь этимъ небольшимъ числомъ общихъ вопросовъ, относящихся къ линіямъ и рѣшаемыхъ при помощи обыкновеннаго анализа. Къ этимъ вопросамъ не слѣдуетъ причислять опредѣленіе *фокусовъ*, нахожденіе *діаметровъ* и т. д., и еще нѣсколько подобныхъ задачъ: хотя ихъ можно поставить и разрѣшать для любыхъ кривыхъ, но дѣйствительный интересъ они представляютъ только по отношенію къ коническимъ сѣченіямъ. Напримѣръ, что касается *діаметровъ*, т. е. геометрическихъ мѣстъ серединъ произвольной системы параллельныхъ хордъ, то нетрудно предложить общій методъ, дающій возможность вывести изъ уравненія кривой общее уравненіе всѣхъ ея діаметровъ. Но подобное изслѣдованіе только въ тѣхъ случаяхъ можетъ облегчить изученіе кривой, когда діаметры являются болѣе простыми и извѣстными

---

*) Впрочемъ, это свойство, являющееся очевиднымъ слѣдствіемъ только что изложенной теоріи, можетъ быть прямо доказано при помощи очень простого соображенія. Достаточно замѣтить, что въ этомъ случаѣ различныя кривыя такого вида могли-бы совпасть, если бы ихъ построить въ различныхъ масштабахъ, откуда ясно вытекаетъ необходимость ихъ подобія.

линіями, чѣмъ первоначальная кривая; болѣе того, дѣйствительная польза подобнаго изслѣдованія ограничивается случаемъ, когда всѣ діаметры—прямыя линіи. Но это условіе удовлетворяется только относительно кривыхъ втораго порядка. Для всѣхъ остальныхъ кривыхъ діаметры, вообще говоря, являются не болѣе извѣстными кривыми, чѣмъ сами данныя кривыя, и часто еще труднѣе поддаются изученію чѣмъ первоначальныя. Вотъ почему я здѣсь не считаю нужнымъ вдаваться въ разсмотрѣніе ни этого, ни подобныхъ ему вопросовъ, хотя въ спеціальныхъ трактатахъ по аналитической геометріи слѣдовало-бы излагать ихъ въ началѣ и въ наиболѣе общемъ видѣ.

Итакъ, я прямо перехожу къ разсмотрѣнію тѣхъ теорій общей геометріи двухъ измѣреній, которыя могутъ быть вполнѣ установлены только съ помощью трансцендентнаго анализа.

Первый и самый простой изъ этихъ вопросовъ состоитъ въ опредѣленіи касательныхъ къ плоскимъ кривымъ. Такъ какъ мы уже имѣли случай въ шестой лекціи указать на общее рѣшеніе этого важнаго вопроса, съ каждой изъ различныхъ основныхъ точекъ зрѣнія на трансцендентный анализъ, то безполезно возвращаться къ нему здѣсь. Я только замѣчу по этому поводу, что тамъ, при разсмотрѣніи основной задачи, предполагалось, что точка касанія прямой съ кривой извѣстна, тогда какъ касательная можетъ быть опредѣлена многими другими условіями; ихъ надо свести къ предъидущимъ, опредѣляя сначала координаты точки касанія, что въ большинствѣ случаевъ очень легко сдѣлать.

Такъ, напримѣръ, если касательная должна проходить черезъ точку, лежащую внѣ кривой, то координаты этой точки должны удовлетворять общему уравненію касательной, содержащему неизвѣстныя координаты точки касанія; эта точка будетъ опредѣлена указаннымъ соотношеніемъ ея координатъ, рѣшеннымъ совмѣстно съ уравненіемъ данной кривой.

Точно также, если искомая касательная должна быть параллельна данной прямой, то необходимо приравнять общій коэффиціентъ, обозначающій ея направленіе и выраженный въ функціи координатъ точки касанія, соотвѣтствующему коэффиціенту данной прямой; это условіе, вмѣстѣ съ уравненіемъ данной кривой, дастъ возможность узнать координаты точки касанія.

Чтобы освѣтить съ болѣе широкой точки зрѣнія вопросы, относящіеся къ касательнымъ, можетъ быть полезнымъ выразить опредѣленно соотношеніе, которое должно существовать между двумя произвольными постоянными, содержащимися въ общемъ уравненіи прямой линіи, и различными постоянными, свойственными нѣкоторой данной линіи, для того, чтобы прямая была касательной къ извѣстной кривой. Для этого достаточно замѣтить, что такъ какъ двѣ постоянныя, опредѣляющія въ каждый моментъ положеніе касательной, являются извѣстными функціями координатъ точки касанія, то исключеніе этихъ двухъ координатъ изъ обѣихъ формулъ и уравненія данной кривой приведетъ къ соотношенію, независящему отъ точки касанія и содержащему только постоянныя двухъ линій; это соотношеніе и будетъ искомымъ аналитическимъ выраженіемъ касанія вообще. Такими выраженіями можно бы, напримѣръ, воспользоваться для опредѣленія общей касательной къ двумъ даннымъ кривымъ, вычисляя двѣ постоянныя, принадлежащія этой прямой, по двумъ соотношеніямъ, являющимся слѣдствіемъ касанія къ той и другой кривой.

Основной вопросъ о касательныхъ является исходной точкой для нѣсколькихъ болѣе или менѣе важныхъ общихъ изслѣдованій относительно кривыхъ; нетрудно показать зависимость этихъ изслѣдованій отъ теоріи касательныхъ. Наиболѣе прямымъ и простымъ изъ этихъ второстепенныхъ вопросовъ является вопросъ объ опредѣленіи *ассимптотъ*, или, по крайней мѣрѣ, прямолинейныхъ *ассимптотъ*, которыя, говоря вообще, только однѣ представляютъ интересъ, такъ какъ лишь онѣ дѣйствительно облегчаютъ изученіе кривыхъ. Извѣстно, что *ассимптотой* называется прямая, приближающаяся къ кривой столь близко, сколь угодно, но никогда съ ней не встрѣчающаяся точно. Поэтому ассимптоту можно разсматривать какъ касательную съ безконечно удаленной точкой касанія. Итакъ, чтобы ее опредѣлить, достаточно придать безконечное большое значеніе координатамъ точки касанія въ двухъ общихъ формулахъ, выражающихъ, въ соотвѣтствіи съ уравненіемъ кривой, двѣ произвольныя постоянныя, опредѣляющія положеніе касательной, какъ функціи этихъ координатъ. Если двѣ произвольныя постоянныя получатъ тогда вещественныя и совмѣстимыя значенія, то данная кривая обладаетъ ассимптотами, и изложенное вычисленіе укажетъ ихъ число и положеніе; если-же эти значенія будутъ мнимыми или несовмѣстимыми, то это обстоятельство послужитъ доказательствомъ, что данная кривая не обладаетъ ассимптотами—по крайней мѣрѣ, прямолинейными.

Какъ видно, нахожденіе ассимптотъ совершенно аналогично съ опредѣленіемъ касательной, проведенной черезъ нѣкоторую точку кривой, имѣющую конечныя координаты. Слѣдуетъ только отмѣтить, что въ довольно большомъ числѣ случаевъ искомыя значенія представятся въ неопредѣленномъ видѣ; это общій недостатокъ всѣхъ алгебраическихъ формулъ, хотя, разумѣется, онъ чаще встрѣчается въ тѣхъ случаяхъ, когда перемѣннымъ приписываются безконечныя значенія. Но, какъ извѣстно, существуетъ общій аналитическій методъ для нахожденія истиннаго значенія подобныхъ выраженій; въ данномъ случаѣ достаточно будетъ прибѣгнуть къ нему.

Точно также, хотя и гораздо болѣе косвеннымъ образомъ, можно связать съ теоріей касательныхъ всю теорію различныхъ *особыхъ* точекъ; опредѣленіе ихъ въ значительной степени облегчаетъ знакомство съ кривой, на которой онѣ находятся. Таковы, напр. точки *перегиба*, *кратныя* точки, точки *возврата* и т. д.

Относительно точекъ *перегиба*, т. е. точекъ, въ которыхъ вогнутая часть кривой переходитъ въ выпуклую, или наоборотъ, необходимо сначала изслѣдовать аналитическій признакъ, непосредственно опредѣляющій вогнутость или выпуклость; эти же элементы зависятъ отъ того, какимъ образомъ измѣняется направленіе касательной. Когда кривая вогнута по направленію къ оси абсциссъ, она составляетъ съ ней все меньшій и меньшій уголъ, по мѣрѣ того, какъ отъ нея удаляется; напротивъ, когда кривая выпукла, уголъ, образуемый ею съ осью все болѣе увеличивается по мѣрѣ удаленія отъ этой оси. Поэтому, можно всегда по уравненію кривой прямо опредѣлить характеръ ея кривизны въ каждый моментъ: достаточно только разсмотрѣть, возрастаютъ-ли или уменьшаются значенія коэффиціента, обозначающаго наклоненіе касательной—т. е. производной ординаты—по мѣрѣ того, какъ возрастаетъ сама ордината; въ первомъ случаѣ выпуклость кривой обращена къ оси абсциссъ; во второмъ—ея вогнутость. При этихъ условіяхъ ясно, что если въ какой нибудь точкѣ наблюдается перегибъ, т, е. измѣняется знакъ кривизны, то въ этой точкѣ наклоненіе касательной достигнетъ *максимума* или *минимума,* въ зависимости отъ того, переходитъ-ли выпуклость въ вогнутость, или наоборотъ. Итакъ, при помощи обыкновенной теоріи maxima и minima мы найдемъ, въ какихъ точкахъ можетъ имѣть мѣсто это явленіе, причемъ, примѣняя ее къ данному случаю, установимъ, очевидно, что для абсциссы точки *перегиба* вторая производная ординаты должна равняться нулю; это условіе достаточно для доказательства существованія такой точки и для опредѣленія ея положенія. Такимъ образомъ это изслѣдованіе можетъ быть связано съ теоріей касательныхъ, хотя оно обыкновенно излагается въ связи съ теоріей соприкасающагося круга. То же можно-бы установить, съ большими или меньшими затрудненіями, относительно всѣхъ остальныхъ *особыхъ* точекъ.

Вторымъ основнымъ вопросомъ, связаннымъ съ общимъ изслѣдованіемъ кривыхъ и требующимъ для своего рѣшенія болѣе широкаго примѣненія трансцендентнаго анализа, является важный вопросъ объ измѣреніи *кривизны* кривыхъ при помощи *соприкасающагося* круга, касательнаго въ каждой точкѣ кривой; даже открытія одного этого принципа было-бы достаточно, чтобы обезсмертить имя великаго Гюйгенса.

Такъ какъ кругъ является единственной кривой, обладающей во всѣхъ своихъ точкахъ одинаковой кривизной, обратно пропорціональной величинѣ радіуса, то, когда геометры задались мыслью подвергнуть точному опредѣленію кривизну всѣхъ остальныхъ кривыхъ, они естественно должны были сравнивать ее въ каждой точкѣ съ кругомъ, имѣющимъ съ нею возможно болѣе тѣсное соприкосновеніе; по этой причинѣ такой кругъ былъ названъ *соприкасающимся,* въ отличіе отъ простыхъ касательныхъ круговъ, которыхъ въ той же точкѣ кривой можетъ быть безконечное множество, тогда какъ соприкасающійся кругъ, очевидно, всегда одинъ.

Разсматривая этотъ вопросъ съ другой точки зрѣнія, легко понять, что кривизна нѣкоторой кривой въ каждой точкѣ можетъ быть также опредѣлена при помощи бóльшаго или мéньшаго угла двухъ послѣдовательныхъ элементовъ, называемаго угломъ *смежности.* Но легко убѣдиться, что обѣ эти мѣры по необходимости равнозначущи, такъ какъ центръ соприкасающагося круга будетъ тѣмъ болѣе удаленъ, чѣмъ болѣе тупымъ будетъ уголъ смежности; ясно даже, что съ аналитической точки зрѣнія выраженіе для радіуса этого круга непосредственно приводитъ къ величинѣ угла смежности. Вслѣдствіе этого очевиднаго совпаденія обѣихъ точекъ зрѣнія, геометры должны были предпочесть разсмотрѣніе *соприкасающагося* круга, такъ какъ оно является болѣе общимъ и болѣе пригоднымъ для вывода остальныхъ геометрическихъ теорій, исходящихъ изъ этого основнаго представленія.

При этихъ условіяхъ, наиболѣе простой и прямой пріемъ для опредѣленія *соприкасающагося* круга будетъ заключаться въ слѣдующемъ: примемъ, согласно методу безконечно малыхъ въ собственномъ смыслѣ этого слова, что соприкасающійся кругъ проходитъ черезъ три точки, безконечно близкія къ данной кривой, или, другими словами, что онъ имѣетъ съ ней общими два послѣдовательныхъ элемента; это условіе ясно отличитъ его отъ всѣхъ простыхъ касательныхъ круговъ, которые имѣютъ съ данной кривой только одинъ элементъ общій.

Изъ этого опредѣленія, если принять во вниманіе построеніе, необходимое для того, чтобы описать кругъ, проходящій черезъ три точки, слѣдуетъ, что на центръ соприкасающагося круга, или, какъ его обыкновенно называютъ, *на центръ кривизны* кривой въ каждой точкѣ, мы можемъ смотрѣть, какъ на пересѣченіе двухъ безконечно близкихъ нормалей; такимъ образомъ вопросъ сводится къ нахожденію этой послѣдней точки. Но это изслѣдованіе нетрудно: составивъ по общему уравненію касательной нѣкоторой кривой уравненіе нормали, которая должна быть перпендикулярна къ этой касательной, въ этомъ послѣднемъ уравненіи измѣнимъ на безконечно-малую величину координаты точки касанія, чтобы перейти къ безконечно-близкой нормали; рѣшая совмѣстно эти уравненія—первой степени относительно двухъ координатъ точки пересѣченія—мы найдемъ двѣ общія формулы, выражающія координаты центра кривизны данной кривой въ нѣкоторой точкѣ. Какъ только будутъ получены эти формулы, нахожденіе радіуса кривизны не представитъ уже никакой трудности, такъ какъ вопросъ сведется къ вычисленію разстоянія центра кривизны до соотвѣтствующей точки кривой. Обозначая черезъ α и β прямолинейныя координаты центра кривизны нѣкоторой кривой точкѣ, координаты которой будутъ x и y и обозначая черезъ r—радіусъ кривизны, мы найдемъ съ помощью изложеннаго метода извѣстныя формулы:

$$\alpha = x + \frac{\frac{dx}{dy}\left[1 + \frac{dy}{dx}\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Легко понять, какое значеніе имѣетъ опредѣленіе радіуса кривизны, и насколько изслѣдованіе общаго хода измѣненій его въ различныхъ точкахъ кривой должно содѣйствовать болѣе глубокому изученію этой кривой. Этотъ элементъ среди другихъ, изслѣдуемыхъ обыкновенно въ аналитической геометріи, особенно замѣчателенъ тѣмъ, что непосредственно, по своей природѣ, относится къ самой формѣ кривой, не завися никоимъ образомъ отъ ея положенія. Съ аналитической точки зрѣнія, онъ требуетъ единовременнаго разсмотрѣнія двухъ первыхъ производныхъ ординаты.

Теорія центровъ кривизны естественно приводитъ къ важному понятію объ *эволютахъ*—кривыхъ, которыя въ настоящее время опредѣляются, какъ геометрическія мѣста всѣхъ центровъ кривизны кривой въ различныхъ ея точкахъ, хотя въ первоначальномъ изложеніи этой отрасли геометріи Гюйгенсъ, наоборотъ, вывелъ понятіе о соприкасающемся кругѣ изъ понятія объ эволютѣ, разсматривая ее прямо, какъ линію, развертка которой опредѣляла-бы первоначальную кривую или эвольвенту. Легко понять, что эти двѣ точки зрѣнія тождественны. Эволюта, очевидно, по отношенію къ той кривой, изъ которой она получается, представляетъ два общія и необходимыя свойства, какимъ-бы способомъ она ни была получена. Во-первыхъ, ея касательныя являются нормалями эвольвенты; во-вторыхъ, длина ея дугъ равна длинѣ соотвѣтственныхъ радіусовъ кривизны эвольвенты *). Что-же касается пріема, при помощи котораго получается уравненіе эволюты данной кривой, то ясно, что изъ двухъ вышеприведенныхъ формулъ, выражающихъ координаты центра кривизны, достаточно исключить, въ каждомъ случаѣ, координаты x и y соотвѣтственной точки данной кривой, при помощи уравненія этой кривой; уравненіе между α и β, которое получится послѣ такого исключенія, и будетъ уравненіемъ искомой эволюты. Точно также мы могли-бы рѣшить вопросъ и въ обратномъ порядкѣ, т. е. найти эвольвенту по эволютѣ. Но надо замѣтить, что исключеніе, аналогичное предъидущему, привело-бы въ этомъ случаѣ къ уравненію, содержащему, кромѣ x и y, двѣ производныя $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; поэтому, послѣ этого подготовительнаго преобразованія для полнаго рѣшенія задачи нужно было-бы интегрировать дифференціальное уравненіе второго порядка; въ виду крайняго несовершенства интегральнаго исчисленія, эта операція чаще всего была-бы невозможна, если-бы, по самой природѣ такого изслѣдованія, искомая кривая, какъ я это имѣлъ случай указать въ седьмой лекціи, не должна-бы представиться *особеннымъ* рѣшеніемъ, которое можно получить простымъ дифференцированіемъ, тогда какъ общій интегралъ представитъ здѣсь только систему соприкасающихся круговъ; изученіе же этой системы не входитъ совсѣмъ въ предложенную задачу. То-же обстоятельство будетъ имѣть мѣсто во всѣхъ случаяхъ, когда приходится опредѣлять кривую по нѣкоторому свойству ея радіуса кривизны.

Этотъ классъ вопросовъ совершенно аналогиченъ болѣе простымъ задачамъ, составлявшимъ въ первыя времена трансцендентнаго анализа особую группу вопросовъ подъ названіемъ „*обратный методъ касательныхъ*“: здѣсь ставилось цѣлью опредѣлить кривую по данному свойству касательной въ какой нибудь точкѣ ея.

При помощи болѣе или менѣе сложныхъ геометрическихъ соображеній, подобныхъ тѣмъ, къ которымъ приводятъ эволюты, геометры изъ одной и той же первоначальной кривой вывели разныя вторичныя кривыя; уравненія послѣднихъ могутъ быть получены аналогичнымъ способомъ. Самыми замѣчательными изъ нихъ являются *каустическія* кривыя, получаемыя при отраженіи или переломленіи лучей; первая идея о нихъ принадлежитъ Чирнгаусу, хотя только Яковъ Бернульи далъ ихъ истинную общую теорію. Эти кривыя, какъ извѣстно, образуются послѣдовательнымъ пересѣченіемъ безконечно близкихъ лучей свѣта, по предположенію, отражаемыхъ отъ первоначальной кривой или преломляемыхъ ею.

Если исходить изъ геометрическаго закона отраженія или преломленія свѣта—уголъ паденія равенъ углу отраженія или синусъ угла преломленія находится въ постоянномъ и извѣстномъ отношеніи къ синусу угла паденія—то ясно, что нахожденіе этихъ *каустическихъ* линій сводится къ чисто геометрическому вопросу, совершенно подобному вопросу объ эволютахъ, если разсматривать послѣднія какъ геометрическое мѣсто пересѣченія безконечно-близкихъ нормалей. Поэтому указанная задача аналитически разрѣшится аналогичнымъ способомъ, и здѣсь было-бы излишнимъ вдаваться въ подробныя указанія по этому предмету; только

*) Извѣстная теорема формулирована здѣсь неточно и даже непонятно: *разность радіусовъ кривизны равна дугѣ эвольвенты, заключающейся между соотвѣтственными точками.* *(Прим. Ред.).*

выкладки будутъ сложнѣе, особенно, если не сдѣлать предположенія, что падающіе лучи параллельны или исходятъ изъ общей точки.

Эволюты, каустическія линіи и всѣ другія линіи, выведенныя изъ нѣкоторой основной первоначальной кривой при помощи аналогичныхъ построеній, образованы непрерывнымъ пересѣченіемъ безконечно-близкихъ прямыхъ, подчиненныхъ нѣкоторому закону. Но, по возможности обобщая это геометрическое соображеніе, мы могли бы представить себѣ кривыя, образуемыя непрерывнымъ пересѣченіемъ безконечно-близкихъ кривыхъ, подчиненныхъ одно и тому же закону.

Этотъ законъ обыкновенно сводится къ тому, что всѣ эти кривыя представляются общимъ уравненіемъ, совершенно произвольнымъ; изъ этого уравненія отдѣльныя кривыя выводятся послѣдовательно, путемъ подстановки различныхъ значеній на мѣсто нѣкоторой произвольной постоянной. Въ этомъ случаѣ можно задаться мыслью найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія послѣдовательныхъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ безконечно-близкимъ значеніямъ произвольной постоянной, если представить себѣ, что непрерывно измѣняется послѣдняя. Лейбницъ первый приступилъ къ подобнымъ изслѣдованіямъ, которыя затѣмъ были сильно расширены трудами Клэро и, главнымъ образомъ, Лагранжа. Чтобы разсмотрѣть наиболѣе простой случай, который и былъ только что охарактеризованъ мною, очевидно достаточно продифференцировать данное общее уравненіе по разсматриваемой произвольной постоянной, и затѣмъ исключить эту постоянную изъ первоначальнаго уравненія и полученнаго диффенціальнаго уравненія; такимъ образомъ мы между двумя перемѣнными координатами установимъ уравненіе, независящее отъ произвольной постоянной; это уравненіе и будетъ уравненіемъ искомой кривой, форма которой часто въ значительной степени будетъ отличаться отъ формы производящихъ кривыхъ. Относительно этого геометрическаго соотношенія Лагранжъ установилъ интересную общую теорему, показавъ, что, съ аналитической точки зрѣнія, полученная такимъ образомъ кривая и производящія кривыя необходимо удовлетворятъ одному и тому-же дифференціальному уравненію, полный интегралъ котораго представитъ систему производящихъ, тогда какъ особенное рѣшеніе соотвѣтствуетъ кривой точекъ пересѣченія.

До сихъ поръ я разсматривалъ теорію кривизны кривыхъ сообразно съ духомъ метода безконечно-малыхъ въ собственномъ смыслѣ слова; онъ дѣйствительно удобнѣе всѣхъ другихъ примѣняется къ изслѣдованіямъ подобнаго рода.

Воззрѣніе Лагранжа относительно траснцендентнаго анализа прежде всего по природѣ своей представляло значительныя частныя трудности для прямого рѣшенія подобнаго вопроса, какъ я это уже замѣтилъ въ шестой лекціи. Но эти трудности такъ счастливо возбудили геній Лагранжа, что привели его къ созданію общей теорій соприкасанія; прежняя теорія соприкасающагося круга является только частнымъ и очень простымъ случаемъ этой общей теоріи.

Для цѣли нашего труда необходимо теперь ознакомиться съ этой прекрасной идеей, которая съ философской точки зрѣнія является можетъ быть наиболѣе интереснымъ вопросомъ, затронутымъ до сихъ поръ аналитической геометріей.

Сравнимъ какую-нибудь кривую $y = f(x)$ съ другой перемѣнной кривой $z = \varphi(x)$, и постараемся составить себѣ точное представленіе о различныхъ возможныхъ для нихъ степеняхъ близости въ общей ихъ точкѣ, въ зависимости отъ предполагаемаго нами соотношенія между функціями f и φ. Съ этой цѣлью достаточно принять во вниманіе вертикальное разстояніе кривыхъ въ другой точкѣ и, затѣмъ приближая послѣднюю все болѣе и болѣе къ первой, сдѣлать это разстояніе настолько малымъ, насколько это допускаетъ соотношеніе между обѣими функціями f и φ. Если черезъ h обозначить приращеніе абсциссы, соотвѣтствующее переходу къ этой новой точкѣ, то указанное разстояніе, равное разности двухъ соотвѣтствующихъ ординатъ, можетъ быть разложено, на основаніи формулы Тэйлора, по восходящимъ степенямъ h, и выразится рядомъ:

$$D = [f'(x) - \varphi'(x)]h + [f''(x) - \varphi''(x)]\frac{h^2}{1\,.\,2} + [f'''(x) - \varphi'''(x)]\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ \ldots$$

Предположимъ—это очевидно всегда возможно—h настолько малымъ, чтобъ первый членъ ряда былъ больше суммы всѣхъ остальныхъ; тогда, очевидно, кривыя z и y будутъ подходить другъ къ другу тѣмъ ближе, чѣмъ больше членовъ этого разложенія позволитъ уничтожить перемѣнная функція φ. Степень близости обѣихъ кривыхъ будетъ слѣдовательно точно опредѣлена, съ аналитической точки зрѣнія, бо̀льшимъ или ме́ньшимъ числомъ послѣдовательныхъ производныхъ ординатъ, которыя въ разсматриваемой точкѣ будутъ имѣть одинаковыя значенія.

Отсюда вытекаетъ важное общее представленіе о различныхъ порядкахъ болѣе или менѣе совершеннаго соприкасанія; сравненіе соприкасающагося круга съ кругами просто касательными до сихъ поръ представляло только частный случай этого общаго понятія. Итакъ, первая послѣ простого пересѣченія степень близости двухъ кривыхъ имѣетъ мѣсто, когда первыя производныя ихъ ординатъ равны; это — касаніе перваго порядка или—какъ его обыкновенно называютъ—простое касаніе, такъ какъ долгое время только оно одно и было извѣстно. Касаніе второго порядка требуетъ, чтобы кромѣ того и вторыя производныя функціи f и φ были равны; присоединяя къ этому равенство третьихъ производныхъ, мы установимъ касаніе третьяго порядка и такъ до безконечности. Послѣ касанія перваго порядка, касанія часто носятъ названіе *соприкасаній* перваго, втораго и проч. порядковъ.

Касанія перваго и втораго порядка могутъ быть геометрически охарактеризованы слѣдующимъ общимъ замѣчаніемъ: очевидно, что обѣ сравниваемыя кривыя имѣютъ въ общей точкѣ въ первомъ случаѣ — общую касательную, а во второмъ — общій кругъ кривизны, такъ какъ касательная каждой кривой зависитъ отъ первой производной ея ординаты, а кругъ кривизны—отъ обѣихъ первыхъ производныхъ.

Но это соображеніе непримѣнимо для выясненія геометрической идеи касанія выше второго порядка; Лагранжъ ограничился въ этомъ отношеніи указаніемъ на общее свойство кривыхъ, вытекающее непосредственно изъ вышеизложеннаго изслѣдованія: допустимъ, что кривая z имѣетъ съ кривой y касаніе n-наго порядка, которое аналитически выражается равенствомъ всѣхъ производныхъ до производной n-наго порядка; тогда никакая другая кривая z, которая принадлежала бы къ тому же виду, какъ первая, но удовлетворяла бы только меньшему числу аналитическихъ условій, т. е. имѣла бы съ кривой y касаніе низшаго порядка, — не могла бы пройти между этими двумя кривыми, такъ какъ разстояніе между ними получило наименьшее значеніе, возможное при данномъ соотношеніи обоихъ уравненій.

Въ томъ случаѣ, когда видъ кривой z, которую мы по отношенію къ кривизнѣ сравниваемъ съ нѣкоторой данной кривой y, опредѣленъ, то, очевидно, порядокъ наиболѣе тѣснаго ея касанія съ этой кривой зависитъ отъ бо́льшаго или ме́ньшаго числа произвольныхъ постоянныхъ, заключающихся въ наиболѣе общей формѣ ея уравненія, такъ какъ касаніе n-наго порядка требуетъ $n+1$ аналитическихъ условій, которые могутъ быть удовлетворены только въ томъ случаѣ, если мы располагаемъ такимъ же числомъ произвольныхъ постоянныхъ. Поэтому прямая линія, наиболѣе общее уравненіе которой заключаетъ въ себѣ только двѣ произвольныя постоянныя, можетъ имѣть съ какой-либо кривой только касаніе перваго порядка: отсюда вытекаетъ обыкновенная теорія касательныхъ.

Такъ какъ въ уравненіи круга содержатся вообще три произвольныя постоянныя, то кругъ можетъ имѣть съ какой-либо кривой касаніе второго порядка, а отсюда, какъ частный случай, вытекаетъ прежняя теорія соприкасающагося круга.

Разсматривая параболу, мы увидимъ, что такъ какъ въ уравненіи ея въ наиболѣе общемъ и простомъ видѣ содержатся 4 произвольныя постоянныя, то она, при сравненіи ея съ какой-либо другой кривой, можетъ имѣть болѣе тѣсное касаніе, до касанія третьяго порядка; точно также эллипсъ можетъ имѣть касаніе четвертаго порядка и т. д.

Такое разсужденіе можетъ привести къ геометрическому толкованію изложенной общей теоріи касаній и, какъ мнѣ кажется, дополнитъ работу Лагранжа, такъ какъ оно, для прямого опредѣленія различныхъ порядковъ касанія, указываетъ на болѣе простой и ясный конкретный признакъ, чѣмъ разсмотрѣнный Лагранжемъ.

Дѣйствительно, такъ какъ большее или меньшее число произвольныхъ постоянныхъ, содержащихся въ уравненіи, геометрически изображается (какъ мы установили въ началѣ этой лекціи) числомъ точекъ, необходимыхъ для полнаго опредѣленія соотвѣтствующей кривой, то обратно—это послѣднее число обозначаетъ ту степень близости, которая возможна для данной кривой относительно всякой другой. Но, съ другой стороны, аналитическій законъ, выражающій это касаніе съ помощью равенства извѣстнаго числа послѣдовательныхъ производныхъ обѣихъ ординатъ, очевидно, показываетъ, что обѣ кривыя въ этомъ случаѣ имѣютъ столько же безконечно близкихъ общихъ точекъ, такъ какъ по самой природѣ дифференціаловъ ясно, что разность n'аго порядка зависитъ отъ сравненія $n+1$ послѣдовательныхъ ординатъ.

Поэтому, можно составить себѣ ясное представленіе о различныхъ порядкахъ касанія, утверждая, что оно приводится къ совмѣщенію большаго или меньшаго числа безконечно близкихъ точекъ двухъ кривыхъ.

Выражаясь болѣе строго, мы, напримѣръ, опредѣлили бы соприкасающійся эллипсъ третьяго порядка какъ предѣлъ, къ которому стремятся эллипсы, проходящіе черезъ 5 точекъ данной кривой, по мѣрѣ того какъ 4 изъ этихъ точекъ, принимаемыя нами за подвижныя, приближаются къ пятой точкѣ, принятой за постоянную.

Эта общая теорія касаній, очевидно, по своей природѣ, можетъ все глубже и глубже знакомить насъ съ кривизной нѣкоторой кривой, послѣдовательно сравнивая съ ней различныя извѣстныя кривыя, которыя могутъ все тѣснѣй и тѣснѣй соприкасаться съ изучаемой кривой. Это обстоятельство позволило бы опредѣлить мѣру кривизны съ любой степенью точности, надлежащимъ образомъ измѣняя кривыя для сравненія. По вышеизложеннымъ соображеніямъ ясно, что совмѣщеніе каждой безконечно-малой дуги кривой съ дугой параболы привело бы къ болѣе точному опредѣленію мѣры кривизны этой кривой, чѣмъ примѣненіе соприкасающагося круга; сравненіе съ эллипсомъ еще болѣе повысило-бы степень точности, и т. д.: такимъ образомъ, предназначая каждый первоначальный видъ для болѣе глубокаго изученія послѣдующаго типа, можно было-бы безпредѣльно совершенствовать теорію кривыхъ. Но такъ какъ необходимо имѣть ясное и простое представленіе о кривой, принятой за единицу мѣры кривизны, то геометры принуждены были отказаться отъ этого высокаго умозрительнаго совершенства и ограничиться на практикѣ сравненіемъ всѣхъ кривыхъ только съ кругомъ, въ виду характернаго для этой фигуры постоянства ея кривизны. Дѣйствительно, нѣтъ ни одной другой кривой, которая съ этой стороны была-бы достаточно проста и достаточно изучена для того, чтобы ее съ пользой можно было примѣнить здѣсь, хотя теперь ужъ извѣстно, что съ отвлеченной точки зрѣнія кругъ далеко не является наиболѣе удобной единицей кривизны. Поэтому Лагранжъ въ концѣ концовъ и ограничился тѣмъ, что вывелъ изъ своихъ общихъ положеній теорію соприкасающагося круга, которая такимъ образомъ и была представлена съ чисто-аналитической точки зрѣнія. Замѣчательно даже, что онъ изъ одного этого соображенія легко вывелъ два основныя свойства эволютъ, о которыхъ мы упоминали выше, хотя казалось бы, что одинъ анализъ мало пригоденъ для нахожденія ихъ.

Я счелъ необходимымъ разсмотрѣть теорію касанія кривыхъ въ наиболѣе широкомъ и отвлеченномъ видѣ, чтобы помочь читателю надлежащимъ образомъ понять ея истинный характеръ. Хотя, въ концѣ концовъ, ее и приходится свести на простое опредѣленіе соприкасающагося круга, но есть тѣмъ не менѣе, съ философской точки зрѣнія, несомнѣнно большая разница, считать ли этотъ послѣдній результатъ какъ-бы крайнимъ предѣломъ усилій человѣческаго духа въ изученіи кривыхъ, какъ это дѣлали до Лагранжа, или, наоборотъ, разсматривать его какъ простой частный случай обширной общей теоріи, зная, что на практикѣ приходится ограничиваться изслѣдованіемъ этого случая, но въ то же время не забывая, что другія сравненія могли-бы еще болѣе усовершенствовать указанную геометрическую теорію.

Послѣ разсмотрѣнія главнѣйшихъ вопросовъ общей геометріи, относящихся къ свойствамъ кривымъ, мнѣ остается еще указать на задачи, связанныя съ выпрямленіемъ кривыхъ и квадратурами; въ разрѣшеніи этихъ вопросовъ, согласно объясненію, данному нами въ 10-ой лекціи, и состоитъ конечная цѣль всей геометріи. Но такъ какъ я ужъ имѣлъ случай (см. 6-ую лекцію) установить общія формулы, выражающія при помощи извѣстныхъ интеграловъ длину и площадь нѣкоторой плоской кривой, уравненіе которой въ прямолинейныхъ координатахъ дано, и такъ какъ я здѣсь не имѣю основанія разсматривать какое-бы то ни было приложеніе къ частнымъ кривымъ,—то эта важная часть нашего предмета представляется уже исчерпанной. Я ограничусь только указаніемъ формулъ для опредѣленія поверхностей и объемовъ тѣлъ, образуемыхъ вращеніемъ плоскихъ кривыхъ около ихъ осей.

Предположимъ,—а мы всегда имѣемъ право сдѣлать подобное предположеніе—что эта ось вращенія принята за ось абсциссъ; представимъ себѣ затѣмъ, согласно съ духомъ метода безконечно малыхъ, который до сихъ поръ является единственнымъ методомъ, примѣнимымъ въ подобнаго рода изслѣдованіяхъ, что абсцисса возрастаетъ на безконечно-малую величину; это приращеніе абсциссы опредѣлитъ аналогичныя дифференціальныя приращенія дуги и площади данной кривой, которыя, при вращеніи около оси, образуютъ *элементы* искомой поверхности и искомаго объема. Легко убѣдиться, что, пренебрегая только безконечно малой величиной второго порядка, мы можемъ разсматривать эти элементы, какъ равныя поверхности и объему соотвѣтствующаго усѣченнаго конуса или цилиндра, высотою которыхъ будетъ дифференціалъ абсциссы, а радіусомъ основанія—ордината разсматриваемой точки. Поэтому, если обозначить черезъ S и V искомую поверхность и искомый объемъ, то на основаніи простѣйшихъ предложеній элементарной геометріи непосредственно получатся слѣдующія общія дифференціальныя уравненія:

$$dS=2\pi y dx,\quad dV=\pi y^2 dx.$$

Отсюда, если соотношеніе между y и x будетъ дано для каждаго частнаго случая, значенія S и V будутъ выражены двумя интегралами:

$$S=2\pi\int y dx,\quad V=\pi\int y^2 dx,$$

взятыми между соотвѣтственными предѣлами.

Таковы неизмѣнныя формулы, по которымъ, со времени Лейбница, геометры рѣшили большое число подобныхъ вопросовъ, насколько развитіе интегральнаго исчисленія допускало такое рѣшеніе.

Можно-бы было также къ числу задачъ общей геометріи двухъ измѣреній отнести опредѣленіе центровъ тяжести дугъ и поверхностей, принадлежащихъ нѣкоторымъ кривымъ, хотя это изысканіе по своему происхожденію относится къ раціональной механикѣ. Дѣйствительно, опредѣляя центръ тяжести, какъ *центръ среднихъ разстояній*, т. е. какъ такую точку, разстояніе которой отъ данной плоскости или оси равно среднему ариѳметическому разстояній всѣхъ точекъ даннаго тѣла отъ этой плоскости или оси, мы, очевидно, превращаемъ предложенный вопросъ въ чисто-геометрическій и можемъ его разсматривать, совершенно не прибѣгая къ механикѣ. Но, несмотря на такое разсужденіе, которое, какъ мы увидимъ позже, является очень важнымъ для полнаго и болѣе легкаго обобщенія понятія о центрѣ тяжести, все-же, съ другой стороны, несомнѣнно, что въ виду главнаго назначенія этого изслѣдованія, впредь слѣдуетъ причислять его къ вопросамъ механики; тѣмъ не менѣе, оно, по своей природѣ и по аналитическому характеру соотвѣтствующаго метода, дѣйствительно относится къ геометріи, что меня и побудило, забѣгая впередъ, указать на этотъ вопросъ уже здѣсь.

Таковы главнѣйшіе основные вопросы, составляющіе въ настоящее время систему нашей общей геометріи двухъ измѣреній. Мы видѣли, что, съ аналитической точки зрѣнія, они могутъ быть разбиты на три рѣзко разграниченные класса: къ первому относятся геометрическія изысканія, основанныя исключительно на обыкновенномъ анализѣ; ко второму—вопросы, требующіе примѣненія дифференціальнаго исчисленія; къ третьему—вопросы, разрѣшаемые только при помощи интегральнаго исчисленія.

Намъ остается теперь, въ слѣдующей лекціи, съ той-же точки зрѣнія разсмотрѣть систему общей геометріи трехъ измѣреній.

Четырнадцатая лекція.

Объ общей геометріи трехъ измѣреній.

Изученіе поверхностей состоитъ изъ ряда общихъ вопросовъ, совершенно аналогичныхъ вопросамъ, разсмотрѣннымъ въ предшествующей лекціи относительно линій. Изслѣдовать здѣсь подробно вопросы, зависящіе только отъ обыкновеннаго анализа, было бы безполезно, такъ какъ они рѣшаются при помощи методовъ, по существу совершенно подобныхъ уже разсмотрѣннымъ выше; таковы вопросы о нахожденіи числа точекъ, необходимыхъ для опредѣленія поверхности, объ отысканіи центровъ, о точныхъ условіяхъ подобія двухъ поверхностей одного и того же рода, и пр. Аналитически вся разница заключается только въ томъ, что вмѣсто уравненій съ двумя перемѣнными приходится разсматривать уравненія съ тремя перемѣнными. Итакъ, я перейду непосредственно къ вопросамъ, которые требуютъ примѣненія трансцендентнаго анализа, обращая особенное вниманіе только на новыя соображенія, возникающія по поводу поверхностей.

Первая общая теорія, на которой мы остановимся—это теорія касательныхъ плоскостей. Пользуясь методомъ безконечно малыхъ въ собственномъ смыслѣ слова, легко найти уравненіе плоскости, касательной къ нѣкоторой поверхности въ данной точкѣ; она опредѣляется, какъ плоскость, совпадающая съ безконечно малой частью поверхности, расположенной вокругъ точки касанія. Дѣйствительно, достаточно принять во вниманіе, что это условіе будетъ удовлетворено, если безконечно-малое приращеніе вертикальной ординаты, соотвѣтствующее безконечно-малымъ приращеніямъ обѣихъ горизонтальныхъ координатъ, будетъ однимъ и тѣмъ же для плоскости и для данной поверхности, независимо отъ всякаго опредѣленнаго соотношенія между двумя послѣдними приращеніями; въ противномъ случаѣ не будетъ совпаденія во всѣхъ направленіяхъ. На основаніи этого соображенія, анализъ непосредственно приводитъ къ общему уравненію касательной плоскости

$$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x')+\frac{dz'}{dy'}(y-y'),$$

гдѣ x', y', z' обозначаютъ координаты точки касанія.

Поэтому опредѣленіе касательной плоскости, въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ сводится къ простому дифференцированію уравненія данной поверхности.

*

Можно также получить это общее уравненіе касательной плоскости, исходя при составленіи его только изъ теоріи касательныхъ къ плоскимъ кривымъ.

Для этого необходимо представить себѣ, что касательная плоскость опредѣляется касательными къ двумъ какимъ-нибудь плоскимъ сѣченіямъ данной поверхности, проведеннымъ черезъ точку касанія; такъ обыкновенно и поступаютъ въ начертательной геометріи. Если мы проведемъ плоскости сѣченій параллельно двумъ изъ координатныхъ плоскостей, то непосредственно получимъ указанное уравненіе. Этотъ способъ опредѣленія касательной плоскости даетъ намъ возможность легко установить слѣдующую важную теорему общей геометріи, впервые доказанную Монжемъ: касательныя ко всѣмъ кривымъ, которыя могутъ быть проведены на нѣкоторой поверхности черезъ данную ея точку, всегда лежатъ въ одной плоскости.

Наконецъ, мы можемъ еще придти къ общему уравненію касательной плоскости, разсматривая ее какъ плоскость, перпендикулярную къ соотвѣтствующей нормали, и опредѣляя эту нормаль тѣмъ прямымъ геометрическимъ ея свойствомъ, что она является наименьшимъ или наибольшимъ разстояніемъ внѣшней точки до данной поверхности. Достаточно примѣнить обыкновенный методъ maxima и minima, чтобы, слѣдуя этому опредѣленію, составить оба уравненія нормали; для этого надо выразить разстояніе между двумя точками—одной лежащей на поверхности, и другой—внѣшней, причемъ первую сначала слѣдуетъ принимать за перемѣнную и только затѣмъ, когда аналитическія условія будутъ уже выражены, признать за постоянную, тогда какъ вторую, наоборотъ, первоначально надо принимать за постоянную и, затѣмъ, за подвижную, описывающую искомую прямую. Какъ только уравненія нормали будутъ получены, то изъ нихъ уже легко вывести уравненіе касательной плоскости. Этимъ остроумнымъ способомъ составленія уравненія касательной плоскости мы также обязаны Монжу.

Разсмотрѣнный только что основной вопросъ, какъ это было и для кривыхъ, является исходной точкой для большого числа изысканій, связанныхъ съ опредѣленіемъ касательной плоскости, если мы заданіе точки касанія замѣнимъ другими равнозначущими условіями. Касательная плоскость, очевидно, не можетъ быть вполнѣ опредѣлена заданіемъ одной единственной внѣшней точки, какъ касательная прямая; для опредѣленія этой плоскости необходимо задать прямую, черезъ которую она должна проходить; но, за исключеніемъ этого пункта, аналогія является полной, и оба вопроса разрѣшаются одинаковыми пріемами.

То-же самое имѣетъ мѣсто, если касательная плоскость должна быть параллельной данной плоскости; это условіе опредѣляетъ величину двухъ постоянныхъ, задающихъ направленіе плоскости, и, слѣдовательно, опредѣляетъ и координаты точки касанія, такъ какъ эти постоянныя являются для каждой поверхности опредѣленными функціями координатъ точки касанія.

Наконецъ, какъ и для линій, мы можемъ найти аналитическое соотношеніе, которое въ общей формѣ выражаетъ явленіе касанія между плоскостью и нѣкоторой поверхностью, не опредѣляя точки этого касанія; изъ этого соотношенія вытекаетъ рѣшеніе нѣсколькихъ вопросовъ, относящихся къ касательнымъ плоскостямъ,—между прочимъ, и вопроса объ опредѣленіи плоскости, касательной одновременно къ трэмъ поверхностямъ; эта задача аналогична нахожденію общей касательной къ двумъ кривымъ.

Общая теорія соприкасаній между нѣкоторыми двумя поверхностями,—соприкасаній, которыя могутъ быть болѣе или менѣе тѣсными въ зависимости отъ большаго или меньшаго числа соотношеній, связывающихъ уравненія данныхъ поверхностей,—составлена при помощи метода, совершенно подобнаго тому, о которомъ мы говорили въ предшествующей главѣ относительно кривыхъ. Мы выражаемъ, при помощи ряда Тэйлора для функцій двухъ перемѣнныхъ, вертикальное разстояніе обѣихъ поверхностей во второй точкѣ, смежной съ точкой ихъ пересѣченія, въ предположеніи, что горизонтальныя координаты этой точки получаютъ два приращенія h и k, совершенно независимыя другъ отъ друга.

Разсматривая это разстояніе, разложенное по возрастающимъ степенямъ h и k, и приравнивая нулю послѣдовательно сперва всѣ члены первой степени относительно h и k, затѣмъ второй и т. д., мы выведемъ аналитическія условія соприкасанія различныхъ порядковъ, которое можетъ существовать между обѣими поверхностями, въ зависимости отъ большаго или меньшаго числа произвольныхъ постоянныхъ, содержащихся въ общемъ уравненіи той поверхности, которую мы разсматриваемъ, какъ перемѣнную.

Но, несмотря на единообразіе метода, между этой теоріей и теоріей соприкасанія линій имѣется существенное различіе, относящееся къ числу условій, такъ какъ въ этомъ случаѣ намъ приходится разсматривать два независимыхъ приращенія вмѣсто одного. Отсюда, дѣйствительно, можно сдѣлать слѣдующій выводъ: для того, чтобы каждое соприкасаніе происходило во всѣхъ направленіяхъ отъ общей точки, необходимо въ отдѣльности приравнять нулю всѣ различные члены одинаковой степени, соотвѣтствующей порядку соприкасанія; число этихъ членовъ будетъ тѣмъ больше, чѣмъ выше будетъ данная степень или данный порядокъ соприкасанія.

