МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

ВЫПУСК 7

Калининград
1976

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 7

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Калининградского государственного университета

УДК 513.73

Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.7 Калининград, 1976 г.

Статьи настоящего выпуска относятся к следующим разделам дифференциальной геометрии: многообразия квадрик в многомерных и трехмерных пространствах, теория многомерных сетей, дифференцируемые соответствия, связности, ассоциированные с многообразиями фигур, многообразия пар фигур.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области геометрии.

Содержание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Б.А.А н д р е е в

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И ПРОСТРАНСТВОМ ПАРЫ (p,q)

Продолжается изучение локального соответствия f между точечным проективным пространством P_N и пространством $R(