Такъ, напримѣръ, кромѣ равенства двухъ вертикальныхъ ординатъ z, необходимаго для простого пересѣченія, мы найдемъ, что соприкасаніе перваго порядка требуетъ двухъ различныхъ соотношеній, заключающихся въ равенствѣ двухъ частныхъ производныхъ перваго порядка отъ каждой вертикальной ординаты. Переходя къ соприкасанію второго порядка, мы должны будемъ прибавить еще три новыя условія, принимая во вниманіе три различные члена второй степени относительно h и k, содержащіеся въ выраженіи разстоянія; для полнаго уничтоженія этихъ членовъ потребуется равенство трехъ частныхъ производныхъ второго порядка, относящихся къ ординатѣ z каждой поверхности. Такимъ-же образомъ мы найдемъ, что соприкасаніе третьяго порядка приводитъ сверхъ того къ четыремъ другимъ соотношеніямъ, и т. д.; число частныхъ производныхъ каждаго порядка постоянно остается равнымъ числу членовъ соотвѣтствующей степени относительно h и k. Легко заключить изъ этого, что, вообще говоря, общее число различныхъ условій, необходимыхъ для соприкасанія n-наго порядка, равняется $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, тогда какъ для кривыхъ это число равнялось просто $n+1$.

Вслѣдствіе одного этого существеннаго различія, теорія поверхностей далеко не является въ этомъ отношеніи такой-же легкой и не представляетъ такого-же совершенства, какъ теорія линій.

Если ограничиться соприкасаніемъ перваго порядка, то соотвѣтствіе будетъ полнымъ, такъ какъ это соприкасаніе требуетъ только трехъ условій, которымъ всегда можно удовлетворить при помощи трехъ произвольныхъ постоянныхъ, содержащихся въ общемъ уравненіи плоскости; отсюда, какъ частный случай, вытекаетъ теорія касательныхъ плоскостей, совершенно аналогичная теоріи касательныхъ къ кривымъ, и являющаяся одинаково полезной при изученіи формы всякой поверхности Но дѣло представится въ иномъ видѣ, если разсматривать соприкасаніе второго порядка, чтобы измѣрить кривизну поверхностей.

Въ этомъ случаѣ было-бы естественно сравнить всѣ поверхности съ шаровой поверхностью, такъ какъ она одна обладаетъ постоянной кривизной, подобно тому, какъ всѣ кривыя мы сравнивали съ кругомъ. Но такъ какъ соприкасаніе второго порядка между двумя поверхностями требуетъ шести условій, а общее уравненіе шаровой поверхности содержитъ только четыре произвольныя постоянныя,—то невозможно для каждой точки нѣкоторой поверхности найти шаровую поверхность, совершенно соприкасающуюся во всѣхъ направленіяхъ; между тѣмъ, какъ мы видѣли выше, безконечно-малую дугу кривой всегда можно вполнѣ совмѣстить съ нѣкоторой дугой круга. Въ виду невозможности измѣрить кривизну поверхности въ каждой точкѣ при помощи единственной шаровой поверхности, геометры опредѣлили координаты центра и радіусъ такой шаровой поверхности, которая, хотя и не соприкасается одинаково во всѣхъ направленіяхъ, но обладаетъ этимъ свойствомъ въ одномъ направленіи, соотвѣтствующемъ данному отношенію между двумя приращеніями h и k. Въ этомъ случаѣ, чтобы установить *относительное* соприкасаніе второго порядка, достаточно прибавить къ тремъ обычнымъ условіямъ соприкасанія перваго порядка одно условіе, выражающее, что всѣ члены второй степени относительно h и k, разсматриваемыя совмѣстно, обращаются въ нуль, причемъ не нужно вовсе приравнивать нулю каждый въ отдѣльности; число соотношеній въ этомъ случаѣ будетъ равно только числу произвольныхъ постоянныхъ, содержащихся въ уравненіи шаровой поверхности, которая, такимъ образомъ, окажется вполнѣ опредѣленной.

Этотъ способъ приводитъ по существу къ изученію кривизны поверхности въ каждой точкѣ съ помощью кривизны различныхъ кривыхъ, которыя получились-бы на этой поверхности при пересѣченіи ея рядомъ плоскостей, проведенныхъ черезъ соотвѣтствующіе нормали.

Исходя изъ общей формулы, выражающей радіусъ кривизны каждаго изъ этихъ нормальныхъ сѣченій въ функціи его направленія, Эйлеръ, которому почти всецѣло принадлежитъ вся эта теорія, открылъ нѣсколько важныхъ теоремъ, относящихся къ любымъ поверхностямъ.

Онъ сначала безъ труда установилъ, что между всѣми нормальными сѣченіями нѣкоторой поверхности въ одной и той-же точкѣ можно различать два главныхъ, кривизна которыхъ, въ сравненіи съ кривизной всѣхъ остальныхъ, будетъ для первой — *минимальной*, а для второй—*максимальной*. Плоскости этихъ сѣченій замѣчательны тѣмъ, что онѣ постоянно перпендикулярны другъ къ другу. Затѣмъ онъ показалъ, что какова-бы ни была данная поверхность, и даже независимо отъ ея опредѣленія, кривизны этихъ двухъ новыхъ сѣченій достаточно, чтобы вполнѣ опредѣлить кривизну всякаго другаго нормальнаго сѣченія съ помощью неизмѣнной и очень простой формулы, въ зависимости отъ наклоненія плоскости этого сѣченія къ плоскости сѣченія съ наибольшей или съ наименьшей кривизной. Разсматривая эту формулу, какъ полярное уравненіе нѣкоторой плоской кривой, онъ вывелъ изъ нея остроумное построеніе, въ высшей степени замѣчательное по своей общности и простотѣ; оно заключается въ слѣдующемъ: построимъ такой эллипсъ, чтобы разстоянія одного изъ его фокусовъ до двухъ концовъ большей оси были-бы равны радіусамъ *наибольшей* и *наименьшей* кривизны; тогда радіусъ кривизны каждаго другого нормальнаго сѣченія будетъ равенъ тому изъ радіусовъ-векторовъ эллипса, который составитъ съ осью уголъ вдвое большій, чѣмъ уголъ наклоненія плоскости даннаго сѣченія къ плоскости одного изъ главныхъ сѣченій.

Этотъ эллипсъ обращается въ гиперболу, построенную съ помощью того же пріема, въ случаѣ, если вогнутости двухъ главныхъ сѣченій направлены въ разные стороны; наконецъ, онъ становится параболой, если данная поверхность принадлежитъ къ классу такихъ поверхностей, которыя могутъ быть произведены перемѣщеніемъ прямой линіи, или-же если она въ данной точкѣ представляетъ перегибъ.

Изъ этого изящнаго основного соотношенія позднѣе было выведено много болѣе или менѣе интересныхъ второстепенныхъ теоремъ; но здѣсь не мѣсто ихъ разсматривать. Я долженъ остановиться только на основной теоремѣ Менье, дополняющей трудъ Эйлера и связывающей кривизну всѣхъ кривыхъ, которыя могутъ быть проведены на поверхности черезъ одну и ту-же точку, съ кривизною нормальныхъ сѣченій,—единственныхъ сѣченій, разсмотрѣнныхъ Эйлеромъ. На основаніи этой теоремы, центръ кривизны каждаго наклоннаго сѣченія можно разсматривать, какъ проекцію на плоскость этого сѣченія центра кривизны, соотвѣтствующаго нормальному сѣченію, проходящему черезъ ту-же касательную: отсюда Менье вывелъ очень простое построеніе, согласно которому, примѣняя кругъ, аналогичный эллипсу Эйлера, можно опредѣлить кривизну наклонныхъ сѣченій, зная кривизну нормальныхъ сѣченій; такимъ образомъ, комбинируя эти двѣ теоремы, достаточно знать кривизну двухъ *главныхъ* нормальныхъ сѣченій, чтобы опредѣлить кривизну всѣхъ остальныхъ кривыхъ, которыя могутъ быть проведены на нѣкоторой поверхности черезъ данную ея точку.

Изложенная теорія позволяетъ вполнѣ изслѣдовать, точка за точкой, кривизну всякой поверхности. Чтобы легче связать между собой замѣчанія, относящіяся къ различнымъ точкамъ той-же поверхности, геометры пытались опредѣлить такъ называемыя *линіи кривизны* поверхностей, т. е. линіи, обладающія тѣмъ свойствомъ, что на смежныя нормали къ поверхности, проходящія черезъ нихъ, можно смотрѣть, какъ на лежащія въ одной плоскости. Черезъ каждую точку любой поверхности проходятъ двѣ такихъ линіи, всегда перпендикулярныя другъ къ другу, направленіе которыхъ въ началѣ совпадаетъ съ направленіемъ двухъ нормальныхъ сѣченій, разсмотрѣнныхъ выше; это обстоятельство можетъ избавить отъ необходимости разсматривать послѣднія. Опредѣленіе линій кривизны производится очень просто для наиболѣе извѣстныхъ поверхностей, напр. для цилиндрическихъ, коническихъ и поверхностей вращенія. Это новое основное понятіе сдѣлалось исходной точкой для нѣсколькихъ другихъ общихъ изысканій, обладающихъ не меньшимъ значеніемъ, какъ напр. относительно *поверхностей кривизны*, т. е. такихъ поверхностей, которыя являются геометрическими мѣстами центровъ кривизны различныхъ главныхъ сѣченій, или-же относительно развертывающихся поверхностей, образуемыхъ нормалями къ поверхности въ различныхъ точкахъ линіи кривизны.

Чтобы закончить разсмотрѣніе теоріи кривизны, мнѣ остается еще указать въ общихъ чертахъ на соображенія, относящіяся къ *кривымъ двоякой кривизны*, т. е. къ такимъ кривымъ, которыя не лежатъ въ одной плоскости.

Что касается опредѣленія ихъ касательныхъ, то оно, очевидно, не представляетъ никакой трудности. Если кривая аналитически задана уравненіями ея проекцій на двѣ координатныя плоскости, то уравненіями касательныхъ къ этой кривой будутъ просто уравненія касательныхъ къ этимъ проекціямъ; такимъ образомъ этотъ вопросъ приводится къ общей теоріи плоскихъ кривыхъ. Если-же, съ болѣе общей точки зрѣнія, кривая аналитически опредѣляется, какъ это было показано въ XII лекціи, системой уравненій двухъ поверхностей, причемъ данная линія является ихъ пересѣченіемъ, то касательную необходимо разсматривать, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, касательныхъ къ этимъ двумъ поверхностямъ, и задача будетъ сведена къ вопросу о касательныхъ плоскостяхъ, разрѣшенному нами выше.

Кривизна этого рода кривыхъ приводитъ къ установленію новаго и весьма важнаго понятія. Въ самомъ дѣлѣ, въ плоской кривой мы можемъ съ достаточной точностью оцѣнить кривизну, измѣряя большій или меньшій уголъ между двумя послѣдовательными элементами, который косвенно опредѣляется радіусомъ соприкасающагося круга. Но для кривой, не лежащей въ одной плоскости, дѣло представляется въ совершенно иномъ видѣ. Такъ какъ послѣдовательные элементы кривой въ этомъ случаѣ не лежатъ уже больше въ одной и той-же плоскости, то для того, чтобы составить себѣ точное понятіе о кривизнѣ, необходимо разсматривать въ отдѣльности углы, образуемые ими другъ съ другомъ, а также взаимныя наклоненія тѣхъ плоскостей, въ которыхъ они лежатъ. Поэтому, прежде всего, необходимо установить, какую плоскость мы будемъ постоянно принимать за *плоскость кривой*; эту плоскость можно опредѣлить съ помощью трехъ безконечно близкихъ точекъ, и поэтому она называется *соприкасающейся* плоскостью; она непрерывно измѣняется при переходѣ отъ одной точки къ другой. Какъ только положеніе этой плоскости будетъ найдено, измѣреніе обыкновенной кривизны съ помощью соприкасающагося круга не представитъ уже, очевидно, никакихъ новыхъ затрудненій. Что-же касается *второй кривизны*, то она измѣряется величиной угла, образуемаго двумя послѣдовательными соприкасающимися плоскостями; ея аналитическое выраженіе, вообще говоря, легко можетъ быть найдено. Чтобы еще увеличить аналогію между теоріей этой кривизны и теоріей обыкновенной кривизны, мы могли-бы ее измѣрять, также косвенно, съ помощью радіуса *соприкасающейся* шаровой поверхности, проходящей черезъ 4 безконечно-близкія точки кривой; уравненіе этой шаровой поверхности составляется по тому-же пріему, какъ и уравненіе соприкасающейся плоскости. Радіусъ ея обыкновенно опредѣляютъ, какъ maximum кривизны, представляемой въ разсматриваемой точкѣ развертывающейся поверхностью, которая является геометрическимъ мѣстомъ касательныхъ къ данной кривой.

Мы должны теперь перейти къ разсмотрѣнію вопросовъ общей геометріи трехъ измѣреній, рѣшаемыхъ съ помощью интегральнаго исчисленія. Къ этимъ вопросамъ принадлежатъ квадратуры кривыхъ поверхностей и кубатуры соотвѣтствующихъ имъ объемовъ.

Что касается квадратуры кривыхъ поверхностей, то для составленія общаго дифференціальнаго уравненія необходимо представить себѣ, что поверхность раздѣлена на безконечно-малые во всѣхъ направленіяхъ плоскіе элементы четырьмя плоскостями, причемъ двѣ изъ этихъ плоскостей перпендикулярны къ оси иксовъ, а двѣ—къ оси игрековъ. Каждый изъ этихъ элементовъ лежитъ въ соотвѣтствующей касательной плоскости; горизонтальной его проекціей, очевидно, будетъ прямоугольникъ, образуемый дифференціалами двухъ горизонтальныхъ координатъ, и обладающій площадью, равной $dx\,dy$. Изъ этой площади мы, на основаніи простой элементарной теоремы, можемъ вывести площадь самаго элемента, дѣля площадь проекціи на косинусъ угла, образуемаго касательной плоскостью съ плоскостью xy. Такимъ образомъ, мы найдемъ, что общее выраженіе этого элемента будетъ:

$$d^2\,S = dx\;dy\sqrt{\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}+1}.$$

Поэтому, въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, площадь данной поверхности опредѣлится двукратнымъ интегрированіемъ этой дифференціальной формулы по двумъ перемѣннымъ, насколько позволитъ намъ это сдѣлать современное несовершенство интегральнаго исчисленія. Предѣлы каждаго послѣдовательнаго интеграла будутъ опредѣлены видомъ тѣхъ поверхностей, которыя, пересѣкаясь съ разсматриваемой поверхностью, ограничатъ часть ея, подлежащую измѣренію; поэтому, при примѣненіи изложеннаго общаго метода, необходимо обращать особое вниманіе на способъ опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ, или произвольныхъ функцій, вводимыхъ интегрированіемъ.

Что-же касается вычисленія объемовъ, ограниченныхъ кривыми поверхностями, то та-же система плоскостей, при помощи которой мы только что опредѣлили дифференціалъ площади, можетъ служить намъ также непосредственно для разложенія объема на многогранные элементы. Дѣйствительно, ясно, что безконечно-малый объемъ второго порядка, заключенный между этими четырьмя плоскостями, долженъ быть, по смыслу метода безконечно-малыхъ, приравненъ прямоуголному параллелепипеду, высота котораго равна вертикальной ординатѣ z разсматриваемой точки, а основаніе равно $dx\,dy$, такъ какъ разница между этимъ тѣломъ и разсматриваемой частью пространства, очевидно, есть величина безконечно-малая третьяго порядка, меньшая $dx\,dy\,dz$. Отсюда, на основаніи одной изъ простѣйшихъ теоремъ элементарной геометріи, мы прямо выведемъ для дифференціальнаго выраженія искомаго объема слѣдующее общее уравненіе:

$$d^2\,V = z\;dx\;dy;$$

Изъ этихъ формулъ послѣ двукратнаго интегрированія мы для каждаго отдѣльнаго случая выведемъ дѣйствительную величину искомаго объема, причемъ, какъ и въ первомъ случаѣ, необходимо обратить вниманіе на опредѣленіе предѣловъ каждаго интеграла, въ зависимости отъ вида поверхностей, которыми данный объемъ будетъ ограниченъ съ боковъ.

Здѣсь не мѣсто вдаваться въ какія-бы то ни было подробности относительно окончательнаго рѣшенія этихъ двухъ основныхъ вопросовъ; было-бы, однако, не безполезно показать на этихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ общую и своеобразную аналогію, которая по необходимости существуетъ между этими вопросами и которая позволяетъ преобразовать всякое изслѣдованіе относительно квадратуры въ соотвѣтствующее изслѣдованіе кубатуръ. Въ самомъ дѣлѣ, легко убѣдиться, что оба дифференціальныя уравненія отличаются другъ отъ друга только тѣмъ, что при переходѣ отъ второго къ первому на мѣсто z приходится поставить

$$\sqrt{\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}+1}.$$

Поэтому, площадь нѣкоторой кривой поверхности можетъ считаться численно равной объему тѣла, ограниченнаго такой поверхностью, что ея вертикальная ордината постояно. равна по своей величинѣ секансу угла, образуемаго горизонтальной плоскостью съ касательной къ первоначальной поверхности. Разумѣется, мы предполагаемъ, что предѣлы въ обоихъ случаяхъ одинаковы.

Что закончить философскій разборъ общей геометріи трехъ измѣреній, мнѣ остается еще въ общихъ чертахъ разсмотрѣть изящную и глубокую мысль Монжа относительно аналитической классификаціи поверхностей въ ихъ естественныя семейства; эти классификаціи надо считать самымъ замѣчательнымъ усовершенствованіемъ, которое геометрія получила со времени Декарта и Лейбница.

Приступая къ изученію частныхъ свойствъ различныхъ поверхностей съ общей точки зрѣнія, мы прежде всего испытываемъ извѣстныя затрудненія вслѣдствіе отсутствія хорошей классификаціи, основанной на наиболѣе существенныхъ геометрическихъ признакахъ и въ то-же время достаточно простой. Съ самаго основанія аналитической геометріи, геометры совершенно безсознательно стали классифицировать поверхности, какъ и кривыя, по степени и формѣ ихъ уравненій, т. е. на основаніи единственнаго принципа, который самъ собою представляется человѣческому уму въ качествѣ основаніи для подобнаго раздѣленія.

Но легко понять, что этотъ принципъ классификаціи, вполнѣ примѣнимый уравненіямъ первой и второй степени, не удовлетворяетъ ни одному изъ основныхъ условій, которыя должны быть соблюдены при такомъ трудѣ. Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что Ньютонъ, изслѣдуя общее уравненіе третьей степени съ двумя перемѣнными, показалъ, что—если даже ограничиться простымъ перечисленіемъ различныхъ плоскихъ кривыхъ, которыя могутъ быть изображены этимъ уравненіемъ,—то, хотя всѣ эти кривыя и являются безусловно неопредѣленными во всѣхъ отношеніяхъ все-таки необходимо различать 74 различныхъ вида ихъ, которые также отличны другъ отъ друга, какъ три кривыя второго порядка.

Хотя никто не изслѣдовалъ съ этой-же точки зрѣнія уравненія четвертой степени съ двумя перемѣнными, однако не подлежитъ сомнѣнію, что оно дало бы еще гораздо болѣе значительное число различныхъ кривыхъ; и это число, очевидно, съ чрезвычайной быстротой возрастало-бы съ возрастаніемъ степени уравненія.

Если мы перейдемъ теперь къ уравненіямъ съ тремя перемѣнными, которыя, въ силу своей большей сложности, необходимо представляютъ гораздо большее разнообразіе то, очевидно, что число дѣйствительно различныхъ поверхностей, выражаемыхъ ими, должно быть еще гораздо многочисленнѣе и будетъ возрастать съ возрастаніемъ степени гораздо быстрѣе.

Этихъ поверхностей такъ много, что ученые всегда ограничивались изслѣдованіемъ уравненій двухъ первыхъ степеней, и ни одинъ геометръ не попытался произвести такое же изслѣдованіе поверхностей третьяго порядка, какое произвелъ Ньютонъ относительно соотвѣтствующихъ кривыхъ. Отсюда вытекаетъ очевидный выводъ, что даже въ томъ случаѣ, если несовершенство алгебры не мѣшало-бы неограниченному примѣненію подобнаго способа изслѣдованія, все-же общая классификація поверхностей по степени и формѣ ихъ уравненій была-бы совершенно невозможна на практикѣ. Но это соображеніе не является единственнымъ мотивомъ, который побуждаетъ насъ отказаться отъ подобной классификаціи; оно даже не является самымъ важнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, этотъ способъ распредѣленія поверхностей, помимо его практической непримѣнимости, прямо противорѣчитъ главному назначенію всякой хорошей классификаціи: возможно тѣснѣе сближать такіе предметы, которые связаны наиболѣе важными соотношеніями, и удалять другъ отъ друга предметы, связанные лишь второстепенными аналогіями.

Тождество степени уравненій является для поверхностей лишь второстепеннымъ геометрическимъ признакомъ; оно даже точно не указываетъ, какое число точекъ необходимо для полнаго опредѣленія каждой поверхности.

Наиболѣе важное общее свойство поверхностей, подлежащее нашему разсмотрѣнію, очевидно, заключается въ способѣ ихъ происхожденія; всѣ поверхности, образованныя по тому-же способу, необходимо должны обладать значительными геометрическими аналогіями, тогда какъ поверхности, способы произведенія которыхъ существенно-различны, будутъ обладать только очень ничтожнымъ сходствомъ. Такъ, напримѣръ, всѣ цилиндрическія поверхности, какова-бы ни была форма ихъ основанія, составляютъ одно естественное семейство, различныя разновидности котораго обладаютъ большимъ числомъ общихъ признаковъ первостепенной важности; тоже можно сказать относительно всѣхъ коническихъ поверхностей, или всѣхъ поверхностей вращенія и проч.

Но это естественное распредѣленіе совершенно уничтожается классификаціей, основанной на степени уравненія. Дѣйствительно, поверхности, происходящія по тому-же способу, какъ напр. цилиндрическія поверхности, могутъ выражаться уравненіями всевозможныхъ степеней, въ зависимости отъ различія ихъ основаній,—различія, имѣющаго совершенно второстепенное значеніе. Съ другой стороны, уравненія той-же степени часто выражаютъ поверхности, принадлежащія къ самымъ разнороднымъ геометрическимъ семействамъ: однѣ—къ цилиндрическимъ, другія—къ коническимъ, третьи—къ поверхностямъ вращенія и проч. Поэтому, указанная аналитическая классификація совершенно ошибочна; то, что нужно соединить, она разъединяетъ; а то, что нужно разграничить—сводитъ въ одну группу.

Однако, такъ какъ общая геометрія всецѣло основана на примѣненіи аналитическихъ соображеній и методовъ, то и въ этомъ случаѣ необходимо, чтобы классификація могла принять аналитическій характеръ.

Въ такомъ именно видѣ представлялось основное затрудненіе, такъ счастливо устраненное Монжемъ: естественныя семейства поверхностей были ясно установлены съ геометрической точки зрѣнія, по способу ихъ происхожденія; надо было опредѣлить характеръ аналитическихъ соотношеній, предназначенный для постояннаго абстрактнаго толкованія этого конкретнаго свойства. Это важное открытіе было совершенно необходимо для окончанія построенія общей теоріи поверхностей. Принципъ, примѣненный Монжемъ для достиженія этой цѣли, сводится къ слѣдующему простому и ясному общему соображенію: всѣ поверхности, подчиненныя тому-же способу происхожденія, необходимо характеризуются нѣкоторымъ общимъ свойствомъ касательныхъ плоскостей въ любой точкѣ ихъ; поэтому, выражая аналитически это свойство по общему уравненію плоскости, касательной къ нѣкоторой поверхности, мы составимъ дифференціальное уравненіе, которымъ будутъ представлены одновременно всѣ поверхности этого семейства.

Такъ, напримѣръ, всякая цилиндрическая поверхность обладаетъ слѣдующимъ исключительнымъ признакомъ: плоскость, касательная въ любой точкѣ поверхности, постоянно параллельна неизмѣнной прямой, указывающей направленіе производящихъ. Отсюда легко увидѣть, что, если мы примемъ за уравненія этой прямой уравненія

$$x=az,\quad y=bz,$$

то общее уравненіе касательной плоскости, которое было установлено нами выше, приведетъ къ слѣдующему дифференціальному уравненію, общему для всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей:

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1.$$

Точно также, всѣ коническія поверхности характеризуются съ этой точки зрѣнія тѣмъ необходимымъ свойствомъ, что касательная плоскость въ любой точкѣ постоянно проходитъ черезъ вершину конуса. Поэтому, если мы обозначимъ черезъ α, β, γ координаты этой вершины, то мы непосредственно придемъ къ дифференціальному уравненію

$$(x-\alpha)\frac{dz}{dx}+(y-\beta)\frac{dz}{dy}=z-\gamma;$$

это уравненіе является выраженіемъ всего семейства коническихъ поверхностей.

Въ поверхностяхъ вращенія касательная плоскость въ любой точкѣ постоянно перпендикулярна къ плоскости меридіана, т. е. къ плоскости, проходящей черезъ эту точку и черезъ ось поверхности.

Чтобы наиболѣе просто аналитически выразить это свойство, предположимъ, что ось вращенія принята за ось z-овъ: дифференціальное уравненіе, общее всему этому семейству поверхностей, будетъ

$$y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0.$$

Было-бы излишне приводить здѣсь еще большее число примѣровъ, чтобы ясно установить, что, вообще говоря, каковъ-бы ни былъ способъ ихъ происхожденія, всѣ поверхности, принадлежащія къ тому-же естественному семейству, можно выразить аналитически однимъ и тѣмъ-же уравненіемъ съ частными производными, содержащимъ произвольныя постоянныя; это уравненіе можно составить на основаніи одного свойства касательной плоскости, общаго всѣмъ этимъ поверхностямъ. Чтобы дополнить это основное и необходимое соотвѣтствіе между геометрической и аналитической точкой зрѣнія, Монжъ разсмотрѣлъ еще конечныя уравненія, которыя являются интегралами этихъ дифференціальныхъ уравненій и почти всегда могутъ быть легко получены прямыми изслѣдованіями. Каждое изъ этихъ конечныхъ уравненій — какъ извѣстно изъ общей теоріи интегрированія—должно содержать одну произвольную функцію, если дифференціальное уравненіе только перваго порядка; но это совсѣмъ не препятствуетъ тому, чтобы подобныя уравненія имѣли ясно опредѣленный смыслъ, какъ въ геометрическомъ, такъ и въ аналитическомъ отношеніи, хотя они и являются гораздо болѣе общими, чѣмъ тѣ уравненія, которыя разсматриваются обыкновенно.

Эта произвольная функція соотвѣтствуетъ тѣмъ свойствамъ поверхностей, которыя не опредѣлены способомъ ихъ происхожденія, такъ напр. основанію въ цилиндрическихъ и коническихъ поверхностяхъ, меридіану въ поверхностяхъ вращенія и т. д. *).

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ конечное уравненіе семейства поверхностей содержитъ сразу двѣ произвольныя функціи, зависящія отъ различныхъ комбинацій перемѣнныхъ координатъ; это имѣетъ мѣсто въ случаѣ, когда соотвѣтствующее дифференціальное уравненіе должно быть второго порядка; съ геометрической точки зрѣнія, эта бо́льшая степень неопредѣленности указываетъ на болѣе общее, но, тѣмъ не менѣе, строго опредѣленное семейство.

Таково, напримѣръ, семейство развертывающихся поверхностей, въ которое, въ качествѣ подчиненныхъ видовъ, входятъ всѣ цилиндрическія поверхности, всѣ коническія поверхности и еще множество подобныхъ видовъ; однако, всѣ поверхности, относящіяся къ этому семейству, могутъ быть ясно опредѣлены съ наиболѣе общей точки зрѣнія, какъ огибающія положенія, пройденныя нѣкоторой плоскостью, которая, перемѣщаясь, остается постоянно касательной къ двумъ опредѣленнымъ поверхностямъ, или-же какъ геометрическія мѣста всѣхъ касательныхъ къ нѣкоторой кривой двоякой кривизны. Этой естественной группѣ поверхностей соотвѣтствуетъ слѣдующее неизмѣнное дифференціальное уравненіе между тремя частными производными второго порядка, открытое Эйлеромъ:

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2=\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}$$

Соотвѣтствующее этому уравненію конечное уравненіе необходимо содержитъ двѣ произвольныя функціи, которыя геометрически соотвѣтствуютъ тѣмъ двумъ неопредѣленнымъ поверхностямъ, по которымъ должна скользить производящая плоскость, или какимъ-либо двумъ уравненіямъ направляющей кривой.

Хотя полезно разсматривать конечныя уравненія естественныхъ семействъ поверхностей, тѣмъ не менѣе ясно, что въ виду неопредѣленности произвольныхъ функцій, въ нихъ по необходимости содержащихся, они являются мало пригодными для дальнѣйшихъ аналитиче-

*) Мы можемъ найти, напримѣръ,—либо при помощи прямыхъ соображеній аналитической геометріи, либо на основаніи методовъ интегрированія,—что цилиндрическія и коническія поверхности изображаются слѣдующими конечными уравненіями:

$$x-az=\varphi\,(y-\beta z);\quad \frac{x-\alpha}{z-\gamma}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right),$$

гдѣ φ обозначаетъ совершенно произвольную функцію.

скихъ изслѣдованій; поэтому предпочтительнѣй примѣнять дифференціальныя уравненія, куда входятъ только простыя произвольныя постоянныя, несмотря на косвенный характеръ этихъ уравненій. Такимъ путемъ общее и правильное изученіе свойствъ различныхъ поверхностей сдѣлалось дѣйствительно осуществимымъ, такъ какъ анализъ получилъ возможность схватывать и выдѣлять общую точку зрѣнія.

Нетрудно понять, что такой принципъ позволилъ придти къ выводамъ, по общности и по интересу значительно превосходящимъ всѣ результаты, которые можно было получить раньше. Приведемъ только одинъ очень простой примѣръ,—хотя онъ далеко не является самымъ замѣчательнымъ,—подобный методъ аналитической геометріи позволилъ установить слѣдующую любопытную особенность каждаго *однороднаго* уравненія съ тремя перемѣнными: такое уравненіе необходимо изображаетъ коническую поверхность, вершина которой совпадаетъ съ началомъ координатъ.

Точно также, среди болѣе трудныхъ изысканій, можно указать, что при помощи варьяціоннаго исчисленія удалось опредѣлить кратчайшее разстояніе между двумя точками на любой развертывающейся поверхности, не прибѣгая къ отдѣльному разсмотрѣнію частныхъ случаевъ и проч.

Я считалъ своимъ долгомъ подробнѣе остановиться на философскомъ изложеніи указанной прекрасной идеи Монжа, которая, безъ всякаго сомнѣнія, лучше всего обезпечиваетъ славу ея создателю; высокое значеніе этого принципа, по моему мнѣнію, никѣмъ еще не понято достаточно, за исключеніемъ Лагранжа, справедливѣйшаго цѣнителя своихъ соперниковъ. Я даже сожалѣю, что естественные предѣлы моего труда заставляютъ меня ограничиться такимъ несовершеннымъ очеркомъ, въ которомъ я не могъ указать на благодѣтельное воздѣйствіе этой новой геометріи на усовершенствованіе анализа, и въ частности—на общую теорію дифференціальныхъ уравненій со многими перемѣнными.

Размышляя объ этой философской классификаціи поверхностей, по существу своему аналогичной тѣмъ естественнымъ методамъ, которые физіологи пытались примѣнить въ зоологіи и въ ботаникѣ, я невольно ставилъ себѣ вопросъ: не слѣдуетъ-ли такой-же пріемъ перенести и въ теорію кривыхъ? Такъ какъ разнообразіе кривыхъ несравненно меньше, то рѣшеніе такой задачи одновременно менѣе важно и болѣе затруднительно: ибо признаки, которые могли-бы служить основаніемъ для классификаціи, гораздо менѣе рѣзко выражены. Поэтому было естественно, что человѣческій умъ сначала занялся классификаціей поверхностей.

Но, безъ сомнѣнія, надо надѣяться, что такой методъ изслѣдованія впослѣдствіи будетъ перенесенъ и на кривыя. Можно уже даже уловить въ нихъ нѣсколько естественныхъ семействъ, какъ напр. семейство параболъ какого-либо порядка, или гиперболъ, и проч. Тѣмъ не менѣе до сихъ поръ еще не было создано ни одного общаго принципа, на основаніи котораго можно-бы было прямо установить такую классификацію.

Я изложилъ возможно яснѣе въ этой главѣ и въ четырехъ предъидущихъ истинный философскій характеръ наиболѣе общаго и простого отдѣла конкретной математики; теперь я долженъ исполнить туже задачу относительно обширной и болѣе сложной науки—раціональной механики. Это и будетъ предметомъ четырехъ слѣдующихъ лекцій.

Пятнадцатая лекція.

Философскія соображенія объ основныхъ принципахъ раціональной механики.

Механическія явленія, по самой природѣ своей, какъ мы замѣтили уже выше, одновременно носятъ и болѣе частный, и болѣе сложный, и болѣе конкретный характеръ, чѣмъ явленія геометрическія. Поэтому, слѣдуя энциклопедической схемѣ, установленной въ этомъ трудѣ, при философскомъ изложеніи конкретной математики, мы помѣстимъ раціональную механику послѣ геометріи, ибо ея изученіе, по необходимости, труднѣе и, слѣдовательно, окажется и менѣе совершеннымъ. Геометрическіе вопросы стоятъ всегда совершенно независимо отъ всякихъ механическихъ соображеній, тогда какъ механическіе вопросы постоянно осложняются соображеніями геометрическими: форма тѣлъ неизбѣжно должна вліять на явленія движенія или равновѣсія.

Это осложненіе часто настолько велико, что одного самаго простого измѣненія формы тѣла достаточно, чтобы значительно увеличить трудность соотвѣтствующей задачи механики; объ этомъ предметѣ можно составить нѣкоторое представленіе, разсматривая напримѣръ, опредѣленіе взаимнаго тяготѣнія двухъ тѣлъ, какъ результата притяженія всѣхъ ихъ частицъ; вопросъ этотъ до сихъ поръ разрѣшенъ вполнѣ только въ предположеніи, что тѣла имѣютъ сферическую форму и, слѣдовательно, основное затрудненіе возникаетъ здѣсь, очевидно, вслѣдствіе геометрическихъ обстоятельствъ.

Такъ какъ мы въ предшествующихъ лекціяхъ убѣдились, что философскій характеръ геометріи все еще до извѣстной степени искаженъ остаткомъ весьма замѣтнаго вліянія духа метафизики, то мы, естественно, въ виду гораздо бо̀льшей, по необходимости, сложности раціональной механики и должны ожидать, что вліяніе на нее метафизики окажется гораздо глубже; это обстоятельство и въ самомъ дѣлѣ очень легко доказать. Характеръ естественной науки, очевидно, присущій механикѣ еще въ гораздо большей степени, чѣмъ геометріи, въ настоящее время совершенно затемненъ для всѣхъ умовъ введеніемъ онтологическихъ разсужденій. Относительно всѣхъ основныхъ понятій этой науки наблюдается глубокое и постоянное смѣшеніе точекъ зрѣнія абстрактной и конкретной, что и препятствуетъ ясному различенію физически реальнаго отъ чисто логическаго, и точному отдѣленію искусственныхъ построеній, предназначенныхъ исключительно для облегченія установленія общихъ законовъ равновѣсія или движенія, отъ явленій природы, указанныхъ дѣйствительнымъ наблюденіемъ внѣшняго міра и составляющихъ реальныя основанія науки.

Можно даже признать, что громадное усовершенствованіе раціональной механики за послѣднее столѣтіе, какъ въ смыслѣ расширенія ея теорій, такъ и въ смыслѣ ихъ соотношеній, заставило философское пониманіе этой науки, если можно такъ выразиться, пойти въ указанномъ направленіи назадъ: теперь наука излагается обыкновенно гораздо хуже, чѣмъ это сдѣлано Ньютономъ. Въ самомъ дѣлѣ, своего развитія раціональная механика достигла, главнымъ образомъ, благодаря все болѣе и болѣе исключительному пользованію математическимъ анализомъ; преимущественное значеніе этого замѣчательнаго орудія заставило постепенно усвоить привычку видѣть въ раціональной механикѣ только простые вопросы анализа; благодаря совершенно неправильному, хотя и очень естественному, распространенію такого взгляда, пытались доказывать a priori, на основаніи чисто аналитическихъ разсужденій, даже основные принципы этой науки, тогда какъ Ньютонъ ограничился тѣмъ, что изложилъ ихъ какъ результаты одного наблюденія. Такимъ именно образомъ, напримѣръ, Даніилъ Бернулли, д'Аламберъ и, въ наше время, Лапласъ пытались доказать элементарное правило сложенія силъ при помощи однихъ только аналитическихъ соображеній; только Лагранжъ ясно замѣтилъ, что доказательства эти по необходимости совершенно недостаточны. Тоже направленіе и теперь еще болѣе или менѣе преобладаетъ у всѣхъ геометровъ. Но тѣмъ не менѣе ясно, говоря вообще, какъ мы нѣсколько разъ уже замѣчали, что математическій анализъ, несмотря на крайнюю его важность,— о чемъ я постарался дать правильное представленіе—по самой природѣ своей, можетъ быть только могучимъ орудіемъ дедукціи; это орудіе, если его возможно примѣнить, позволяетъ усовершенствовать до самой высокой степени науку, основанія которой уже установлены; но для самаго установленія основаній ея оно всегда окажется недостаточнымъ.

Если-бы было возможно всецѣло построить науку механики на простыхъ аналитическихъ соображеніяхъ, то было-бы непонятно, какимъ образомъ такая наука была-бы примѣнима къ дѣйствительному изученію природы. Напротивъ, реальность раціональной механики объясняется именно тѣмъ, что она основана на нѣсколькихъ общихъ фактахъ, непосредственно данныхъ наблюденіемъ и, съ точки зрѣнія истиннаго положительнаго философа, какъ мнѣ кажется, не поддающихся никакому объясненію. Несомнѣнно, что въ раціональной механикѣ аналитическимъ методомъ злоупотребляли еще болѣе чѣмъ въ геометріи. Спеціальная задача настоящей лекціи—указать, какимъ образомъ, при современномъ состояніи науки, можно ясно установить ея истинный философскій характеръ и совершенно освободить ее отъ всякаго метафизическаго вліянія, постоянно отдѣляя конкретную точку зрѣнія отъ абстрактной и проводя точную грань между исключительно опытной и чисто-раціональной частями науки. Согласно съ основной цѣлью нашего труда, такое введеніе необходимо должно предшествовать общимъ соображеніямъ о дѣйствительномъ составѣ науки, которыя будутъ изложены послѣдовательно въ трехъ слѣдующихъ лекціяхъ.

Начнемъ съ точнаго указанія общаго предмета разсматриваемой науки. Обыкновенно сначала отмѣчаютъ,—и совершенно законно,—что механика совсѣмъ не останавливается не только на первичныхъ причинахъ движенія,—ихъ разсмотрѣніе выходило бы изъ предѣловъ положительной философіи—но даже и на обстоятельствахъ, которыми эти движенія вызываются; въ различныхъ отрасляхъ *физики* обстоятельства, производящія движенія, дѣйствительно являются важнымъ предметомъ положительнаго изученія, но они совершенно исключены изъ области механики, которая ограничивается разсмотрѣніемъ самаго движенія, не заботясь о томъ, чѣмъ оно было вызвано.

Силы въ механикѣ являются ничѣмъ инымъ, какъ движеніями совершающимися или долженствующими совершиться; двѣ силы, сообщающія одному и тому же тѣлу одну и ту-же скорость въ одномъ и томъ-же направленіи, разсматриваются, какъ тождественныя, какъ бы различно ни было ихъ происхожденіе и независимо отъ того, является ли движеніе результатомъ мышечныхъ сокращеній животнаго, или тяготѣнія къ нѣкоторому притягивающему центру, или удара нѣкотораго тѣла, или же расширенія эластичной жидкости и т. п. Но хотя эта точка зрѣнія, къ счастію, сдѣлалась за послѣднее время совершенно обычной, все же геометрамъ предстоитъ еще произвести весьма существенную реформу,—если не въ понятіи, то по крайней мѣрѣ въ обычной терминологіи,—чтобы окончательно устранить старинное метафизическое понятіе о *силахъ* и яснѣе, чѣмъ это дѣлается до сихъ поръ, намѣтить истинную точку зрѣнія механики *).

Теперь можно уже очень точно установить общую задачу раціональной механики. Она заключается въ томъ, чтобы опредѣлить, какое дѣйствіе на данное тѣло произведутъ нѣсколько различныхъ силъ, приложенныя одновременно, если намъ извѣстны простыя движенія, которыя явились-бы результатомъ отдѣльнаго дѣйствія каждой изъ этихъ силъ; или-же, ставя задачу въ обратномъ смыслѣ,—опредѣлить тѣ простыя движенія, комбинація которыхъ приводитъ къ извѣстному сложному движенію. Это положеніе ясно показываетъ, каковы, по необходимости, должны быть данныя и неизвѣстныя въ каждой задачѣ механики. Легко понять, что изученіе дѣйствія отдѣльной силы, собственно говоря, совершенно не относится къ области раціональной механики: тамъ всегда предполагается, что дѣйствіе силы уже извѣстно, такъ какъ вторая общая задача поддается рѣшенію только какъ обратный случай первой.

Поэтому вся механика по существу занимается комбинаціей силъ, все равно, приводятъ-ли ихъ взаимодѣйствія къ сложному движенію — и въ такомъ случаѣ нужно изучить различныя условія этого движенія,— или-же, благодаря ихъ взаимному уничтоженію, тѣло переходитъ въ состояніе равновѣсія,—тогда необходимо опредѣлить характерныя условія такого равновѣсія.

Обѣ общія проблемы, одна—прямая, другая—обратная, въ разрѣшеніи которыхъ заключается цѣль механики, какъ науки, съ точки зрѣнія ея при-

*) Необходимо также замѣтить, что даже само названіе науки въ высшей степени неудобно, такъ какъ оно обозначаетъ только одно изъ второстепенныхъ приложеній этой науки; это заставляетъ часто прибавлять прилагательное „раціональная“, что, хотя и необходимо, но крайне стѣснительно. Нѣмецкіе философы, чтобы избѣжать этого неудобства, ввели гораздо болѣе философскій терминъ „*форономія*“, примѣненный въ курсѣ Германна. Было бы очень желательно, чтобы этотъ терминъ былъ принятъ повсюду.

мѣненій, имѣютъ одинаковое значеніе. Дѣйствительно, въ нѣкоторыхъ случаяхъ простыя движенія могутъ быть изучены непосредственно съ помощью наблюденія, тогда какъ ознакомленіе съ движеніемъ, которое произойдетъ отъ ихъ комбинацій, возможно только на основаніи теоріи; въ другихъ-же случаяхъ — наоборотъ—можно наблюдать одно только дѣйствительное движеніе, тогда какъ простыя движенія, результатомъ которыхъ мы его себѣ представляемъ, можно опредѣлить только путемъ умозрѣнія. Такъ, напримѣръ, въ случаѣ наклоннаго паденія тяжелыхъ тѣлъ на поверхности земли извѣстны оба простыя движенія, которыя совершало бы тѣло при отдѣльномъ дѣйствіи каждой изъ приложенныхъ къ нему силъ, — т. е. извѣстны направленіе и скорость равномѣрнаго движенія, которое произошло бы отъ одного толчка, и законъ ускоренія перемѣннаго вертикальнаго движенія, которое явилось бы результатомъ одной только тяжести; поэтому и ставится вопросъ—найти различныя обстоятельства сложнаго движенія, вызваннаго совмѣстнымъ дѣйствіемъ этихъ двухъ силъ, т. е. опредѣлить траекторію, описываемую движущимся тѣломъ, направленіе и пріобрѣтенную имъ скорость въ каждый моментъ движенія, время необходимое для достиженія извѣстнаго положенія и т. д.; для большей общности, можно присоединить къ двумъ даннымъ силамъ и сопротивленіе окружающей среды, если только законъ его также извѣстенъ.

Небесная механика представляетъ главный примѣръ обратной задачи,—опредѣлить силы, вызывающія движеніе планетъ вокругъ солнца и спутниковъ вокругъ планетъ.

Тутъ непосредственно извѣстно только сложное движеніе, и по обстоятельствамъ, характеризующимъ это движеніе,—а они въ краткой формѣ выражены законами Кеплера, — надо найти элементарныя силы, которыя слѣдуетъ считать приложенными къ небеснымъ тѣламъ для того, чтобы сообщить имъ дѣйствительныя движенія. Если эти силы опредѣлены, то геометры съ пользой могутъ разсмотрѣть вопросъ съ обратной точки зрѣнія, что сначала было бы невозможно.

Итакъ, изложивъ ясно истинное общее назначеніе раціональной механики, разсмотримъ теперь основные принципы, на которыхъ она покоится. Сначала изслѣдуемъ чрезвычайно важный философскій пріемъ, опредѣляющій точку зрѣнія, съ которой должны быть разсматриваемы тѣла въ механикѣ. Этотъ вопросъ тѣмъ болѣе заслуживаетъ нашего вниманія, что обыкновенно онъ все еще окутывается густымъ туманомъ метафизики, благодаря которому истинная природа его понимается неправильно.

Было бы совершенно невозможно установить какое бы то ни было общее положеніе относительно абстрактныхъ законовъ равновѣсія или движенія, если бы мы не смотрѣли на тѣла какъ на абсолютно *инертныя*, т. е. какъ на неспособныя самовольно измѣнять дѣйствіе силъ, къ нимъ приложенныхъ. Но обычный способъ выраженія этого основнаго понятія мнѣ кажется совершенно неправильнымъ. Прежде всего, указанное абстрактное понятіе, которое является только логическимъ пріемомъ, изобрѣтеннымъ человѣческимъ умомъ для облегченія построенія раціональной механики или, скорѣе, для самаго созданія ея, очень часто смѣшивается съ тѣмъ, что называется,—но очень неточно,— *закономъ инерціи*; на послѣдній же нужно смотрѣть,—мы увидимъ это ниже, — какъ на общій результатъ наблюденія. Далѣе, характеръ этого понятія обыкновенно настолько неопредѣленъ, что совершенно неизвѣстно въ точности, представляется ли подобное пассивное состояніе тѣлъ чисто гипотетическимъ, или оно имѣетъ реальность явленія природы. Наконецъ, такая неопредѣленность часто приводитъ къ тому, что нашъ умъ вынужденъ невольно смотрѣть на общіе законы раціональной механики какъ на законы, примѣнимые, по самой природѣ своей, къ такъ называемымъ неорганическимъ тѣламъ, тогда какъ они, напротивъ, такъ же хорошо оправдываются и на тѣлахъ органическихъ, хотя въ этомъ случаѣ ихъ точное примѣненіе встрѣчаетъ гораздо болѣе затрудненій. Весьма важно провѣрить съ указанныхъ различныхъ точекъ зрѣнія общепринятыя понятія.

Прежде всего мы должны ясно установить, что указанное пассивное состояніе тѣлъ есть чистая абстракція, прямо противоположная ихъ дѣйствительному состоянію.

Въ первоначальной системѣ философіи, принятой человѣческимъ разумомъ, признавалось, что матерія дѣйствительно по самой природѣ своей существенно инертна или пассивна, и что всѣ ея дѣйствія проистекаютъ извнѣ, подъ вліяніемъ извѣстныхъ сверхъестественныхъ существъ или извѣстныхъ метафизическихъ сущностей. Но съ тѣхъ поръ какъ начала распространяться положительная философія, и человѣческій разумъ ограничился изученіемъ истиннаго состоянія тѣлъ, не касаясь первоначальныхъ и основныхъ *причинъ*, съ тѣхъ поръ для всякаго наблюдателя стало ясно, что различныя тѣла природы проявляютъ передъ нами болѣе или менѣе обширную самопроизвольную дѣятельность. Въ этомъ отношеніи между тѣлами неорганическими и тѣми, которыя мы называемъ преимущественно *одушевленными*, есть только простое различіе степеней. Прежде всего успѣхи естественной философіи вполнѣ показали,—какъ мы установимъ ниже, — что не существуетъ особаго рода живой матеріи въ собственномъ смыслѣ, такъ какъ въ тѣлахъ одушевленныхъ найдены элементы совершенно тождественные съ тѣми, изъ которыхъ состоятъ тѣла неодушевленныя. Далѣе, въ послѣднихъ тѣлахъ легко подмѣтить самостоятельную дѣятельность, совершенно аналогичную съ дѣятельностью живыхъ тѣлъ, но только менѣе разнообразную. Если бы даже всѣ матеріальныя молекулы не имѣли другихъ свойствъ, кромѣ тяжести, то и этого было бы достаточно, чтобы воспрепятствовать физику смотрѣть на нихъ, какъ на тѣла пассивныя по существу. Было бы безполезно стараться представить тѣла вполнѣ инертными и при проявленіи дѣйствія силы тяжести, утверждая, что при паденіи они только повинуются притяженію земного шара. Если бы такое разсужденіе и было вполнѣ справедливо, то оно очевидно, только перемѣстило бы трудность вопроса, такъ какъ способность самостоятельныхъ дѣйствій, которую мы отняли бы у отдѣльныхъ частицъ, была бы перенесена на всю массу земли. Кромѣ того, ясно, что при своемъ паденіи къ центру земли тяжелое тѣло точно такъ же активно, какъ и самая земля, ибо доказано, что каждая частица тѣла притягиваетъ равную ей частицу земли такъ же, какъ сама притягивается ею, хотя, въ виду громаднаго неравенства массъ, только послѣднее притяженіе производитъ замѣтное дѣйствіе. Наконецъ, въ цѣлой массѣ другихъ явленій совершенно общаго характера, тепловыхъ, электрическихъ или химическихъ, матерія обнаруживаетъ передъ нами, очевидно, весьма разнообразную и самостоятельную способность дѣйствія, и мы не можемъ представить себѣ матеріи, совершенно лишенной этой способности.

Въ этомъ отношеніи живыя тѣла представляютъ собою въ дѣйствительности только ту особенность, что они обнаруживаютъ, кромѣ вышеприведенныхъ видовъ самостоятельныхъ дѣйствій, еще нѣкоторыя другія, свойственная имъ однимъ; впрочемъ, физіологи все болѣе и болѣе стремятся къ тому, чтобы и ихъ разсматривать, какъ простыя видоизмѣненія предъидущихъ. Какъ бы то ни было, неоспоримо, что то чисто пассивное состояніе, которое приписывается тѣламъ въ раціональной механикѣ, представляетъ собою съ точки зрѣнія физики несомнѣнный абсурдъ.

Разберемъ теперь, какимъ образомъ, не создавая новыхъ затрудненій, можно было ввести подобное предположеніе при установленіи отвлеченныхъ законовъ равновѣсія и движенія, и затѣмъ съ полнымъ удобствомъ примѣнять эти законы къ дѣйствительнымъ тѣламъ.

Для этого достаточно обратить вниманіе на приведенное выше важное предварительное замѣчаніе, что въ раціональной механикѣ движенія разсматриваются просто сами по себѣ, безъ всякаго отношенія къ способу ихъ происхожденія. Отсюда, очевидно, вытекаетъ, — если слѣдовать общепринятой терминологіи, — возможность замѣнять по желанію всякую силу другой силой какой угодно природы, лишь бы только она могла сообщить тѣлу совершенно то же самое движеніе. На основаніи этого очевиднаго соображенія понятно, что можно отвлечься отъ различныхъ силъ, присущихъ въ дѣйствительности самимъ тѣламъ, и считать, что они находятся подъ дѣйствіемъ только внѣшнихъ силъ, — такъ какъ вмѣсто внутреннихъ силъ можно подставить внѣшнія, механически равныя имъ. Такъ, напримѣръ, хотя всѣ тѣла по необходимости имѣютъ вѣсъ, и мы не можемъ даже и представить себѣ въ дѣйствительности тѣла, не имѣющаго его, геометры изучаютъ въ отвлеченной механикѣ тѣла, какъ бы лишенныя предварительно этого свойства; послѣднее неявно включается въ число внѣшнихъ силъ, если разсматривается, какъ и слѣдуетъ, совершенно общая система силъ. Движется ли тѣло при паденіи подъ вліяніемъ внутренняго притяженія, или оно повинуется простому внѣшнему толчку, это безразлично для раціональной механики, если дѣйствительныя движенія были вполнѣ тождественны и можно поэтому отдать предпочтеніе послѣдней точкѣ зрѣнія. То же самое по необходимости должно имѣть мѣсто и для всякаго другого естественнаго свойства тѣлъ, и всегда можно замѣнить его предварительнымъ внѣшнимъ дѣйствіемъ, избраннымъ такъ, чтобы вызвать то же самое движеніе. Благодаря указанному обстоятельству и можно представлять себѣ всякое тѣло вполнѣ пассивнымъ; только по мѣрѣ того, какъ наблюденіе и опытъ укажутъ съ большею точностью законы этихъ внутреннихъ силъ, необходимо будетъ всякій разъ измѣнять соотвѣтствующимъ образомъ систему внѣшнихъ силъ, которая, по нашему предположенію, ихъ замѣняетъ, — а это часто будетъ приводить къ очень большимъ усложненіямъ. Напримѣръ, такъ какъ наблюденіе показало, что вертикальное движеніе тѣла вслѣдствіе его тяжести неравномѣрно, и непрерывно ускоряется, то это движеніе нельзя вовсе приравнять движенію, которое сообщило бы тѣлу одинъ ударъ, дѣйствіе котораго болѣе не возобновлялось бы, такъ какъ результатомъ удара являлась бы постоянная скорость. Необходимо, слѣдовательно, принять, что тѣло получало послѣдовательно, черезъ безконечно малые промежутки времени, безконечный рядъ безконечно малыхъ ударовъ, такъ что скорость, произведенная каждымъ изъ нихъ, будетъ непрерывно складываться съ скоростью, соотвѣтствующей совокупности предшествующихъ ударовъ, и полученное движеніе будетъ неопредѣленно мѣняться. Если опытъ показываетъ, что ускореніе движенія происходитъ равномѣрно, то должно предположить, что всѣ эти толчки постоянно равны между собою: во всякомъ другомъ случаѣ надо будетъ предположить между ними, какъ по отношенію къ направленію, такъ и по отношенію къ интенсивности соотношеніе, вполнѣ соотвѣтствующее дѣйствительному закону измѣненія движенія; ясно, что при такихъ условіяхъ подобная замѣна силъ будетъ всегда возможна.

Было бы безполезно останавливаться долго на доказательствахъ неизбѣжности предположенія, что тѣла находятся въ указанномъ совершенно пассивномъ состояніи, вслѣдствіе чего достаточно разсматривать только приложенныя къ нимъ внѣшнія силы, чтобы установить абстрактные законы равновѣсія или движенія. Понятно, что если бы съ самаго начала приходилось принимать во вниманіе всякое измѣненіе, которое тѣло можетъ произвести, вслѣдствіе присущихъ ему естественныхъ свойствъ, въ дѣйствіи на него каждой изъ внѣшнихъ силъ, то невозможно было бы установить въ раціональной механикѣ ни одного общаго положенія,—тѣмъ болѣе, что подобное видоизмѣненіе въ большинствѣ случаевъ далеко не извѣстно точно. Слѣдовательно, только вполнѣ отвлекаясь отъ него въ началѣ и принимая во вниманіе лишь взаимодѣйствіе силъ другъ на друга, мы получаемъ возможность основать абстрактную механику, и потомъ ужъ отъ нея перейти къ механикѣ конкретной, возстановляя естественныя активныя свойства тѣлъ, первоначально исключенныя изъ разсмотрѣнія. Это возстановленіе и на самомъ дѣлѣ составляетъ основное затрудненіе, испытываемое при переходѣ отъ абстрактнаго къ конкретному въ механикѣ,—затрудненіе, которое особенно ограничиваетъ въ дѣйствительности главныя примѣненія этой науки, тогда какъ теоретическая ея область сама по себѣ по необходимости безконечна. Чтобы дать представленіе о значеніи этого основнаго препятствія, можно сказать, что при современномъ состояніи математики только одно естественное и общее свойство тѣлъ мы безпрепятственно можемъ принимать во вниманіе,—это тяготѣніе, какъ земное, такъ и всеобщее; но и въ этомъ послѣднемъ случаѣ надо еще предположить, что форма тѣлъ достаточна проста.

Если же указанное свойство соединяется еще съ какими нибудь другими физическими обстоятельствами,—какъ то съ сопротивленіемъ среды, треніемъ и т. п.,—если даже предположить только, что тѣла находятся въ жидкомъ состояніи, то вліяніе этихъ условій на механическія явленія до сихъ поръ оцѣнивается еще крайне несовершеннымъ образомъ. Тѣмъ болѣе невозможно принимать въ разсчетъ электрическія и химическія свойства тѣла, и еще болѣе—свойства физіологическія. Поэтому наиболѣе важныя приложенія раціональной механики ограничены до сихъ поръ на самомъ дѣлѣ одними небесными явленіями, и то лишь явленіями нашей солнечной системы, гдѣ достаточно принять во вниманіе одно только общее притяженіе, законъ котораго простъ и хорошо опредѣленъ; тѣмъ не менѣе и этотъ законъ представляетъ трудности, которыхъ до сихъ поръ не умѣютъ преодолѣть вполнѣ, если только пожелаютъ точно оцѣнить всѣ второстепенныя дѣйствія, могущія оказать замѣтное вліяніе; отсюда видно, до какой степени должны усложняться вопросы при переходѣ къ земной механикѣ, большая часть явленій которой, даже и самыхъ простыхъ, вѣроятно, никогда не поддастся, вслѣдствіе слабости нашихъ дѣйствительныхъ средствъ, чисто раціональному и, несмотря на это, точному изслѣдованію на основаніи законовъ абстрактной механики, хотя знаніе этихъ законовъ, — очевидно, необходимое, — часто можетъ привести къ важнымъ *указаніямъ*.

Выяснивъ истинную природу основнаго взгляда на состояніе тѣлъ, которое мы имъ должны приписывать въ раціональной механикѣ, намъ остается еще разсмотрѣть общіе факты или *физическіе законы движенія*, имѣющіе послужить реальнымъ основаніемъ теорій, составляющихъ эту науку. Это важное объясненіе тѣмъ болѣе необходимо, что, — какъ я уже указывалъ выше—съ тѣхъ поръ какъ геометры уклонились съ пути, которому слѣдовалъ Ньютонъ, истинный характеръ этихъ законовъ совершенно упущенъ изъ виду и обычный взглядъ на нихъ до сихъ поръ еще остается по существу метафизическимъ.

Основные законы движенія могутъ быть сведены, какъ мнѣ кажется, къ тремъ положеніямъ, на которыя нужно смотрѣть просто какъ на результаты наблюденія; было бы совершеннымъ абсурдомъ стараться установить ихъ реальность a priori, — хотя это часто пытались дѣлать.

Первый законъ очень неудачно называется *закономъ инерціи*. Онъ былъ открытъ Кеплеромъ. Собственно говоря, законъ этотъ заключается въ томъ, что всякое движеніе, по самой природѣ своей, прямолинейно и равномѣрно, — т. е., что всякое тѣло, которое подверглось мгновенному дѣйствію какой нибудь силы, движется непрерывно по прямой линіи съ неизмѣнною скоростью. Вліяніе духа метафизики особенно ясно обнаруживается въ обычномъ способѣ выраженія этого закона. Вмѣсто того, чтобы ограничиться указаніемъ на него, какъ на результатъ наблюденія, пытались доказать его абстрактно, примѣняя принципъ достаточнаго основанія, который самъ совершенно неустойчивъ. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы объяснить, напримѣръ, необходимость прямолинейнаго движенія, говорили, что тѣло должно двигаться по прямой линіи потому, что нѣтъ никакой причины, по которой оно уклонилось бы отъ своего первоначальнаго направленія скорѣе въ одну сторону, чѣмъ въ другую. Легко показать совершенную несостоятельность и даже полную недостаточность такой аргументаціи. Прежде всего, какъ можемъ мы удостовѣриться, что *нѣтъ основанія* для того, чтобы тѣло уклонилось съ своего пути? Что можемъ мы знать относительно этого предмета, если не прибѣгнемъ къ опыту? Не должны ли быть совершенно и по необходимости исключены изъ положительной философіи умозаключенія *a priori*, основанныя на *природѣ* вещей?

Кромѣ того, указанный принципъ, даже если его принять, допускаетъ только неясное и произвольное примѣненіе. Ибо понятно, что въ самомъ началѣ движенія, — т. е. въ тотъ самый моментъ, когда этотъ аргументъ долженъ быть примѣненъ, — траекторія тѣла вовсе еще не имѣетъ опредѣленнаго геометрическаго характера, и только послѣ того, какъ оно прошло извѣстное разстояніе, можно опредѣлить, какую линію оно описываетъ. Изъ соображеній геометрическихъ очевидно, что вмѣсто того, чтобы разсматривать начальное движеніе какъ прямолинейное, можно было бы безразлично считать его круговымъ, параболическимъ, или совершающимся по какой угодно другой линіи, касательной къ дѣйствительной траэкторіи; такимъ образомъ, примѣнивъ тотъ же самый аргументъ къ каждой изъ этихъ линій, — что было бы вполнѣ законно, — мы пришли бы къ совершенно неопредѣленному заключенію. Стоитъ немного вникнуть въ это разсужденіе, чтобы сейчасъ же признать, что оно, какъ и всѣ мнимыя метафизическія объясненія, сводится въ дѣйствительности къ повторенію въ отвлеченныхъ выраженіяхъ самаго факта и къ утвержденію, что всѣ тѣла имѣютъ естественное стремленіе двигаться прямолинейно,— а именно это положеніе и требовалось доказать. Ничтожность этихъ туманныхъ и произвольныхъ разсужденій сдѣлается совершенно очевидной, если замѣтить, что на основаніи подобнаго же рода аргументовъ философы древности,—и въ особенности Аристотель,—признавали, наоборотъ, за наиболѣе естественное движеніе для звѣздъ движеніе по окружности, какъ наиболѣе *совершенное*; такое положеніе тоже представляетъ собою ничто иное, какъ абстрактное выраженіе плохо понятаго явленія.

Я ограничился изложеніемъ критики обыкновенныхъ доказательствъ одной первой части закона инерціи. Но совершенно аналогичныя замѣчанія можно сдѣлать и по поводу второй части, относительно неизмѣняемости скорости; послѣднюю также считали возможнымъ доказывать отвлеченно, ограничиваясь утвержденіемъ, что нѣтъ никакого основанія, чтобы тѣло когда-нибудь стало двигаться медленнѣе или быстрѣе, чѣмъ въ началѣ движенія.

Не такими разсужденіями можно прочно установить столь важный законъ, представляющій одинъ изъ необходимыхъ основаній всей раціональной механики; онъ реаленъ лишь постольку, поскольку мы его признаемъ за результатъ наблюденія. Но съ этой точки зрѣнія справедливость его обнаруживается на самыхъ общихъ фактахъ. Мы постоянно имѣемъ случаи убѣждаться, что тѣло, подвергнутое дѣйствію одной только силы, движется всегда по прямой линіи; если тѣло отклоняется отъ нея, то мы легко можемъ установить, что это измѣненіе происходитъ отъ одновременнаго дѣйствія какой-нибудь другой, активной или пассивной, силы: наконецъ, самыя криволинейныя движенія ясно показываютъ,—черезъ посредство различныхъ явленій, связанныхъ съ такъ называемой *центробѣжной силой*,—что тѣла постоянно сохраняютъ свое естественное стремленіе двигаться по прямой линіи. Можно сказать, что нѣтъ въ природѣ ни одного явленія, которое не могло бы представить намъ наглядной провѣрки этого закона; на немъ отчасти основана вся экономія вселенной. То же самое можно сказать и о равномѣрности движенія. Всѣ факты доказываютъ намъ, что если первоначально сообщенное движеніе постепенно все замедляется и, наконецъ, прекращается совсѣмъ, то это происходитъ отъ сопротивленія, встрѣчаемаго тѣломъ непрерывно, безъ котораго—какъ заставляетъ насъ думать опытъ—скорость безконечно оставалась бы постоянной, такъ какъ мы видимъ, что продолжительность движенія замѣтно увеличивается по мѣрѣ того, какъ мы уменьшаемъ значеніе этихъ препятствій. Извѣстно, что простое качаніе маятника, отклоненнаго отъ вертикали, качаніе которое при обыкновенныхъ условіяхъ могло продолжаться едва нѣсколько минутъ, продолжалось болѣе тридцати часовъ, во время опытовъ Борда въ обсерваторіи Парижа для опредѣленія отношенія длины секунднаго маятника къ метру, когда треніе въ точкѣ привѣса было насколько возможно уменьшено и тѣло заставили качаться въ почти пустомъ пространствѣ.

Геометры—и весьма основательно—приводятъ еще, какъ явное доказательство естественнаго стремленія тѣлъ сохранять до безконечности пріобрѣтенную ими скорость, строгую неизмѣнность, столь ясно наблюдаемую въ небесныхъ движеніяхъ, которыя, происходя въ крайне разрѣженной средѣ, находятся въ самыхъ благопріятныхъ условіяхъ для наиболѣе совершеннаго наблюденія закона инерціи: какъ точно ни изучаютъ небесныя тѣла уже двадцать столѣтій, ихъ движеніе не представляетъ ни малѣйшаго извѣстнаго намъ измѣненія ни относительно продолжительности обращеній, ни относительно возмущеній; впрочемъ теченіе времени и усовершенствованіе нашихъ средствъ наблюденія, вѣроятно, должны открыть намъ впослѣдствіи кое-какія измѣненія, до сихъ поръ намъ неизвѣстныя.

Итакъ, на самопроизвольное стремленіе всѣхъ тѣлъ двигаться прямолинейно и съ равномѣрною скоростью слѣдуетъ смотрѣть какъ на великій законъ природы. Въ виду крайней неясности общихъ представленій, относящихся къ этому первому основному принципу, было бы, быть можетъ, полезно замѣтить именно здѣсь, что этотъ законъ природы точно также примѣнимъ къ живымъ тѣламъ, какъ и къ неодушевленнымъ, хотя часто считается, что онъ установленъ исключительно для послѣднихъ. Откуда ни происходилъ бы толчекъ, полученный живымъ тѣломъ, оно стремится, какъ и тѣло неодушевленное, сохранить направленіе своего движенія и пріобрѣтенную скорость: только оно можетъ развить въ самомъ себѣ силы, способныя измѣнить или уничтожить это движеніе, тогда какъ въ другихъ тѣлахъ эти измѣненія происходятъ исключительно подъ вліяніемъ внѣшнихъ факторовъ. Но даже и въ этомъ случаѣ мы можемъ получить прямое и субъективное доказательство всеобщности закона инерціи, наблюдая то очень замѣтное усиліе, которое мы должны сдѣлать, чтобы измѣнить направленіе или скорость нашего дѣйствительнаго движенія,—настолько замѣтное, что, если наше движеніе очень быстро, то для насъ невозможно измѣнить или остановить его въ тотъ именно моментъ, когда мы это пожелаемъ.

Вторымъ основнымъ закономъ движенія мы обязаны Ньютону. Законъ этотъ заключается въ принципѣ постояннаго и необходимаго равенства дѣйствія и противодѣйствія, — иначе говоря въ томъ, что всякій разъ, когда одно тѣло какимъ нибудь образомъ приводится въ движеніе другимъ, первое оказываетъ на него въ обратномъ направленіи такое дѣйствіе, что второе тѣло, если принять въ разсчетъ ихъ массы, теряетъ количество движенія, въ точности равное пріобрѣтенному первымъ. Нѣсколько разъ пытались вывести a priori и эту общую теорему естественной философіи,—но это для нея такъ же невыполнимо, какъ и для предыдущей; однако, указанная теорема была предметомъ софистическихъ умозаключеній въ гораздо меньшей степени и теперь уже почти всѣ геометры согласились смотрѣть на нее, слѣдуя взгляду Ньютона, какъ на простой результатъ наблюденія; это избавляетъ меня отъ разсужденій, подобныхъ приведеннымъ выше по поводу закона инерціи. Равенство взаимодѣйствія тѣлъ другъ на друга имѣетъ мѣсто во всѣхъ явленіяхъ природы, независимо отъ того, проявляется ли дѣйствіе въ толчкѣ, или въ притяженіи; было бы излишнимъ приводить здѣсь примѣры такого равенства Мы такъ часто имѣемъ случай устанавливать это взаимодѣйствіе въ нашихъ самыхъ обыденныхъ наблюденіяхъ, что не въ состояніи представить ни одного тѣла, дѣйствующаго на другое, не вызывая въ немъ противодѣйствія.

Я считаю нужнымъ по поводу этого второго закона движенія сдѣлать только одно замѣчаніе, которое мнѣ кажется важнымъ, и которое, впрочемъ, будетъ развито соотвѣтствующимъ образомъ въ семнадцатой лекціи.

Оно заключается въ томъ, что извѣстный принципъ д'Аламбера, на основаніи котораго можно такъ удачно преобразовать всѣ вопросы динамики въ простыя задачи статики, есть на самомъ дѣлѣ не что иное, какъ полное обобщеніе закона Ньютона, распространеннаго на какую-угодно систему силъ.

Въ самомъ дѣлѣ, этотъ принципъ, очевидно, совпадаетъ съ принципомъ равенства дѣйствія и противодѣйствія, если разсматривать только двѣ силы. Указанное соотношеніе позволяетъ разсматривать отнынѣ общее предложеніе д'Аламбера какъ основанное на опытѣ, тогда какъ до сихъ поръ оно устанавливалось обыкновенно только на мало удовлетворительныхъ абстрактныхъ разсужденіяхъ.

Третій основный законъ движенія состоитъ, какъ мнѣ кажется, въ томъ, что я предлагаю назвать принципомъ *независимости* или *совмѣстимости движеній*, и что непосредственно приводитъ къ такъ называемому сложенію силъ. Истиннымъ творцомъ этого закона былъ, собственно говоря, Галилей, хотя онъ понималъ его вовсе не въ той именно формѣ, которую я считаю нужнымъ предпочесть теперь. Съ наиболѣе простой точки зрѣнія этотъ законъ сводится къ тому общему факту, что всякое движеніе, совершенно одинаковое для всѣхъ тѣлъ какой-нибудь системы, совсѣмъ не измѣняетъ частныхъ движеній этихъ различныхъ тѣлъ относительно другъ друга,—движеній, которыя совершаются неизмѣнно, какъ будто бы вся совокупность системы была неподвижна.

Чтобы выразить этотъ важный принципъ съ полною точностью, не требующей никакихъ другихъ оговорокъ, надо представить себѣ, что всѣ точки описываютъ одновременно параллельныя и равныя прямыя, и это общее движеніе, съ какой скоростью и въ какомъ направленіи оно бы ни совершалось, нисколько не повліяетъ на относительныя движенія.

Было бы тщетно пытаться установить a priori, съ помощью какого-нибудь умозрѣнія, этотъ великій основный законъ: подобная попытка такъ же мало выполнима, какъ и относительно двухъ предшествующихъ законовъ. Можно было бы, самое большее, замѣтить, что если тѣла системы находятся въ покоѣ относительно другъ друга, то указанное общее перемѣщеніе, не измѣняющее, очевидно, ни ихъ разстояній, ни ихъ относительныхъ положеній, не могло бы измѣнить и относительнаго ихъ покоя; но абсолютное и неизбѣжное невѣдѣніе наше относительно внутренней природы тѣлъ и явленій не позволяетъ намъ утверждать съ полною увѣренностью, на основаніи однихъ умозаключеній, что введеніе этого новаго обстоятельства не измѣнитъ неизвѣстнымъ намъ образомъ первоначальныхъ условій системы.

Недостаточность приведенной аргументаціи дѣлается особенно замѣтной, если попытаться примѣнить ее къ болѣе широкому и важному случаю,—къ случаю, когда различныя тѣла системы находятся въ движеніи относительно другъ друга. Стараясь насколько возможно отвлечься отъ столь общеизвѣстныхъ и разнообразныхъ наблюденій, которыя заставляютъ насъ признать физическую точность разсматриваемаго принципа, легко показать, что никакое теоретическое разсужденіе не даетъ намъ права заключить a priori, что общее движеніе не вызоветъ никакихъ измѣненій въ частныхъ движеніяхъ.

Это замѣчаніе настолько вѣрно, что, когда Галилей въ первый разъ изложилъ указанный великій законъ природы, со всѣхъ сторонъ поднялось множество возраженій, имѣвшихъ цѣлью доказать a priori теоретическую невозможность подобнаго положенія; оно было единогласно признано только послѣ того, когда логическая точка зрѣнія была оставлена и замѣнена точкою зрѣнія экспериментальною.

Итакъ, этотъ законъ дѣйствительно можетъ быть прочно установленъ только какъ общій результатъ наблюденія и опыта. Съ этой же точки зрѣнія ни одно положеніе естественной философіи не основывается на столь многочисленныхъ, простыхъ, разнообразныхъ и легко провѣряемыхъ наблюденіяхъ, какъ указанный законъ.

Въ дѣйствительности не совершается ни одного динамическаго явленія, которое не могло бы представить собою яснаго доказательства этого закона; да и вся экономія вселенной была бы совершенно разстроена, если предположить, что его болѣе не существуетъ.

Такъ, напримѣръ, въ общемъ движеніи корабля, какъ бы быстро и по какому направленію оно ни совершалось, относительныя перемѣщенія происходятъ неизмѣнно, — исключая тѣхъ, которыя вызываются килевою и боковою качкой,—какъ будто бы корабль былъ неподвиженъ, и для наблюдателя, находящагося внѣ движенія, эти относительныя перемѣщенія складываются съ движеніемъ всего корабля. Точно также, мы постоянно видимъ, какъ общія перемѣщенія химическихъ печей или живыхъ тѣлъ нисколько не вліяютъ на происходящія въ нихъ внутреннія движенія. Чтобы привести наиболѣе важный примѣръ, обратимъ особенное вниманіе на тотъ фактъ, что движеніе земного шара нисколько не нарушаетъ механическихъ явленій, происходящихъ на его поверхности или въ его нѣдрахъ. Извѣстно, что незнаніе этого третьяго закона движенія и было главнымъ препятствіемъ научнаго характера, столь долгое время не допускавшимъ установленія теоріи Коперника; указанное обстоятельство представляло, дѣйствительно, непреодолимыя возраженія противъ нея, и до открытія Галилея приверженцы Коперника пытались возразить на нихъ только съ помощью совершенно пустыхъ метафизическихъ хитросплетеній. Но, съ тѣхъ поръ какъ движеніе земли было признано вполнѣ, геометры стали указывать на него,—и вполнѣ правильно, — какъ на фактъ, представляющій существенное подтвержденіе справедливости указаннаго закона. Лапласъ высказалъ по этому предмету очень остроумное соображеніе косвеннаго характера, которое я считаю полезнымъ привести здѣсь, такъ какъ оно открываетъ передъ нами провѣрку принципа независимости движеній путемъ постояннаго и весьма нагляднаго опыта. Это соображеніе состоитъ въ томъ, что если бы общее движеніе земли могло какимъ-нибудь образомъ измѣнять частныя движенія, происходящія на ея поверхности, то эти измѣненія, очевидно, не были бы одинаковы для движеній всѣхъ направленій, — эти движенія конечно подверглись бы различнымъ видоизмѣненіямъ въ зависимости отъ величины угла, образуемаго направленіемъ частныхъ движеній съ направленіемъ движенія земного шара. Такъ, напримѣръ, колебаніе маятника должно было бы представлять весьма замѣтное для насъ различіе въ зависимости отъ азимута вертикальной плоскости, въ которой происходитъ качаніе; этотъ азимутъ сообщалъ бы колебаніямъ то одинаковое направленіе съ движеніемъ земного шара, то направленіе отличное отъ него на большую или меньшую величину; между тѣмъ опытъ не обнаружилъ передъ нами ни малѣйшаго измѣненія въ этомъ отношеніи,—даже при изслѣдованіи явленія съ наибольшею точностью, какую допускаетъ современное состояніе нашихъ методовъ наблюденія.

Чтобы предупредить всякое неточное толкованіе и неправильное примѣненіе третьяго закона движенія, важно замѣтить, что, по самой природѣ своей, онъ относится только къ поступательнымъ движеніямъ, и что его ни въ какомъ случаѣ нельзя распространять на вращательныя движенія.

Поступательныя движенія, очевидно, единственныя, которыя могутъ быть строго одинаковы, какъ по скорости, такъ и по направленію для различныхъ частей системы. Это строгое равенство никогда не могло бы имѣть мѣста по отношенію къ вращательному движенію, ибо оно необходимо должно быть неодинаково для различныхъ частей системы въ зависимости отъ большаго или меньшаго разстоянія ихъ отъ центра вращенія. Вотъ почему всякое вращательное движеніе постоянно стремится измѣнить состояніе системы,—и измѣняетъ его на самомъ дѣлѣ, если условія связи различныхъ частей не оказываютъ достаточнаго сопротивленія. Такъ, напримѣръ, не общее поступательное движеніе корабля нарушаетъ частныя движенія; ихъ измѣненія происходятъ исключительно подъ вліяніемъ второстепенныхъ движеній,—боковой и килевой качки, которыя представляютъ собою движенія вращательныя. Если часы просто перенести въ какомъ нибудь направленіи съ какою угодно скоростью, но безъ малѣйшаго поворота, — они отъ этого никогда не испортятся; тогда какъ уже незначительнаго вращательнаго движенія достаточно, чтобы скоро испортить ихъ ходъ. Разница между вліяніемъ вращательнаго и поступательнаго движенія дѣлается особенно чувствительной, если повторить опытъ надъ живымъ тѣломъ.

Наконецъ, благодаря этому различію мы не имѣли возможности доказать дѣйствительность поступательнаго движенія земного шара при помощи однихъ только земныхъ явленій и его удалось обнаружить только благодаря наблюденіямъ надъ небесными тѣлами. Что же касается вращенія земли, то оно, благодаря тому, что величины центробѣжной силы въ различныхъ точкахъ земного шара не одинаковы, производятъ на его поверхности хотя и незначительныя, но весьма замѣтныя явленія, анализа которыхъ вполнѣ достаточно, чтобы убѣдиться въ существованіи этого вращенія независимо отъ всякихъ астрономическихъ наблюденій.

Если принципъ независимости или совмѣстимости движеній установленъ, то легко понять что онъ приводитъ прямо къ извѣстному элементарному правилу, обыкновенно прилагаемому къ такъ называемому *сложенію силъ*; послѣднее представляетъ собою на самомъ дѣлѣ только другой способъ разсмотрѣнія и выраженія третьяго закона движенія. Въ самомъ дѣлѣ, теорема о параллелограммѣ силъ, разсматриваемая съ точки зрѣнія наиболѣе положительной, заключается, собственно въ томъ, что если тѣлу сообщены одновременно два равномѣрныхъ движенія въ различныхъ направленіяхъ, то по совокупности этихъ движеній оно опишетъ діагональ параллелограмма, стороны котораго оно прошло бы въ то же самое время, если бы каждое движеніе было ему сообщено въ отдѣльности. Развѣ это правило не представляетъ прямого примѣненія принципа независимости движеній, на основаніи котораго частное движеніе тѣла по.

направленію извѣстной прямой нисколько не нарушается общимъ движеніемъ, перемѣщающимъ всю эту прямую параллельно самой себѣ вдоль нѣкоторой другой прямой? Послѣднее соображеніе тотчасъ приводитъ къ геометрическому построенію, выражаемому правиломъ параллелограмма силъ. Мнѣ казалось, что въ такомъ видѣ,—прямо какъ законъ природы или, по крайней мѣрѣ, какъ непосредственное проявленіе одного изъ наиболѣе великихъ ея законовъ, — и слѣдуетъ представлять эту основную теорему раціональной механики.

Таковъ, по моему мнѣнію, единственный истинно философскій способъ положительнаго доказательства этого важнаго предложенія, который окончательно разгонялъ бы всѣ метафизическія туманности, до сихъ поръ окружающія указанный законъ, и совершенно оградилъ бы его отъ дѣйствительныхъ возраженій. Всѣ мнимыя аналитическія доказательства, построенныя на чисто абстрактныхъ умозаключеніяхъ, которыя приводились одно за другимъ,—помимо того, что они обыкновенно основываются на неправильномъ толкованіи и невѣрномъ примѣненіи аналитическаго принципа однородности, — предполагаютъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, что это предположеніе само по себѣ *очевидно* въ извѣстныхъ частныхъ случаяхъ,—напримѣръ, когда двѣ силы дѣйствуютъ по одной и той же прямой; но такая очевидность можетъ явиться только какъ результатъ наблюденія надъ закономъ природы о независимости движеній; необходимость послѣдняго, такимъ образомъ, доказывается неопровержимо. Было бы странно въ самомъ дѣлѣ,—для всякаго, кто взглянулъ бы на этотъ вопросъ прямо съ философской точки зрѣнія, — что человѣческій духъ, при помощи простыхъ логическихъ сопоставленій, могъ такимъ образомъ открыть дѣйствительный законъ природы, вовсе не обращаясь къ внѣшнему міру.

Эта мысль представляетъ крайнюю важность для выясненія возрѣній на раціональную механику; въ значительной степени уклоняясь отъ пути, которому обыкновенно слѣдуютъ въ настоящее время, я считаю необходимымъ представить тоже замѣчаніе еще съ одной точки зрѣнія, чтобы окончательно разъяснить его и показать, что несмотря на всѣ усилія геометровъ избавиться въ этомъ отношеніи отъ пользованія результатами опыта, физическій законъ независимости движеній остается скрыто,—и это по единогласному ихъ признанію,—однимъ изъ существенныхъ основаній механики, хотя онъ и излагается ими въ различной формѣ и въ различныхъ мѣстахъ.

Достаточно для указанной цѣли признать, что всѣ геометры, вмѣсто того чтобы излагать этотъ законъ прямо въ введеніи въ механику, приводятъ его гораздо позже, при установленіи принципа пропорціональности скоростей силамъ—необходимаго основанія обыкновенной динамики.

Чтобы вѣрно понять истинный характеръ разсматриваемаго вопроса, надо замѣтить, что отношенія двухъ силъ могутъ быть опредѣлены двумя различными способами: статически и динамически. Въ самомъ дѣлѣ, мы не всегда судимъ объ отношеніи двухъ силъ по большей или меньшей интензивности движеній, которыя онѣ могутъ сообщить одному и тому же тѣлу. Мы часто оцѣниваемъ ихъ просто путемъ разсмотрѣнія ихъ взаимнаго равновѣсія, считая равными такія силы, которыя, приложенныя въ противоположныхъ направленіяхъ по одной и той же прямой, взаимно уничтожаются, и считая одну силу вдвое, втрое и т. д. больше другой, если она уравновѣшиваетъ двѣ, три и т. д. силы, равныя и прямо противоположныя второй. Этимъ новымъ способомъ измѣренія силъ на самомъ дѣлѣ мы пользуемся такъ же часто, какъ и первымъ.

При этихъ условіяхъ вопросъ по существу заключается въ томъ, чтобы опредѣлить, являются-ли оба средства постоянно и необходимо равнозначущими, т. е. слѣдуетъ-ли изъ простого статическаго опредѣленія взаимнаго отношенія силъ, что онѣ, съ динамической точки зрѣнія, сообщатъ одной и той-же массѣ скорости, точно имъ пропорціональныя. Это соотношеніе вовсе не очевидно само по себѣ; въ лучшемъ случаѣ a priori можно будетъ сказать, что бо̀льшія силы необходимо должны придавать бо̀льшія скорости. Но только опытъ можетъ рѣшить, будетъ-ли скорость пропорціональна первой степени силы или какой-либо другой возрастающей ея функціи.

По мнѣнію всѣхъ геометровъ и въ частности Лапласа, для нахожденія истиннаго закона природы въ этомъ именно случаѣ и необходимо изслѣдовать общій фактъ независимости или совмѣстимости движеній.

Легко убѣдиться, слѣдуя разсужденіямъ Лапласа, что теорія пропорціональности скоростей силамъ является непосредственнымъ и неизбѣжнымъ слѣдствіемъ этого общаго факта, если примѣнить его къ двумъ силамъ, дѣйствующимъ въ одинаковомъ направленіи.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть тѣло подъ вліяніемъ нѣкоторой силы прошло опредѣленное разстояніе по нѣкоторой прямой; приложимъ къ этому тѣлу вторую силу, равную первой и дѣйствующую по тому же направленію: тогда, по закону независимости движеній, эта сила только перенесетъ весь отрѣзокъ прямой, по которой двигалось тѣло, на такое-же разстояніе въ то же время, не измѣняя движенія самаго тѣла по этой прямой. Поэтому, благодаря сложенію этихъ движеній, данное тѣло дѣйствительно пройдетъ разстояніе вдвое бо̀льшее, чѣмъ разстояніе, соотвѣтствовавшее первоначальной силѣ. Таковъ единственный способъ, при помощи котораго можно установить общую пропорціональность скоростей силамъ: эту пропорціональность я не могу разсматривать, какъ четвертый основный законъ движенія, такъ какъ она входитъ въ третій законъ.

Очевидно, поэтому, что послѣ того, какъ общій законъ независимости движеній былъ признанъ въ механикѣ излишнимъ для установленія основного правила сложенія силъ, это послѣднее философское предложеніе пришлось по необходимости разсматривать вновь, какъ одну изъ необходимыхъ основъ науки, какъ только потребовалось доказать не менѣе важный законъ о пропорціональности силъ скоростямъ; это обстоятельство устраняетъ послѣднія сомнѣнія въ необходимости закона. Итакъ, къ какому-же дѣйствительному результату привели всѣ усилія ума, направленныя на то, чтобы устранить прямое введеніе въ основы механики этого важнаго факта? Только къ тому, что онъ какъ будто устраненъ въ статикѣ и принимается во вниманіе только при переходѣ къ динамикѣ. Все, стало быть, сводится въ дѣйствительности къ простой перестановкѣ. Ясно, что такой незначительный результатъ совершенно не соотвѣтствуетъ тѣмъ хитросплетеніямъ косвенныхъ методовъ, при помощи которыхъ онъ былъ достигнутъ, даже въ томъ случаѣ, если бы эти методы были логически-безупречны,—а намъ удалось ясно доказать противное.

Поэтому во всѣхъ отношеніяхъ будетъ лучше, если мы открыто и прямо будемъ подчиняться философскимъ требованіямъ науки, и,—

разъ она не можетъ обойтись безъ основанія, почерпнутаго изъ опыта,— ясно признаемъ это основаніе съ самаго начала. Никакимъ другимъ способомъ нельзя сдѣлать науки совершенно положительной, такъ какъ, не имѣя подобныхъ основъ, она навсегда сохранитъ нѣсколько метафизическій характеръ.

Таковы, слѣдовательно, три физическіе закона движенія, служащіе достаточной опытной основой для раціональной механики и позволяющіе человѣческому уму, простыми логическими операціями, не прибѣгая болѣе къ наблюденію внѣшняго міра, прочно и систематически установить зданіе науки. Хотя эти три закона мнѣ кажутся вполнѣ достаточными, я a priori не вижу никакой причины, которая препятствовала бы увеличенію ихъ числа, если удалось-бы дѣйствительно установить, что они не являются совершенно полными. Такое увеличеніе числа основныхъ законовъ я считаю очень легкимъ препятствіемъ для раціональнаго усовершенствованія науки, такъ какъ число законовъ, очевидно, никогда не можетъ возрасти до большихъ размѣровъ; но я предпочелъ бы, вообще говоря, установить однимъ или двумя законами болѣе, если для того, чтобы избѣжать такого увеличенія, было бы необходимо прибѣгать къ слишкомъ отвлеченнымъ разсужденіямъ, которыя, по самой природѣ своей, измѣнили бы положительный характеръ науки. Но совокупность только что изложенныхъ трехъ законовъ вполнѣ удовлетворяетъ, на мой взглядъ, всѣмъ существеннымъ условіямъ, поставленнымъ въ дѣйствительности самой природой теоріи раціональной механики. Въ самомъ дѣлѣ, первый законъ, — законъ Кеплера, — вполнѣ опредѣляетъ результатъ дѣйствія одной силы, дѣйствующей мгновенно; второй,— законъ Ньютона,—устанавливаетъ основное правило, по которому передается движеніе при дѣйствіи однихъ тѣлъ на другія; наконецъ, третій законъ, — законъ Галилея,—приводитъ непосредственно къ общей теоремѣ относительно сложенія движеній. Поэтому понятно, что вся механика равномѣрныхъ движеній или мгновенныхъ силъ вполнѣ можетъ быть разсматриваема, какъ прямое слѣдствіе совмѣстнаго примѣненія этихъ трехъ законовъ, которые по самой природѣ своей весьма точны и тотчасъ же могутъ быть выражены при помощи легко получаемыхъ аналитическихъ уравненій. Что же касается наиболѣе обширной и важной части механики, которая и представляетъ существенныя трудности, — т. е. механики перемѣнныхъ движеній или непрерывныхъ силъ,—то легко показать въ общемъ видѣ возможность ея приведенія къ элементарной механикѣ, характеръ которой только что былъ указанъ, съ помощью метода безконечно-малыхъ, позволяющаго для каждаго безконечно-малаго промежутка времени подставлять на мѣсто перемѣннаго движенія движеніе равномѣрное, — откуда непосредственно получаются дифференціальныя уравненія, относящіяся къ послѣднему классу движеній.

Будетъ, безъ сомнѣнія, очень важно установить въ слѣдующихъ лекціяхъ прямо и точно общій способъ примѣненія метода безконечно-малыхъ для рѣшенія обѣихъ основныхъ задачъ раціональной механики и тщательно изучить главные результаты, полученные такимъ образомъ геометрами относительно абстрактныхъ законовъ равновѣсія и движенія. Но уже теперь ясно, что механика имѣетъ своимъ дѣйствительнымъ основаніемъ всѣ три физическихъ закона, установленные выше, и что съ этихъ поръ весь трудъ становится чисто теоретическимъ и заключается только въ пріемахъ пользованія указанными законами для рѣшенія различныхъ общихъ вопросовъ.

Однимъ словомъ, отдѣленіе части науки, по необходимости физической, отъ части чистологической можетъ быть, мнѣ кажется, выполнено совершенно точнымъ и опредѣленнымъ образомъ.

Чтобы закончить этотъ общій обзоръ философскаго характера раціональной механики, намъ остается только разсмотрѣть вкратцѣ основныя отдѣлы науки; вторичныя подраздѣленія должны быть сдѣланы въ слѣдующихъ лекціяхъ.

Первое и самое важное естественное подраздѣленіе механики заключается въ различеніи вопросовъ двухъ родовъ, — въ зависимости отъ того, предполагается ли найти условія равновѣсія, или изучить законы движенія: отсюда вытекаетъ дѣленіе механики на *статику* и *динамику*. Достаточно указать на такое дѣленіе, чтобы дать прямо понять его общую необходимость. Кромѣ дѣйствительнаго различія по существу между этими двумя основными классами задачъ, легко понять a priori, что изслѣдованіе вопросовъ статики, вообще говоря, по самой ихъ природѣ гораздо легче, чѣмъ изслѣдованіе вопросовъ динамики.

Это обстоятельство существеннымъ образомъ вытекаетъ изъ того, что въ вопросахъ перваго рода,—какъ справедливо замѣчено,—дѣлаютъ *отвлеченіе отъ времени*; иначе говоря, такъ какъ явленіе, подлежащее изученію, мгновенно, то нѣтъ надобности принимать во вниманіе измѣненія, которыя могутъ претерпѣвать силы системы въ различныя послѣдовательные моменты времени. Въ каждый же вопросъ динамики, напротивъ, надо вводить въ разсмотрѣніе указанное обстоятельство, составляющее новый основный элементъ ея, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, ея главную трудность.

Вообще говоря изъ этого глубокаго различія вытекаетъ, что вся статика, если ее разсматривать какъ частный случай динамики, соотвѣтствуетъ только самой простой ея части, заключающей теорію равномѣрныхъ движеній, что мы и покажемъ отдѣльно въ слѣдующей лекціи.

Важность изложеннаго дѣленія очень ясно подтверждается общей исторіей истиннаго развитія человѣческаго разума. Въ самомъ дѣлѣ, мы видимъ, что древніе обладали нѣкоторыми весьма существенными основными свѣдѣніями относительно равновѣсія какъ твердыхъ, такъ и жидкихъ тѣлъ; въ этомъ особенно легко убѣдиться изъ превосходныхъ изслѣдованій Архимеда, хотя онѣ были еще очень далеки отъ дѣйствительно полной раціональной статики. Наоборотъ, динамика, даже и самая элементарная, была имъ совершенно неизвѣстна; первыми шагами этой вполнѣ современной науки мы обязаны Галилею.

Наиболѣе важное подраздѣленіе, которое слѣдуетъ установить въ механикѣ послѣ этого основнаго дѣленія, заключается въ отдѣленіи какъ въ статикѣ, такъ и въ динамикѣ, изученія твердыхъ тѣлъ отъ изученія жидкихъ. Какъ бы существенно ни было это подраздѣленіе, я ставлю его, слѣдуя методу, установленнымъ Лагранжемъ, на второй планъ, подчиняя первому; признавать его за основное дѣленіе, какъ это еще дѣлается въ обыкновенныхъ курсахъ механики, значило бы, мнѣ кажется, преувеличивать его вліяніе. Въ самомъ дѣлѣ, существенные принципы статики или динамики необходимо должны быть одни и тѣ же какъ для жидкихъ, такъ и для твердыхъ тѣлъ; жидкія тѣла требуютъ дополненія къ условіямъ, характеризующимъ систему, еще одного условія, вызываемаго измѣняемостью формы, которая, вообще говоря, и опредѣляетъ собственно механическое состояніе жидкостей.

Но, хотя мы и помѣстили разсматриваемое подраздѣленіе на соотвѣтствующее ему мѣсто, легко понять a priori его крайнюю важность и, вообще, оцѣнить, насколько оно должно увеличить основную трудность вопросовъ какъ въ статикѣ, такъ, главнымъ образомъ, и въ динамикѣ: полная независимость частицъ, характеризующая жидкія тѣла, заставляетъ разсматривать каждую частицу отдѣльно и, слѣдовательно, изучать всегда, даже въ самомъ простомъ случаѣ, систему, состоящую изъ безконечнаго множества различныхъ силъ. Отсюда для статики вытекаетъ введеніе изслѣдованій новаго рода, — изслѣдованій фигуры системы въ состояніи равновѣсія; вопросъ этотъ, по самой природѣ своей, очень труденъ, и его общее рѣшеніе до сихъ поръ мало подвинулось впередъ, даже для одного случая всемірнаго тяготѣнія. Но трудность еще ощутительнѣе въ динамикѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, возникающая здѣсь необходимость точно разсматривать собственное движеніе каждой частицы въ отдѣльности для дѣйствительно полнаго изученія явленія, съ точки зрѣнія аналитической, вводитъ въ вопросъ въ общемъ видѣ неразрѣшимое до сихъ поръ осложненіе; пока его удалось преодолѣть для самаго простого случая жидкаго тѣла, двигающагося подъ дѣйствіемъ одной земной тяжести, и то только при помощи очень непрочныхъ гипотезъ, — какова гипотеза Даніила Бернулли о параллельности слоевъ, въ значительной степени искажающая природу явленій.

Вообще говоря, теперь становится понятной неизбѣжность гораздо бóльшей трудности гидростатики и, въ особенности, гидродинамики сравнительно съ статикой и динамикой въ собственномъ смыслѣ; послѣднія и въ самомъ дѣлѣ гораздо болѣе подвинулись впередъ.

Чтобы составить себѣ правильное общее представленіе объ этомъ основномъ различіи, слѣдуетъ добавить къ вышеизложенному, что опредѣленіе, при помощи котораго геометры въ раціональной механикѣ характеризуютъ различіе между твердыми и жидкими тѣлами, на самомъ дѣлѣ является относительно тѣхъ и другихъ тѣлъ лишь преувеличеннымъ и, слѣдовательно, не вполнѣ соотвѣтствующимъ дѣйствительности представленіемъ. Въ самомъ дѣлѣ, особенно по отношенію къ жидкимъ тѣламъ, ясно, что ихъ частицы въ дѣйствительности вовсе не находятся въ томъ состояніи строгой взаимной независимости, какое мы вынуждены предполагать въ механикѣ, подчиняя ихъ только требованію сохранять постоянный объемъ, если рѣчь идетъ о капельно-жидкомъ тѣлѣ, или, если имѣемъ дѣло съ газомъ, измѣнять объемъ, слѣдуя данной функціи давленія, — напримѣръ, обратно пропорціонально давленію, согласно съ закономъ Маріотта. Напротивъ, значительное число явленій природы обусловлено существеннымъ образомъ взаимнымъ сцѣпленіемъ частицъ жидкости; только связь между ними гораздо меньше, чѣмъ въ тѣлахъ твердыхъ.

Сцѣпленіе частицъ, которое исключается изъ разсмотрѣнія въ математическихъ жидкихъ тѣлахъ, и которое, какъ мнѣ кажется, почти невозможно принять надлежащимъ образомъ въ разсчетъ, влечетъ, какъ извѣстно, въ статикѣ, и, въ особенности, въ динамикѣ, весьма замѣтное различіе между дѣйствительными явленіями и явленіями, вытекающими изъ теоріи; напримѣръ, — истеченіе тяжелой жидкости изъ нѣкотораго опредѣленнаго отверстія, гдѣ наблюденіе относительно количества вытекшей въ данный промежутокъ времени жидкости замѣтно расходится съ теоріей.

Хотя математическое опредѣленіе твердаго тѣла гораздо точнѣе изображаетъ его дѣйствительное состояніе, однако во многихъ случаяхъ слѣдуетъ признать необходимость принимать въ разсчетъ и возможность взаимнаго отдѣленія частицъ — отдѣленія, которое всегда будетъ имѣть мѣсто, если силы, приложенныя къ твердому тѣлу, достаточно велики; въ раціональной механикѣ такую возможность совершенно не принимаютъ во вниманіе. Это особенно легко показать на теоріи излома твердыхъ тѣлъ, которая, будучи едва намѣчена Галилеемъ, Гюйгенсомъ и Лейбницемъ, въ настоящее время находится въ очень несовершенномъ и даже неопредѣленномъ состояніи, несмотря на труды многихъ другихъ геометровъ; тѣмъ не менѣе, она имѣла бы большое значеніе для выясненія многихъ вопросовъ земной, и преимущественно промышленной, механики.

Нужно, однако, замѣтить по этому поводу, что послѣднее несовершенство одновременно и гораздо менѣе ощутительно, и менѣе важно, чѣмъ только что указанное несовершенство механики жидкихъ тѣлъ: оно не можетъ нисколько повліять на рѣшеніе задачъ небесной механики, представляющихъ на самомъ дѣлѣ,—какъ мы не разъ имѣли случай указывать, — главное и, вѣроятно, единственное примѣненіе раціональной механики, которое можетъ когда-либо стать дѣйствительно полнымъ.

Наконецъ, мы должны указать, вообще говоря, еще на одинъ пробѣлъ въ современной механикѣ, — пробѣлъ, правда, второстепенный, но имѣющій нѣкоторое значеніе, — именно на теорію класса тѣлъ, находящихся въ среднемъ состояніи между твердымъ и строго жидкимъ, — тѣлъ, которыя можно было бы назвать полу-жидкими или полу-твердыми; таковы, напримѣръ, съ одной стороны, пески, съ другой—жидкія студенистыя тѣла. Были представлены кое-какія теоретическія соображенія объ этихъ тѣлахъ подъ названіемъ *несовершенныхъ жидкостей*, особенно относительно поверхности ихъ въ состояніи равновѣсія, но ихъ собственная теорія никогда не была дѣйствительно установлена въ общемъ и прямомъ видѣ.

Таковы главные общіе пункты, которые я счелъ нужнымъ намѣтить въ краткихъ чертахъ, чтобы читатель могъ оцѣнить философскій характеръ, отличающій раціональную механику въ полномъ ея объемѣ.

Теперь намъ предстоитъ выяснить, — разсматривая съ той же философской точки зрѣнія дѣйствительный составъ науки, — какимъ образомъ этотъ второй общій отдѣлъ конкретной математики, столь обширный, столь существенный и столь трудный, при помощи ряда великихъ трудовъ выдающихся геометровъ, могъ подняться до той высокой степени совершенства, котораго онъ достигъ въ наше время въ замѣчательномъ трактатѣ Лагранжа, гдѣ всѣ абстрактные вопросы, какіе только могутъ явиться въ механикѣ, приводятся, на основаніи одного единственнаго принципа, къ чисто-аналитическимъ изысканіямъ, какъ мы это видѣли уже для геометрическихъ задачъ. Это изслѣдованіе будетъ предметомъ трехъ слѣдующихъ лекцій; изъ нихъ первая будетъ посвящена статикѣ, вторая—динамикѣ, а третья—изслѣдованію общихъ теоремъ раціональной механики.

Шестнадцатая лекція.

Общій обзоръ статики.

Вся раціональная механика можетъ быть изложена по двумъ методамъ, которые различны по существу и неравны по совершенству: можно разсматривать статику или непосредственно, или какъ частный случай динамики.

По первому методу пытаются непосредственно открыть достаточно общій принципъ равновѣсія и примѣняютъ его затѣмъ для нахожденія условій равновѣсія какихъ угодно системъ возможныхъ силъ.

По второму методу, наоборотъ, сначала находятъ, каково будетъ движеніе, вызванное мгновеннымъ дѣйствіемъ данныхъ силъ, и изъ этого уже выводятъ, каковы должны быть соотношенія между силами, чтобы движеніе было равно нулю.

Такъ какъ статика, по необходимости, обладаетъ бо̀льшей простотой, чѣмъ динамика, то при самомъ появленіи раціональной механики могъ быть примѣненъ только первый методъ. Дѣйствительно, древніе знали только этотъ методъ; имъ были совершенно чужды какія бы то ни было, даже наиболѣе простыя, идеи динамики. Истинный основатель статики, Архимедъ, которому принадлежатъ всѣ существенныя понятія этой науки, извѣстныя древнему міру, началъ съ того, что установилъ условіе равновѣсія двухъ грузовъ, привѣшенныхъ къ концамъ прямолинейнаго рычага, — т. е. необходимость, чтобы вѣса этихъ грузовъ были обратно пропорціональны ихъ разстояніямъ отъ точки опоры рычага; затѣмъ онъ старался по возможности свести къ этому одному принципу изслѣдованіе соотношеній равновѣсія, свойственныхъ другимъ системамъ силъ. Точно также, въ статикѣ жидкихъ тѣлъ, онъ сначала устанавливаетъ свой знаменитый принципъ, что всякое тѣло, погруженное въ жидкость, теряетъ часть своего вѣса, равную вѣсу вытѣсненной жидкости, и затѣмъ для большого числа случаевъ выводитъ теорію устойчивости плавающихъ тѣлъ.

Но принципъ рычага самъ по себѣ не обладалъ достаточной общностью, чтобы его дѣйствительно можно было приложить къ опредѣленію условій равновѣсія всевозможныхъ системъ силъ. Какими остроумными соображеніями ни пытались расширить область его примѣненія, все таки къ нему удалось свести только системы, состоящія изъ параллельныхъ силъ. Что же касается силъ, направленія которыхъ пересѣкаются, то ихъ пытались сначала изслѣдовать аналогичнымъ путемъ, изобрѣтая новые прямые принципы равновѣсія, спеціально принаровленные къ этому болѣе общему случаю: изъ этихъ принциповъ слѣдуетъ прежде всего замѣтить удачную идею Стевена относительно равновѣсія системы двухъ грузовъ, расположенныхъ на двухъ наклонныхъ плоскостяхъ, прислоненыхъ другъ къ другу. Эта новая основная идея, быть можетъ, была-бы вполнѣ достаточной для пополненія пробѣла, оставленнаго въ статикѣ принципомъ Архимеда, такъ какъ Стевену удалось вывести изъ нея соотношенія равновѣсія между тремя силами, приложенными къ той-же точкѣ по крайней мѣрѣ для случая, когда двѣ изъ этихъ силъ перпендикулярны другъ къ другу; онъ даже замѣтилъ, что эти три силы относятся другъ къ другу, какъ стороны треугольника, углы котораго были-бы равны угламъ, образованнымъ данными тремя силами. Но, такъ какъ въ это же время Галилеемъ была создана динамика, то геометры отказались отъ прежняго прямого статическаго пути и предпочли при изысканіи условій равновѣсія примѣнять извѣстные уже законы сложенія силъ. При помощи этого послѣдняго метода Вариньонъ пришелъ къ истинной и общей теоріи равновѣсія системы силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, и вслѣдъ за нимъ д'Аламберъ установилъ, наконецъ, впервые уравненія равновѣсія любой системы силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ твердаго тѣла неизмѣнной формы. Этотъ методъ и до настоящаго времени примѣняется чаще всего.

Но на первый взглядъ методъ Д'Аламбера кажется мало раціональнымъ: такъ какъ динамика сложнѣе статики, то совершенно неудобно ставить статику въ зависимость отъ нея. Въ самомъ дѣлѣ, съ философской точки зрѣнія было бы лучше, наоборотъ, свести, если возможно, статику къ динамикѣ—что и было сдѣлано впослѣдствіи.

Тѣмъ не менѣе надо признать, что для разсмотрѣнія статики, какъ частнаго случая динамики, достаточно создать только самую элементарную часть послѣдней,—теорію равномѣрныхъ движеній, и вовсе нѣтъ надобности имѣть теорію перемѣнныхъ движеній. Весьма важно точно объяснить это основное различіе.

Для этого замѣтимъ прежде всего, что существуютъ, вообще говоря, силы двухъ родовъ: 1^0, силы, которыя я называю *мгновенными,*—какъ толчки, дѣйствующіе только при началѣ движенія и предоставляющія тѣло самому себѣ, лишь только оно пришло въ движеніи, 2^0, силы, которыя довольно неточно называютъ *ускорительными* и которыя я предпочитаю называть *непрерывными*, какъ напр., притяженія, дѣйствующія на тѣло непрерывно во все время его движенія. Это раздѣленіе равносильно дѣленію движеній на *равномѣрныя* и *перемѣнныя*: ясно, что въ силу перваго изъ трехъ основныхъ законовъ движенія, изложенныхъ въ предшествующей лекціи, всякая мгновенная сила необходимо должна вызвать равномѣрное движеніе, тогда какъ всякая непрерывная сила, напротивъ, должна по самой природѣ своей сообщить тѣлу различныя перемѣнныя движенія. При этихъ условіяхъ очень легко понять a priori,—какъ я уже не разъ указывалъ,—что часть динамики, относящаяся къ мгновеннымъ силамъ или равномѣрнымъ движеніямъ, должна быть, безъ всякаго сравненія, безконечно проще другой части, относящейся къ непрерывнымъ силамъ или къ перемѣннымъ движеніямъ; въ ней то, главнымъ образомъ, и заключается вся трудность динамики. Первая часть на столько проста, что ее, во всей совокупности, можно разсматривать какъ непосредственное слѣдствіе трехъ основныхъ законовъ движенія, что я и отмѣтилъ особенно въ концѣ предшествующей лекціи. Поэтому теперь легко понять, вообще говоря, что только эта первая часть динамики и нужна для представленія статики, какъ частнаго случая динамики.

Въ самомъ дѣлѣ, явленіе равновѣсія, законы котораго требуется найти, очевидно, представляетъ собою по самой природѣ своей явленіе мгновенное, которое должно изучать, не принимая во вниманія времени. Разсмотрѣніе времени вводится только при изслѣдованіяхъ такъ называемой *устойчивости* равновѣсія; но эти изслѣдованія, собственно говоря, уже не составляютъ части статики и входятъ, по существу, въ составъ динамики. Однимъ словомъ,—согласно уже приведенному обычному афоризму—въ статикѣ всегда *отвлекаются отъ времени.* Отсюда слѣдуетъ, что въ статикѣ на всѣ силы, подлежащія изслѣдованію, можно смотрѣть какъ на мгновенныя, причемъ теоріи не теряютъ своей необходимой общности.

Во всякое время своего дѣйствія непрерывная сила, очевидно, всегда можетъ быть замѣнена мгновенной, механически равной ей,— т. е. такой, которая можетъ сообщить двигающемуся тѣлу такую же скорость, какую ему на самомъ дѣлѣ сообщаетъ въ этотъ моментъ данная сила. На самомъ дѣлѣ, вмѣсто этой мгновенной силы нужно будетъ для слѣдующаго безконечно-малаго промежутка времени подставить другую силу такого же рода, чтобы выразить дѣйствительное измѣненіе скорости; поэтому то въ динамикѣ, гдѣ разсматривается состояніе движущагося тѣла въ различные послѣдовательные моменты времени, мы, благодаря указанному измѣненію мгновенныхъ силъ, непремѣнно встрѣтимся съ основной трудностью, присущей самой природѣ непрерывныхъ силъ, только таже самая трудность представится въ другой формѣ. Но въ статикѣ, гдѣ приходится разсматривать силы лишь въ одинъ опредѣленный моментъ времени, вовсе не надо принимать въ разсчетъ подобныхъ измѣненій, и общіе законы равновѣсія, установленные, такимъ образомъ, въ предположеніи, что всѣ силы мгновенны, будутъ также примѣнимы и къ непрерывнымъ силамъ, съ тѣмъ лишь условіемъ, чтобы при такомъ примѣненіи вмѣсто каждой непрерывной силы была подставлена мгновенная сила, соотвѣтствующая ей въ этотъ моментъ.

Теперь ясно видно, какимъ образомъ абстрактную статику легко можно разсматривать, какъ простое примѣненіе наиболѣе элементарной части динамики, — той именно ея части, которая относится къ равномѣрнымъ движеніямъ. Наиболѣе удобный способъ осуществить это примѣненіе основывается на замѣчаніи, что если нѣкоторыя силы находятся въ равновѣсіи, то каждая изъ нихъ, взятая отдѣльно, можетъ быть разсматриваема какъ сила, уничтожающая результатъ совмѣстнаго дѣйствія всѣхъ другихъ.

Такимъ образомъ отысканіе условій равновѣсія сводится, вообще, къ выраженію, что одна какая нибудь изъ силъ системы равна и прямо противоположна *суммѣ* всѣхъ остальныхъ; поэтому при такомъ методѣ вся трудность заключается только въ опредѣленіи этой *суммы*,—т. е. въ *сложеніи* между собою данныхъ силъ. Для случая двухъ силъ это сложеніе выполняется непосредственно по третьему основному закону движенія; отсюда тотчасъ же вытекаетъ и сложеніе какого угодно числа силъ. Этотъ элементарный вопросъ представляетъ собою, какъ извѣстно, два существенно различныхъ случая, въ зависимости отъ того, сходятся ли направленія дѣйствія обѣихъ составляющхъ силъ, или онѣ направлены параллельно. Каждый изъ такихъ двухъ случаевъ можно разсматривать, какъ слѣдствіе другого; поэтому между геометрами возникло извѣстное разногласіе относительно способа установленія элементарныхъ законовъ сложенія силъ въ зависимости отъ того, который изъ случаевъ избирается за исходную точку. Но, не оспаривая полной возможности поступать иначе, я все таки считаю болѣе раціональнымъ, болѣе соотвѣтствующимъ философскимъ требованіямъ и болѣе согласнымъ съ духомъ разсматриваемой системы изложенія статики начинать съ сложенія сходящихся силъ, откуда, естественно, сложеніе параллельныхъ силъ вытекаетъ какъ частный случай, тогда какъ обратный выводъ можетъ быть сдѣланъ только при помощи косвенныхъ соображеній, которыя,—какъ бы остроумны они ни были,—непремѣнно носятъ отпечатокъ нѣкоторой искусственности.

Установивъ элементарные законы сложенія силъ, геометры, прежде чѣмъ примѣнить ихъ къ отысканію условій равновѣсія, подвергаютъ ихъ обыкновенно важному преобразованію, которое, хотя и не безусловно необходимо, однако приноситъ въ аналитическомъ отношеніи весьма большую пользу, вводя въ алгебраическое выраженіе условій равновѣсія огромное упрощеніе. Это преобразованіе заключается въ такъ называемой теоріи *моментовъ*, назначеніе которыхъ по существу заключается въ сведеніи въ аналитическомъ отношеніи всѣхъ законовъ сложенія силъ къ простому сложенію и вычитанію.

Слово *моментъ*, первоначальнный смыслъ котораго въ настоящее время совершенно измѣненъ, обозначаетъ теперь только абстрактное представленіе о произведеніи силы на нѣкоторое разстояніе. Какъ извѣстно, слѣдуетъ различать *моменты* двухъ родовъ: моменты относительно точки, обозначающія произведеніе силы на перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на направленіе силы, и моменты относительно плоскости, обозначающіе произведеніе силы на разстояніе точки ея приложенія отъ этой плоскости. Первые, очевидно, зависятъ только отъ направленія силы, и совсѣмъ не зависятъ отъ точки ея приложенія,—они, по самой природѣ своей, особенно удобны для теоріи непараллельныхъ силъ. Моменты второго рода, наоборотъ, зависятъ только отъ точки приложенія силы и вовсе не зависятъ отъ ея направленія: они по существу предназначены для теоріи параллельныхъ силъ. Ниже мы будемъ имѣть случай указать счастливую и важную идею г. Пуансо, которая помогла ему сообщить въ общемъ видѣ,—и наиболѣе естественнымъ образомъ,—прямое и конкретное толкованіе моментамъ того и другого рода, до него имѣвшимъ въ дѣйствительности только абстрактное значеніе.

Если понятіе о моментахъ установлено, то вся ихъ элементарная теорія заключается, по существу, въ слѣдующихъ двухъ общихъ и весьма замѣчательныхъ свойствахъ, легко доказываемыхъ съ помощью сложенія силъ: 1) если разсматривать систему силъ, лежащихъ въ одной и той же плоскости, хотя и расположенныхъ въ ней какъ угодно, то моментъ ихъ суммы относительно произвольной точки этой плоскости равенъ алгебраической суммѣ моментовъ всѣхъ слагаемыхъ относительно той же точки, если этимъ различнымъ моментамъ присвоить соотвѣтствующій знакъ, въ зависимости отъ направленія, въ которомъ каждая сила стремится повернуть плечо рычага около начала моментовъ, принимаемаго за постоянное; 2) если разсматривать систему параллельныхъ силъ.

расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, то моментъ ихъ суммы относительно произвольной плоскости равенъ алгебраической суммѣ моментовъ всѣхъ слагаемыхъ относительно той же самой плоскости, причемъ знакъ каждаго момента опредѣляется, конечно, согласно съ обычными правилами, по знакамъ каждаго изъ множителей, его составляющихъ. Первая изъ этихъ двухъ основныхъ теоремъ была открыта Вариньономъ, — геометромъ, которому раціональная механика обязана очень многимъ и память котораго была достойнымъ образомъ возстановлена изъ несправедливаго забвенія Лагранжемъ. Пріемъ, при помощи котораго Вариньонъ доказываетъ эту теорему для случая двухъ слагаемыхъ,—откуда непосредственно вытекаетъ общій случай,—тоже очень замѣчателенъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая моментъ каждой силы относительно какой нибудь точки какъ величину, очевидно, пропорціональную площади треугольника, имѣющаго эту точку своей вершиною, а основаніемъ—прямую, изображающую силу, Вариньонъ, слѣдуя закону параллелограмма силъ, представляетъ теорему о моментахъ сначала въ очень простой геометрической формѣ, доказывая, что если въ плоскости параллелограмма взять какую нибудь точку и разсматривать три треугольника, имѣющіе эту точку общею вершиною, а основаніями — двѣ смежныя стороны параллелограмма и соотвѣтствующую діагональ его, то треугольникъ, построенный на діагонали, всегда будетъ равновеликъ суммѣ или разности треугольниковъ, построенныхъ на двухъ сторонахъ; это предложеніе, какъ справедливо замѣчаетъ Лагранжъ, и само по себѣ представляетъ прекрасную теорему геометріи, независимо отъ пользы его въ механикѣ.

При помощи теоріи моментовъ легко выразить аналитическія соотношенія, которыя должны существовать между силами въ состояніи равновѣсія, разсматривая сначала для большей легкости два частныхъ случая: случай системы силъ, расположенныхъ какъ угодно въ одной и той же плоскости, и случай какой нибудь системы параллельныхъ силъ.

Каждая изъ такихъ двухъ системъ требуетъ, вообще говоря, трехъ уравненій равновѣсія, которыя заключаются: 1) для первой системы въ томъ, чтобы алгебраическія суммы произведеній каждой силы на косинусъ или на синусъ угла, образуемаго ею съ произвольно взятой въ плоскости системы постоянной прямой, равнялись, каждая въ отдѣльности, нулю, равно какъ и алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно какой нибудь точки этой плоскости; 2) для второй системы—въ томъ, чтобы равнялись нулю какъ алгебраическая сумма всѣхъ данныхъ силъ, такъ и алгебраическая сумма ихъ моментовъ, взятыхъ отдѣльно относительно двухъ различныхъ плоскостей, параллельныхъ общему направленію этихъ сихъ. Разсмотрѣвъ предварительно эти два случая, легко вывести изъ нихъ случай системы какихъ угодно силъ. Для этого достаточно представить себѣ, что каждая сила системы разложена на двѣ, изъ которыхъ одна лежитъ въ опредѣленной плоскости, а другая перпендикулярна къ ней; такимъ образомъ данная система замѣнится совокупностью двухъ болѣе простыхъ вспомогательныхъ системъ, изъ которыхъ одна состоитъ изъ силъ, расположенныхъ въ одной и той же плоскости, другая—изъ силъ, перпендикулярныхъ къ этой плоскости и, слѣдовательно, параллельныхъ между собою. Но такъ какъ эти двѣ частныя системы, очевидно, не могутъ уравновѣсить другъ друга, то для того, чтобы равновѣсіе могло имѣть мѣсто для всей первоначальной системы, необходимо, чтобы каждая изъ обѣихъ частныхъ системъ была въ равновѣсіи; такимъ образомъ задача сводится къ двумъ уже предварительно разсмотрѣннымъ вопросамъ. Таковъ—по крайней мѣрѣ въ самомъ простомъ видѣ—способъ изложенія, въ случаѣ примѣненія къ статикѣ метода динамики, общаго изслѣдованія аналитическихъ условій равновѣсія для какой угодно системы силъ; впрочемъ, очевидно, было бы возможно, усложнивъ рѣшеніе, изслѣдовать задачу прямо во всей ея общности такъ, чтобы, обратно, оба предварительные случая вошли какъ простыя приложенія. Но какой бы путь ни былъ признанъ за наиболѣе удобный, для равновѣсія любой системы силъ всегда получатся слѣдующія шесть уравненій:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\ \Sigma P\cos\beta=0,\ \Sigma P\cos\gamma=0,$$
$$\Sigma P(y\cos\alpha-x\cos\beta)=0,\ \Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$

гдѣ P обозначаетъ величину какой нибудь изъ силъ системы, α, β, γ—углы, образуемые ея направленіемъ съ тремя выбранными произвольно постоянными прямоугольными осями, а x, y, z—координаты точки ея приложенія относительно этихъ трехъ осей; я ввожу здѣсь значекъ Σ чтобы обозначить сумму подобныхъ произведеній, соотвѣтствующихъ всѣмъ силамъ системы P, P', P'' и т. д.

Таковы, по существу, пріемы опредѣленія общихъ условій равновѣсія, если считать статику за частный случай элементарной динамики. Но, какъ бы простъ на самомъ дѣлѣ ни былъ этотъ методъ, было бы, очевидно, раціональнѣе вернуться къ методу древнихъ, освободивъ статику отъ соображеній динамики и приступая прямо къ изысканіямъ условій равновѣсія, разсматриваемаго какъ таковое при помощи достаточно общаго принципа равновѣсія, установленнаго непосредственно. Къ этому-то и начали стремиться въ дѣйствительности геометры, когда общія уравненія равновѣсія уже были открыты при помощи методовъ динамики. Но главнымъ побужденіемъ установить прямой методъ статики была причина философскаго характера,—болѣе высокаго порядка и въ то же время болѣе уважительная, чѣмъ потребность изложить статику съ болѣе совершенной въ логическомъ отношеніи точки зрѣнія. И намъ теперь очень важно разъяснить этотъ вопросъ, ибо такимъ именно путемъ Лагранжъ довелъ всю раціональную механику до той высокой степени философскаго совершенства, какою она съ тѣхъ поръ обладаетъ.

Указанная основная причина вытекаетъ изъ необходимости привести самые трудные и важные вопросы динамики, при изслѣдованіи ихъ въ общемъ видѣ, къ простымъ задачамъ статики. Мы съ особеннымъ вниманіемъ разсмотримъ въ слѣдующей лекціи знаменитый общій принципъ динамики, открытый д'Аламберомъ,—принципъ, при помощи котораго всякое изслѣдованіе относительно движенія тѣла или какой-угодно системы можетъ быть непосредственно обращено въ задачу о равновѣсіи.

Этотъ принципъ, какъ я уже указалъ въ предъидущей лекціи, является, съ философской точки зрѣнія, только наиболѣе общимъ выраженіемъ второго основного закона движенія; онъ уже около столѣтія служитъ постоянно исходнымъ пунктомъ для рѣшенія всѣхъ главныхъ задачъ динамики, и въ будущемъ, очевидно, его значеніе въ этомъ смыслѣ должно все болѣе возростать въ виду удивительной простоты, вносимой имъ въ самыя трудныя изысканія. Ясно, однако, что подобный способъ изслѣдованія требуетъ, со своей стороны, чтобы статика была обработана на основаніи прямого метода, а не выведена изъ динамики; наоборотъ, съ этой точки зрѣнія, динамика всецѣло основана на статикѣ.

Собственно говоря, мы не вступили-бы въ заколдованный кругъ, если-бы продолжали слѣдовать обычному пути, указанному нами выше, такъ какъ элементарная часть динамики, служащей основаніемъ статики, на самомъ дѣлѣ совершенно отлична отъ той части, которая можетъ быть изложена только при помощи приведенія ея къ статикѣ.

Очевидно, тѣмъ не менѣе, что при такомъ способѣ изложенія, совокупность раціональной механики обладала-бы крайне несовершеннымъ философскимъ характеромъ, въ виду частыхъ переходовъ отъ статической точки зрѣнія къ динамической. Словомъ, эта наука была-бы построена несоразмѣрно, и поэтому ей по самому существу не хватало-бы единства.

Окончательное усвоеніе и всеобщее примѣненіе принципа д'Аламбера сдѣлали необходимымъ для будущихъ успѣховъ человѣческаго ума коренное преобразованіе всей системы раціональной механики, чтобы, разсматривая статику прямо съ точки зрѣнія первоначальнаго достаточно общаго закона равновѣсія и сводя динамику къ статикѣ, дать всей наукѣ возможность пріобрѣсти уже несомнѣнный характеръ единства.

Въ этомъ и состоитъ истинно философскій переворотъ, произведенный Лагранжемъ въ его замѣчательномъ курсѣ *Аналитической Механики*; основная мысль этого труда всегда будетъ служить исходной точкой всѣхъ позднѣйшихъ работъ геометровъ надъ законами равновѣсія и движенія,—подобно тому, кавъ великая первоначальная идея Декарта, какъ мы это видѣли выше, должна постоянно направлять всѣ геометрическія теоріи.

Разсматривая изслѣдованія прежнихъ геометровъ относительно свойствъ равновѣсія, чтобы позаимствовать у нихъ прямой принципъ статики, который могъ-бы представить всю необходимую общность, Лагранжъ остановилъ свой выборъ на *принципѣ возможныхъ скоростей* *), сдѣлавшемся съ тѣхъ поръ столь знаменитымъ благодаря своимъ многочисленнымъ и важнымъ приложеніямъ. Этотъ принципъ, открытый сначала Галилеемъ для случая двухъ силъ, какъ общее свойство, обнаруживающееся при равновѣсіи всѣхъ машинъ, позднѣе былъ распространенъ Иваномъ Бернулли на какое угодно число силъ, составляющихъ какую-нибудь систему; затѣмъ уже Вариньонъ вѣрно замѣтилъ возможность общаго примѣненія его въ статикѣ.

Комбинація этого принципа съ принципомъ д'Аламбера привела Лагранжа къ пониманію и толкованію всей раціональной механики, какъ слѣдствія изъ одной только основной теоремы; сообщивъ ей, благодаря такой комбинаціи, строгое единство, онъ довелъ механику до самой высокой степени совершенства, какой только можетъ достигнуть наука въ философскомъ отношеніи.

Чтобы съ большею легкостью и яснѣе понять общій принципъ возможныхъ скоростей, полезно еще разсмотрѣть его сначала въ простомъ случаѣ двухъ силъ, какъ это сдѣлалъ Галилей. Принципъ для этого

*) Въ руководствахъ механики на русскомъ языкѣ часто вмѣсто буквальнаго перевода „возможныя скорости" (vitesses virtuelles) вводится терминъ „возможныя перемѣщенія". *Прим. перев.*

случая заключается въ томъ, что если двѣ силы уравновѣшиваютъ другъ друга при помощи какой-нибудь машины, то онѣ обратно пропорціональны пространствамъ, которыя прошли бы въ направленіи ихъ дѣйствія точки ихъ приложенія, если предположить, что системѣ сообщено безконечно малое движеніе: эти пространства носятъ названіе возможныхъ скоростей, въ отличіе отъ дѣйствительныхъ скоростей, которыя на самомъ дѣлѣ имѣли бы мѣсто, если бы равновѣсія не существовало.

Въ первоначальномъ своемъ видѣ этотъ принципъ, допуская весьма удобную провѣрку относительно всѣхъ извѣстныхъ машинъ, доставляетъ уже большую практическую пользу благодаря чрезвычайной легкости, съ которой онъ позволяетъ получить въ дѣйствительности математическія условія равновѣсія всякой машины, даже если ея устройство совсѣмъ неизвѣстно.

Называя *возможнымъ моментомъ* или просто *моментомъ*,—согласно первоначальному значенію, которое давали этому термину геометры, — произведеніе каждой силы на ея возможную скорость,—произведеніе, на самомъ дѣлѣ измѣряющее работу силы для приведенія машины въ движеніе,—можно въ значительной степени упростить выраженіе принципа, сказавъ только, что въ этомъ случаѣ для равновѣсія моменты обѣихъ силъ должны быть равны и противоположны по знаку; положительный или отрицательный знакъ каждаго момента опредѣляется по знаку возможной скорости, который согласно съ обычнымъ духомъ математической теоріи знаковъ считается положительнымъ или отрицательнымъ въ зависимости отъ того, упадетъ ли проекція точки приложенія силы вслѣдствіе воображаемаго нами фиктивнаго движенія на направленіе силы, или на его продолженіе.

Такое сокращенное выраженіе принципа возможныхъ скоростей особенно полезно для формулированія этого принципа въ общемъ видѣ, относительно совершенно произвольной системы силъ. Онъ заключается тогда въ томъ, что для равновѣсія алгебраическая сумма возможныхъ моментовъ всѣхъ силъ, опредѣленныхъ по указанному правилу, должна равняться нулю; такое условіе должно быть точно соблюдено относительно всѣхъ элементарныхъ движеній, которыя система можетъ имѣть благодаря приложеннымъ къ ней силамъ. Если обозначить черезъ P, P', P'' и т. д. данныя силы и, согласно обычному обозначенію Лагранжа, черезъ $\delta\rho$, $\delta\rho'$, $\delta\rho''$ и т. д. соотвѣтствующія возможныя скорости, то принципъ выразится непосредственно уравненіемъ

$$P\delta\rho + P'\delta\rho' + P''\delta\rho'' + \text{ и т. д.} = 0$$

или короче

$$\int P\delta\rho = 0;$$

благодаря трудамъ Лагранжа, мы можемъ считать, что вся раціональная механика заключается неявнымъ образомъ въ этомъ уравненіи.

Что же касается статики, то основная трудность надлежащаго развитія этого общаго уравненія, если всѣ силы, которыя надо принять въ разсчетъ, будутъ вполнѣ извѣстны, сведется по существу къ чисто аналитическому затрудненію, заключающемуся въ томъ, чтобы въ каждомъ случаѣ отнести всѣ безконечно малыя варіаціи $\delta\rho$, $\delta\rho'$, $\delta\rho''$ и т. д., согласно съ характеризующими разсматриваемую систему условіями связей, къ возможно меньшему числу дѣйствительно независимыхъ варьяцій; тогда можно будетъ отдѣльно приравнять нулю различныя группы членовъ, относящихся къ каждой изъ этихъ послѣднихъ варьяцій, благодаря чему для равновѣсія получится столько различныхъ уравненій, сколько могло существовать дѣйствительно различныхъ элементарныхъ движеній при извѣстной природѣ данной системы силъ.

Если предположить, что силы совершенно произвольны и что онѣ приложены къ различнымъ точкамъ твердаго тѣла, на которое не наложено никакихъ особыхъ условій, то можно также непосредственно и самымъ простымъ образомъ получить шесть общихъ уравненій равновѣсія, найденныхъ выше по методу динамики. Если твердое тѣло, вмѣсто того, чтобы быть совершенно свободнымъ, должно быть болѣе или менѣе стѣснено, то достаточно, опредѣливъ надлежащимъ образомъ сопротивленія, вытекающія изъ такихъ связей, ввести ихъ въ число силъ системы; тогда прибавится нѣсколько новыхъ членовъ въ основномъ уравненіи. То же самое имѣетъ мѣсто, когда форму тѣла нельзя предполагать строго неизмѣнной, напримѣръ, когда приходится принимать во вниманіе его упругость. Съ логической точки зрѣнія, вліяніе такого рода измѣненій обнаруживается только въ томъ, что въ большей или меньшей степени усложняется уравненіе возможныхъ скоростей, но при этомъ оно вовсе не перестаетъ сохранять свою необходимую всеобщность, хотя иногда эти второстепенныя условія могутъ сдѣлать совершенно непреодолимыми чисто аналитическія трудности, которыя возникаютъ при дѣйствительномъ рѣшеніи предложеннаго вопроса.

Пока теорему о возможныхъ скоростяхъ признавали только за общее свойство равновѣсія, для повѣрки ея справедливости было достаточно постояннаго согласованія съ обычными законами равновѣсія, полученными уже другимъ путемъ, и она являлась, благодаря своей простотѣ и однообразію, очень полезной формулировкой этихъ законовъ.

Но для того, чтобы сдѣлать эту теорему дѣйствительнымъ основаніемъ всей раціональной механики, однимъ словомъ, чтобы обратить ее въ истинный принципъ, необходимо было доказать ее прямо, не выводя изъ какого-нибудь другого принципа, или, по крайней мѣрѣ, принимая только такія первоначальныя положенія, которыя по своей крайней простотѣ могутъ быть представлены, какъ непосредственно найденныя.

Эта задача была очень удачно выполнена Лагранжемъ въ его остроумномъ доказательствѣ, основанномъ на принципѣ блоковъ, гдѣ онъ съ замѣчательною легкостью подтверждаетъ теорему возможныхъ скоростей въ общемъ видѣ, вводя въ разсмотрѣніе одно тяжелое тѣло, замѣняющее одновременно, при помощи надлежащимъ образомъ устроенныхъ блоковъ, всѣ силы системы. Съ тѣхъ поръ неоднократно предлагали нѣкоторыя другія прямыя и общія доказательства принципа возможныхъ скоростей, но они гораздо сложнѣе доказательства Лагранжа и въ дѣйствительности нисколько не превосходятъ его въ смыслѣ логической строгости. Мы же, съ философской точки зрѣнія, должны видѣть въ этой теоремѣ неизбѣжное слѣдствіе основныхъ законовъ движенія, изъ которыхъ она можетъ быть выведена различными способами, и затѣмъ уже эта теорема дѣлается въ дѣйствительности точкой отправленія всей раціональной механики.

Такъ какъ введеніе такого принципа доводитъ всю науку до совершеннаго единства, то теперь нахожденіе другихъ принциповъ, еще болѣе общихъ,—если даже оно возможно—является весьма мало интереснымъ. Попытки, которыя могутъ быть задуманы для замѣны принципа возможныхъ скоростей какимъ-нибудь новымъ принципомъ, по самой ихъ природѣ, можно считать совершенно безцѣльными. Такая работа вовсе не могла бы еще усовершенствовать основной философскій характеръ раціональной механики, которая въ трактатѣ Лагранжа приведена въ настолько согласованную систему, насколько это только возможно. Въ самомъ дѣлѣ, тутъ можно имѣть въ виду только одну дѣйствительную пользу—значительно упростить аналитическія изысканія, къ которымъ приведена въ настоящее время наука; но такое упрощеніе должно казаться почти невозможнымъ, если принять во вниманіе, съ какою замѣчательною легкостью принципъ возможныхъ скоростей былъ приспособленъ Лагранжемъ для единообразнаго примѣненія математическаго анализа.

Таковъ несравненно самый совершенный способъ пониманія и толкованія статики, а затѣмъ и всей раціональной механики. Въ трудѣ, какимъ преимущественно является нашъ курсъ, мы не могли колебаться ни одного мгновенья, чтобы оказать этому методу явное предпочтеніе передъ всѣми другими, такъ какъ его главное характерное преимущество заключается въ усовершенствованіи до самой высокой степени философіи этой науки.

Послѣднее соображеніе въ нашихъ глазахъ должно имѣть больше значенія, чѣмъ невозможность примѣнить его въ обратномъ смыслѣ къ тѣмъ особымъ затрудненіямъ, которыя разсматриваемый принципъ часто еще представляетъ въ своихъ приложеніяхъ и которыя существеннымъ образомъ заключаются въ крайнемъ умственномъ напряженіи, вызываемомъ пользованіемъ принципомъ; это послѣднее затрудненіе можно считать присущимъ до извѣстной степени всякому очень общему методу, гдѣ какіе угодно вопросы приводятся къ единому принципу. Но тѣмъ не менѣе эти затрудненія до сихъ поръ еще настолько велики, что методъ Лагранжа нельзя считать дѣйствительно настолько элементарнымъ, чтобы въ догматическомъ преподаваніи можно было совершенно отказаться отъ разсмотрѣнія всякаго другого метода. Это и побудило меня изложить сначала съ нѣкоторыми подробностями методъ динамическій въ собственномъ смыслѣ слова—единственный методъ, примѣняемый повсюду.

Подобныя соображенія могутъ, однако, имѣть только временное значеніе; существенная причина главныхъ затрудненій, являющихся при примѣненіи точки зрѣнія Лагранжа, заключается въ дѣйствительности только въ ея новизнѣ. Подобному методу, несомнѣнно, вовсе не суждено быть навсегда предметомъ исключительнаго пользованія для весьма незначительнаго числа геометровъ, которые уже достаточно близко знакомы съ нимъ, чтобы надлежащимъ образомъ утилизировать его особыя замѣчательныя свойства; онъ навѣрное сдѣлается современемъ также популяренъ въ математическомъ мірѣ, какъ великая геометрическая идея Декарта, и очень правдоподобно, что этотъ общій успѣхъ былъ бы уже почти достигнутъ, если бы основныя понятія трансцендентнаго анализа были распространены шире.

Я считалъ бы, что я не охарактеризовалъ надлежащимъ образомъ всѣхъ существенныхъ философскихъ понятій, относящихся къ раціональной статикѣ, если бы я не упомянулъ теперь отдѣльно о новой весьма важной идеѣ, введенной въ науку г. Пуансо, идеѣ, въ которой я вижу самое крупное усовершенствованіе, съ философской точки зрѣнія, внесенное въ общую систему механики со времени возрожденія ея, достигнутаго Лагранжемъ, хотя это усовершенствованіе сдѣлано въ томъ же самомъ направленіи.

Легко видѣть, что я говорю объ остроумной и блестящей теоріи *паръ*, которую г. Пуансо такъ удачно выдвинулъ для усовершенствованія самыхъ основныхъ понятій раціональной механики; мнѣ кажется, что важность этой теоріи не была еще достаточно оцѣнена большинствомъ геометровъ.

Легко видѣть, что на эти пары или системы равныхъ, параллельныхъ и направленныхъ въ противоположныя стороны силъ, до г. Пуансо едва обращали вниманіе, какъ на какіе-то парадоксы статики; онъ воспользовался этимъ отдѣльнымъ понятіемъ, чтобы сдѣлать его предметомъ весьма обширной и совершенно оригинальной теоріи о преобразованіяхъ, сложеніи и примѣненіи этихъ особыхъ группъ силъ, которыя обладаютъ, какъ онъ показалъ, столь замѣчательными по своей общности и простотѣ свойствами.

Основныя свойства паръ заключаются, существеннымъ образомъ, въ слѣдующемъ: 1) въ смыслѣ направленія дѣйствіе пары силъ зависитъ только отъ направленія ея плоскости или оси, и нисколько не зависитъ ни отъ положенія этой плоскости, ни отъ положенія въ ней пары; 2) въ смыслѣ интенсивности дѣйствіе пары силъ, собственно говоря, не зависитъ ни отъ величины каждой изъ силъ, ее составляющихъ, ни отъ плеча рычаго, на который онѣ дѣйствуютъ; оно зависитъ только отъ произведенія силы на разстояніе, названнаго г. Пуансо, и совершенно основательно,—*моментомъ* пары.

Приступая къ изысканію общихъ условій равновѣсія и принявъ собственно динамическій методъ, г. Пуансо представилъ равновѣсіе съ совершенно новой точки зрѣнія при помощи своей идеи о парѣ силъ,— идеи, которая замѣтнымъ образомъ упростила и разъяснила этотъ методъ.

Чтобы въ краткихъ чертахъ охарактеризовать здѣсь эту особую форму динамическаго метода, достаточно замѣтить, что если прибавить въ какой-нибудь точкѣ системы двѣ силы, равныя каждой изъ разсматриваемыхъ дѣйствующихъ силъ и направленныя въ обратныя стороны по прямой, параллельной направленію силы, то можно, нисколько, очевидно, не измѣняя состоянія данной системы, считать ее замѣненной: 1) системой силъ, равныхъ первоначальнымъ силамъ, перенесенныхъ, параллельно ихъ направленію, къ избранной точкѣ; такія силы можно будетъ, вообще, свести къ единственной силѣ; 2) системой паръ силъ, интенсивность которыхъ измѣряется моментами данныхъ силъ относительно этой же точки и которыя также можно будетъ свести, вообще, къ одной только парѣ, благодаря тому, что плоскости ихъ всѣхъ проходятъ черезъ ту же точку. Отсюда видно, какъ легко будетъ приступить теперь къ опредѣленію условій равновѣсія, ибо для этого достаточно будетъ найти по извѣстнымъ законамъ сложенія сходящихся силъ сумму ихъ и затѣмъ выразить, что она равняется нулю; далѣе, по законамъ, которые г. Пуансо установилъ для сложенія паръ силъ, найти точно также окончательную пару и также приравнять ее отдѣльно нулю; такъ какъ сила и пара силъ не могутъ взаимно уничтожаться, то ясно, что равновѣсіе можетъ существовать только при условіи, что сила и пара въ отдѣльности равны нулю.

Безъ сомнѣнія, слѣдуетъ признать, что нѣтъ необходимсти пользоваться этимъ новымъ пріемомъ для примѣненія динамическаго метода къ опредѣленію общихъ условій равновѣсія. Но, кромѣ чрезвычайнаго упрощенія, вносимаго пріемомъ г. Пуансо въ изслѣдованія подобнаго рода, мы особенно должны цѣнить, съ точки зрѣнія общаго прогресса науки, ту ясность, которую онъ неожиданно придаетъ механикѣ, представляя въ замѣчательно наглядномъ видѣ существенную часть условій равновѣсія,—ту именно часть, которая относится къ моментамъ данныхъ силъ и составляетъ наиболѣе важную половину уравненій статики.

Моменты, которые до сихъ поръ обозначали только чисто абстрактное понятіе, искусственно введенное съ статику для облегченія алгебраическаго выраженія законовъ равновѣсія, съ появленіемъ новаго пріема приняли совершенно точное конкретное значеніе и, представляя собою прямое измѣреніе паръ, являющихся непосредственнымъ результатомъ самыхъ силъ, вошли въ статическія разсужденія такъ же естественно, какъ и эти силы.

Легко видѣть a priori, какое облегченіе необходимо должно дать такое общее и элементарное толкованіе при комбинированіи всѣхъ идей, относящихся къ теоріи моментовъ: дѣйствительное доказательство такого облегченія видно, впрочемъ, уже въ томъ расширеніи и усовершенствованіи этой важной теоріи, которое достигнуто трудами самого г. Пуансо.

Каковы бы ни были въ дѣйствительности основныя достоинства идеи г. Пуансо при приложеніи къ статикѣ, тѣмъ не менѣе, мнѣ кажется, необходимо признать, что, по своей природѣ, она по существу предназначена именно для усовершенствованія динамики, и въ этомъ отношеніи я считаю возможнымъ утверждать, что эта идея вовсе еще не проявила своего главнаго вліянія. Въ самомъ дѣлѣ, слѣдуетъ признать, что эта идея можетъ прямо усовершенствовать въ очень важномъ отношеніи самые элементы общей динамики, такъ какъ она дѣлаетъ понятіе о вращательномъ движеніи столь же естественнымъ, столь же доступнымъ и почти столь же простымъ, какъ и понятіе о поступательномъ движеніи: пару такъ же можно считать естественнымъ элементомъ вращательнаго движенія, какъ силу—поступательнаго. Не здѣсь мѣсто выяснять еще точнѣе это соображеніе, — оно будетъ выражено надлежащимъ образомъ въ слѣдующихъ лекціяхъ. Мы должны только замѣтить вообще, что вполнѣ правильное примѣненіе теоріи паръ даетъ возможность сдѣлать изученіе вращательныхъ движеній, составляющее до сихъ поръ самую сложную и неясную часть динамики, такимъ же элементарнымъ и яснымъ, какъ и изученіе движеній поступательныхъ. Ниже мы будемъ имѣть случай на самомъ дѣлѣ показать, до какой степени простоты и ясности удалось г. Пуансо довести различныя относящіяся къ вращательнымъ движеніямъ существенныя положенія, которыя до него доказывались только съ очень большимъ трудомъ и косвеннымъ путемъ,—главнымъ образомъ положенія относительно площадей: онъ во многихъ важныхъ отношеніяхъ замѣтнымъ образомъ расширилъ ихъ область и сдѣлалъ стройнѣе ихъ примѣненіе, особенно относительно опредѣленія такъ называемой *постоянной плоскости*.

Чтобы пополнить эти философскія соображенія относительно всей совокупности статики, я считаю нужнымъ добавить здѣсь краткое указаніе на послѣднее общее понятіе, которое, мнѣ кажется, полезно ввести въ теорію равновѣсія, какой бы путь мы ни сочли наиболѣе удобнымъ для ея изложенія.

Мнѣ кажется, что если желаютъ составить себѣ правильное представленіе о природѣ различныхъ уравненій, выражающихъ условія равновѣсія какой-нибудь системы силъ, то недостаточно ограничиться только доказательствомъ, что для равновѣсія необходима система такихъ-то уравненій, и что эта система неизбѣжно устанавливаетъ равновѣсіе. Надо умѣть, кромѣ того, ясно опредѣлить точное статическое значеніе каждаго изъ этихъ уравненій, разсматриваемаго въ отдѣльности,—иначе говоря, надо точно опредѣлить, какимъ именно образомъ каждое уравненіе въ отдѣльности приводитъ къ установленію равновѣсія; такой анализъ уравненій обыкновенно вовсе не ставится цѣлью изслѣдованія, хотя онъ, безъ сомнѣнія, очень важенъ.

Какъ бы мы ни поступали при составленіи уравненій статики, ясно a priori, что равновѣсіе установится только при уничтоженіи всѣхъ элементарныхъ движеній, которыя можетъ получить тѣло подъ вліяніемъ приложенныхъ къ нему силъ, если только эти силы не связаны соотношеніями, необходимыми для ихъ взаимнаго полнаго уравновѣшенія. Такимъ образомъ каждое уравненіе, взятое въ отдѣльности, необходимо должно уничтожать одно изъ указанныхъ движеній, вслѣдствіе чего вся система этихъ уравненій приводитъ къ равновѣсію, такъ какъ тогда для тѣла всякое движеніе сдѣлается невозможнымъ.

Изслѣдуемъ теперь вкратцѣ общій принципъ, на основаніи котораго такой анализъ, какъ мнѣ кажется, можетъ быть произведенъ въ любомъ случаѣ.

Если разсматривать движеніе съ наиболѣе положительной точки зрѣнія, именно какъ простое перенесеніе тѣла изъ одного положенія въ другое, независимо отъ способа, которымъ такое перенесеніе можетъ быть осуществлено, то надо считать, очевидно, что всякое движеніе, въ самомъ общемъ случаѣ, состоитъ по необходимости одновременно изъ *поступательнаго* и *вращательнаго* движенія. Это не значитъ, конечно, что въ дѣйствительности не можетъ существовать поступательнаго движенія безъ вращательнаго, или вращательнаго безъ поступательнаго; но на эти два случая надо смотрѣть какъ на исключеніе, общій же случай дѣйствительно заключается въ совмѣстномъ существованіи этихъ двухъ родовъ движеній, постоянно сопровождающихъ другъ друга, если только не имѣютъ мѣста частныя, вполнѣ опредѣленныя и, слѣдовательно, очень рѣдкія условія, относящіяся къ обстоятельствамъ явленія. Это положеніе настолько вѣрно, что констатированіе только одного изъ этихъ движеній обыкновенно совершенно основательно считается геометрами, сознающими всю важность указаннаго элементарнаго наблюденія, сильнымъ поводомъ къ тому, чтобы, если не утверждать, то по крайней мѣрѣ съ большой вѣроятностью предполагать существованіе другого явленія. Такъ, напримѣръ, зная только вращательное движеніе солнца вокругъ его оси, вполнѣ доказанное со времени Галилея, геометры a priori считали почти достовѣрнымъ и поступательное движеніе этого небеснаго тѣла, сопровождаемаго всѣми своими планетами, хотя астрономы вовсе еще не начали признавать въ дѣйствительности, на основаніи прямыхъ наблюденій, существованіе этого поступательнаго движенія, направленіе котораго еще мало опредѣлено. Совершенно также, на основаніи подобнаго же соображенія, помимо заключеній по аналогіи, обыкновенно вполнѣ основательно допускаютъ существованіе вращательнаго движенія планетъ,—даже такихъ, относительно которыхъ его вовсе нельзя было доказать прямо,—только на основаніи того, что онѣ обладаютъ хорошо извѣстнымъ поступательнымъ движеніемъ вокругъ солнца.

Изъ этого перваго изслѣдованія вытекаетъ, что изъ уравненій, выражающихъ условія равновѣсія тѣла, подвергнутаго дѣйствію нѣкоторыхъ силъ, одни имѣютъ цѣлью уничтожить всякое поступательное движеніе, другія—сдѣлать невозможнымъ всякое вращеніе.

Посмотримъ теперь, съ той же точки зрѣнія, чтобы дополнить этотъ общій очеркъ, каково должно быть a priori число уравненій каждаго вида.

Относительно поступательнаго движенія достаточно замѣтить, что для того, чтобы воспрепятствовать тѣлу двигаться по какому-нибудь направленію, надо, очевидно, воспрепятствовать его движенію по направленію трехъ главныхъ осей, расположенныхъ въ различныхъ плоскостяхъ; ихъ обыкновенно предполагаютъ перпендикулярными другъ къ другу. Въ самомъ дѣлѣ, какое движеніе осуществимо, напримѣръ, для тѣла, которое не можетъ двигаться ни съ востока на западъ, ни съ запада на востокъ, ни съ сѣвера на югъ. ни съ юга на сѣверъ, ни, наконецъ, сверху внизъ, ни снизу вверхъ? Такъ какъ всякое движеніе въ какомъ-нибудь другомъ направленіи, очевидно, можно считать состоящимъ изъ частныхъ движеній, соотвѣтствующихъ этимъ тремъ основнымъ направленіямъ, то оно при указанныхъ условіяхъ по необходимости стало бы невозможнымъ. Съ другой стороны ясно, что нельзя разсматривать менѣе трехъ независимыхъ элементарныхъ движенія, такъ какъ тѣло могло бы двигаться въ направленіи одной изъ осей, не имѣя никакого поступательнаго движенія по направленію двухъ остальныхъ. Такимъ образомъ понятно, что вообще три уравненія—три условія—необходимы и достаточны, чтобы уравновѣсить поступательное движеніе какой-нибудь системы; каждое изъ нихъ должно въ частности уничтожать одно изъ трехъ элементарныхъ поступательныхъ движеній, которыя могли быть сообщены тѣлу.

Совершенно аналогичныя соображенія можно представить и относительно вращенія; тутъ встрѣчается одно только новое затрудненіе, —точное представленіе болѣе сложнаго механическаго образа.

Такъ какъ вращеніе тѣла въ плоскости или вокругъ какой-нибудь оси всегда можно представить себѣ разложеннымъ на три элементарныхъ вращенія въ трехъ плоскостяхъ координатъ или вокругъ трехъ осей, то ясно, что для уничтоженія всякаго вращенія тѣла точно также нужно воспрепятствовать отдѣльно его вращенію относительно каждой изъ этихъ трехъ плоскостей или осей. Такимъ образомъ для уравновѣшенія вращательнаго движенія необходимы и достаточны три уравненія, и собственно механическое назначеніе каждаго изъ нихъ можно понять съ такою же легкостью, какъ и въ предшествующемъ случаѣ.

Примѣняя предшествующее изслѣдованіе къ совокупности шести общихъ уравненій равновѣсія твердаго тѣла, подвергнутаго дѣйствію какихъ угодно силъ, приведенныхъ въ началѣ этой лекціи, легко признать, что первыя три уравненія относятся къ уравновѣшенію поступательнаго, остальныя три—вращательнаго движенія. Въ первой группѣ первое уравненіе препятствуетъ поступательному движенію по направленію оси x'овъ, второе—оси y'овъ и третье—оси z'овъ. Во второй группѣ первое уравненіе мѣшаетъ тѣлу вращаться въ плоскости xy, второе—въ плоскости xz и третье—въ плоскости yz. Отсюда можно ясно понять, какимъ образомъ совмѣстное существованіе всѣхъ этихъ уравненій необходимо устанавливаетъ равновѣсіе.

Разложеніе подобнаго рода было бы полезно еще для того, чтобы свести уравненія равновѣсія къ строго необходимому числу въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, когда приходится разсматривать болѣе или менѣе частную систему силъ, а не предполагать ее совершенно произвольной. Не входя здѣсь ни въ какія частныя подробности по этому вопросу, съ изложенной выше точки зрѣнія достаточно сказать, что частныя условія данной системы силъ сокращаютъ въ большей или меньшей степени возможныя движенія,—какъ поступательныя, такъ и вращательныя; точно опредѣливъ сначала въ каждомъ случаѣ,—что всегда не трудно сдѣлать,—въ чемъ состоитъ это ограниченіе, надо отбросить, какъ излишнія, уравненія равновѣсія, относящіяся къ поступательнымъ или вращательнымъ движеніямъ, которыя не могутъ имѣть мѣста, и сохранить только уравненія, относящіяся къ движеніямъ, остающимся возможными. Такимъ образомъ, въ зависимости отъ большаго или меньшаго ограниченія разсматриваемой частной системы силъ, можно, вмѣсто шести уравненій, необходимыхъ для равновѣсія вообще, ограничиться только тремя, двумя или даже однимъ уровненіемъ, которыя для каждаго случая будетъ легче получить.

Совершенно аналогичныя замѣчанія слѣдуетъ сдѣлать относительно ограниченія движеній, происходящаго не отъ особыхъ свойствъ системы силъ, а отъ болѣе или менѣе тѣсныхъ связей, дѣйствію которыхъ подвержено тѣло; въ извѣстныхъ случаяхъ, эти связи окажутъ подобное же вліяніе. Точно также было бы достаточно ясно различить, какія движенія невозможны по самой природѣ наложенныхъ условій и, уничтоживъ относящіяся къ нимъ уравненія равновѣсія, сохранить только тѣ, которыя относятся къ оставшимся свободными движеніямъ. Такъ напримѣръ, въ случаѣ какой угодно системы силъ мы найдемъ, что трехъ послѣднихъ уравненій достаточно для уровновѣшенія, если тѣло удерживается постоянною точкою, около которой оно можетъ свободно вращаться во всѣхъ направленіяхъ, но которая дѣлаетъ всякое поступательное движеніе для него невозможнымъ; точно также мы увидимъ, что число уравненій равновѣсія сведется, если существуютъ одновременно двѣ постоянныя точки, къ двумъ или даже къ одному, въ зависимости отъ того, можетъ ли тѣло скользить по оси, ихъ соединяющей, или нѣтъ; наконецъ, мы должны были бы признать, что равновѣсіе будетъ необходимо имѣть мѣсто безъ всякихъ условій,—каковы бы ни были силы системы, — если три точки твердаго тѣла, не лежащія на одной прямой, оказываются постоянными.

Наконецъ, можно еще примѣнить соображенія подобнаго рода и въ тѣхъ случаяхъ, когда точки, не будучи строго постоянными, принуждены только оставаться на данныхъ кривыхъ или поверхностяхъ.

Духъ намѣченнаго мною только что изслѣдованія, какъ видите, вовсе не зависитъ отъ того метода, при помощи котораго получены уравненія равновѣсія. Но все таки это правило примѣняется далеко не съ одинаковою легкостью къ различнымъ общимъ методамъ; беспорно, методъ собственно статическій, основанный, какъ мы видѣли, на принципъ возможныхъ скоростей, оказывается наиболѣе подходящимъ. Въ самомъ дѣлѣ, къ числу характерныхъ свойствъ изложеннаго принципа надо отнести совершенную ясность, съ которою онъ даетъ естественное объясненіе явленію равновѣсія, разсматривая въ отдѣльности каждое элементарное движеніе, допускаемое силами системы, и тотчасъ же давая уравненіе равновѣсія, относящееся спеціально къ этому движенію.

Динамическій методъ совсѣмъ не представляетъ этого важнаго преимущества. Но тѣмъ не менѣе слѣдуетъ признать, что въ способѣ изложенія г. Пуансо динамическій методъ въ этомъ отношеніи значичительно улучшенъ, такъ какъ одно различіе въ условіяхъ равновѣсія, относящихся къ силамъ и къ парамъ силъ,—различіе, которое тогда по необходимости устанавливается,—само по себѣ вызываетъ уже отдѣльное изслѣдованіе равновѣсія поступательнаго и вращательнаго движенія. Но обыкновенный динамическій методъ, исключительно примѣнявшійся въ статикѣ до улучшеній, внесенныхъ г. Пуансо, и вполнѣ охарактеризованный мною въ началѣ этой лекціи, совершенно не выполняетъ этого основнаго условія, безъ котораго, однако, отчетливое пониманіе аналитическаго выраженія общихъ законовъ равновѣсія я считаю невозможнымъ.

Мы разсмотрѣли различные основные пріемы вывода точныхъ законовъ абстрактнаго равновѣсія для какой-угодно системы силъ, предполагая тѣла въ томъ совершенно пассивномъ состояніи, которое — хотя и чисто гипотетически, — мы признали безусловно необходимымъ для установленія основныхъ принциповъ раціональной механики; теперь мы должны изслѣдовать, какимъ образомъ геометры могли принимать въ разсчетъ общія естественныя свойства дѣйствительно существующихъ тѣлъ, съ которыми необходимо считаться во всякомъ реальномъ примѣненіи абстрактной механики. Единственное свойство, которое до сихъ поръ геометры могутъ дѣйствительно вполнѣ принять въ разсчетъ, это земная тяжесть. Посмотримъ, какимъ образомъ сумѣли на самомъ дѣлѣ ввести ее въ уравненія статики.

Это важное изслѣдованіе представляетъ собою, въ строго-логическомъ порядкѣ нашихъ философскихъ соображеній, несомнѣнно, неправильный захватъ изъ части курса, относящейся къ физикѣ въ собственномъ смыслѣ, гдѣ мы отдѣльно разсмотримъ ученіе о тяжести. Но теорія центровъ тяжести, къ которой существеннымъ образомъ сводится статическое изученіе земной тяжести, играетъ слишкомъ обширную и слишкомъ важную роль во всѣхъ частяхъ раціональной механики, чтобы, по примѣру всѣхъ геометровъ, мы не привели ее здѣсь, хотя это не совсѣмъ правильно.

Наконецъ, я долженъ по этому поводу замѣтить, что мы почти вполнѣ избѣгли бы всего дѣйствительно нераціональнаго въ такомъ порядкѣ научнаго изложенія, не лишая себя, тѣмъ не менѣе, важныхъ преимуществъ, доставляемыхъ предварительнымъ разрѣшеніемъ указаннаго вопроса, если бы было принято за правило относить теорію центровъ тяжести къ чисто геометрическимъ изслѣдованіямъ, какъ я предложилъ это въ концѣ тринадцатой лекціи.

Чтобы въ вопросахъ статики принять въ разсчетъ земное притяженіе, достаточно, какъ извѣстно, представлять себѣ для этой цѣли всякое однородное тѣло, какъ систему равныхъ и параллельныхъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ частицамъ тѣла, и опредѣлить вполнѣ ихъ сумму; тогда уже безъ всякаго затрудненія можно будетъ ввести послѣднюю въ число первоначальныхъ внѣшнихъ силъ. Въ дѣйствительности эти молекулярныя притяженія фактически только приблизительно равны и параллельны, такъ какъ въ дѣйствительности эти силы сходились бы въ центрѣ земли, если бы наша планета была точно шаромъ, и ихъ абсолютная величина, — не говоря уже о неравенствахъ центробѣжной силы, происходящей отъ вращательнаго движенія земли, — измѣняется обратно пропорціонально квадратамъ разстояній соотвѣтствующихъ частицъ отъ центра нашего земного шара. Но если рѣчь идетъ только о находящихся въ нашемъ распоряженіи земныхъ массахъ, къ которымъ обыкновенно относятся эти приложенія статики, то эти массы никогда не достигаютъ такихъ размѣровъ, чтобы дѣйствительно нужно было принимать въ разсчетъ погрѣшность въ равенствѣ и параллельности притяженій различныхъ частицъ каждой массы. Поэтому совершенно основательно полагаютъ всѣ эти силы строго равными и параллельными, что значительно упрощаетъ задачу ихъ сложенія. Въ самомъ дѣлѣ, въ такомъ предположеніи равнодѣйствующая сила равна ихъ суммѣ, и дѣйствуетъ по направленію прямой, параллельной ихъ общему направленію; поэтому величина и направленіе равнодѣйствующей немедленно опредѣлятся. Все затрудненіе сводится такимъ образомъ къ нахожденію точки ея приложенія, т. е. такъ называемаго *центра тяжести* тѣла. По общимъ свойствамъ точки приложенія равнодѣйствующей какой-нибудь системы параллельныхъ силъ, разстояніе этой точки отъ какой-нибудь плоскости равняется суммѣ моментовъ всѣхъ силъ системы относительно той же плоскости, дѣленной на сумму самыхъ силъ. Примѣняя эту формулу къ центру тяжести, и принявъ въ разсчетъ упрощеніе, происходящее вслѣдствіе равенства всѣхъ данныхъ силъ, мы получимъ, что разстояніе центра тяжести отъ какой-нибудь плоскости равняется суммѣ разстояній всѣхъ точекъ разсматриваемаго тѣла, дѣленной на число этихъ точекъ; иначе говоря, это разстояніе представляетъ собою именно то, что называютъ среднимъ ариѳметическимъ изъ разстояній всѣхъ данныхъ точекъ.

Благодаря этому основному соображенію понятіе о центрѣ тяжести становится, очевидно, чисто геометрическимъ, такъ какъ весь вопросъ, если отыскивать центръ тяжести, какъ *центръ среднихъ разстояній*, согласно съ совершенно правильнымъ представленіемъ древнихъ геометровъ, не сохраняетъ никакого слѣда своего механическаго происхожденія, и заключается только въ слѣдующей задачѣ общей геометріи: дана какая нибудь система расположенныхъ извѣстнымъ образомъ точекъ; найти точку, разстояніе которой отъ нѣкоторой плоскости было бы среднимъ ариѳметическимъ между разстояніями всѣхъ данныхъ точекъ отъ этой же плоскости.

Какъ я уже говорилъ, еслибы понятіе о центрѣ тяжести устанавливалось обыкновено указаннымъ образомъ, совершенно отвлекаясь отъ разсмотрѣнія притяженія, то отсюда вытекали бы важныя преимущества, такъ какъ это простое и чисто геометрическое понятіе и является въ точности именно тѣмъ, которое надо составить себѣ о центрѣ тяжести въ большей части главныхъ теорій раціональной механики, особенно когда разсматриваются важныя динамическія свойства центра среднихъ разстояній, гдѣ идея о тяжести,—идея совершенно излишняя и неоднородная,—вводитъ обыкновенно крайне вредное усложненіе и неясность. Дѣйствительно, такой способъ пониманія вопроса заставляетъ исключить его изъ механики и ввести, какъ я предлагалъ, въ геометрію. Если я на самомъ дѣлѣ не помѣстилъ его именно туда, то исключительно для того, чтобы возможно менѣе уклониться отъ общепринятаго порядка, хотя я вполнѣ убѣжденъ, что только такой переносъ приводилъ бы къ дѣйствительно раціональному ходу изложенія.

Какъ бы, однако, мы ни рѣшили вопросъ о порядкѣ изложенія, существенно важно не упустить изъ виду истинную природу задачи, гдѣ бы и подъ какимъ названіемъ мы ни сочли удобнымъ изслѣдовать ее.

Одно геометрическое опредѣленіе центра тяжести давало бы прямо средство найти его, если бы разсматриваемая система состояла изъ конечнаго числа отдѣльныхъ точекъ, такъ какъ тогда изъ такого опредѣленія прямо вытекали бы очень простыя, не требующія никакихъ преобразованій формулы для выраженія координатъ искомой точки относительно трехъ прямоугольныхъ осей. Но этими основными формулами нельзя пользоваться безъ преобразованія, если рѣчь идетъ о системѣ, состоящей, какъ это обыкновенно и бываетъ, изъ безчисленнаго числа точекъ, образующихъ дѣйствительно сплошное тѣло. Тогда числитель и знаменатель каждой формулы дѣлаются одновременно безконечными, эти формулы теряютъ всякое значеніе, и ихъ можно примѣнять только послѣ надлежащихъ преобразованій. Въ этомъ общемъ преобразованіи и заключается въ аналитическомъ отношеніи вся основная трудность задачи о центрѣ тяжести, разсматриваемой съ наиболѣе широкой точки зрѣнія. Ясно, однако, что интегральное исчисленіе даетъ непосредственно способъ преодолѣть эту трудность. Двѣ безконечныя суммы, составляющія оба члена каждой формулы, представляютъ собою, очевидно, истинные интегралы: при этомъ интегралъ, выражающій общій знаменатель трехъ формулъ, относится къ безконечно малымъ геометрическимъ элементамъ разсматриваемой массы, а интегралъ, представляющій собою числитель, принадлежащій каждой формулѣ, относится къ произведеніямъ этихъ элементовъ на соотвѣтствующія координаты. Изъ этого слѣдуетъ—если разсматривать здѣсь только самый общій случай—что разлагая тѣло на безконечно малые элементы только по двумъ направленіямъ двумя рядами безконечно близкихъ другъ къ другу плоскостей, параллельныхъ плоскости zx и плоскости yz, мы тотчасъ же получимъ слѣдующія основныя формулы:

$$x_1=\frac{\iint xzdxdy}{\iint zdxdy},\ y_1=\frac{\iint yzdydx}{\iint zdxdy},\ z_1={}^1/_2\,\frac{\iint z^2dxdy}{\iint zdxdy},$$

изъ которыхъ можно найти три координаты центра тяжести извѣстной части однороднаго тѣла какой угодно формы, ограниченнаго поверхностью, уравненіе которой относительно x, y и z предполагается даннымъ Тѣмъ же способомъ можно получить для центра тяжести одной только поверхности того же тѣла слѣдующія формулы:

$$x_1=\frac{\iint xdxdy\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}}{\iint dxdy\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{py^2}}}$$

$$y_1=\frac{\iint ydxdy\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}}{\iint dxdy\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}}$$

$$z_1=\frac{\iint zdxdy\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}}{\iint dxdy\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}}$$

*

Такимъ образомъ опредѣленіе центровъ тяжести сведется въ каждомъ частномъ случаѣ къ чисто аналитическимъ изысканіямъ, совершенно аналогичнымъ тѣмъ, которыхъ требуютъ, какъ мы видѣли, квадратура и кубатура тѣлъ. Только въ виду того, что упомянутыя выше интегрированія, вообще говоря, сложнѣе крайне несовершенное состояніе, въ которомъ до сихъ поръ находится интегральное исчисленіе, еще гораздо рѣже позволитъ найти окончательное рѣшеніе вопроса. Тѣмъ не менѣе указанныя общія формулы, сами по себѣ, имѣютъ важное значеніе; онѣ и вводятъ изслѣдованіе центра тяжести въ общую теорію аналитической механики, какъ мы скоро будемъ имѣть случай убѣдиться въ этомъ. Впрочемъ по поводу самой задачи слѣдуетъ отдѣльно замѣтить, что формулы чрезвычайно упрощаются, если предположить, что поверхность, ограничивающая данное тѣло, есть поверхность вращенія; къ счастью, это предположеніе и имѣетъ мѣсто въ большей части дѣйствительно важныхъ приложеній формулъ.

Таковъ по существу способъ введенія въ разсчетъ земного притяженія въ приложеніяхъ абстрактной статики. Что же касается всемірнаге тяготѣнія, то можно сказать, что до сихъ поръ его принимали вполнѣ въ расчетъ только относительно сферическихъ тѣлъ. Происходитъ это не потому, что нельзя просто составить, при помощи соотвѣтствующихъ интеграловъ, формулъ, выражающихъ притяженіе тѣломъ какой угодно формы и состава данной точки, или даже другого тѣла, если законъ притяженія предполагать извѣстнымъ, и особенно, если считать, что оно обратно пропорціально квадрату разстоянія. Но эти общія символическія выраженія остаются до сихъ поръ чаще всего не примѣнимыми въ виду невозможности выполнить указанныя въ нихъ интегрированія, если даже предположить, для упрощенія задачи, что каждое тѣло однородно. До сихъ поръ только съ очень несовершеннымъ приближеніемъ оказалось возможнымъ окончательно разрѣшить весьма простой случай притяженія двухъ эллипсоидовъ, и эти приближенія до сихъ поръ могли быть доведены до надлежащей точности только въ предположеніи, что эллипсоиды очень мало отличаются отъ сферъ, — какъ это къ счастію имѣетъ мѣсто для всѣхъ нашихъ планетъ.

Впрочемъ слѣдуетъ замѣтить, что въ дѣйствительности формулы предполагаютъ предварительное знакомство съ закономъ измѣненія плотности внутри каждаго даннаго тѣла, а мы до сихъ поръ совершенно не знаемъ его.

При современномъ состояніи этой важной и трудной теоріи можно сказать, что наиболѣе полезная часть нашихъ знаній по этому предмету до сихъ поръ еще заключается въ первоначальныхъ теоремахъ Ньютона относительно притяженія сферическихъ тѣлъ. Эти замѣчательныя свойства, доказанныя Ньютономъ съ такою простотой, заключаются, какъ извѣстно, въ слѣдующемъ: 1° притяженіе какой-нибудь внѣшней точки сферою, всѣ частицы которой притягиваютъ ее съ силою, обратно пропорціональною квадрату разстоянія, таково, каково было бы ея притяженіе всей массой этой сферы, если бы она была вся сосредоточена въ центрѣ: 2° если точка помѣщается внутри сферы, частицы которой дѣйствуютъ на нее по тому же закону, то она не испытываетъ никакого притяженія со стороны всей части шара, находящейся на большемъ разстояніи отъ центра, чѣмъ эта точка, — по крайней мѣрѣ, если шаръ не однороденъ, то въ предположеніи, что каждый изъ концентрическихъ сферическихъ слоевъ обладаетъ во всѣхъ своихъ точкахъ одной и той же плотностью.

Тяжесть есть единственная сила природы, которую мы дѣйствительно умѣемъ принимать въ разчетъ въ раціональной статикѣ: изъ предыдущаго видно уже, насколько мало еще подвинулось впередъ такое же изслѣдованіе всеміpнаго тяготѣнія. Что же касается общихъ внѣшнихъ обстоятельствъ, которыя раньше также пришлось совершенно отбросить, чтобъ установить раціональные законы механики,—каковы треніе, сопротивленіе среды и т. п.,—то можно сказать, что мы не знаемъ еще ни одного способа вводить ихъ въ основныя соотношенія, данныя аналитической механикой; до сихъ поръ такое введеніе осуществлялось только при помощи очень непрочныхъ и даже, очевидно, неточныхъ гипотезъ, которыя въ дѣйствительности слѣдуетъ признать, въ большинствѣ случаевъ, пригодными только для упражненій въ исчисленіи. Впрочемъ, мы, конечно, должны будемъ вернуться къ этому предмету въ части нашего курса, относящейся къ физикѣ въ собственномъ смыслѣ.

Чтобы дополнить философское изслѣдованіе всей статики, намъ остается, наконецъ, разсмотрѣть вкратцѣ общій способъ установленія теоріи равновѣсія, въ предположеніи, что тѣло, къ которому приложены силы, находится въ жидкомъ состояніи,—какъ капельно-жидкомъ, такъ и газообразномъ.

Всю гидростатику можно излагать на основаніи двухъ общихъ, совершенно различныхъ методовъ: можно прямо находить законы равновѣсія жидкихъ тѣлъ, на основаніи статическихъ соображеній, свойственныхъ исключительно тѣламъ этого рода, или же можно ограничиться простымъ выводомъ ихъ изъ основныхъ принциповъ, которые уже дали уравненія статики для случая твердыхъ тѣлъ, принимая только надлежащимъ образомъ во вниманіе новыя характерныя условія, вытекающія изъ жидкаго состоянія тѣла.

Сперва примѣняли только первый методъ,—что, конечно, вполнѣ естественно, такъ какъ для начала онъ является самымъ легкимъ, если не самымъ раціональнымъ. Таковъ въ дѣйствительности характеръ трудовъ геометровъ семнадцатаго и восемнадцатаго столѣтія по этой важной отрасли общей механики. Послѣдовательно предложены были различные, болѣе или менѣе подходящіе, принципы статики, относящіеся спеціально къ жидкимъ тѣламъ, главныхъ образомъ по поводу знаменитой задачи, въ которой геометры ставили себѣ цѣлью опредѣлить a priori истинную фигуру земли, предполагая, что она вначалѣ была въ жидкомъ состояніи. Эта важная задача, разсматриваемая во всей своей совокупности, въ дѣйствительности прямо или косвенно связана со всѣми существенными теоріями гидростатики. Какъ извѣстно, сначала Гюйгенсъ пытался разрѣшить указанную задачу, принимая за принципъ равновѣсія очевидную и необходимую перпендикулярность тяжести къ свободной поверхности жидкости. Ньютонъ, съ своей стороны, въ то же самое время выбралъ за основной принципъ не менѣе очевидную необходимость равенства вѣсовъ двухъ жидкихъ столбовъ, идущихъ отъ центра одинъ къ полюсу, а другой къ какой-нибудь точкѣ экватора. Бугеръ, разсматривая позднѣе эту важную задачу, ясно доказалъ, что оба эти пріема одинаково недостаточны, такъ какъ принципы Гюйгенса и Ньютона, хотя они оба и неоспоримы, въ большомъ числѣ случаевъ не приводили къ одинаковой формѣ жидкой массы въ равновѣсіи, что дѣлало недостаточность этихъ двухъ принциповъ совершенно очевидной. Но Бугеръ, въ свою очередь, сдѣлалъ грубую ошибку, думая, что соединеніе этихъ принциповъ, когда они приводятъ къ одному и тому же построенію, совершенно достаточно для равновѣсія.

Клэро, въ своемъ безсмертномъ трудѣ „*О фигурѣ земли*" первый открылъ истинные общіе законы равновѣсія жидкой массы, исходя изъ очевиднаго соображенія относительно равновѣсіи какого-угодно отдѣльнаго безконечно-малаго столбца; пользуясь этимъ непогрѣшимымъ критеріемъ, онъ показалъ, что можетъ существовать безконечное число случаевъ, въ которыхъ наблюдается совокупность условій, требуемыхъ Бугеровъ, а равновѣсіе все таки не имѣетъ мѣста.

Съ тѣхъ поръ какъ трудъ Клэро положилъ основаніе совокупности раціональной гидростатики, многіе великіе геометры, продолжая примѣнять тотъ же общій пріемъ, старались установить математическую теорію равновѣсія жидкихъ тѣлъ на болѣе естественныхъ и ясныхъ соображеніяхъ, чѣмъ тѣ, которыми пользовался знаменитый творецъ ея. Въ этомъ отношеніи нужно главнымъ образомъ отмѣтить труды Маклорена и особенно Эйлера, сообщившіе этой основной теоріи простую и правильную форму, которая до сихъ поръ сохраняется во всѣхъ обыкновенныхъ курсахъ: они основали ее на принципѣ равенства давленія во всѣхъ направленіяхъ, принципѣ, на который можно смотрѣть, какъ на общій законъ, указанный наблюденіемъ относительно статическаго состоянія жидкихъ тѣлъ.

Этотъ принципъ, въ дѣйствительности, несомнѣнно самый удобный изъ всѣхъ, какіе можно ввести въ подобное изслѣдованіе, если желательно установить прямо, при помощи соображеній, относящихся исключительно къ жидкимъ тѣламъ, теорію ихъ равновѣсія, такъ онъ даетъ непосредстренно и съ чрезвычайной легкостью общія уравненія равновѣсія. Чтобы составить ихъ возможно проще, достаточно, представивъ себѣ что жидкая масса раздѣленая на кубическія частицы тремя рядами безконечно близкихъ плоскостей, параллельныхъ тремъ плоскостямъ координатъ, выразить, что каждая частица испытываетъ отъ всѣхъ силъ системы одинаковое давленіе по направленію трехъ осей, перпендикулярныхъ къ ея гранямъ, такъ какъ давленіе частицы въ каждомъ направленіи равняется разности давленій, производимыхъ на соотвѣтствующія двѣ противоположныя грани. Такимъ образомъ оказывается что математическій законъ равновѣсія какой угодно жидкости, какія бы силы на нее ни дѣйствовали, выражается тремя уравненіями:

$$\frac{dP}{dx}=pX,\quad \frac{dP}{dy}=pY,\quad \frac{dP}{dz}=pZ,$$

гдѣ P выражаетъ давленіе, испытываемое частицей, координаты которой суть x, y, z, а p—плотность или удѣльный вѣсъ ея; X, Y, Z обозначаютъ суммы силъ, дѣйствуютъ на тѣло по направленію трехъ осей координатъ.

Очевидно, изъ совокупности этихъ трехъ уравненій можно вывести для опредѣленія давленія въ каждой точкѣ формулу

$$P=\int p\,(Xdx+Ydy+Zdz)$$

для случая, когда силы, а также и законъ измѣненія плотности, извѣстны. Можно придать и другую аналитическую форму общему закону равновѣсія жидкихъ тѣлъ, ограничиваясь указаніемъ на то, что дифференціальная функція, помѣщенная здѣсь подъ знакомъ интеграла, должна удовлетворять извѣстнымъ условіямъ интегрируемости относительно трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, что и представляетъ въ точности весьма простое выраженіе, найденное первоначально Клэро въ математической теоріи гидростатики.

Изученіе равновѣсія жидкихъ тѣлъ постоянно даетъ мѣсто новому очень важному общему вопросу, относящемуся именно къ жидкимъ тѣламъ; вопросъ этотъ заключается въ опредѣленіи формы поверхности, ограничивающей жидкую массу въ случаѣ равновѣсія. Абстрактное рѣшеніе этой задачи неявно заключается въ предшествующей основной формулѣ, такъ какъ, очевидно, достаточно предположить, что давленіе равняется нулю или, по крайней мѣрѣ, постоянно, чтобы охарактеризовать точки поверхности; тогда для общаго дифференціальнаго уравненія этой поверхности получается:

$$Xdx + Ydy + Zdz = O.$$

Вся дѣйствительная трудность сводится по существу въ каждомъ случаѣ къ опредѣленію истиннаго закона измѣненія плотности внутри данной жидкой массы, если только она не однородна; такое опредѣленіе представляетъ въ наиболѣе важныхъ примѣненіяхъ совершенно неопреодолимыя препятствія. Но если оставить этихъ вопросъ въ сторонѣ, то задача будетъ уже представлять изъ себя только болѣе или менѣе сложное аналитическое изслѣдованіе, заключающееся въ интегрированіи предшествующаго уравненія, до сихъ поръ еще большею частью невыполненномъ. Слѣдуетъ, однако замѣтить, что это уравненіе, по своей природѣ, обладаетъ достаточною общностью, чтобы его можно было примѣнить даже къ равновѣсію жидкой массы, подверженной опредѣленному вращательному движенію, какъ этого требуется въ знаменитомъ вопросѣ о формѣ планетъ. Достаточно въ этомъ случаѣ въ числѣ силъ данной системы считать и центробѣжныя силы, возникающія изъ этого вращательнаго движенія.

Таковъ, въ краткихъ чертахъ, общій пріемъ установленія математической теоріи равновѣсія жидкихъ тѣлъ, если основывать ее прямо на статическихъ принципахъ, относящихся къ тѣламъ этого рода. Понятно, какъ я уже указывалъ выше, что сначала геометры должны были примѣнять только одинъ этотъ методъ: при первыхъ изслѣдованіяхъ необходимо должно было казаться, что характерная разница между твердыми и жидкими тѣлами слишкомъ значительна, чтобы кто-нибудь изъ геометровъ рѣшился примѣнять къ послѣднимъ общіе принципы, предназначенные только для твердыхъ тѣлъ, принявъ лишь во вниманіе при этомъ выводѣ нѣкоторыя новыя специальныя условія.

Но когда основные законы статики были, наконецъ, получены, и умъ человѣческій, разрѣшивъ трудную задачу установленія этихъ законовъ, могъ правильно взвѣсить дѣйствительную разницу между теоріей жидкихъ и твердыхъ тѣлъ, то стало, наоборотъ, невозможнымъ, чтобы онъ вовсе не попытался свести обѣ теоріи къ однимъ и тѣмъ же по существу своему принципамъ и чтобы онъ не призналъ, говоря вообще, необходимой примѣнимости основныхъ правилъ статики къ равновѣсію жидкихъ тѣлъ, если только принять надлежащимъ образомъ во вниманіе характеризующую ихъ измѣнчивость формы.

Однимъ словомъ, наука не могла оставаться въ этомъ отношеніи въ своемъ первоначальномъ состояніи, когда условіямъ, свойственнымъ жидкимъ тѣламъ, приписывали явно преувеличенное значеніе. Но для того, чтобы подчинить гидростатику статикѣ въ собственномъ смыслѣ и такимъ образомъ увеличить, благодаря большему единству, теоретическое совершенство науки, было необходимо разсмотрѣть абстрактную теорію равновѣсія на основаніи достаточно общаго принципа статики, который одинъ могъ бы быть прямо примѣненъ какъ къ жидкимъ, такъ и къ твердымъ тѣламъ, ибо въ этомъ случаѣ нельзя было бы прибѣгнуть къ уравненіямъ равновѣсія въ собственномъ смыслѣ, при которыхъ, по необходимости, всегда болѣе или менѣе принималась во вниманіе неизмѣняемость системы.

Это необходимое условіе было выполнено, когда Лагранжъ пришелъ къ обоснованію статики, а затѣмъ и всей раціональной механики, на одномъ только принципѣ возможныхъ скоростей. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что этотъ принципъ, по самой своей природѣ, такъ же прямо приложимъ къ жидкимъ тѣламъ, какъ и къ твердымъ, и въ этомъ заключается одно изъ наиболѣе цѣнныхъ его качествъ.—Съ этихъ поръ гидростатика была поставлена на принадлежащее ей въ философскомъ отношеніи мѣсто, и въ курсѣ Лагранжа она составляла только второстепенное подраздѣленіе статики.

Хотя такой способъ пониманія статики до сихъ поръ не могъ еще получить достаточную извѣстность, и понынѣ примѣняется одинъ прямой гидростатическій методъ, однако несомнѣнно, что въ концѣ концовъ вездѣ исключительно будетъ принятъ методъ Лагранжа, такъ какъ онъ одинъ придаетъ наукѣ ея истинный законченный характеръ, приводя всю ее къ единому принципу.

Чтобы ясно представить себѣ, какимъ образомъ вообще принципъ возможныхъ скоростей можетъ привести къ основнымъ уравненіямъ равновѣсія жидкихъ тѣлъ, достаточно замѣтить, что вся особенность такого примѣненія указаннаго принципа заключается только въ томъ, что въ число силъ системы слѣдуетъ включить одну новую силу—давленіе, испытываемое каждой частицей; благодаря этому въ общее уравненіе войдетъ однимъ членомъ больше или, говоря точнѣе, будутъ имѣть мѣсто три новыхъ возможныхъ момента, если разсматривать въ отдѣльности—какъ и слѣдуетъ дѣлать—варьяціи, относящіяся къ каждой изъ трехъ осей координатъ.

Поступая такимъ образомъ, можно немедленно получить три общихъ уравненія равновѣсія жидкихъ тѣлъ, которыя были найдены выше на основаніи гидростатическаго метода въ собственномъ смыслѣ. Если разсматриваемое тѣло капельно-жидкое, то систему надо считать подчиненною тому характерному условію, что тѣло можетъ мѣнять свою форму, но вмѣстѣ съ тѣмъ никогда не измѣнитъ своего объема. Это условіе несжимаемости тѣмъ естественнѣе войдетъ въ общее уравненіе возможныхъ скоростей, что оно можетъ быть непосредственно выражено—какъ это и сдѣлалъ Лагранжъ,—въ аналитической формѣ, аналогичной формѣ прочихъ членовъ этого уравненія, если указать, что варьяція объема равняется нулю; это обстоятельство и позволило Лагранжу представить себѣ абстрактно несжимаемость, какъ результатъ дѣйствія извѣстной новой силы; достаточно затѣмъ присоединить возможный моментъ послѣдней силы къ моментамъ прочихъ силъ системы.

Чтобы, наоборотъ, установить теорію равновѣсія для газообразныхъ жидкостей, надо замѣнить условія несжимаемости закономъ, заставляющимъ объемъ газообразнаго тѣла измѣняться въ опредѣленной зависимости отъ давленія, — напримѣръ, обратно пропорціонально этому давленію, согласно закону физики, на которомъ Маріоттъ основалъ всю механику газовъ. Это новое обстоятельство даетъ мѣсто уравненію, аналогичному уравненію капельно-жидкихъ тѣлъ, хотя и болѣе сложному. Однако и этотъ послѣдній отдѣлъ общей теоріи равновѣсія, кромѣ свойственныхъ ему значительныхъ аналитическихъ трудностей, по необходимости будетъ страдать въ своихъ приложеніяхъ вслѣдствіе неизвѣстности, въ которой мы еще находимся относительно истиннаго закона, выражающаго дѣйствительно плотность газа какъ функцію давленія, такъ какъ законъ Маріотта, столь важный по своей крайней простотѣ, къ сожалѣнію, надо считать только за приближеніе, достаточно точное для среднихъ обстоятельствъ, но недопускающее безошибочнаго распространенія на всякій случай.

Таковъ основной характеръ безспорно самаго раціональнаго метода, которой можно примѣнить для составленія абстрактной теоріи равновѣсія жидкихъ тѣлъ; мы должны смотрѣть на него, особенно въ этомъ трудѣ, какъ на методъ, отнынѣ окончательно устанавливающій точку зрѣнія на гидростатику; эта точка зрѣнія окажется тѣмъ болѣе философской, что, обсуждая на основаніи ея всю статику, мы найдемъ рядъ случаевъ, нѣкоторымъ образомъ промежуточныхъ между твердыми и жидкими тѣлами, — именно случаи, когда разсматриваются вопросы, относящіеся къ твердымъ тѣламъ, способнымъ до извѣстной степени измѣнять форму на основаніи опредѣленныхъ законовъ, т. е. когда принимаются въ разсчетъ гибкость и упругость; такимъ образомъ въ аналитическомъ отношеніи устанавливается естественное распредѣленіе вопросовъ, заставляющее переходить въ почти незамѣтной послѣдовательности отъ изслѣдованія системъ, форма которыхъ строго неизмѣнна, къ системамъ, форма которыхъ, напротивъ, чрезвычайно измѣнчива.

Мы вкратцѣ разсмотрѣли, какимъ образомъ раціональная статика, во всей совокупности, была доведена до столь высокой степени теоретическаго совершенства, что всѣ вопросы, которые могутъ въ ней представиться, и которые изслѣдуются всегда на основаніи единаго непосредственно-устанавливаемаго принципа, единообразно сводятся къ простымъ задачамъ математическаго анализа. Теперь мы должны обратиться къ подобному же изученію послѣдняго отдѣла общей механики, содержащаго теорію движенія, — отдѣла, по необходимости болѣе обширнаго, болѣе сложнаго и, слѣдовательно, болѣе труднаго; послѣдняя теорія и будетъ предметомъ слѣдующей лекціи.

Семнадцатая лекція.

Общій обзоръ динамики.

Предметъ динамики, какъ мы уже видѣли, заключается по существу въ изученіи перемѣнныхъ движеній, производимыхъ *непрерывными силами*; вся же теорія равномѣрныхъ движеній, обязанныхъ своимъ происхожденіемъ *мгновеннымъ* силамъ, представляетъ собою лишь простой непосредственный выводъ изъ трехъ основныхъ законовъ движенія Въ динамикѣ перемѣнныхъ движеній или непрерывныхъ силъ различаютъ обыкновенно, и вполнѣ основательно, два общихъ случая: случай движенія точки и движенія тѣла. Съ точки зрѣнія наиболѣе положительной, это различіе заключается только въ представленіи, что въ извѣстныхъ случаяхъ всѣ части тѣла безусловно совершаютъ одинаковое движеніе; и тогда, дѣйствительно, достаточно опредѣлить движеніе одной только частицы, ибо каждая изъ нихъ движется такъ, какъ будто бы она была изолирована,—безъ всякаго отношенія къ связямъ системы; но въ самомъ общемъ случаѣ каждая часть тѣла или каждое тѣло системы совершаетъ различное движеніе; поэтому нужно изслѣдовать различныя обстоятельства и опредѣлить вліяніе, оказываемое на нихъ соотношеніями, характеризующими разсматриваемую систему.

Второй случай, очевидно, сложнѣе перваго, и поэтому спеціальное изученіе динамики необходимо слѣдуетъ начать именно съ первой, даже если выводить обѣ теоріи изъ однообразныхъ принциповъ. Таковъ также и порядокъ, который мы приняли здѣсь для изложенія нашихъ философскихъ соображеній.

Относительно движенія точки мы знаемъ уже, что общій вопросъ заключается въ точномъ опредѣленіи всѣхъ обстоятельствъ сложнаго криволинейнаго движенія, возникающихъ вслѣдствіе одновременнаго дѣйствія различныхъ непрерывныхъ силъ,—въ предположеніи, что вполнѣ извѣстно прямолинейное движеніе, которое получило бы тѣло подъ исключительнымъ вліяніемъ каждой силы, разсматриваемой въ отдѣльности. Равнымъ образомъ мы показали, что эту задачу, какъ и всякую другую, можно разсматривать и въ обратномъ смыслѣ, поставивъ себѣ цѣлью, наоборотъ, узнать, исходя изъ непосредственно данныхъ характерныхъ обстоятельствъ сложнаго движенія, какія именно силы дѣйствуютъ на тѣло.

Но прежде чѣмъ войти въ философское изслѣдованіе этихъ двухъ общихъ задачъ, мы должны остановить предварительно наше вниманіе на одной очень важной теоріи,—на теоріи перемѣннаго движенія, разсматриваемаго самостоятельно, — иначе говоря, слѣдуя обычному способу выраженія,—на теоріи прямолинейнаго движенія, вызваннаго одной непрерывной силой, дѣйствующей постоянно по одному и тому же направленію. Эта элементарная теорія необходима для установленія основныхъ понятій, которыя безпрестанно являются вновь во всѣхъ частяхъ динамики. Въ соотвѣтствіи съ нашимъ способомъ изложенія раціональной механики, указанная теорія по существу заключается въ слѣдующемъ.

Какъ мы замѣтили уже раньше, въ прямомъ вопросѣ динамики необходимо слѣдуетъ считать извѣстнымъ дѣйствіе каждой отдѣльной силы, такъ что дѣйствительно неизвѣстнымъ въ общей задачѣ остается подлежащій опредѣленію результатъ совмѣстнаго дѣйствія всѣхъ силъ. Такое замѣчаніе неоспоримо. Но тогда что же можетъ служить предметомъ изученія этой вступительной части динамики, предназначенной для изученія движенія, являющагося результатомъ дѣйствія одной непрерывной силы? Это кажущееся противорѣчіе происходитъ отъ недостаточной точности общепринятыхъ выраженій, благодаря которымъ подобный вопросъ можетъ показаться самостоятельнымъ и прямымъ, такъ-же какъ и истинные вопросы динамики, тогда какъ въ дѣйствительности онъ представляетъ собою только предварительную задачу. Чтобы ясно понять его истинный характеръ, надо замѣтить, что перемѣнное движеніе, вызываемое одной непрерывной силой, можетъ быть опредѣлено многими способами, находящимися въ зависимости другъ отъ друга; слѣдовательно, эти способы никогда не могутъ быть даны одновременно, хотя каждый изъ нихъ въ отдѣльности можетъ оказаться наиболѣе удобнымъ; отсюда вытекаетъ необходимость умѣть переходить въ общемъ видѣ отъ одного способа ко всѣмъ другимъ: въ этихъ то преобразованіяхъ собственно говоря и заключается общая предварительная теорія перемѣннаго движенія, которую называютъ очень неточно теоріей дѣйствія одной единственной силы.

Различныя равносильныя опредѣленія одного и того же перемѣннаго движенія вытекаютъ изъ одновременнаго разсмотрѣнія трехъ основныхъ совершенно различныхъ, хотя и связанныхъ одна съ другой, функцій, относящихся къ такому движенія: пространства, скорости и силы, разсматриваемыхъ въ зависимости отъ времени. Законъ движенія можетъ быть данъ непосредственно соотношеніемъ между пройденнымъ пространствомъ и протекшимъ временемъ, и тогда важно вывести отсюда *пріобрѣтенную* движущимся тѣломъ для каждаго момента времени *скорость* —т. е. скорость того равномѣрнаго движенія, которое имѣло бы тѣло, если непрерывная сила вдругъ перестала бы дѣйствовать, и тѣло стало бы двигаться, согласно съ закономъ инерціи, только вслѣдствіе естественнаго стремленія продолжать движеніе, являющееся результатомъ уже выполненнаго движенія; одинаково интересно было бы также опредѣлить, какова въ каждый моментъ времени величина непрерывной силы въ сравненіи съ постоянной, хорошо извѣстной намъ силой ускоренія, какою напримѣръ, является земная тяжесть,—единственная сила этого рода, достаточно намъ знакомая, чтобы постоянно служить удобнымъ образцомъ для сравненія. Въ другихъ случаяхъ, напротивъ, движеніе естественно можетъ быть опредѣлено съ помощью закона измѣненія скорости въ зависимости отъ времени, на основаніи котораго слѣдуетъ вывести измѣненіе пространства, а также и силы въ зависимости отъ времени. Тотъ же вопросъ возникалъ бы, если бы первоначальное опредѣленіе закона движенія состояло въ законѣ измѣненія непрерывной силы, который можетъ иногда быть выраженъ въ функціи времени, а иногда и въ функціи пространства,—какъ напримѣръ, когда вопросъ идетъ о всемірномъ тяготѣніи,—или, въ другихъ случаяхъ, въ функціи скорости, что, какъ мы видѣли, имѣетъ мѣсто для сопротивленія среды. Наконецъ, если разсматривать вопросы такого рода съ самой широкой точки зрѣнія, то слѣдуетъ принять во вниманіе, что въ общемъ видѣ опредѣленіе перемѣннаго движенія можетъ быть дано какимъ-нибудь уравненіемъ, заключающимъ одновременно четыре указанныя перемѣнныя—время, пространство, скорость и силу, изъ которыхъ одна только независима. Задача будетъ заключаться въ точномъ опредѣленіи на основаніи этого уравненія трехъ законовъ, характеризующихъ пространство, скорость и силу, а слѣдовательно и ихъ взаимное соотношеніе. Эта общая задача постоянно сводится къ чисто аналитическому изслѣдованію при помощи двухъ основныхъ динамическихъ формулъ, выражающихъ скорость и силу въ функціи времени, если законъ пространства предполагается извѣстнымъ.

Методъ безконечно малыхъ всего легче приводитъ къ указаннымъ двумъ формуламъ. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы ихъ получить, достаточно, согласно съ духомъ этого метода, считать движеніе равномѣрнымъ въ теченіе одного и того же безконечно малаго промежутка времени, и равномѣрно ускореннымъ въ теченіе двухъ послѣдовательныхъ промежутковъ. Тогда скорость, по предположенію для нѣкотораго момента времени постоянная, естественно будетъ выражена дифференціаломъ пространства, дѣленнымъ на дифференціалъ времени; точно также непрерывная сила, на основаніи второго соображенія, будетъ, очевидно, измѣряться отношеніемъ безконечно малаго приращенія скорости ко времени, необходимому для пріобрѣтенія этого приращенія. Такимъ образомъ, если обозначить буквою t протекшее время, e—пройденное пространство, v—пріобрѣтенную скорость и φ—непрерывную силу для каждаго момента времени, то общее необходимое соотношеніе этихъ четырехъ одновременно измѣняющихся перемѣнныхъ будетъ выражено аналитически двумя основными формулами:

$$v = \frac{de}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2e}{dt^2}$$

На основаніи этихъ формулъ всѣ вопросы, относящіеся къ предварительной теоріи перемѣннаго движенія, сводятся непосредственно къ простымъ аналитическимъ изслѣдованіемъ, состоящимъ или изъ дифференцированій, или чаще всего изъ интегрированій. Если разсматривать наиболѣе общій случай, когда первоначальное опредѣленіе движенія задано только однимъ уравненіемъ между четырьмя перемѣнными, то аналитическая задача будетъ заключаться въ интегрированіи одного дифференціальнаго уравненія второго порядка относительно функціи e; это интегрированіе часто можетъ оказаться невыполнимымъ въ виду крайне несовершеннаго состоянія, въ которомъ находится въ настоящее время интегральное исчисленіе.

Основная идея Лагранжа относительно трансцендентнаго анализа по необходимости заставила его лишить себя той помощи, которую приноситъ методъ безконечно-малыхъ для вывода обѣихъ приведенныхъ выше динамическихъ формулъ; онъ принужденъ былъ представить эту теорію съ новой точки зрѣнія, важность которой, какъ мнѣ кажется, не всѣми была достаточно оцѣнена, хотя я думаю, что именно его точка зрѣнія можетъ особенно хорошо разъяснить истинную природу этихъ элементарныхъ понятій. Лагранжъ въ своей *Теоріи аналитическихъ функцій* показалъ, что указанное динамическое соображеніе заключается въ дѣйствительности въ представленіи всякаго перемѣннаго движенія въ каждый моментъ времени, какъ результата извѣстнаго равномѣрнаго движенія и другого равномѣрно-перемѣннаго, причемъ онъ уподобляетъ ихъ вертикальному движенію тяжелаго тѣла, брошеннаго въ началѣ съ нѣкоторымъ толчкомъ.

Чтобы сообщить этой блестящей идеѣ все ея философское значеніе, я считаю нужнымъ представить ее съ болѣе широкой точки зрѣнія, чѣмъ это сдѣлалъ Лагранжъ, и дать мѣсто полной теоріи уподобленія движеній, совершенно подобной общей теоріи касанія кривыхъ и поверхностей, изложенной въ тринадцатой и въ четырнадцатой лекціяхъ.

Возьмемъ для этой цѣли два какихъ-нибудь прямолинейныхъ движенія, опредѣляемыхъ уравненіями $e=f(t)$, $E=F(t)$; пусть оба движущіяся тѣла приходитъ къ концу времени t въ одно и тоже положеніе; разсмотримъ ихъ взаимное разстояніе послѣ извѣстнаго промежутка времени $t+h$. Это разстояніе, равное разности соотвѣтствующихъ значеній функцій f и F, очевидно, выразится, на основаніи формулы Тэйлора, рядомъ:

$$\Big[f'(t)-F'(t)\Big]\,h+\Big[f''(t)-F''(t)\Big]\,\frac{h^2}{1.2}+\Big[f'''(t)-F'''(t)\Big]\,\frac{h^3}{1.2.3}+\text{и т. д.}$$

При помощи этого ряда можно, на основаніи соображеній, совершенно аналогичныхъ примѣненнымъ въ теоріи кривыхъ, составить себѣ ясное представленіе о болѣе или менѣе близкомъ подобіи двухъ движеній, въ зависимости отъ болѣе или менѣе тѣсныхъ соотношеній между первоначальными функціями f и F.

Если ихъ производныя перваго порядка имѣютъ одно и то же значеніе, то между двумя движеніями будетъ существовать соотношеніе, которое можно назвать *подобіемъ перваго порядка*,—аналогично съ касаніемъ перваго порядка кривыхъ; конкретно можно охарактеризовать такое подобіе, сказавъ, что въ этомъ случаѣ движеніе обоихъ тѣлъ будетъ одно и тоже въ теченіе безконечно малаго промежутка времени.

Если, кромѣ того, еще обѣ производныя второго порядка примутъ одно и то же значеніе, то подобіе движеній будетъ болѣе близкимъ, оно повысится до второго порядка; физически въ этомъ случаѣ подобіе будетъ состоять въ томъ, что оба движущіяся тѣла будутъ имѣть одно и тоже движеніе въ теченіе двухъ послѣдовательныхъ безконечно малыхъ промежутковъ времени. Подобно этому, присоединяя къ этимъ двумъ первымъ соображеніямъ равенство третьихъ производныхъ, мы установимъ между разсматриваемыми движеніями *подобіе третьяго порядка*, при которомъ движенія должны совпадать въ теченіе трехъ послѣдовательныхъ моментовъ времени, и такъ до безконечности. Порядокъ подобія двухъ движеній, опредѣляемый аналитически числомъ послѣдовательныхъ производныхъ функцій, имѣющихъ соотвѣтственно одинаковое значеніе, конечно будетъ всегда выражаться совпаденіемъ положеній обоихъ движущихся тѣлъ въ теченіе такого же числа послѣдовательныхъ промежутковъ времени; какъ мы видѣли, порядокъ касанія кривыхъ измѣряется подобнымъ же образомъ совпаденіемъ соотвѣтствующаго числа послѣдовательныхъ элементовъ. Если аналитическое выраженіе закона, характеризующаго одно изъ данныхъ движеній, содержитъ нѣкоторыя произвольныя постоянныя, то его можно *сдѣлать подобнымъ* какому-нибудь другому движенію до *порядка*, указываемаго числомъ этихъ произвольныхъ постоянныхъ; послѣднія опредѣлятся тогда изъ уравненій, которыя должны, на основаніи предшествующей теоріи, установить порядокъ близости обоихъ движеній.

Эта основная идея заставляетъ насъ считать возможнымъ, по крайней мѣрѣ съ точки зрѣнія абстрактной, все глубже и глубже ознакомиться съ какимъ угодно перемѣннымъ движеніемъ, сравнивая его послѣдовательно съ рядомъ извѣстныхъ движеній, аналитическое выраженіе закона которыхъ зависитъ отъ все большаго и большаго числа произвольныхъ постоянныхъ и которыя, поэтому, могутъ совпадать съ нимъ на все болѣе и болѣе продолжительное время.

Но какъ мы видѣли раньше общая теорія касанія линій, при приложеніи ея къ измѣренію кривизны однѣхъ кривыхъ съ помощью кривизны другихъ, въ дѣйствительности должна сводиться къ сравненію какой-нибудь кривой сначала съ прямою линіей, а затѣмъ съ окружностью, такъ какъ только эти двѣ линіи можно считать достаточно извѣстными, чтобы съ пользою служить образцомъ для сравненія другихъ линій; подобно этому динамическая теорія, относящаяся къ измѣренію однихъ движеній другими, въ дѣйствительности должна быть ограничена фактическимъ сравненіемъ всякаго перемѣннаго движенія сначала съ равномѣрнымъ, гдѣ пространство пропорціонально времени, а затѣмъ съ равномѣрно ускореннымъ движеніемъ, въ которомъ пространство возрастаетъ пропорціонально квадрату времени, или же наконецъ, чтобы сразу принять въ соображеніе всѣ обстоятельства—съ движеніемъ, сложеннымъ изъ равномѣрнаго движенія и движенія равномѣрно ускореннаго, каково напр. движеніе тяжелаго тѣла, пущеннаго начальнымъ толчкомъ. Въ самомъ дѣлѣ, эти два элементарныя движенія, какъ замѣчаетъ Лагранжъ, единственныя, которыхъ мы въ дѣйствительности достаточно хорошо знаемъ, чтобы съ успѣхомъ примѣнять ихъ для измѣренія всѣхъ другихъ движеній. Установивъ такое подобіе, на основаніи предшествующей теоріи мы находимъ, что всякое перемѣнное движеніе можно въ любой моментъ сравнить съ движеніемъ тяжелаго тѣла, получившаго начальную скорость, равную первой производной пройденнаго пространства, разсматриваемаго какъ функція протекшаго времени, и подверженнаго дѣйствію тяжести, измѣряемой второй производной той же самой функціи; такимъ образомъ мы приходимъ къ двумъ основнымъ формуламъ, полученнымъ выше по методу безконечно малыхъ. Данное движеніе совпадаетъ въ теченіе безконечно малаго промежутка времени съ равномѣрнымъ движеніемъ, указаннымъ въ первой части этого сравненія, а въ теченіе двухъ послѣдовательныхъ моментовъ оно совпадаетъ съ равномѣрно перемѣннымъ движеніемъ, соотвѣтствующимъ второй части. Такимъ образомъ можно составить себѣ ясное представленіе о положеніи движущагося тѣла въ каждый моментъ времени и о порядкѣ измѣненія этого положенія съ одного момента времени до другого, чего вполнѣ достаточно. Хотя идея Лагранжа, въ томъ обобщенномъ видѣ, въ которомъ я ее представилъ, приводитъ, въ концѣ концовъ, къ тѣмъ же самымъ результатамъ, какъ и обыкновенная теорія, однако легко понять ея теоретическое превосходство, такъ какъ изложенныя двѣ основныя теоремы, въ которыхъ до сихъ поръ видѣли абсолютный предѣлъ усилій человѣческаго ума относительно изученія перемѣнныхъ движеній, могутъ быть разсматриваемы теперь какъ простое частное примѣненіе очень общаго метода, позволяющаго намъ видѣть абстрактно гораздо болѣе совершенный способъ измѣренія перемѣннаго движенія, хотя весьма сильныя соображенія практическаго характера заставляютъ насъ разсматривать только первоначально принятый способъ измѣренія.

На основаніи предыдущаго понятно, что если бы природа дала намъ простой и близкій примѣръ прямолинейнаго движенія, въ которомъ пространство возрастало бы пропорціонально кубу времени, прибавляя такимъ образомъ къ нашимъ обыкновеннымъ динамическимъ понятіямъ привычное представленіе объ этомъ движеніи, то мы глубже ознакомились бы съ природой какого-угодно перемѣннаго движенія, которое могло бы тогда имѣть съ сложеннымъ такимъ образомъ тройнымъ движеніемъ подобіе третьяго порядка; это позволило бы намъ прямо, чисто умозрительнымъ путемъ, разсматривать положеніе движущагося тѣла въ теченіе трехъ послѣдовательныхъ моментовъ времени, тогда какъ теперь мы принуждены останавливаться на двухъ.

Въ аналитическомъ отношеніи, этотъ методъ заставилъ бы насъ, вмѣсто того, чтобы ограничиваться первыми двумя производными функціями пространства по времени, разсматривать одновременно и третью производную, которая имѣла бы тогда также динамическое значеніе, въ настоящее время съ нею не связанное. Въ этомъ предположеніи, подобно тому, какъ мы вводимъ обыкновенно ускорительную силу, чтобы представить себѣ измѣненія скорости, мы имѣли бы также и динамическое соображеніе, которое давало бы представленіе объ измѣненіи непрерывной силы.

Наше общее изученіе перемѣнныхъ движеній было бы еще болѣе совершеннымъ, если бы, расширяя указанную гипотезу, мы предположили, что кромѣ того намъ извѣстенъ случай движенія, въ которомъ пространство было бы пропорціонально четвертой степени времени, и т. д. Но въ дѣйствительности изъ всѣхъ простыхъ движеній, въ которыхъ пройденное пространство возрастаетъ пропорціонально цѣлой и положительной степени протекшаго времени, наблюденіе знакомитъ насъ только съ равномѣрнымъ движеніемъ, вызваннымъ однимъ толчкомъ, и движеніемъ равномѣрно-ускореннымъ, являющимся, какъ открылъ Галилей, результатомъ дѣйствія земной тяжести; поэтому при разсмотрѣніи изложенной выше теоріи общаго измѣренія какихъ угодно перемѣнныхъ движеній мы должны остановиться на двухъ первыхъ порядкахъ. Таково истинно философское объясненіе всѣми принятаго метода, оцѣненнаго сообразно съ его дѣйствительнымъ значеніемъ.

Я считалъ нужнымъ настаивать на приведеннымъ выше объясненіи, такъ какъ его основная идея, мнѣ кажется, не оцѣнена еще надлежащимъ образомъ, хотя она и служитъ исходнымъ пунктомъ всей динамики.

Послѣ общаго изслѣдованія указанной важной вступительной теоріи, я перехожу теперь къ краткому прямому разсмотрѣнію философскаго характера истинной раціональной динамики,—иначе говоря, къ изученію криволинейнаго движенія, вызваннаго совмѣстнымъ дѣйствіемъ различныхъ непрерывныхъ силъ; при этомъ я сначала буду продолжать предполагать, что на движущееся тѣло мы смотримъ какъ на точку, или,—что приводится къ тому же—что всѣ частицы тѣла совершаютъ одно и тоже движеніе, и потому каждая въ отдѣльности движется безъ всякаго стѣсненія связями съ остальными частицами.

Въ криволинейномъ движеніи частицы, подверженной дѣйствію какихъ-нибудь силъ, слѣдуетъ различать, вообще говоря, два весьма различныхъ случая: вполнѣ ли точка свободна и потому должна ли она описывать только такую траекторію, которая является естественнымъ результатомъ комбинаціи данныхъ силъ, или же, наоборотъ, она принуждена двигаться лишь по одной кривой или по данной поверхности. Основная теорія криволинейнаго движенія во всей совокупности можетъ быть установлена съ помощью двухъ очень различныхъ пріемовъ въ зависимости отъ того, взять ли за исходную точку тотъ или другой изъ этихъ случаевъ: каждый изъ нихъ можно разсматривать прямо, и каждый можетъ быть выведенъ изъ другого; оба пріема почти одинаково естественны, смотря потому, какую точку зрѣнія мы примемъ при разсужденіи.

Если исходить изъ перваго случая, то для того, чтобы вывести изъ него второй, достаточно разсматривать активное и пассивное сопротивленіе кривой или поверхности, на которой принуждено оставаться тѣло, какъ новую силу и присоединить къ прочимъ силамъ данной системы, что, какъ мы видѣли, и дѣлаютъ обыкновенно въ статикѣ. Если же, напротивъ, предпочитаютъ установить сначала теорію, соотвѣтствующую второму случаю, то тотчасъ же можно привести къ ней первый случай, принимая во вниманіе, что движущееся тѣло должно описывать именно ту кривую, которую оно описываетъ на самомъ дѣлѣ; это указанія будетъ вполнѣ достаточно для составленія основныхъ уравненій, несмотря на то, что эта кривая была бы тогда сначала неизвѣстна. Хотя этотъ послѣдній пріемъ обыкновенно вовсе не примѣняется, но мнѣ кажется, здѣсь слѣдовало бы описать оба метода, чтобы дать по возможности полное и правильное представленіе объ общей теоріи криволинейнаго движенія; каждый изъ этихъ методовъ, по моему мнѣнію, обладаетъ важными преимуществами, ему только свойственными. Разсмотримъ прежде первый изъ нихъ.

Изслѣдуя сначала криволинейное движеніе совершенно свободной частицы, подверженной дѣйствію какихъ-нибудь непрерывныхъ силъ, мы можемъ составить основныя уравненія этого движенія двумя различными пріемами, выводя ихъ двумя различными способами изъ теоріи прямолинейнаго движенія. Первый способъ, особенно часто примѣнявшійся геометрами первоначально, хотя въ аналитическомъ отношеніи и не самой простой, состоитъ въ разложеніи для каждаго момента равнодѣйствующей непрерывныхъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, на двѣ силы, изъ которыхъ одна направлена по касательной къ траекторіи, описываемой тѣломъ, а другая—по нормали. Будемъ теперь разсматривать движеніе въ теченіе безконечно малаго промежутка времени какъ прямолинейное и совершающееся по направленію касательной, на основаніи перваго основнаго закона движенія. Поступательное движеніе въ этомъ направленіи обязано своимъ происхожденіемъ, очевидно, только первой изъ двухъ составляющихъ силъ; къ нему, слѣдовательно, можно будетъ примѣнить элементарную формулу, приведенную выше для прямолинейнаго движенія. Эта составляющая, равная, съ другой стороны, всей ускоряющей силѣ, помноженной на косинусъ угла наклоненія ея къ касательной, выразится второй производной дуги кривой по времени. Разлагая послѣднее уравненіе при помощи извѣстныхъ намъ георметрическихъ формулъ и вводя въ вычисленіе составляющія всей ускоряющей силы, параллельныя тремъ прямоугольнымъ осямъ координатъ, мы въ концѣ концовъ придемъ къ тремъ обычнымъ основнымъ уравненіямъ криволинейнаго движенія.

Второй способъ, болѣе простой и болѣе правильный, принадлежитъ Эйлеру и послѣ него былъ принятъ повсюду; онъ заключается въ непосредственномъ составленіи этихъ уравненій путемъ прямого разложенія движенія тѣла въ каждый моментъ времени, а также и всей непрерывной силы, дѣйствію которой оно подвержено, на три другія движенія, направленныя по тремъ осямъ координатъ. Вслѣдствіе третьяго основного закона движенія, движеніе по направленію каждой оси не зависитъ отъ движеній по направленію остальныхъ двухъ осей, и происходитъ только отъ составляющей всѣхъ ускоряющихъ силъ, параллельной этой оси; такимъ образомъ криволинейное движеніе постоянно замѣняется системой трехъ прямолинейныхъ движеній, и къ каждому изъ нихъ можно тотчасъ примѣнить предварительную динамическую теорію, изложенную выше. Если обозначить черезъ X, Y, Z полныя составляющія, параллельныя тремъ осямъ x, y, z, то для непрерывныхъ силъ, дѣйствующихъ въ каждый моментъ времени на частицу, координаты которой суть x, y, z, непосредственно получатся уравненія

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Пользуясь первымъ методомъ, эти формулы можно получить только при помощи довольно длиннаго вычисленія.

Таковы основныя дифференціальныя уравненія криволинейнаго движенія, на основаніи которыхъ какіе угодно вопросы динамики, относящіеся къ тѣлу, всѣ частицы котораго имѣютъ совершенно одинаковыя движенія, приводятся непосредственно къ чисто аналитическимъ задачамъ, если только данныя выражены надлежащимъ образомъ. Разсматривая сначала общій прямой вопросъ, представляющій наибольшую важность, геометры ставятъ себѣ цѣлью опредѣлить всѣ обстоятельства дѣйствительнаго движенія тѣла, зная законъ непрерывныхъ силъ, дѣйствію которыхъ оно подвержено. Для этого, въ какой бы формѣ ни былъ данъ этотъ законъ,—въ функціи ли времени, или координатъ, или скорости,—достаточно, вообще говоря, проинтегрировать три указанныя уравненія второго порядка; здѣсь возникнутъ, однако, болѣе или менѣе значительныя затрудненія, которыя, благодаря несовершенству интегральнаго исчисленія, часто окажутся непреодолимыми. Шесть произвольныхъ постоянныхъ, вводимыхъ послѣдовательно при этомъ интегрированіи, опредѣлятся, если принять затѣмъ во вниманіе условія начальнаго положенія движущагося тѣла, которое не можетъ оставить никакого слѣда въ самихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ. Такимъ образомъ получатся три координаты тѣла въ функціи времени, такъ что можно будетъ точно опредѣлить его положеніе въ каждый моментъ; затѣмъ уже, если исключить время изъ этихъ трехъ выраженій, получатся еще два уравненія, опредѣляющія кривую, которую тѣло описываетъ. Что же касается скорости, пріобрѣтенной тѣломъ въ какой-нибудь моментъ времени, то тогда и ее можно будетъ опредѣлить съ помощью значеній трехъ ея составляющихъ по направленію осей $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. По этому поводу полезно замѣтить, что эту скорость v часто можно будетъ непосредственно вычислить при помощи очень простой комбинаціи трехъ основныхъ дифференціальныхъ уравненій, которая очевидно, даетъ слѣдующую общую формулу

$$v^2 = 2\int (Xdx + Ydx + Zdz);$$

благодаря этой формулѣ, одного интегрированія достаточно для прямого опредѣленія скорости, если только выраженіе, стоящее подъ знакомъ $\int$, удовлетворяетъ извѣстнымъ условіямъ интегрируемости по тремъ перемѣннымъ x, y. z, разсматриваемымъ какъ независимыя. Но это обстоятельство, несомнѣнно, не имѣетъ мѣста относительно всѣхъ возможныхъ непрерывныхъ силъ, ни даже для тѣхъ силъ, которыя представляютъ въ дѣйствительности естественныя явленія: такъ напримѣръ, оно не оправдывается для силъ сопротивленія среды, для тренія и, вообще, для всѣхъ силъ, первоначальный законъ которыхъ зависитъ отъ времени или отъ самой скорости. Но тѣмъ не менѣе геометры вполнѣ основательно считали предыдущее замѣчаніе крайне важнымъ для упрощенія аналитическихъ изысканій, къ которымъ сводятся задачи динамики: приведенное условіе оправдывается, какъ это легко доказать, въ весьма распространенномъ частномъ случаѣ, обнимающемъ всѣ обширныя примѣненія раціональной динамики къ небесной механикѣ,—т. е. въ томъ случаѣ, когда всѣ непрерывныя силы, дѣйствію которыхъ подвержено тѣло, направлены къ опредѣленнымъ центрамъ и дѣйствуютъ какъ нѣкоторыя функціи разстоянія тѣла отъ каждаго центра, но независимо отъ направленія.

Если теперь, разсматривая общую теорію криволинейнаго движенія свободной частицы съ другой стороны, мы поставили бы себѣ цѣлью, наоборотъ, опредѣлить, на основаніи обстоятельствъ, характеризующихъ дѣйствительное движеніе, самый законъ ускоряющихъ силъ, способныхъ произвести такое движеніе, то въ аналитическомъ отношеніи задача по необходимости будетъ гораздо проще, такъ какъ по существу она будетъ заключаться только въ дифференцированіи. Въ этомъ случаѣ, при помощи предварительныхъ болѣе или менѣе сложныхъ изслѣдованій, относящихся къ области чисто геометрическихъ соображеній, всегда можно будетъ вывести изъ первоначальнаго опредѣленія даннаго движенія величины трехъ координатъ движущагося тѣла для каждаго момента движеній въ функціи протекшаго времени; затѣмъ ужъ, дифференцируя дважды эти три величины, можно получить составляющія непрерывныхъ силъ по тремъ осямъ, а отсюда непосредственно вывести законъ всей ускоряющей силы, каковы бы она ни была по своей природѣ. Такъ во второй части этого курса мы увидимъ, какимъ образомъ три основныхъ геометрическихъ закона, найденныхъ Кеплеромъ для движенія небесныхъ тѣлъ, составляющихъ нашу солнечную систему, необходимо приводятъ насъ къ закону всемірнаго тяготѣнія, который затѣмъ и становится основаніемъ всей общей механики вселенной.

Установивъ теорію криволинейнаго движенія свободной частицы, мы легко приведемъ къ ней случай, когда частица, напротивъ, должна оставаться на данной кривой. Какъ я уже указывалъ, для этого достаточно въ число непрерывныхъ силъ, дѣйствію которыхъ частица была подвержена первоначально, включить полное сопротивленіе, оказываемое данной кривой, что и позволитъ, очевидно, разсматривать данное тѣло какъ совершенно свободное. Вся трудность этого второго случая сводится по существу къ точному анализу указаннаго сопротивленія.

Для этого слѣдуетъ прежде всего различать въ сопротивленіи кривой двѣ совершенно различныя части, изъ которыхъ одну, для полной ихъ характеристики, можно назвать *статической*, а другую—*динамической*. *Статически* сопротивленіе имѣло бы мѣсто, даже если бы самое тѣло было неподвижно; оно происходитъ отъ давленія, оказываемаго на данную кривую ускоряющими силами, дѣйствующими на тѣло; поэтому статическое сопротивленіе мы получимъ, опредѣливъ составляющую всей непрерывной силы по направленію нормали къ данной кривой въ разсматриваемой точкѣ. Динамическое сопротивленіе имѣетъ совершенно другое происхожденіе; оно порождается только движеніемъ и является результатомъ постояннаго стремленія тѣла покинуть кривую, которую оно должно описывать, и продолжать двигаться, въ силу перваго основного закона движенія, по направленію касательной. Это второе сопротивленіе, которое обнаруживается при переходѣ тѣла отъ одного элемента кривой къ слѣдующему элементу, очевидно, направлено въ каждый моментъ по нормали къ кривой, лежащей въ соприкасающейся плоскости; слѣдовательно, оно можетъ имѣть различное съ статическимъ сопротивленіемъ направленіе, если прямая, по которой дѣйствуетъ полная ускоряющая сила, не лежитъ въ соприкасающейся плоскости. Это динамическое сопротивленіе, вообще, называютъ *центробѣжной* силой, такъ какъ единственныя ускоряющія силы, изслѣдыванныя первоначально геометрами, были силами *центростремительными*, т. е. стремленіемъ къ опредѣленнымъ центрамъ. Что касается величины центробѣжной силы, если считать ее новой ускоряющей силой, то она будетъ измѣряться составляющей по нормали, образуемой въ каждый безконечно малый моментъ времени скоростью тѣла, когда оно переходитъ отъ одного элемента кривой къ другому. Такимъ образомъ, исключивъ вспомогательныя безконечно малыя величины, которыя, естественнымъ образомъ, были введены сначала благодаря указанному соображенію, легко найти, что центробѣжная сила постоянно равна квадрату дѣйствительной скорости движущагося тѣла, дѣленному на соотвѣтствующій радіусъ кривизны данной кривой. Впрочемъ, это основное выраженіе, также какъ и самое направленіе центробѣжной силы, вполнѣ можно было бы получить и вычисленіемъ, вводя предварительно эту силу—въ совершенно неопредѣленномъ видѣ,—въ три общія дифференціальныя уравненія криволинейнаго движенія, приведенныя выше. Но какъ бы то ни было, опредѣливъ динамическое сопротивленіе, слѣдуетъ его сложить надлежащимъ образомъ съ статическимъ сопротивленіемъ, и тогда, вводя все сопротивленіе въ число данныхъ силъ, мы приведемъ задачу непосредственно къ предшествующему случаю. Самый замѣчательный вопросъ въ этой области заключается въ изслѣдованіи колебательнаго движенія тяжелаго тѣла по какой-нибудь кривой (и въ частности по кругу или по циклоидѣ); но философское изслѣдованіе такой задачи, конечно, должно быть отнесено къ той части этого курса, которая касается собственно физики.

Было бы излишне разсматривать здѣсь отдѣльно случай, когда тѣло, вмѣсто обязательства описывать данную кривую, подчинено только условію оставаться на данной поверхности. Этотъ второй случай,—впрочемъ, не имѣющій большого значенія по своимъ примѣненіямъ—приводится къ случаю свободнаго тѣла при помощи такихъ же по существу соображеній. Вся дѣйствительная разница заключается только въ томъ, что траекторія движущаго тѣла не будетъ сначала вполнѣ извѣстной, и для опредѣленія ея необходимо присоединить къ уравненію данной поверхности другое уравненіе, доставляемое динамическимъ изученіемъ задачи.

Разсмотримъ теперь вкратцѣ отмѣченный выше второй общій способъ построенія основной теоріи криволинейнаго движенія отдѣльной частицы, исходя, наоборотъ, изъ того случая, когда частица сначала должна описывать извѣстную кривую.

Вся дѣйствительная трудность заключается здѣсь въ прямомъ доказательствѣ основной теоремы относительно измѣренія центробѣжной силы. Это доказательство, однако, легко найти, разсматривая сначала равномѣрное движеніе тѣла по кругу въ силу начальнаго толчка и безо всякой ускоряющей силы, какъ то сдѣлалъ Гюйгенсъ, которому мы обязаны основаніемъ этой теоріи. Центробѣжная сила тогда, очевидно, пропорціональна синусу-версусу дуги окружности, описываемой въ безконечно малый промежутокъ времени, дѣленному на этотъ промежутокъ; отсюда легко заключить, какъ это замѣтилъ Гюйгенсъ, что сила выражается черезъ квадратъ постоянной скорости, съ которой движущееся тѣло описываетъ окружность, дѣленный на радіусъ круга. Получивъ этотъ результатъ и комбинируя его съ другимъ основнымъ понятіемъ, которымъ мы также обязаны Гюйгенсу, мы найдемъ непосредственно величину центробѣжной силы для какой угодно кривой. Достаточно принять во вниманіе, что опредѣленіе этой силы требуетъ лишь одновременнаго разсмотрѣнія двухъ послѣдовательныхъ элементовъ данной кривой, и поэтому всегда можно считать, что движеніе происходитъ по соотвѣтствующему соприкасающемуся кругу, такъ какъ этотъ кругъ имѣетъ съ кривой два послѣдовательныхъ общихъ элемента. Можно поэтому прямо перенести къ какой угодно кривой то выраженіе центробѣжной силы, которое найдено первоначально для случая движенія по кругу, и доказать—какъ и при первомъ способѣ, но гораздо проще,—что она вообще равняется квадрату скорости, дѣленному на радіусъ соприкасающагося круга. Такой пріемъ разсужденій имѣетъ то преимущество, что даетъ болѣе ясное представленіе о центробѣжной силѣ.

Разсмотрѣвъ предварительно съ надлежащею общностью случай движенія по опредѣленной кривой, мы легко приведемъ къ нему случай движенія совершенно свободнаго тѣла, описывающаго траекторію, которая должна явиться естественнымъ результатомъ совмѣстнаго дѣйствія какихъ-нибудь извѣстныхъ ускоряющихъ силъ. Въ самомъ дѣлѣ, достаточно, слѣдуя приведенному выше указанію, считать, что тѣло должно оставаться на той кривой, которую оно опишетъ въ дѣйствительности: такое предположеніе, очевидно, не измѣнитъ условій, такъ какъ, если тѣло въ самомъ дѣлѣ не можетъ пойти по какой-нибудь другой кривой, то съ точки зрѣнія динамики не имѣетъ никакого значенія, принуждено ли оно оставаться на траекторіи природой силъ, дѣйствію которыхъ подвержено, или особыми условіями связей. Такимъ образомъ движеніе разовьетъ дѣйствительную центробѣжную силу, выраженную найденной выше общей формулой. Теперь уже ясно, что если всю постоянную силу, дѣйствію которой подвержено тѣло, считать прежде всего разложенной въ каждый моментъ на двѣ другія силы, изъ которыхъ одна направлена по касательной къ траекторіи, а другая по нормали, лежащей въ соприкасающейся плоскости, то послѣдняя по необходимости должна быть равною и прямо противоположною центробѣжной силѣ. Составляющая по нормали выражается черезъ произведеніе непрерывной силы, на косинусъ угла, образуемаго ея направленіемъ съ нормалью; поэтому, приравнявъ послѣднюю величину центробѣжной силъ, мы составимъ основное уравненіе, изъ котораго можно будетъ вывести общія уравненія криволинейнаго движенія, полученныя выше инымъ путемъ. Для этого достаточно сдѣлать одно только преобразованіе— ввести въ уравненіе, вмѣсто всей постоянной силы и ея направленія, составляющія ея по тремъ осямъ координатъ, и замѣнить въ формулѣ, выражающей центробѣжную силу, скорость и радіусъ кривизны общими ихъ выраженіями въ функціи координатъ, считая временно послѣднія за три совершенно независимыя перемѣнныя. Полученное такимъ образомъ уравненіе, конечно, разложится на три, если принять во вниманіе, что это уравненіе, чтобы имѣть мѣсто для какой-бы то ни было системы ускоряющихъ силъ и какой угодно траекторіи, дожно имѣть мѣсто и отдѣльно относительно каждой изъ трехъ координатъ, разсматриваемыхъ временно какъ вполнѣ независимыя перемѣнныя. Послѣднія три уравненія совершенно тождественны съ приведенными выше. Хотя только что изложенный способъ составленія ихъ менѣе прямой и требуетъ болѣе сложныхъ аналитическихъ соображеній, однако я счелъ необходимымъ указать на него особо, такъ какъ онъ, мнѣ кажется, можетъ разъяснить въ одномъ очень важномъ отношеніи обыкновенную теорію криволинейнаго движенія: онъ даетъ возможность обнаружить существованіе центробѣжной силы даже въ случаѣ, если тѣло совершенно свободно,— понятіе, относительно котораго общепринятый въ настоящее время методъ оставляетъ обыкновенно много неопредѣленнаго и неяснаго.

Изслѣдовавъ выше съ достаточной подробностью общій характеръ части динамики, относящейся къ движенію точки или, — что сводится къ тому же,—къ движенію тѣла, всѣ частицы котораго двигаются одинаково, мы должны теперь изслѣдовать съ подобной же точки зрѣнія самую трудную и обширную часть динамики, относящуюся къ болѣе реальному случаю движенія системы связанныхъ между собою извѣстнымъ образомъ тѣлъ, собственныя движенія которыхъ измѣняются подъ вліяніемъ обстоятельствъ, зависящихъ отъ ихъ связей. Въ слѣдующей лекціи я тщательно разсмотрю общіе результаты, полученные до сихъ поръ геометрами относительно изслѣдованій такого рода. Здѣсь же я долженъ ограничиться лишь характеристикой общаго метода, при помощи котораго удалось приведи всѣ указанные вопросы къ задачамъ чистаго анализа.

Въ этой послѣдней части динамики слѣдуетъ предварительно установить новое элементарное понятіе, относящееся къ измѣренію силъ. Въ самомъ дѣлѣ, силы, которыя мы разсматривали до сихъ поръ, были всегда приложены къ одной только частицѣ или, по крайней мѣрѣ, дѣйствовали всѣ на одно и то же тѣло; поэтому для измѣренія ихъ напряженія достаточно было принять во вниманіе только величину скорости, которую онѣ могли сообщить движущемуся тѣлу въ каждый моментъ времени. Но если приходится одновременно разсматривать движенія нѣсколькихъ различныхъ тѣлъ, то такой способъ измѣренія силъ становится, очевидно, недостаточнымъ, такъ какъ нужно принимать въ разсчетъ не только скорость каждаго движущагося тѣла, но и его массу. Чтобы надлежащимъ образомъ принять въ разсчетъ послѣднюю величину, геометры установили то основное положеніе, что силы, могущія сообщить различнымъ массамъ одну и ту же скорость, относятся совершенно какъ массы, или, другими словами, что силы пропорціальны массамъ, тогда какъ въ пятнадцатой лекціи мы вполнѣ убѣдились, что, на основаніи третьяго физическаго закона движенія, силы пропорціональны и скоростямъ. Всѣ явленія, относящіяся къ передачѣ движенія чрезъ посредство толчка или какимъ угодно другимъ способомъ, постоянно подтверждали предположеніе объ этой новой пропорціональности. Отсюда, очевидно, вытекаетъ, что если надо сравнить, въ самомъ общемъ случаѣ, силы, сообщающія неравнымъ массамъ различныя скорости, то каждая изъ нихъ должна быть измѣряема произведеніемъ массы, на которую она дѣйствуетъ, и соотвѣтствующей скорости. Въ самомъ дѣлѣ, указанное произведеніе, называемое геометрами обыкновенно „количествомъ движенія", въ точности опредѣляетъ силу импульса, полученнаго тѣломъ при толчкѣ, т. е. *силу толчка* въ собственномъ смыслѣ слова, или давленіе, которое можетъ оказать тѣло на всякое постоянное препятствіе его движенію.

Таково новое элементарное понятіе, относящееся къ общему измѣренію силъ; его быть можетъ, было бы удобнѣе признать за четвертый и послѣдній основной законъ движенія, въ виду того, по крайней мѣрѣ, что это понятіе вовсе не можетъ быть выведено изъ предшествующихъ понятій логическимъ путемъ, какъ это думаютъ нѣкоторые геометры; оно прочно устанавливается только при помощи особыхъ соображеній физическаго характера.

Выяснивъ это предварительное понятіе, изслѣдуемъ теперь общій принципъ, съ помощью котораго можно изучать динамику произвольной системы тѣлъ, подверженной дѣйствію какихъ угодно силъ. Характерное затрудненіе въ задачахъ такого рода заключается по существу въ самомъ способѣ вводить въ разсчетъ связи различныхъ тѣлъ системы; подъ вліяніемъ этихъ связей взаимодѣйствія тѣлъ по необходимости измѣнятъ тѣ движенія, которыя каждое тѣло получило бы, если бы оно одно было подвержено вліянію дѣйствующихъ на него силъ; при этомъ a priori остается совершенно неизвѣстнымъ, въ чемъ можетъ заключаться такое измѣненіе. Чтобы выбрать самый простой и, тѣмъ не менѣе, важный примѣръ, остановимся на извѣстной задачѣ о движеніи сложнаго маятника, служившей первоначально главнымъ предметомъ изслѣдованій геометровъ въ этомъ высшемъ отдѣлѣ динамики; очевидно, что здѣсь, благодаря связи, установленной между тѣлами или частицами, находящимися всего ближе къ точкѣ привѣса, и тѣлами или частицами, всего болѣе удаленными отъ нея, проявится извѣстное противодѣйствіе, и ни тѣ, ни другія не будутъ колебаться такъ, какъ онѣ колебались бы, если бы были свободны: такъ какъ всѣ частицы должны по необходимости совершать колебаніе одновременно, то движеніе первыхъ частицъ будетъ замедлено, движеніе вторыхъ — ускорено, и ни одинъ изъ установленныхъ уже динамическихъ принциповъ не можетъ обнаружить закона, опредѣляющаго дѣйствія связей. То же обстоятельство имѣетъ мѣсто и въ другихъ случаяхъ, относящихся къ движенію системы тѣлъ. Очевидно, здѣсь возникаетъ необходимость въ новыхъ динамическихъ принципахъ. Геометры, слѣдуя въ этомъ случаѣ обычному пріему, почти всегда примѣняемому вслѣдствіе слабости человѣческаго ума, сначала разсматривали этотъ новый рядъ изслѣдованій, создавая, такъ сказать, соотвѣтственный для каждаго существеннаго вопроса новый принципъ. Таково было происхожденіе и назначеніе различныхъ общихъ свойствъ движенія, которыя мы изслѣдуемъ въ слѣдующей лекціи; эти свойства признавались сначала за независимые двугъ отъ друга принципы; въ настоящее же время они представляютъ собой въ глазахъ геометровъ только замѣчательныя теоремы, получаемыя всѣ вмѣстѣ изъ основныхъ уравненій динамики. Въ „Аналитической Механикѣ“ можно прослѣдить общую исторію этого ряда трудовъ, представляющихъ въ изложеніи Лагранжа такой глубокій интересъ съ точки зрѣнія изученія прогрессивнаго хода человѣческаго ума. Указанный пріемъ былъ постоянно примѣняемъ до д'Аламбера, который положилъ конецъ всѣмъ этимъ отдѣльнымъ изысканіямъ, дойдя до общей идеи о способѣ введенія въ разсчетъ динамическаго взаимодѣйствія тѣлъ системы, вытекающаго изъ ихъ связей, и установилъ при помощи ея основныя уравненія движенія какой угодно системы. Эта идея съ тѣхъ поръ служила и будетъ служить до безконечности основаніемъ для всѣхъ изслѣдованій, относящихся къ динамикѣ тѣлъ; она по существу заключается въ томъ, что при помощи знаменитаго общаго принципа, которому по единодушному и вполнѣ справедливому соглашенію геометры дали названіе *принципа д'Аламбера,* всѣ задачи движенія приводитъ къ простымъ вопросамъ равновѣсія. Разсмотримъ теперь этотъ пріемъ непосредственно.

Если благодаря противодѣйствіямъ, оказываемымъ различными тѣлами другъ на друга вслѣдствіе ихъ связей, каждое изъ нихъ получаетъ движеніе, отличное отъ того, которое ему сообщили бы дѣйствующія на него силы, если бы оно было свободно, то, очевидно, такое естественное движеніе можно считать разложеннымъ на два: изъ нихъ одно предсталяетъ собою движеніе, которое въ дѣйствительности будетъ имѣть мѣсто, другое же движеніе уничтоженное.

Принципъ д'Аламбера заключается собственно въ томъ, что всѣ движенія послѣдняго рода, или иными словами, всѣ количества движеній, утраченныя и полученныя различными тѣлами системы благодаря ихъ противодѣйствіямъ, по необходимости уравновѣшиваются между собой, если принять во вниманіе характеризующія данную систему условія связей. Эта блестящая общая идея была сначала намѣчена Яковомъ Бернулли въ одномъ частномъ случаѣ; ибо она, очевидно, входитъ въ содержаніе того соображенія, къ которому Бернулли прибѣгаетъ для разрѣшенія задачи о сложномъ маятникѣ, гдѣ онъ считаетъ, что количество движенія, утраченное самымъ близкимъ къ точкѣ привѣса тѣломъ, и количество движенія, пріобрѣтенное тѣломъ наиболѣе отъ нея удаленнымъ, необходимо должны удовлетворять закону равновѣсія рычага относительно точки привѣса; это и привело его непосредственно къ составленію уравненія, изъ котораго можно опредѣлить центръ качанія самой простой системы тяжелыхъ тѣлъ. Но для Якова Бернулли эта идея была только частнымъ пріемомъ; потому его замѣчаніе нисколько не уменьшаетъ значенія великой идеи д'Аламбера, существенное свойство которой заключается въ ея полной и необходимой всеобщности.

Разсматривая принципъ д'Аламбера съ наиболѣе философской точки зрѣнія, можно, мнѣ кажется, найти истинный первоначальный зародышъ его во второмъ основномъ законѣ движенія (см. пятнадцатую лекцію), установленномъ Ньютономъ подъ названіемъ закона равенства дѣйствія и противодѣйствія. Въ самомъ дѣлѣ, принципъ д'Аламбера въ точности совпадаетъ съ этимъ закономъ Ньютона, если разсматривать систему только двухъ тѣлъ, дѣйствующихъ другъ на друга по прямой, ихъ соединяющей. Принципъ д'Аламбера можно считать самымъ широкимъ изъ всѣхъ возможныхъ обобщеній закона равенства и противоположности дѣйствія и противо дѣйствія; предлагаемый мною новый способъ пониманія принципа, мнѣ кажется, можетъ лучше обнаружить его истинную природу, такъ какъ придаетъ ему физическій характеръ, вмѣсто характера чисто логическаго, сообщеннаго д'Аламберомъ. Слѣдовательно, мы теперь уже будемъ смотрѣть на этотъ великій принципъ только какъ на второй законъ движенія, распространенный на любое число тѣлъ, расположенныхъ относительно другъ друга какимъ угодно образомъ.

Легко понять, что на основаніи этого общаго принципа всякую задачу динамики можно обратить непосредственно въ простой вопросъ статики, и для этого въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ достаточно составить уравненія равновѣсія между уничтоженными движеніями. Это обстоятельство даетъ необходимую увѣренность въ возможности какую угодно задачу динамики выразить уравненіемъ, и, такимъ образомъ, поставить ее въ зависимость только отъ аналитическихъ изысканій. Однако форма, въ которой былъ первоначально изложенъ принципъ д'Аламбера, вовсе не является наиболѣе удобной для того, чтобы безъ затрудненій выполнить указанное основное преобразованіе, въ виду тѣхъ усложненій, которыя часто приходится испытывать при опредѣленіи, каковы должны быть утраченныя движенія; въ этомъ легко убѣдиться при внимательномъ чтеніи „*Курса динамики*" д'Аламбера, рѣшенія котораго обыкновенно весьма сложны. Германъ, и особенно Эйлеръ, старались устранить вызывающее большія затрудненія разсмотрѣніе количествъ утраченнаго и пріобрѣтеннаго движенія, замѣняя утраченныя движенія первоначальными движеніями, сложенными съ дѣйствительными, взятыми въ обратномъ направленіи; этотъ пріемъ, очевидно, сводится къ тому же принципу, такъ какъ если сила была разложена на двѣ, то можно, обратно, подставить вмѣсто одной изъ составляющихъ совокупность первоначальной силы съ другою составляющею, взятою въ обратномъ направленіи. Тогда принципъ д'Аламбера, разсматриваемый съ этой новой точки зрѣнія, будетъ заключаться просто въ томъ, что дѣйствительныя движенія, согласныя съ связями тѣлъ системы и взятыя въ обратномъ направленіи, по необходимости должны всегда уравновѣшивать первоначальныя движенія, которыя вытекали бы изъ одного дѣйствія данныхъ силъ на каждое тѣло, если предполагать, что оно свободно; впрочемъ, это положеніе можно доказать и прямо, такъ какъ ясно, что система была бы въ равновѣсіи, если бы каждому тѣлу было сообщено количество движенія, равное и противоположное тому, которое оно получаетъ въ дѣйствительности.

Эта новая форма, данная принципу д'Аламбера Эйлеромъ, наиболѣе удобна для приложенія, такъ какъ тогда приходится разсматривать только первоначальныя движенія и движенія дѣйствительныя, которыя и являются истинными элементами задачи динамики; одни изъ нихъ представляютъ собою ея данныя, другія—искомыя. Такова, въ дѣйствительности, окончательная точка зрѣнія, съ которой съ тѣхъ поръ обыкновенно излагаютъ принципъ д'Аламбера.

Такъ какъ на основаніи изложеннаго всѣ вопросы, относящіеся къ движенію, приводятся въ общемъ видѣ, на сколько возможно просто, къ задачамъ одного только равновѣсія, то наиболѣе философскій способъ изложенія раціональной динамики заключается въ комбинированіи принципа д'Аламбера съ принципомъ возможныхъ скоростей, доставляющимъ непосредственно, какъ мы видѣли въ предъидущей лекціи, всѣ необходимыя уравненія для равновѣсія какой угодно системы. Такова система Лагранжа, столь замѣчательно развитая имъ въ его „Аналитической Механикѣ",—система, поднявшая общую науку абстрактной механики въ логическомъ отношеніи до самой высокой степени совершенства, къ какой только можетъ стремиться человѣческій умъ, т. е. доведшая ее до строгаго единства, когда всѣ относящіеся къ ней вопросы могутъ быть приведены единообразнымъ путемъ къ одному принципу, благодаря которому окончательное рѣшеніе любой задачи по необходимости представляетъ собою лишь аналитическія затрудненія. Чтобы установить возможно проще общую формулу динамики, представимъ себѣ, что всѣ ускорительныя силы какой-нибудь данной системы были разложены параллельно тремъ осямъ координатъ, и пусть X, Y, Z будутъ группы силъ, соотвѣтствующія осямъ x, y, z. Если черезъ m обозначить массу системы, то для нея на основаніи принципа д'Аламбера первоначальныя количества движенія mX, mY, mZ и количества дѣйствительныхъ движеній по тремъ осямъ, взятыя въ обратномъ направленіи и выражающіяся очевидно, формулами $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$, должны взаимно уравновѣшиваться. Такимъ образомъ, примѣняя къ указанной совокупности силъ общій принципъ возможныхъ скоростей и тщательно различая варьяціи, относящіяся къ различнымъ осямъ, мы получимъ уравненіе

$$\int m\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\int m\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\int m\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z=0;$$

можно считать, что это равенство неявно заключаетъ всѣ уравненія, необходимыя для полнаго опредѣленія различныхъ условій движенія какой-угодно системы тѣлъ, подверженной дѣйствію какихъ угодно силъ. Явныя уравненія въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ надлежащимъ образомъ выводятся изъ этой общей формулы, если уменьшить на основаніи связей, характеризующихъ систему, число возможныхъ варьяцій до минимума, благодаря чему получится столько различныхъ уравненій, сколько останется дѣйствительно независимыхъ варьяцій.

Чтобы обнаружить всю плодотворность приведенной выше формулы съ философской точки зрѣнія и показать, что она дѣйствительно содержитъ всю совокупность динамики, слѣдуетъ замѣтить, что изъ нея можно даже вывести, какъ простой частный случай, теорію криволинейнаго движенія одной точки,—теорію, которую мы разсматривали отдѣльно въ первой части этой лекціи. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что если всѣ данныя непрерывныя силы дѣйствуютъ на одну только частицу, то масса m исчезнетъ изъ предшествующаго общаго уравненія; далѣе, если разсматривать отдѣльно возможное движеніе относительно каждой оси, отъ то уравненіе непосредственно даетъ три основныя уравненія, установленныя выше для движенія точки. Но хотя и слѣдуетъ обратить вниманіе на эту связь, безъ которой нельзя понять все дѣйствительное значеніе общей формулы динамики, однако же теорія движенія одной частицы въ дѣйствительности вовсе не требуетъ примѣненія принципа д'Аламбера, который по существу предназначенъ для динамическаго изученія системы тѣлъ.

Теорія движенія точки сама по себѣ слишкомъ проста и настолько непосредственно вытекаетъ изъ основныхъ законовъ движенія, что я счелъ себя обязаннымъ, согласно съ обычнымъ пріемомъ, изложить ее сначала отдѣльно, чтобы представить важныя общія понятія, вытекающія изъ этой теоріи, въ болѣе ясномъ видѣ, хотя ради болѣе совершеннаго согласованія мы должны въ концѣ концовъ включить ее въ неизмѣнную формулу, которая по необходимости содержитъ всѣ возможныя теоріи динамики.

Дать здѣсь отдѣльное приложеніе указанной общей формулы къ дѣйствительному рѣшенію какой-либо задачи динамики значило бы выйти изъ естественныхъ предѣловъ этого курса, такъ какъ единственнымъ существеннымъ предметомъ нашихъ философскихъ соображеній долженъ служить методъ, если не считать указанія на главные результаты, къ которымъ онъ приведетъ; ими мы займемся въ слѣдующей лекціи. Однако я всетаки считаю себя обязаннымъ напомнить по этому поводу,—какъ представленіе, относящееся въ дѣйствительности гораздо болѣе къ *методу*, чѣмъ къ содержанію *науки*,—необходимое различіе между *поступательными* и *вращательными* движеніями, указанное еще въ предшествующей лекціи. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы изучить надлежащимъ образомъ движеніе какой-нибудь системы, слѣдуетъ считать его составленнымъ изъ поступательнаго движенія, одинаковаго для всѣхъ ея частей, и изъ вращенія каждой ея точки вокругъ извѣстной постоянной или перемѣнной оси. Въ цѣляхъ аналитическаго упрощенія,—о томъ, какъ получаются эти упрощенія, мы будемъ имѣть случай сказать въ слѣдующей лекціи,—геометры разсматривали всегда преимущественно вращательное движеніе системы относительно ея центра тяжести или, лучше сказать, ея центра среднихъ разстояній, представляющаго собою въ этомъ отношеніи весьма замѣчательныя общія свойства, открытіемъ которыхъ мы обязаны Эйлеру. Вслѣдствіе этого полный анализъ движенія системы, подверженной дѣйствію какихъ нибудь силъ, заключается по существу: 1° въ опредѣленіи для каждаго момента времени скорости центра тяжести и направленія, въ которомъ онъ движется; этихъ элементовъ достаточно, какъ мы докажемъ, чтобы знать всѣ обстоятельства поступательнаго движенія; 2° въ опредѣленіи, также для каждаго момента времени, направленія мгновенной оси вращенія, проходящей черезъ центръ тяжести, и скорости вращенія каждой части системы вокругъ этой оси. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что всѣ второстепенныя обстоятельства движенія необходимо могутъ быть выведены въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ изъ этихъ двухъ главныхъ данныхъ.

Общая формула динамики, установленная выше, очевидно, по своей природѣ, можетъ быть такъ же прямо примѣняема къ движенію жидкихъ тѣлъ, какъ къ движенію твердыхъ, если только принять надлежащимъ образомъ въ соображеніе условія, характеризующія жидкое состояніе тѣлъ,—какъ капельножидкое, такъ и газообразное; на это обстоятельство мы уже имѣли случай указывать въ предшествующей лекціи по вопросу о равновѣсіи тѣлъ. Точно также д'Аламберъ, открывъ основной принципъ, позволившій ему, благодаря успѣхамъ статики, изложить во всей ея совокупности динамику какой угодно системы, примѣнилъ свой принципъ непосредственно для установленія общихъ уравненій движенія жидкихъ тѣлъ, до тѣхъ поръ совершенно неизвѣстныхъ. Эти уравненія получаются съ особенною легкостью при помощи принципа возможныхъ скоростей въ томъ видѣ, въ какомъ онъ выраженъ въ предшествующей общей формулѣ. Слѣдовательно разсматриваемая часть динамики въ самомъ дѣлѣ не оставляетъ желать ничего лучшаго въ конкретномъ отношенін и представляетъ только чисто аналитическія трудности, относящіяся къ интегрированію уравненій съ частными дифференціалами, къ которымъ она приводитъ. Но слѣдуетъ признать, что такое общее интегрированіе представляетъ до сихъ поръ непреодолимыя препятствія, и дѣйствительныя знанія, которыя можно извлечь изъ этой теоріи, еще крайне несовершенны, даже въ самыхъ простыхъ случаяхъ; такое положеніе дѣла намъ покажется, безъ сомнѣнія, неизбѣжнымъ, если мы примемъ во вниманіе чрезвычайную сложность, уже замѣченную нами даже по отношенію къ задачамъ чистой статики, которая, по своей природѣ, гораздо проще. Одна задача объ истеченіи тяжелой жидкости черезъ данное отверстіе, какъ ни кажется она легкой, до сихъ поръ еще не могла быть рѣшена дѣйствительно удовлетворительнымъ образомъ. Чтобы въ достаточной степени упростить аналитическія изслѣдованія, отъ которыхъ зависитъ ея рѣшеніе, геометры должны были принять знаменитую гипотезу, предложенную Даніиломъ Бернулли и извѣстную подъ названіемъ *гипотезы о параллельныхъ слояхъ;* она позволяетъ разсматривать только движеніе слоевъ, вмѣсто того, чтобы слѣдить за движеніемъ каждой частицы. Однако послѣдняя гипотеза, которая заключается въ томъ, что каждое горизонтальное сѣченіе жидкости считается измѣняющимъ положеніе и занимающимъ мѣсто слѣдующаго сѣченія во всей своей совокупности, почти всегда находится, очевидно, въ явномъ противорѣчіи съ дѣйствительностью, за исключеніемъ небольшаго числа случаевъ, когда обстоятельства, такъ сказать, нарочно подобраны: эта гипотеза совершенно оставляетъ безъ вниманія боковыя движенія, а между тѣмъ существованіе ихъ замѣтно, и оно неизбѣжно заставляетъ изучать отдѣльно движеніе каждой частицы. Истинную общую гидродинамику можно считать только зарождающеюся, даже относительно капельно-жидкихъ тѣлъ, а тѣмъ болѣе относительно газовъ. Но, съ другой стороны, весьма важно признать, что всѣ обширныя работы, которыя остается совершить въ этомъ направленіи, заключаются существеннымъ образомъ въ успѣхахъ одного математическаго анализа, такъ какъ основныя уравненія движенія жидкихъ тѣлъ установлены окончательно.

Мы разсмотрѣли съ различныхъ главныхъ точекъ зрѣнія общій характеръ метода раціональной механики и указали, какимъ образомъ всѣ задачи ея сводятся къ чисто аналитическимъ изслѣдованіямъ; теперь, чтобы пополнить философское изслѣдованіе этой основной науки, намъ остается только разсмотрѣть въ слѣдующей лекціи главные результаты, полученные человѣчествомъ умомъ при помощи этого метода, т. е. разсмотрѣть наиболѣе замѣчательныя общія свойства равновѣсія и движенія.

Восемнадцатая лекція.

Общія теоремы раціональной механики.

Цѣль и духъ этого труда, а также и его естественные размѣры по необходимости не позволяютъ намъ вдаваться въ спеціальное изложеніе приложенія основныхъ уравненій равновѣсія и движенія къ дѣйствительному рѣшенію какой-нибудь частной задачи механики. Но тѣмъ не менѣе, невозможно составить себѣ полнаго представленія о философскомъ характерѣ раціональной механики, разсматриваемой во всей ея совокупности, если, изучивъ надлежащимъ образомъ методъ, не остановиться въ концѣ на великихъ теоретическихъ результатахъ этой науки, т. е. на главныхъ общихъ свойствахъ равновѣсія и движенія, открытыхъ до сихъ поръ геометрами; намъ и остается теперь изслѣдовать ихъ. Эти различныя свойства признавались сначала каждое въ отдѣльности за истинные *принципы*, которые предназначались первоначально для рѣшенія извѣстнаго рода новыхъ механическихъ задачъ, стоявшихъ внѣ извѣстныхъ до тѣхъ поръ методовъ.

Но съ тѣхъ поръ, какъ раціональная механика въ совокупности своей приняла окончательный систематическій характеръ, каждый изъ этихъ прежнихъ *принциповъ* сталъ только болѣе или менѣе общей простой *теоремой*, необходимымъ слѣдствіемъ основныхъ теорій абстрактной статики и динамики: только съ этой философской точки зрѣнія мы и должны разсмотрѣть ихъ здѣсь. Начнемъ съ теоремъ, относящихся къ статикѣ.

Самою замѣчательною изъ теоремъ, которыя были до сихъ поръ выведены изъ общихъ уравненій равновѣсія, является извѣстное свойство, открытое сначала Торичелли и относящееся къ равновѣсію тяжелыхъ тѣлъ. Теорема, собственно говоря, заключается въ томъ, что когда какая-нибудь система тяжелыхъ тѣлъ находится въ состояніи равновѣсія, то центръ ея тяжести непремѣнно находится или въ самой низкой, или въ самой высокой точкѣ, по сравненію со всѣми другими положеніями, которыя онъ можетъ занимать при всякомъ иномъ состояніи системы.

Торричелли представилъ сначала это свойство, какъ результатъ непосредственной провѣрки, при извѣстныхъ условіяхъ, равновѣсія всѣхъ системъ тяжелыхъ тѣлъ, разсмотрѣнныхъ до тѣхъ поръ. Но общія соображенія, которыми онъ пытался доказать затѣмъ теорему прямо, въ дѣйствительности мало удовлетворительны и представляютъ собою ясный примѣръ необходимости въ математическихъ наукахъ относиться недовѣрчиво ко всякой идеѣ, не обладающей вполнѣ точнымъ характеромъ, какою бы правдоподобной она ни казалась. Въ самомъ дѣлѣ, разсужденіе Торричелли заключается по существу въ слѣдующемъ: тяжелыя тѣла имѣютъ естественное стремленіе падать внизъ; поэтому равновѣсіе непремѣнно будетъ имѣть мѣсто, если центръ тяжести займетъ самое низкое положеніе, какое только для него возможно. Недостаточность этого соображенія очевидна; оно вовсе не объясняетъ, почему равновѣсіе также будетъ имѣть мѣсто, если центръ тяжести помѣщается въ самой высокой точкѣ, какая только для него возможна, и оно даже стремится доказать, что этотъ второй случай равновѣсія не можетъ существовать, тогда какъ съ точки зрѣнія теоретической онъ такъ же дѣйствителенъ, какъ и первый, хотя вслѣдствіе недостатка устойчивости его рѣдко приходится наблюдать на практикѣ. Такъ — чтобы привести самый простой примѣръ—законъ равновѣсія маятника требуетъ, чтобы центръ тяжести тяжелаго тѣла находился на вертикали, проходящей черезъ точку привѣса,—это условіе представляетъ собою ясное подтвержденіе теоремы Торричелли; но, если оставить въ сторонѣ вопросъ объ устойчивости, то ясно, что центръ тяжести можетъ также находиться безразлично выше или ниже точки привѣса, и равновѣсіе будетъ имѣть мѣсто въ обоихъ случаяхъ.

Истинное и общее доказательство теоремы Торричелли заключается въ выводѣ ея изъ основного принципа возможныхъ скоростей, изъ котораго она получается очень легко непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, для доказательства достаточно прямо приложить принципъ къ опредѣленію равновѣсія какой-нибудь системы тяжелыхъ тѣлъ; онъ непосредственно даетъ уравненіе.

$$\int Pdz = O,$$

гдѣ P обозначаетъ вѣсъ одного изъ тѣлъ, а z — вертикальное разстояніе центра тяжести. Но на основаніи общаго опредѣленія центра тяжести всякой системы тяжелыхъ тѣлъ, — если обозначить черезъ P_1 вѣсъ всей системы, а черезъ z_1 — вертикальную координату ея центра тяжести, мы, очевидно, получимъ соотношеніе

$$\int Pdz = P_1 dz_1$$

Такимъ образомъ, уравненіе возможныхъ скоростей приводится въ этомъ случаѣ къ $dz=0$; а это равенство, на основаніи общей аналитической теоріи maxima и minima, непосредственно показываетъ, что высота центра тяжести системы имѣетъ значеніе *наибольшее* или *наименьшее*, что и выражается въ теоремѣ Торричелли.

Указаннымъ важнымъ свойствомъ,—независимо отъ большого интереса, который оно представляетъ съ точки зрѣнія физической,—можно воспользоваться для облегченія общаго рѣшенія многихъ существенныхъ задачъ раціональной статики, относящихся къ тяжелымъ тѣламъ. Такъ, напримѣръ, этого свойства вполнѣ достаточно для полнаго рѣшенія знаменитой задачи о *цѣпной линіи*, т. е. о фигурѣ, которую принимаетъ тяжелая цѣпь, подвѣшенная въ двухъ опредѣленныхъ точкахъ и затѣмъ свободно предоставленная одному только дѣйствію силы тяжести; при этомъ предполагается, что цѣпь совершенно гибкая и вполнѣ нерастяжимая. Въ самомъ дѣлѣ, теорема Торричелли указываетъ, что центръ тяжести долженъ тогда находиться, насколько только возможно, въ самой низкой точкѣ; поэтому задача должна быть отнесена непосредственно къ общей теоріи изопериметровъ, изложенной въ восьмой лекціи, такъ какъ она сводится къ опредѣленію изъ всѣхъ кривыхъ одинаковой длины, проведенныхъ между двумя опредѣленными точками, кривой, обладающей тѣмъ характернымъ свойствомъ, что высота центра всей ея тяжести есть minimum; послѣдняго условія вполнѣ достаточно для полнаго опредѣленія, при помощи варьяціоннаго исчисленія, дифференціальнаго, а затѣмъ и конечнаго уравненія искомой кривой. Подобныя приложенія находитъ себѣ теорема Торричелли и въ нѣкоторыхъ другихъ интересныхъ вопросахъ, относящихся къ равновѣсію тяжелыхъ тѣлъ.

Теорема Торричелли получила впослѣдствіи важное обобщеніе въ трудахъ Мопертюи, открывшаго, подъ названіемъ *закона покоя*, весьма общее свойство равновѣсія, относительно котораго разсмотрѣнное выше свойство представляетъ собою лишь простой частный случай. Законъ, открытый Торричелли, примѣнимъ только къ земному притяженію или къ тяжести въ собственномъ смыслѣ слова; законъ же Мопертюи, напротивъ, распространяется на всѣ притягательныя силы, которыя могутъ заставить тѣла какой-нибудь системы стремиться къ опредѣленнымъ центрамъ или другъ къ другу въ зависимости отъ нѣкоторой функціи разстоянія, независящей отъ направленія; онъ обнимаетъ такимъ образомъ всѣ великія естественныя силы. Извѣстно, что въ этомъ случаѣ выраженіе $P\delta p+P'\delta p'$ и т. д., образующее первый членъ общаго уравненія возможныхъ скоростей, всегда, непремѣнно будетъ полнымъ дифференціаломъ.

Слѣдовательно принципъ возможныхъ скоростей заключается здѣсь, собственно, въ томъ, что варьяція соотвѣтственнаго интеграла равняется нулю; это условіе, по основной теоріи maxima и minima, указываетъ, что интегралъ

$$\int P\delta p$$

въ случаѣ равновѣсія всегда имѣетъ наибольшее или наименьшее значеніе. Въ этомъ и заключается законъ Мопертюи, если его разсматривать съ наиболѣе общей точки зрѣнія; онъ также прямо и крайне просто выводится изъ основного принципа возможныхъ скоростей, который необходимо долженъ содержать неявно всѣ свойства, связанныя съ теоріей равновѣсія. Лагранжъ представлялъ теорему Мопертюи въ болѣе конкретномъ и болѣе замѣчательномъ видѣ, сведя ее къ понятію о *живыхъ силахъ*, которымъ мы займемся ниже. Принимая во вниманіе, что интегралъ $\int P\delta p$, разсматриваемый Мопертюи, на основаніи общей аналитической теоріи движенія непремѣнно будетъ дополненіемъ суммы живыхъ силъ системы до извѣстной постоянной величины, Лагранжъ заключилъ, что сумма живыхъ силъ имѣетъ minimum, когда предшествующій интегралъ достигаетъ maximum'а и наоборотъ. Поэтому можно просто принять, что теорема Мопертюи заключается въ томъ, что нѣкоторая система находится всегда въ равновѣсіи, если сумма живыхъ силъ имѣетъ значеніе maximum или minimum. Ясно, что въ частномъ случаѣ земного притяженія этотъ законъ въ точности совпадаетъ съ закономъ равновѣсія: какъ извѣстно, живая сила равняется тогда произведенію вѣса на высоту центра тяжести, которое и должно необходимо получить наибольшее или наименьшее значеніе, если равновѣсіе имѣетъ мѣсто.

Другое весьма замѣчательное общее свойство равновѣсія, которое можно считать необходимымъ дополненіемъ теоремы Торричелли и Мопертюи, заключается въ основномъ различіи случаевъ *устойчивости* и *неустойчивости* равновѣсія. Извѣстно, что равновѣсіе можетъ быть *устойчиво* или *неустойчиво*,—т. е., что тѣло, безконечно мало уклоненное отъ положенія равновѣсія, можетъ или стремиться вернуться къ нему и, на самомъ дѣлѣ, послѣ извѣстнаго числа колебаній, скоро уничтожаемыхъ сопротивленіемъ среды, треніемъ и т. п., оно возвращается въ прежнее положеніе, или же оно, напротивъ, стремится все болѣе и болѣе удалиться отъ положенія равновѣсія, чтобы остановиться только ужъ въ новомъ положеніи устойчиваго равновѣсія. То состояніе, которое мы въ физикѣ называемъ состояніемъ *покоя* тѣла, на самомъ дѣлѣ есть не что иное, какъ *устойчивое равновѣсіе*, такъ какъ абстрактный *покой*,—какъ его понимаютъ геометры, предполагая, что тѣло не подвержено дѣйствію никакой силы,—очевидно, не существуетъ въ природѣ, гдѣ можетъ имѣть мѣсто только болѣе или менѣе продолжительное равновѣсіе. *Неустойчивое* равновѣсіе, напротивъ, представляетъ себѣ то, что обыкновенно называется собственно *равновѣсіемъ*, и всегда обозначаетъ болѣе или менѣе кратковременное и искуственное состояніе. Общее свойство, которое мы теперь разсматриваемъ и полнымъ доказательствомъ котораго мы обязаны Лагранжу, заключается въ томъ, что въ какой угодно системѣ тѣлъ равновѣсіе *устойчиво* или *неустойчиво* въ зависимости отъ того, имѣетъ ли разсматриваемый Мопертюи и приведенный нами выше интегралъ наибольшее или наименьшее значеніе, или,—что, какъ мы уже сказали, приводитъ къ тому же условіе,—является ли сумма живыхъ силъ maximum или minimum. Эта прекрасная теорема механики, въ приложеніи къ самому простому и замѣчательному случаю,—къ случаю равновѣсія тяжелыхъ тѣлъ, разсмотрѣнному Торричелли—показываетъ, что система находится въ состояніи устойчиваго равновѣсія, когда центръ тяжести находится въ самой низкой точкѣ, какая только для него возможна, и въ состояніи неустойчиваго равновѣсія, когда, напротивъ, центръ тяжести находится въ самой высокой точкѣ. Это положеніе легко провѣрить непосредственно для менѣе сложныхъ системъ. Такъ, напримѣръ, равновѣсіе маятника, очевидно, устойчиво, когда центръ тяжести тяжелаго тѣла находится ниже точки привѣса, и неустойчиво, когда онъ выше нея; точно также, эллипсоидъ вращенія, лежащій на горизонтальной плоскости, находится въ состояніи устойчиваго равновѣсія, когда онъ опирается на вершину своей малой оси,—и неустойчиваго, когда опирается на вершину большой оси. Одного наблюденія было бы, безъ сомнѣнія, достаточно, чтобы отличить оба состоянія въ такихъ простыхъ случаяхъ. Но самое глубокое изученіе теоріи было необходимо, чтобы доказать геометрамъ, что указанное основное раздѣленіе одинаково примѣнимо и къ самымъ сложнымъ системамъ: изъ нея слѣдуетъ, что если интегралъ, относящійся къ суммѣ возможныхъ моментовъ, имѣетъ значеніе minimum, то система можетъ совершать около своего состоянія равновѣсія только очень малыя колебанія, предѣлы которыхъ предустановлены, тогда какъ, наоборотъ, если этотъ интегралъ имѣетъ значеніе maximum, то колебанія могутъ происходить,—и на самомъ дѣлѣ происходятъ—въ различныхъ конечныхъ предѣлахъ. Было бы впрочемъ безполезно оговаривать, что эти свойства, по своей природѣ, также какъ и предшествующія, имѣютъ мѣсто какъ для твердыхъ тѣлъ, такъ и для жидкихъ: это положеніе одинаково характеризуетъ всѣ общія механическія свойства, изслѣдованію которыхъ мы предназначили эту лекцію.

Разсмотримъ теперь общія теоремы механики, относящіяся къ движенію.

Съ тѣхъ поръ, какъ эти теоремы перестали считать также принципами и стали ихъ разсматривать только какъ простые и необходимые результаты основныхъ теорій динамики, наиболѣе простымъ и удобнымъ пріемомъ доказательства ихъ является, какъ это сдѣлалъ Лагранжъ, представленіе ихъ какъ непосредственныхъ слѣдствій общаго уравненія динамики, найденнаго при помощи соединенія принципа д'Аламбера и принципа возможныхъ скоростей, какъ это мы изложили въ предшествующей лекціи.

Лагранжъ справедливо указалъ, что къ числу наиболѣе замѣтныхъ преимуществъ этого метода надо отнести легкость, съ которою ведется доказательство важнѣйшихъ теоремъ динамики въ ихъ наибольшей общности,—доказательство, къ которому прямо можно было придти только при помощи косвенныхъ и весьма сложныхъ соображеній. Тѣмъ не менѣе характеръ этого курса не позволяетъ намъ приводить здѣсь отдѣльно каждое изъ этихъ доказательствъ, и мы должны ограничиться разсмотрѣніемъ только результатовъ.

Первая общая теорема динамики есть та, которую открылъ Ньютонъ относительно движенія центра тяжести какой-нибудь системы; она обыкновенно извѣстна подъ названіемъ *принципа сохраненія движенія центра тяжести*. Ньютонъ первый понялъ и доказалъ въ началѣ своего великаго труда *Математическіе принципы естественной философіи*, при помощи крайне простыхъ соображеній, что взаимодѣйствіе тѣлъ системы другъ на друга, выражается ли оно притяженіемъ, толчкомъ или, вообще, какъ угодно,—если принять надлежащимъ образомъ во вниманіе постоянное и необходимое равенство дѣйствія и противодѣйствія,—не можетъ измѣнить положеніе центра тяжести; поэтому, если нѣтъ другихъ ускорительныхъ силъ, кромѣ этихъ взаимодѣйствій, и если внѣшнія силы системы сводятся только къ мгновеннымъ силамъ, то центръ тяжести всегда останется неподвижнымъ, или будетъ двигаться равномѣрно по прямой линіи. Послѣ д'Аламберъ обобщилъ это свойство и доказалъ, что какія бы измѣненія не внесли взаимныя дѣйствія тѣлъ системы въ движеніе каждаго изъ нихъ, на центръ тяжести эти дѣйствія не могутъ оказать никакого вліянія: его движеніе будетъ происходить, какъ будто-бы всѣ силы системы были прямо приложены къ нему, параллельно ихъ направленію, каковы бы ни были внѣшнія силы этой системы, если предположить только, что центръ не представляетъ собою неподвижной точки. Это положеніе легко доказать, составляя на основаніи общей формулы динамики уравненія, относящіяся къ поступательному движенію; полученныя уравненія, въ силу аналитическаго свойства центра тяжести, совпадаютъ съ уравненіями, составленными отдѣльно для движенія центра тяжести въ предположеніи, что въ немъ сосредоточена вся масса системы и къ нему приложены всѣ ея внѣшнія силы. Главное значеніе этой прекрасной теоремы заключается въ томъ, что по отношенію къ движенію центра тяжести случай движенія тѣла или какой угодно системы тѣлъ можно свести къ движенію одной только частицы.

Такъ какъ поступательное движеніе системы опредѣляется движеніемъ ея центра тяжести, то такимъ образомъ по отношенію къ этому движенію вторую часть динамики можно свести къ первой; отсюда, какъ легко замѣтить, вытекаетъ важное упрощеніе рѣшенія всѣхъ частныхъ задачъ динамики, такъ какъ въ этой области изслѣдованій можно будетъ пренебрегать результатами взаимодѣйствій всѣхъ данныхъ тѣлъ, а въ опредѣленіи этого взаимодѣйствія и заключается обыкновенно главная трудность каждой задачи.

Въ общежитіи не достаточно вѣрно представляютъ себѣ всю теоретическую общность главныхъ выводовъ раціональной механики, которые сами по себѣ необходимо примѣнимы ко всякаго рода явленіямъ природы: какъ мы убѣдились, основные законы, на которыхъ покоится все систематическое зданіе этой науки, не допускаютъ исключенія ни для одного класса явленій и устанавливаютъ самые общіе факты реальнаго міра, хотя обыкновенно кажется, что при опредѣленіи подобныхъ понятій имѣется въ виду только неорганическій міръ. Поэтому я нахожу, что было бы кстати указать здѣсь опредѣленно, что разсматриваемая теорема имѣетъ мѣсто одинаково какъ для живыхъ тѣлъ, такъ и для неодушевленныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, какова бы ни была природа явленій, характеризирующихъ живыя тѣла, эти явленія, самое большее, могли бы заключаться въ извѣстныхъ частныхъ воздѣйствіяхъ частицъ другъ на друга,—воздѣйствіяхъ, которыя вовсе не замѣчаются у тѣлъ неодушевленныхъ; но вовсе не слѣдуетъ сомнѣваться, что и здѣсь дѣйствіе, какъ и во всякомъ другомъ случаѣ, равно и прямо противоположно противодѣйствію. Такимъ образомъ, по самой природѣ теоремы, которую мы только что разсмотрѣли, она необходимо должна такъ же хорошо оправдываться на одушевленныхъ тѣлахъ, какъ и на неодушевленныхъ, ибо движеніе центра тяжести не зависитъ отъ внутреннихъ взаимодѣйствій.

Изъ этого, напримѣръ, вытекаетъ, что живое тѣло, какова бы ни была внутренняя дѣятельность его органовъ, не могло бы само перемѣстить свой центръ тяжести, хотя оно можетъ заставить нѣкоторыя изъ своихъ точекъ совершить извѣстныя движенія около этого центра. Въ самомъ дѣлѣ, развѣ не подтверждается наглядно, что полное движеніе живого тѣла было бы совершенно невозможно безъ внѣшней помощи, оказываемой ему сопротивленіемъ и треніемъ земли, по которой оно движется, или жидкости, въ которой оно находится?

Совершенно аналогичныя замѣчанія можно сдѣлать относительно всѣхъ другихъ общихъ динамическихъ свойствъ, которыя намъ остается разсмотрѣть, и я ужъ не буду указывать отдѣльно для каждаго необходимую примѣнимость его какъ къ живымъ тѣламъ, такъ къ тѣламъ неорганическимъ.

Вторая общая теорема динамики состоитъ въ извѣстномъ и важномъ *принципѣ площадей*, первая идея о которомъ принадлежитъ Кеплеру, открывшему и очень просто доказавшему это свойство для случая движенія одной только частицы, или, другими словами, для случая движенія тѣла, всѣ точки котораго двигаются одинаково. Кеплеръ доказалъ, при помощи самыхъ элементарныхъ соображеній, что если вся ускорительная сила, дѣйствію которой подвержена частица, всегда направлена къ опредѣленной точкѣ, то радіусъ векторъ движущейся частицы описываетъ около этой точки въ равныя времена равныя площади, такъ что площадь, описанная къ концу нѣкотораго промежутка времени, возрастаетъ пропорціонально времени. Кромѣ того, онъ показалъ, что, обратно, если подобное соотношеніе оправдывается въ движеніи тѣла относительно извѣстной точки, то это служитъ достаточнымъ доказательствомъ дѣйствія на это тѣло силы, постоянно направленной къ указанной точкѣ. Это замѣчательное свойство доказывается, впрочемъ, весьма легко и съ помощью общихъ уравненій криволинейнаго движенія частицы, приведенныхъ въ предшествующей лекціи, если начало координатъ помѣстить въ центръ притяженія и разсматривать выраженіе площади, описанной на какой-нибудь изъ плоскостей координатъ соотвѣтствующей проекціей радіуса вектора движущагося тѣла. Открытіе Кеплера тѣмъ болѣе замѣчательно, что оно имѣлъ мѣсто ранѣе дѣйствительнаго созданія динамики Галилеемъ. Какъ мы будемъ имѣть случай замѣтить ниже, въ астрономическомъ отдѣлѣ этого труда, Кеплеръ установилъ, что радіусы-векторы планетъ описываютъ около солнца площади, пропорціональныя временамъ; это положеніе составляетъ первый изъ его трехъ великихъ астрономическихъ законовъ: отсюда онъ заключилъ также, что планеты имѣютъ постоянное тяготѣніе къ солнцу; открыть самый законъ этого тяготѣнія было суждено уже Ньютону.

Но какъ бы важна ни была эта первая теорема о площадяхъ, которая вмѣстѣ съ тѣмъ служитъ однимъ изъ существенныхъ основаній небесной механики, въ ней теперь слѣдуетъ видѣть только самый простой частный случай великаго общаго закона площадей, открытаго почти одновременно и въ различныхъ формахъ д'Арси, Даніиломъ Бернулли и Эйлеромъ около половины прошлаго столѣтія. Открытіе Эйлера относилось только къ движенію точки; открытіе д'Арси — къ движенію какой угодно системы тѣлъ, дѣйствующихъ другъ на друга какимъ угодно образомъ; благодаря этимъ взаимодѣйствіямъ устанавливается не только болѣе сложный, но и существенно отличный отъ перваго случай. Самая теорема заключается въ томъ, что въ силу указанныхъ взаимодѣйствій площадь, описанная отдѣльно радіусомъ-векторомъ каждой частицы системы въ каждый моментъ времени около нѣкоторой точки, можетъ измѣняться, но алгебраическая сумма площадей, описанныхъ при этомъ проекціями радіусовъ-векторовъ всѣхъ частицъ на какую-нибудь плоскость, если каждой изъ этихъ площадей приписать надлежащій знакъ по обычному правилу, не претерпитъ никакого измѣненія; поэтому, если въ системѣ нѣтъ никакихъ другихъ ускорительныхъ силъ, кромѣ этихъ взаимодѣйствій, то сумма описанныхъ площадей останется для даннаго времени неизмѣнной, и будетъ, слѣдовательно, возрастать пропорціонально времени.

Если система не имѣетъ ни одной постоянной точки, то указанная замѣчательная теорема имѣетъ мѣсто по отношенію къ какой-нибудь точкѣ пространства; но если у системы есть неподвижная точка, то теорема оказывается справедливой лишь въ томъ случаѣ, если эта точка принята за центръ площадей. Наконецъ, если тѣла системы подвержены дѣйствію внѣшнихъ ускорительныхъ силъ, и эти силы постоянно направлены къ одной и той же точкѣ, то теорема о площадяхъ опять имѣетъ мѣсто, но только относительно этой точки. Эта послѣдняя часть общаго предложенія, очевидно, даетъ, какъ частный случай, теорему Кеплера, въ предположеніи, что система сводится къ одной только частицѣ.

При приложеніи теоремы обыкновенно сумму площадей, соотвѣтствующихъ всѣмъ частицамъ, замѣняютъ эквивалентной ей суммой произведеній массы каждаго тѣла на соотвѣтствующую площадь, что избавляетъ отъ необходимости дѣлить систему на частицы одинаковой массы. Такова форма, въ которой общая теорема площадей была открыта д'Арси; въ этой именно формѣ ее обыкновенно и примѣняютъ. Площадь, описываемая радіусомъ-векторомъ каждаго тѣла въ безконечно малый промежутокъ времени, очевидно, пропорціонально произведенію скорости тѣла на его разстояніе отъ соотвѣтствующей постоянной точки; поэтому сумму площадей можно замѣнить суммой моментовъ относительно этой точки проекцій всѣхъ силъ системы на нѣкоторую плоскость. Съ этой точки зрѣнія теорема площадей, по замѣчанію Лапласа, представляетъ собою общее свойство движенія, аналогичное одному изъ свойствъ равновѣсія, потому что сумма моментовъ, обращаясь при равновѣсіи въ нуль, при движеніи равняется постоянной величинѣ. Такимъ именно путемъ теорема была найдена Эйлеромъ и Даніиломъ Бернулли.

Каково бы ни было наиболѣе подходящее для этой теоремы конкретное ея толкованіе, сама теорема является простымъ и непосредственнымъ аналитическимъ слѣдствіемъ общей формулы динамики. Чтобы вывести теорему, достаточно при составленіи уравненій, относящихся къ вращательному движенію, развернуть формулу: въ этихъ уравненіяхъ, если принять во вниманіе только что указанныя условія, мы и увидимъ непосредственное аналитическое выраженіе теоремы площадей или моментовъ. Можно сказать, что въ аналитическомъ отношеніи польза теоремы существеннымъ образомъ заключается въ томъ, что она даетъ для всѣхъ случаевъ три первыя интеграла общихъ уравненій движенія, которыя, сами по себѣ, 2-го порядка; такимъ образомъ очень облегчается окончательное рѣшеніе всякой отдѣльной задачи динамики.

Закона площадей вполнѣ достаточно для опредѣленія въ общемъ движеніи какой нибудь системы всего, что относится къ вращательному движенію, подобно тому, какъ теорема о центрѣ тяжести опредѣляетъ все, относящееся къ движенію поступательному. Такимъ образомъ, при помощи одной только комбинаціи этихъ двухъ общихъ свойствъ, можно приступить къ полному изученію какъ поступательнаго, такъ и вращательнаго движенія какой угодно системы тѣлъ.

Я не могу здѣсь, по поводу теоремы площадей, не указать вкратцѣ на ту неожиданную ясность и поразительную простоту, которую внесъ въ нее г. Пуансо, примѣнивъ къ ней свое основное положеніе относительно вращательнаго движенія, разсмотрѣнное уже нами съ статической точки зрѣнія въ 16-ой лекціи. Замѣнивъ принятые до тѣхъ поръ геометрами моменты и площади парами, происходящими отъ данныхъ силъ, Пуансо внесъ въ теорію весьма важное философское усовершенствованіе, которое до сихъ поръ, мнѣ кажется, не было въ достаточной мѣрѣ оцѣнено. Онъ такимъ путемъ придалъ конкретное значеніе и собственный прямой динамическій смыслъ тому, что до него было только геометрическимъ выраженіемъ части основныхъ уравненій движенія. Столь удачное общее преобразованіе, безъ сомнѣнія, непремѣнно увеличитъ средства человѣческаго ума для расширенія идей динамики во всемъ, что касается вращательныхъ движеній. Въ прекрасномъ мемуарѣ г. Пуансо о свойствахъ моментовъ и площадей, служащемъ приложеніемъ къ его „Статикѣ", можно видѣть, съ какою замѣчательною легкостью ему удалось, благодаря его блестящей идеѣ, не только сдѣлать элементарной теорію, опиравшуюся до тѣхъ поръ на высшій анализъ, но и открыть весьма замѣчательныя новыя и общія свойства,—свойства, которыя мы не должны разсматривать здѣсь, но которыя было бы трудно получить при помощи прежнихъ методовъ.

Теорема площадей для знаменитаго Лапласа была исходной точкой для открытія другого весьма важнаго динамическаго свойства, названнаго имъ *неизмѣняемой плоскостью*,—понятіе, особенно важное въ небесной механикѣ. Сумма проекцій на нѣкоторую плоскость площадей, описанныхъ всѣми тѣлами системы, есть величина постоянная для даннаго времени; Лапласъ пытался опредѣлить направленіе той плоскости, относительно которой эта сумма является наибольшей. Исходя изъ самаго способа опредѣленія положеній плоскости наибольшей площади или наибольшаго момента, Лапласъ доказалъ, что ея направленіе по необходимости совершенно независитъ отъ взаимодѣйствія различныхъ частей системы, вслѣдствіе чего разсматриваемая плоскость по самой природѣ своей должна постоянно оставаться постоянною, каковы бы ни были измѣненія, вносимыя въ положеніе тѣлъ системы ихъ взаимодѣйствіемъ, пока только къ нимъ не присоединится какая нибудь новая внѣшняя сила. Легко понять, насколько важно,—какъ мы особо разъяснимъ во второй части этого труда,—опредѣленіе такой плоскости относительно нашей солнечной ситемы: такъ какъ, если мы отнесемъ къ ней всѣ наши небесныя движенія, то получимъ неоцѣнимое удобство имѣть безусловно постоянный элементъ для сравненія, не смотря на всѣ возмущенія, которыя взаимодѣйствіе планетъ окажетъ съ теченіемъ времени на ихъ разстоянія, на ихъ обращенія и даже на плоскости ихъ орбитъ; это обстоятельство является первымъ и безусловно необходимымъ условіемъ для того, чтобы мы могли изучить, въ чемъ состоятъ указанныя измѣненія.

Къ сожалѣнію, намъ придется замѣтить, что неизвѣстность, въ которой мы до сихъ поръ находимся относительно точнаго значенія многихъ существенныхъ данныхъ, не позволяетъ еще опредѣлить со всею достаточною точностью положеніе неизмѣняемой плоскости. Но такая трудность примѣненія нисколько не уменьшаетъ значенія изложенной прекрасной теоремы, разсматриваемой съ точки зрѣнія раціональной механики, — единственной точки зрѣнія, которой мы здѣсь должны держаться.

Теорія неизмѣняемой плоскости была въ послѣднее время значительно усовершенствована г. Пуансо, который, естественнымъ образомъ, долженъ былъ перенести туда свои собственныя воззрѣнія на общую теорію площадей или моментовъ. Онъ, во-первыхъ, значительно упростилъ основное понятіе о неизмѣняемой плоскости, и сдѣлалъ его по возможности элементарнымъ, показавъ, что эта плоскость въ дѣйствительности представляетъ собою не что иное, какъ плоскость общей пары, представляющей сумму всѣхъ паръ, составляемыхъ различными силами системы; такимъ образомъ онъ непосредственно опредѣляетъ ее при помощи динамическаго признака вмѣсто одного только геометрическаго признака наибольшей суммы площадей. Если какое-нибудь понятіе дѣйствительно упрощается по своей природѣ и выводы изъ него сами собою дѣлаются легче, то оно непремѣнно расширяется и приводитъ къ новымъ результатамъ. Таковъ въ дѣйствительности обычный путь человѣческаго ума въ наукѣ: наиболѣе плодотворныя для открытій теоріи очень часто были сначала только средствомъ упростить рѣшеніе разсмотрѣнныхъ уже ранѣе вопросовъ. Трудъ, о которомъ мы здѣсь говоримъ, представляетъ собою новое доказательство такого положенія. Теорія г. Пуансо позволила внести большую степень точности въ опредѣленіи неизмѣняемой плоскости нашей солнечной системы, указывая и исправляя крупный пробѣлъ, оставленный въ этомъ вопросѣ Лапласомъ.

Этотъ великій геометръ, вычисляя положеніе плоскости наибольшей площади, считалъ нужнымъ разсматриватъ только главныя плоскости, опредѣляемыя вращеніемъ планетъ вокругъ солнца, вовсе не принимая въ разсчетъ плоскости, въ которыхъ движутся спутники вокругъ планетъ, или всѣ свѣтила и самое солнце. Пуансо доказалъ необходимость принимать во вниманіе эти различные элементы, такъ какъ иначе найденную плоскость нельзя вовсе считать строго неизмѣняемой. Отыскивая затѣмъ положеніе истинной неизмѣняемой плоскости съ точностью, допускаемой настоящимъ несовершенствомъ большинства данныхъ, онъ доказалъ, что эта плоскость значительно отличается отъ найденной Лапласомъ; этотъ фактъ легко понять, если только принять во вниманіе огромную площадь, которую должно ввести въ вычисленіе громадная масса солнца, хотя его вращеніе и очень медленно.

Чтобы пополнить перечень наиболѣе важныхъ динамическихъ свойствъ вращательнаго движенія, слѣдуетъ привести здѣсь прекрасныя теоремы, открытыя Эйлеромъ относительно того, что онъ назвалъ *моментами инерціи* и *главными осями*; эти теоремы надо отнести къ числу наиболѣе важныхъ и общихъ результатовъ раціональной механики. Эйлеръ назвалъ *моментомъ инерціи* тѣла интегралъ, выражающій сумму произведеній массы каждой частицы на квадратъ ея разстоянія отъ оси, около которой тѣло вращается,—интегралъ, разсмотрѣніе котораго должно быть, очевидно, очень важно, такъ какъ его естественнымъ образомъ можно считать точною мѣрою энергіи вращенія тѣла. Если данная масса однородна, то моментъ инерціи вычисляется, какъ и другіе аналогичные интегралы, относящіеся къ формѣ тѣла; если же, наоборотъ, эта масса неоднородна, то слѣдуетъ еще знать законъ измѣненія плотности въ различныхъ слояхъ, составляющихъ тѣло; послѣ этого дѣлается только нѣсколько сложнѣе самое интегрированіе.

Установивъ это понятіе, Эйлеръ сравнивалъ въ общемъ видѣ моменты инерціи какого-нибудь тѣла относительно всѣхъ возможныхъ осей вращенія, проходящихъ черезъ данную точку, и опредѣлилъ тѣ оси, относительно которыхъ моментъ инерціи долженъ имѣть значеніе maximum или minimum. При этомъ онъ особенное вниманіе обратилъ на оси, пересѣкающіяся въ центрѣ тяжести: эти оси отличаются тѣмъ, что по необходимости имъ соотвѣтствуютъ меньшіе моменты инерціи, чѣмъ другимъ, имѣющимъ тоже направленіе, но расположеннымъ иначе. Эйлеръ открылъ также, что для всякой точки тѣла,—и въ частности для центра тяжести,—всегда существуютъ такія три прямоугольныя оси, что моментъ инерціи тѣла имѣетъ значеніе maximum относительно одной изъ нихъ и minimum относительно другой. Впрочемъ, эти оси характеризуются еще и другимъ общимъ свойствомъ, которое въ настоящее время служитъ обыкновенно для ихъ аналитическаго опредѣленія; въ этомъ свойствѣ на самомъ дѣлѣ и заключается для анализа то главное преимущество, которое достигается отнесеніемъ движенія тѣла къ указаннымъ тремъ осямъ. Свойство это заключается въ слѣдующемъ: если эти оси взять за оси координатъ x, y, z, то интегралы $\int xzdm$, $\int xydm$, $\int yzdm$, гдѣ m выражаетъ массу тѣла, распространенные на все тѣло, суть нули,—а это обстоятельство значительно упрощаетъ общія уравненія вращательнаго движенія. Но главная открытая Эйлеромъ динамическая теорема, относящаяся къ этимъ осямъ,—теорема, на основаніи которой онъ справедливо назвалъ ихъ *главными осями вращенія*,—заключается въ устойчивости вращенія около нихъ; т. е. если тѣло начнетъ вращаться вокругъ одной изъ этихъ осей, то вращеніе будетъ продолжаться безъ измѣненія неограниченное время,—свойство, которое не имѣетъ мѣста для всякой другой оси: тамъ, вообще говоря, мгновенное вращеніе происходитъ около постоянно мѣняющейся оси. Для каждаго тѣла, вообще, существуетъ только одна такая система главныхъ осей; но, если всѣ моменты инерціи всегда равны между собою, то направленіе этихъ осей дѣлалось бы совершенно неопредѣленнымъ, лишь бы ихъ всегда выбирали взаимно перпендикулярными; таковы, напримѣръ, оси однородной сферы, для которой можно считать за постоянныя оси вращенія всѣ системы прямоугольныхъ осей, проходящихъ черезъ центръ. Существуетъ еще нѣкоторая степень неопредѣленности для тѣлъ вращенія: тогда геометрическая ось есть одна изъ главныхъ динамическихъ осей, а другія двѣ можно, очевидно, взять произвольно въ плоскости, перпендикулярной къ первой оси.

Опредѣленіе главныхъ осей представляетъ часто большія затрудненія, если разсматривать тѣла какой угодно формы и состава; но въ тѣхъ несложныхъ случаяхъ, которые въ небесной механикѣ, къ счастью, представляются намъ чаще всего, оно выполняется съ крайнею легкостью. Напримѣръ, въ однородномъ эллипсоидѣ, или даже въ эллипсоидѣ, составленномъ только изъ однородныхъ, подобныхъ и концентрическихъ слоевъ различныхъ плотностей, три главные сопряженные діаметра и представляютъ собою главныя динамическія оси: моментъ инерціи имѣетъ значеніе maximum относительно наименьшаго изъ этихъ діаметровъ, и minimum—относительно наибольшаго. Для случая, когда главныя оси тѣла или системы, а также и соотвѣтствующіе моменты инерціи опредѣлены, и система не вращается около одной изъ этихъ осей, Эйлеръ установилъ весьма простыя общія формулы, которыя всегда даютъ возможность опредѣлить углы, образуемые съ ними прямой, около которой самопроизвольно происходитъ мгновенное вращеніе, и значеніе соотвѣтствующаго момента инерціи; этихъ данныхъ достаточно для полнаго анализа вращательнаго движенія.

Таковы общія теоремы динамики, относящіяся непосредственно къ полному опредѣленію какъ поступательнаго, такъ и вращательнаго движенія тѣла или какой угодно системы тѣлъ. Но кромѣ этихъ основныхъ теоремъ геометры открыли еще многія другія весьма общія свойства движенія; хотя они и не строго необходимы, однако при философскомъ изложеніи раціональной механики слѣдуетъ отмѣтить ихъ въ виду крайней важности для упрощенія спеціальныхъ изслѣдованій.

Первое и самое замѣчательное изъ этихъ свойствъ, имѣющее наибольшее значеніе въ приложеніяхъ, заключается въ знаменитой тео ремѣ *сохраненія живыхъ силъ*. Первоначальнымъ ея открытіемъ мы обязаны Гюйгенсу, который на этомъ соображеніи обосновалъ свое рѣшеніе задачи о центрѣ колебанія. Затѣмъ эта идея была обобщена Иваномъ Бернулли, такъ какъ Гюйгенсъ доказалъ эту теорему только для движенія тяжелыхъ тѣлъ. Но Иванъ Бернулли, приписывавшій преувеличенное и неправильное значеніе введенному Лейбницемъ различію между *мертвыми* и *живыми* силами, напрасно старался представить эту теорему какъ первоначальный законъ природы, тогда какъ она является только болѣе или менѣе общимъ слѣдствіемъ основныхъ динамическихъ теорій. Наиболѣе важныя работы объ этомъ свойствѣ движенія принадлежатъ, несомнѣнно, знаменитому Даніилу Бернулли: онъ далъ теоремѣ живыхъ силъ особенно широкое распространеніе и сообщилъ ей ту систематическую форму, въ которой она представляется теперь; вмѣстѣ съ тѣмъ Д. Бернулли весьма удачно воспользовался ею для изученія движенія жидкихъ тѣлъ.

Какъ извѣстно, геометры со времени Лейбница называютъ *живою силою* тѣла произведеніе его массы на квадратъ скорости, совершенно однако же оставляя въ сторонѣ слишкомъ неопредѣленныя соображенія, заставившія Лейбница ввести такое выраженіе. Общая теорема, которую мы здѣсь разсмотримъ, заключается въ слѣдующемъ: какія бы измѣненія ни происходили въ движеніи каждаго тѣла какой нибудь системы вслѣдствіе ихъ взаимодѣйствія, сумма живыхъ силъ всегда остается одною и тою же для даннаго времени. Это положеніе теперь доказывается съ крайнею легкостью при помощи основныхъ уравненій движенія какой угодно системы,—особенно съ помощью пріема, указаннаго Лагранжемъ, который исходилъ изъ общей формулы динамики, изложенной въ предшествующей лекціи.

Съ аналитической точки зрѣнія главная польза этой прекрасной теоремы заключается существеннымъ образомъ въ томъ, что она всегда съ самаго начала даетъ конечное уравненіе между массами и скоростями различныхъ тѣлъ системы. Этого соотношенія, въ которомъ можно видѣть одинъ изъ окончательныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія, достаточно для полнаго разрѣшенія задачи во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда ее можно свести къ опредѣленію движенія одного изъ разсматриваемыхъ тѣлъ,—опредѣленіе, выполняемое очень легко.

Чтобы составить себѣ правильное представленіе объ этомъ важномъ свойствѣ, необходимо замѣтить, что оно подлежитъ крупному ограниченію, совершенно не позволяющему поставить его, въ отношеніе общности, наравнѣ съ изслѣдованными нами раньше теоремами. Это ограниченіе, открытое въ концѣ послѣдняго столѣтія Карно, заключается въ томъ, что сумма живыхъ силъ всегда уменьшается при толчкѣ не вполнѣ упругихъ тѣлъ и вообще всякій разъ, какъ система претерпѣваетъ какое нибудь рѣзкое измѣненіе. Карно доказалъ, что тогда происходитъ потеря живыхъ силъ, равная суммѣ живыхъ силъ, соотвѣтствующихъ утраченнымъ при такомъ обмѣнѣ скоростямъ. Такимъ образомъ теорема сохраненіи живыхъ силъ имѣетъ мѣсто только въ случаѣ, когда движеніе системы измѣняется постепенно или когда оно происходитъ только подъ вліяніемъ толчка между тѣлами, обладающими совершенною упругостью. Такое важное соображеніе дополняетъ общее представленіе, которое нужно составить себѣ относительно указаннаго замѣчательнаго свойства.

Изъ всѣхъ главныхъ теоремъ раціональной механики только что разсмотрѣнная нами неоспоримо имѣетъ наибольшее значеніе въ приложеніяхъ къ практической механикѣ, т. е. для всѣхъ вопросовъ, относящихся къ теоріи движенія машинъ, насколько такая теорія можетъ быть установлена опредѣленно и точно. Теорема живыхъ силъ давала до сихъ поръ, съ этой точки зрѣнія, весьма цѣнныя общія указанія, съ особенною точностью и совершенною краткостью выраженныя въ трудѣ Карно, къ которому затѣмъ не было добавлено ничего существеннаго. Въ самомъ дѣлѣ, эта теорема непосредственно представляетъ динамическій смыслъ какой угодно машины въ ея истинномъ видѣ, показывая, что при всякой передачѣ и измѣненіи движенія, производимыхъ машиной, происходитъ просто обмѣнъ живыхъ силъ между массами двигателя и тѣла, приводимаго въ движеніе. Этотъ обмѣнъ былъ бы полнымъ, т. е. вся живая сила двигателя была бы утилизирована при отсутствіи рѣзкихъ измѣненій, если бы треніе, сопротивленіе среды и пр. не поглощали по необходимости часть ея, болѣе или менѣе значительную, смотря по сложности машины. Эти соображенія наглядно выясняютъ всю безсмысленность такъ называемаго *вѣчнаго движенія*, даже указывая, въ общемъ видѣ, когда именно машина должна остановиться сама, если ее предоставить дѣйствію первоначально сообщеннаго ей толчка; впрочемъ, безсмысленность вѣчнаго движенія по своей природѣ настолько понятна, что Гюйгенсъ, наоборотъ, основалъ отчасти свое доказательство теоремы живыхъ силъ на явной очевидности такой невозможности. Какъ бы то ни было, теорема живыхъ силъ даетъ ясное понятіе объ истинномъ динамическомъ совершенствѣ машины, указывая, что оно состоитъ въ утилизированіи по возможности большей части живой силы двигателя, и что, вообще говоря, этотъ результатъ можетъ быть достигнутъ тогда, когда мы постараемся упростить механизмъ, насколько это позволяетъ природа двигателя. Въ самомъ дѣлѣ, понятно, что если измѣрять,—какъ это, повидимому, естественно дѣлать,—полезное динамическое дѣйствіе двигателя въ данное время произведеніемъ груза, который оно можетъ поднять, на высоту подъема, то это дѣйствіе, на основаніи законовъ вертикальнаго движенія тяжелыхъ тѣлъ, прямо равняется живой силѣ, а не количеству движенія. Съ этой точки зрѣнія знаменитый споръ, поднятый Лейбницемъ по поводу живыхъ силъ,—споръ, въ которомъ приняли участіе всѣ великіе геометры той эпохи,—вовсе не слѣдуетъ считать не имѣющимъ никакого реальнаго значенія, какъ, повидимому, думалъ д'Аламберъ. Безъ сомнѣнія, на самомъ дѣлѣ было ошибочно считать, что въ этомъ спорѣ заинтересована раціональная механика; онъ, какъ замѣтилъ д'Аламберъ, не могъ оказать на нее никакого дѣйствительнаго вліянія. Принимавшіе въ этомъ спорѣ участіе геометры недостаточно тщательно отличали практическую точку зрѣнія отъ теоретической. Но съ точки зрѣнія одной только практической механики этотъ споръ имѣлъ дѣйствительно важное значеніе. Было бы не безполезно вернуться къ нему и теперь: возраженія противъ обычной оцѣнки динамическаго значенія двигателя заслуживаютъ серьезнаго разсмотрѣнія, такъ какъ дѣйствительно мало раціональнымъ кажется принимать за единицу движеніе, вовсе неравномѣрное.

Но какимъ бы рѣшеніемъ не завершился этотъ неоконченный споръ, примѣненіе теоремы живыхъ силъ тѣмъ не менѣе сохранитъ все свое значеніе при представленіи въ истинномъ видѣ дѣйствительнаго назначенія машинъ; она доказываетъ, что машины заставляютъ терять въ скорости или во времени то, что выигрывается въ силѣ, или обратно. Такимъ образомъ полезность машинъ существеннымъ образомъ заключается въ замѣнѣ однихъ факторовъ производимой работы другими, но онѣ никогда не могутъ сами по себѣ увеличить совокупность работы, — наоборотъ, онѣ постоянно и неизбѣжно уменьшаютъ ее и обыкновенно весьма значительно. Въ концѣ концовъ остается сомнительнымъ, чтобы примѣненіе теоремы живыхъ силъ можно было подвинуть когда-нибудь значительно дальше общихъ указаній описаннаго выше характера; правильное вычисленіе a priori точнаго дѣйствія какой-нибудь данной машины представляетъ собою, какъ задача динамики, слишкомъ большую сложность, и требуетъ точнаго знанія слишкомъ большого числа еще совершенно неизвѣстныхъ намъ соотношеній, чтобы попытка произвести такое вычисленіе въ большинствѣ случаевъ могла увѣнчаться успѣхомъ *).

Движеніе какой угодно системы представляетъ еще другое весьма замѣчательное общее свойство, хотя оно, какъ въ аналитическомъ, такъ особенно въ физическомъ отношеніи, менѣе важно, чѣмъ только что

*) Истинная теорія собственно практической механики, которая вовсе не является, какъ это часто думаютъ, простымъ выводомъ изъ *форономіи* или раціональной механики и относится къ области идей совершенно другого рода, до сихъ поръ еще не создана. Въ этомъ отношеніи положеніе прикладной механики таково же, какъ и всѣхъ другихъ прикладныхъ наукахъ, въ которыхъ человѣческій умъ обладаетъ пока только нѣсколькими недостаточными элементами, какъ мы уже указывали въ нашей второй лекціи. Прикладная механика, если оставить въ сторонѣ устройство двигателей, которое нуждается во всѣхъ нашихъ свѣдѣніяхъ о природѣ, состоитъ изъ изслѣдованій двухъ родовъ, весьма отличныхъ другъ отъ друга: динамическихъ и геометрическихъ. Первыя имѣютъ своею цѣлью устройство наиболѣе удобныхъ приборовъ для возможно полнѣйшаго использованія данныхъ двигательныхъ силъ, т. е. для полученія между живою силою двигателя и приводимаго въ движеніе тѣла самаго близкаго къ единицѣ отношенія, принявъ во вниманіе измѣненія скорости, обусловливаемыя извѣстнымъ назначеніемъ машины. Что касается изслѣдованія второго рода, то задачею ихъ ставится измѣненіе по желанію, при помощи надлежащихъ механизмовъ, траекторій, описываемыхъ точками приложенія силъ. Однимъ словомъ, въ движеніи измѣняется въ первомъ случаѣ его интензивность, во второмъ—направленіе. Изслѣдованія перваго рода относятся къ совершенно новому ученію, въ которомъ не выработано до сихъ поръ ни одной непосредственной и истинно раціональной теоріи. Почти такое же положеніе занимаютъ геометрическія изслѣдованія, зависящія отъ предусмотрѣнной Лейбницемъ *геометріи положенія*, которая до сихъ поръ не сдѣлала почти никакихъ успѣховъ. По этому вопросу я не знаю ни одного дѣйствительнаго труда, кромѣ блестящаго элементарнаго соображенія, представленнаго Монжемъ. Замѣчанія Монжа носятъ чисто эмпирическій характеръ, но заслуживаютъ здѣсь упоминанія, хотя бы только для того, чтобы показать истинную природу этого рода идей.

Монжъ исходилъ изъ того возможнаго на самомъ дѣлѣ наблюденія, что движенія, производимыя машинами въ дѣйствительности, происходятъ по прямой или по окружности, при чемъ каждое изъ нихъ по своему направленію можетъ быть еще постояннымъ или перемѣннымъ. Поэтому онъ считалъ, что всякая машина имѣетъ своимъ назначеніемъ, въ геометрическомъ отношеніи, преобразовывать эти различныя элементарныя движенія одни въ другія. Установивъ это положеніе и исчерпавъ затѣмъ всѣ различныя комбинаціи, получаемыя при такомъ преобразованіи, онъ убѣдился, что по необходимости получается десять классовъ механизмовъ, къ числу которыхъ можно отнести всѣ извѣстные машины, а также и тѣ, которыя будутъ изобрѣтены позднѣе. Можно считать, что таблицы, вытекающія изъ такой классификаціи, доставляютъ механику эмпирическое средство рѣшить въ каждомъ случаѣ задачу о преобразованіи движенія, выбравъ изъ всѣхъ механизмовъ, могущихъ выполнить поставленныя условія, тотъ, который представляетъ наибольшія преимущества въ остальныхъ отношеніяхъ.

изслѣдованная теорема: это свойство выражается извѣстной общей теоремой динамики, которую Мопертюи такъ неправильно назвалъ *принципомъ наименьшаго дѣйствія.*

Происхожденіе идеи, относящейся къ этому открытію, восходитъ до самой отдаленной эпохи: уже геометры древности сдѣлали кое-какія замѣчанія, которыя теперь можно приравнять провѣркѣ этой теоремы въ наиболѣе простомъ частномъ случаѣ. Въ самомъ дѣлѣ, по вопросу о законѣ отраженія свѣта Птоломей ясно говоритъ, что свѣтъ, отражаясь, идетъ отъ одной точки къ другой кратчайшимъ по возможности путемъ. Когда Декартъ и Снелліусъ отрыли дѣйствительный законъ преломленія, Ферматъ изслѣдовалъ, нельзя ли вывести его a priori изъ какого-нибудь соображенія, аналогичнаго замѣчанію Птоломея. Такъ какъ тутъ не могло быть minimum'а длины пройденнаго пути,—ибо прямолинейной путь въ этомъ случаѣ возможенъ,—то Ферматъ предположилъ, что minimum существуетъ по отношенію ко времени; поэтому принимая, что путь свѣта состоитъ изъ двухъ различныхъ прямыхъ, пересѣкающихся подъ неизвѣстнымъ угломъ у поверхности преломляющаго тѣла, онъ задался вопросомъ, каково именно должно быть то направленіе, при которомъ время, потребное на распространеніе свѣта по этой траекторіи, было бы наименьшимъ; на основаніи одного только этого сооображенія ему удалось опредѣлить законъ преломленія, совершенно согласный съ тѣмъ, который полученъ былъ непосредственно изъ наблюденій Снелліусомъ и Декартомъ. Это прекрасное рѣшеніе весьма замѣчательно въ общей исторіи успѣховъ математическаго анализа еще тѣмъ, что оно доставило Фермату первое важное приложеніе его блестящаго метода maxima и minima, который заключаетъ въ себѣ истинный зародышъ дифференціальнаго исчисленія.

Сопоставленіе замѣчанія Птоломея съ трудомъ Фермата съ точки зрѣнія динамики послужило Мопертюи и сходнымъ пунктомъ при открытіи разсматриваемой нами теоремы. Хотя скорѣе вводимый въ заблужденіе, чѣмъ направляемый неопредѣленными метафизическими соображеніями о мнимой экономіи силъ въ природѣ, онъ пришелъ, наконецъ къ тому важному результату, что траекторія тѣла, подверженнаго дѣйствію какихъ-нибудь силъ, должна быть такова, чтобы интегралъ произведенія скорости движущагося тѣла на элементъ описываемой имъ кривой всега былъ наименьшимъ по сравненію со всякой другой кривой. Истиннымъ основателемъ этой теоремы современные геометры справедливо считаютъ Лагранжа, не только потому, что онъ обобщилъ ее, насколько это было возможно, но и особенно потому, что далъ истинное доказательство теоремы, связавъ ее съ основными теоріями динамики и освободивъ отъ неясныхъ и произвольныхъ понятій, введенныхъ Мопертюи. Отъ труда послѣдняго не осталось въ настоящее время никакого слѣда—кромѣ развѣ названія, даннаго имъ этой теоремѣ, непригодность котораго признана всѣми, но которымъ однако ради краткости продолжаютъ пользоваться. Въ томъ видѣ, въ какомъ она была доказана Лагранжемъ для любой системы тѣлъ, разсматриваемая теорема заключается въ слѣдующемъ: каковы бы ни были взаимныя притяженія тѣлъ системы и ихъ тяготѣнія къ опредѣленнымъ центрамъ, они всегда будутъ описывать такія траекторіи, что сумма произведеній массы каждаго изъ нихъ на интегралъ, относящійся къ скорости, умноженной на элементъ соотвѣтствующей кривой, и распространенный на всю систему, необходимо должна имѣть значеніе maximum или minimum. Впрочемъ важно замѣтить, что доказательство этой общей теоремы основано на теоремѣ живыхъ силъ, и поэтому она неизбѣжно подчинена тѣмъ же самымъ ограниченіямъ.

Понятно, что кромѣ интереснаго свойства движенія, содержащагося въ этомъ замѣчательномъ предложеніи, съ аналитической точки зрѣнія, его можно считать новымъ средствомъ для составленія дифференціальныхъ уравненій, приводящихъ къ опредѣленію каждаго отдѣльнаго движенія. Въ самомъ дѣлѣ, достаточно выразить, слѣдуя общему методу maxima и minima, полученному при помощи варьяціоннаго исчисленія, что вышеупомянутая сумма есть maximum или minimum (абсолютный или относительный,—въ зависимости отъ разсматриваемаго случая), т. е. приравнять нулю ея варьяцію. Лагранжъ особо показалъ, какимъ образомъ на основаніи одного только этого соображенія можно въ общемъ видѣ получить основную формулу динамики.

Но какъ бы полезенъ ни былъ въ извѣстныхъ случаяхъ такой пріемъ, вовсе не слѣдуетъ преувеличивать его важность: не надо упускать изъ виду, что самъ онъ не даетъ ни одного конечнаго интеграла уравненій движенія,—онъ только устанавливаетъ эти уравненія другимъ способомъ, который иногда можетъ быть удобнѣе. Въ этомъ отношеніи теорема наименьшаго дѣйствія, конечно, менѣе цѣнна, чѣмъ теорема живыхъ силъ. Но какъ бы то ни было, слѣдуетъ замѣтить здѣсь, вмѣстѣ съ Лангранжемъ, что совокупность этихъ двухъ теоремъ, вообще говоря, можно считать вполнѣ достаточной для полнаго опредѣленія движенія одного тѣла.

Теорема наименьшаго дѣйствія была также представлена Лагранжемъ въ другомъ общемъ видѣ, спеціально предназначенномъ для болѣе нагляднаго представленія ея конкретнаго толкованія. Въ самомъ дѣлѣ, въ выраженіи этой теоремы элементъ траекторіи, очевидно, можно замѣнить эквивалентнымъ ему произведеніемъ скорости на элементъ времени; тогда теорема будетъ состоять въ слѣдующемъ: каждое тѣло системы описываетъ всегда такую кривую, что сумма живыхъ силъ, поглощенныхъ въ данное время при переходѣ изъ одного положенія въ другое, необходимо имѣетъ значеніе maximum или minimum.

Философская исторія относящихся къ теоремѣ наименьшаго дѣйствія работъ можетъ выставить во всемъ блескѣ полную недостаточность и коренную неправильность метафизическихъ соображеній въ качествѣ орудій научныхъ открытій.

Нельзя, безъ сомнѣнія, отрицать, что теологическій и метафизическій принципъ конечныхъ причинъ не принесъ здѣсь нѣкоторой пользы, способствуя въ началѣ пробужденію вниманія геометровъ къ этому важному динамическому свойству и даже давая имъ кое-какія неопредѣленныя указанія по этому предмету.

Духъ этого курса,—какимъ мы его уже ясно обрисовали и какимъ онъ будетъ выясняться далѣе все болѣе и болѣе—дѣйствительно заставляетъ насъ признать, что вообще теологическія и метафизическія гипотезы были полезны и даже необходимы для истиннаго успѣха человѣческаго ума, поддерживая его дѣятельность въ то время, пока не было достаточно общихъ положительныхъ понятій. Но даже и въ этомъ случаѣ многочисленныя и существенныя неудобства, сопряженныя съ такими пріемами развитія, ясно доказываютъ, что подобные пріемы можно считать только временными.

Настоящій примѣръ представляетъ собою убѣдительное доказательство такого мнѣнія. Вѣдь если не ввести точныхъ и реально обоснованныхъ соображеній объ общихъ законахъ механики, то до сихъ поръ еще спорили бы,—какъ вполнѣ правильно замѣчаетъ Лагранжъ,—что именно надо понимать подъ *наименьшимъ дѣйствіемъ* природы, такъ какъ мнимая экономія силъ заключается то въ пространствѣ, то во времени, а часто не состоитъ ни въ томъ, ни въ другомъ. Впрочемъ, очевидно, что указанное свойство вовсе не имѣетъ того обсолютнаго характера, который ему сначала хотѣли приписать, ибо въ большемъ числѣ случаевъ оно испытывать опредѣленныя ограниченія. Но особенно ясно указываетъ на коренную неправильность первоначальныхъ соображеній то обстоятельство, что на основаніи произведеннаго Лангранжемъ строгаго анализа вопроса видно, что опредѣленный выше интегралъ вовсе не долженъ непремѣнно имѣть значеніе minimum,—наоборотъ, онъ можетъ также имѣть значеніе и maximum, какъ это въ дѣйствительности и бываетъ въ извѣстныхъ случаяхъ, ибо истинная общая теорема состоитъ только въ томъ, что варьяція этого интеграла есть нуль. Въ чемъ же тогда заключается *экономія* силъ, какими бы признаками ни вздумали характеризовать *дѣйствіе?*. Недостаточность и даже ошибочность аргументаціи Мопертюи теперь вполнѣ очевидны.

Въ этомъ случаѣ,—какъ и во всѣхъ, гдѣ имъ до сихъ поръ приходилось сталкиваться,—сравненіе ясно подтвердило громадное и необходимое превосходство положительной философіи надъ философіей теологической и метафизической не только въ смыслѣ справедливости и точности полученныхъ результатовъ, но даже и въ отношеніи ширины понятій и дѣйствительнаго подъема умозрѣнія.

Чтобы пополнить это теоретическое перечисленіе общихъ свойствъ движенія, я считаю необходимымъ еще привести здѣсь, наконецъ, послѣднее весьма замѣчательное предложеніе, которое обыкновенно вовсе не помѣщаютъ въ одну категорію съ вышеизложенными, но которое тѣмъ не менѣе въ такой высокой степени заслуживаетъ нашего вниманія какъ по своей внутренней красотѣ, такъ особенно по важности и широтѣ его примѣненій въ самыхъ трудныхъ вопросахъ динамики. Рѣчь идетъ о знаменитой общей теоремѣ относительно *совмѣстности малыхъ колебаній*, открытой Даніиломъ Бернулли. Вотъ въ чемъ она состоитъ.

Въ началѣ этой лекціи мы видѣли, что для каждой системы силъ существуетъ состояніе *устойчиваго* равновѣсія, при которомъ, по закону Мопертюи, обобщенному Лагранжемъ, сумма живыхъ силъ имѣетъ maximum.

Если по какой нибудь причинѣ система безконечна мало отклонена отъ этого положенія, она стремится вернуться къ нему, совершая около него рядъ безконечно-малыхъ колебаній, постепенно уменьшающихся и скоро уничтожаемыхъ сопротивленіемъ среды и треніемъ: эти колебанія можно уподобить движенію маятника соотвѣтствующей длины, подверженнаго дѣйствію опредѣленной тяжести.

Но систему могутъ заставить колебаться различнымъ образомъ около состоянія устойчивости нѣсколько различныхъ причинъ. Теорема Даніила Бернулли заключается въ слѣдующемъ: безконечно-малыя колебанія всякаго рода, вызванныя различными одновременными дѣйствіями, каково бы ни было ихъ происхожденіе, просто только присоединяются другъ къ другу и существуютъ совмѣстно, не уничтожаясь: каждое изъ нихъ выполняется, какъ будто бы имѣло мѣсто только оно одно. Легко понять чрезвычайную важность этого прекрасной теоремы для облегченія изученія такого рода движеній: на основаніи ея достаточно изслѣдовать отдѣльно всѣ колебанія, вызванныя каждымъ отдѣльнымъ возмущеніемъ. Такое разложеніе особенно полезно въ изслѣдованіяхъ, относящихся къ движенію жидкихъ тѣлъ, гдѣ почти постоянно встрѣчаются подобныя условія. Свойство, открытое Даніиломъ Бернулли, не менѣе интересно съ физической точки зрѣнія, чѣмъ съ логической. Въ самомъ дѣлѣ, если разсматривать его какъ законъ природы, оно прямо и вполнѣ удовлетворительно объясняетъ массу различныхъ фактовъ, давно уже установленыхъ наблюденіемъ, но которыя до тѣхъ поръ тщетно старались понять. Таково, напримѣръ, совмѣстное существованіе волнъ, появляющихся на поверхности жидкаго тѣла, если оно сразу въ нѣсколькихъ различныхъ точкахъ возмущается подъ дѣйствіемъ разныхъ причинъ; такова же въ акустикѣ совокупность отдѣльныхъ звуковъ, вызванныхъ различными сотрясеніями воздуха. Подобное совмѣстное существованіе, имѣющее мѣсто безъ всякаго смѣшенія различныхъ звуковыхъ волнъ, было, очевидно, часто наблюдаемо, такъ какъ оно служитъ однимъ изъ существенныхъ основаній механизма нашего слуха, но оно казалось необъяснимымъ; теперь же на него смотрятъ только какъ на прямое слѣдствіе прекрасной теоремы Даніила Бернулли.

Если разсматривать эту теорему съ наиболѣе философской точки зрѣнія, то, можетъ быть, мы признаемъ, что способъ, при помощи котораго она получается изъ общихъ уравненій движенія, не менѣе замѣчателенъ, чѣмъ ея аналитическое или физическое значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, это совмѣстное существованіе безконечно малыхъ колебаній различнаго рода около положенія устойчивости какой-нибудь системы имѣетъ мѣсто потому, что дифференціальное уравненіе, выражающее законъ любого изъ этихъ движеній, *линейное* и слѣдовательно, принадлежитъ къ числу такихъ уравненій, общій интегралъ которыхъ непремѣнно представляетъ собою просто сумму извѣстнаго числа частныхъ интеграловъ. Такимъ образомъ въ аналитическомъ отношеніи наложеніе различныхъ колебательныхъ движеній обусловливается извѣстнымъ видомъ наложенія, который устанавливается между соотвѣтствующими различными интегралами. Это важное соотношеніе, конечно, представляетъ собою, какъ справедливо замѣчаетъ Лапласъ, одинъ изъ прекрасныхъ примѣровъ той необходимой гармоніи между абстрактнымъ и конкретнымъ, относительно которой математическая философія доставила намъ столько удивительныхъ указаній.

Таковы главныя философскія соображенія, относящіяся къ различнымъ общимъ теоремамъ раціональной механики, открытымъ до сихъ поръ и вытекающимъ какъ простые, болѣе или менѣе отдаленные выводы изъ основныхъ законовъ движенія, на которыхъ основывается вся система науки о движеніи. Краткое изслѣдованіе этихъ теоремъ, представляющихъ въ своей совокупности одинъ изъ самыхъ внушительныхъ памятниковъ надлежащимъ образомъ направленной дѣятельности человѣческаго ума, было необходимо для окончательнаго опредѣленія философскаго характера науки равновѣсія и движенія—характера, уже достаточно намѣченнаго въ предшествующихъ лекціяхъ въ отношеніи метода. Теперь мы можемъ составить себѣ ясное и общее представленіе о природѣ этой второй отрасли конкретной математики, что и должно было служить единственною существенною цѣлью нашего труда по этому предмету.

Въ этомъ томѣ я старался показать, насколько могъ, въ чемъ заключается въ дѣйствительности философія математики какъ съ точки зрѣнія абстрактныхъ ея принциповъ, такъ и различнаго рода конкретныхъ соображеній и, наконецъ, и съ точки зрѣнія тѣснаго и постояннаго соотношеніе, необходимо существующаго между тѣми и другими. Я очень сожалѣю, что предѣлы, которыми я долженъ былъ ограничиться въ виду общей цѣли этого труда, не позволили мнѣ внести въ сознаніе читателя, въ той степени, въ какой я бы того желалъ, мое глубокое уваженіе къ этой обширной и удивительной наукѣ, являющейся необходимымъ основаніемъ всей положительной философіи, и кромѣ того, очевидно, представляющей самое неоспоримое свидѣтельство могущества человѣческаго генія. Я надѣюсь однако, что мыслители, не имѣющіе несчастія быть совершенно чуждыми этой основной наукѣ, будутъ въ состояніи, слѣдуя указаннымъ мною соображеніямъ, ясно понять ея истинный философскій характеръ.

Чтобы представить дѣйствительно полный очеркъ философіи математики въ ея современномъ состояніи, мнѣ остается еще, какъ я говорилъ раньше (см. 3-ью лекцію), разсмотрѣть третью отрасль конкретной математики,—примѣненіе анализа къ изученію термологическихъ явленій—послѣднее великое завоеваніе человѣческаго ума, которымъ мы обязаны моему знаменитому другу, безсмертному Фурье, недавнюю потерю котораго я оплакиваю; онъ оставилъ въ ученомъ мірѣ такой глубокій пробѣлъ, что его утрата съ каждымъ днемъ будетъ чувствоваться все сильнѣе и сильнѣе. Но чтобы по возможности менѣе отклоняться отъ обычныхъ и всѣми принятыхъ пріемовъ, я заявилъ уже, что отложу это важное изслѣдованіе до тѣхъ поръ, пока естественный порядокъ излагаемыхъ въ этомъ трудѣ соображеній не приведетъ насъ къ части физики, трактующей термологію. Хотя такое перенесеніе не вполнѣ раціонально, но оно приведетъ только къ второстепеннымъ неудобствамъ, такъ какъ философская оцѣнка, которую я представлю, будетъ имѣть совершенно тотъ же характеръ, какой она имѣла бы, если-бы это изслѣдованіе занимало свое настоящее въ логическомъ отношеніи мѣсто.

Считая, что философія математики теперь вполнѣ разъяснена, мы должны приступить къ изслѣдованію болѣе или менѣе совершеннаго примѣненія ея къ изученію различнаго рода явленій природы въ порядкѣ ихъ сложности, примѣненіе, которое впрочемъ само по себѣ очевидно можетъ бросить новый свѣтъ на истинные принципы философіи математики; безъ нихъ эту философію нельзя было бы даже оцѣнить надлежащимъ образомъ. Таково будетъ содержаніе слѣдующаго тома, гдѣ, въ соотвѣтствіи съ энциклопедической системой, строго опредѣленной во второй лекціи на основаніи спеціальной природы каждаго изъ установленныхъ нами главныхъ классовъ явленій, мы начнемъ съ астрономическихъ явленій, къ глубокому изслѣдованію которыхъ особенно приспособлена математика.

КОНЕЦЪ ПЕРВАГО ТОМА.

Въ Книжномъ Магазинѣ Т-ва „ПОСРЕДНИКЪ“,

Вас. Остр., 8 линія, № 9 (близъ Никол. наб.), въ С.-Петербургѣ.

продаются между прочими слѣдующія книги:

Адамсъ. (Женщ.-вр.). Книга для женщинъ, (жен. бол.). Пер. съ нѣм. д-ра В. Рамма. Съ 689 рис. Больш. роск. томъ. 839 стр. 1899. **4** р.

Батюшковъ, К. Н. Сочиненія 6-е изд. съ портр. 1898 **2** р. **50** к.

Буссинескъ, Ж. Анализъ безконечно-малыхъ, пер. А. П. Ненашева т. I. Дифференціальн. исчисленіе ч. I. Элементарный курсъ 1899 (ч. II печат.). **2** р. **50** к.

Бѣлявскій, Ф. Стар. и новая вѣра „Лурдъ—Римъ—Парижъ“, Э. Золя 1900. **1** р.

Вильчинскій, О. Начало центра европейской культуры 1899 **30** к.

—Очеркъ древнѣйш. культуры русскихъ областей. 1898. **30** к.

Гейтцманъ, д-ръ. Анатомическ. Атласъ, съ 635 рис. въ 5 част. Перев. съ 7-го нѣм. изд. Текстъ прим. къ программѣ исп. медиц. коммис. 2-е руск. исп. и доп. изд. 584 стр. 1900 **3** р.

Геккель, Э. Соврем. знанія о филогенетическомъ развитіи (о происхожденіи) человѣка. 1899. **60** к.

Гельмгольцъ, Г. Взаимодѣйствіи силъ природы. 1899. **25** к.

Диттесъ, д-ръ Фр. Критич. этюды о прав.-философіи Спинозы, Лейбница и Канта. 1900. **50** к.

Ибсенъ, Г. Полное собран. соч., общедост. изд. Перев. М. В. Лучицкой 1900 Подп. ц. 2 р. съ пер. **2** р. **50** к. (по выходѣ дороже).

Зографъ, Проф. Ник. Курсъ зоологіи для студ.-естественниковъ, медиковъ и сельск. хоз. Съ 1146 рис. 1316 стр. 1900. **7** р.

Золя, Эмиль. Плодовитость (Fécondité) Романъ въ 6 книгахъ. Полн. перев. съ фр. Д. И. Сеславина 1900. **1** р. **50** к.

Карышевъ, И. А. Основы истинной Науки, изд. 2-е кн. I. Богъ неопровержимъ наукой. Кн. II. Составъ человѣч. существа; Жизнь и смерть. Кн. III. Сущность Жизни. 1899. 3 тома (по 1. р. 50 к.). **4** р. **50** к.

Ковалевскій, М. М. Экономическій строй Россіи. Пер. съ фр. Лучшій переводъ 240 стр. 1900. **1** р. **50** к.

Коссе, Проф. Луидж. Исторіи Экономич. ученій. Перев. съ ит. Н. Н. Спиридонова. 1900. **1** р, **50** к.

Крыжановская. (Рочестеръ). Желѣзный Канцлеръ древняго Египта. Романъ 1900. **2** р. **25** к.

—Царица Хатасу, съ иллюстр. С. С. Соломко. 1894. **2** р. **75** к.

Ланге, Ф. А. Исторія матеріализма и критика его значен. въ наст. Пер. съ 5-го нѣм. изд. под. ред. Вл. Соловьева, 2 тома. 1900. **1** р. **50** к.

Льюисъ, Дж. Г. Эмануилъ Кантъ, его жизнь и историч. значеніе. Психологія и критика основн. принциповъ Канта. Перев. съ англ. 1897. **25** к.

Льюисъ, Жизнь и ученіе Спинозы. Пер. съ анг. 2-е изд. 1899. **25** к.

Мизиновъ, П. Исторія и поэзія. Историко-лит. этюды. Изд. Н. К. Андронова 536 стр. 1900. **2** р.

Мопасанъ, Гюи-де. Полное собр. сочиненій въ 3 больш. томахъ. Перев. подъ ред. П. Д. Доброславина. Подп. цѣн. **3** р. **50** к.

Ницше, Фр. Собраніе сочиненій въ 8 томахъ съ портр. и біогр. перев. под. ред. А. Введенскаго. Подписн. ц. 8 р. съ перес. 10 р. (Все издан. оконч. въ 1900.

Пеханъ. Машины для перемѣщенія грузовъ, помпы, прессы и аккумоляторы. Перев. съ 3-го нѣм. изд. инж. д. Головъ. Съ 122 рис. и 33 табл. чертеж. 1896. **6** р.

Петровъ, свящ. Евангеліе какъ основа жизни. 3-е изд. 1899. **40** к.

Прусъ, Б. Полное собраніе сочин., въ 4 томахъ, съ портр. автора, перев. съ польск. В. И. Маноцкій. 1900. Подп. цѣна. **5** р.

Пуансо. Статика, пер. съ фр. съ доп. техн. П. Л. Федорова. Съ 103 рис. 1898. **1** р.

Радингеръ. Паровыя машины съ большой скоростью поршней. Пер. съ 3-го нѣм. изд. Инж. Д. Головъ. Съ 92 рис. и 3 табл. 1895. **5** р.

Ройтманъ. Евгеній Дюрингъ какъ литературн. критикъ и его нов. крит. пріемъ. 1899. **30** к.

Рошеръ, В. Система призрѣнія бѣдныхъ и мѣропріятій прот. бѣдности. Пер. съ нѣм. К. А. Чемена. 1899. **1** р. **75** к.

Сенкевичъ, Генр. Полное собраніе сочин. въ перев. Ф. В. Домбровскаго, въ 6 томахъ 1899. **6** р.

Техническій Ежегодникъ. Справоч. книга для инж., мех., архитект., судостроит. и студентовъ. Изд. А. Березовскаго, П. Алексѣева и К. Андреевскаго. 2-е изд. 1900. **3** р.

Толстой, Гр. Левъ. Воскресеніе, романъ въ 3 частяхъ. 1900. **75** к.

Туссэна и Лангеншейдта (метода). Самоучители иностран. языковъ подъ ред. Д. Н. Сеславина. Подписныя цѣны:
1) Французск. самоучит. въ 2 т. по **3** р.
2) Нѣмецкій самоучитель въ 1 т. **3** р.
3) Англійск. самоучит. въ 2 т. по **3** р.
4) Итальянск. самоучитель въ 1 т. **3** р.
5) Польскій самоучитель въ 1 т. **3** р.

—Самоучитель русскаго языка для русскихъ подъ ред. Д. Н. Сеславина, сост. С. Г. Ручъ съ прил. орѳограф. словаря. **3** р.

Фишеръ, Куно. О свободѣ человѣка перв. подъ ред. проф. М. И. Свѣшникова. 1900. **30** к.

Френе. Сборникъ задачъ по анализу безконечно-малыхъ ч. I. дифференціальное исчисленіи 1899. **1** р. **50** к.

40б.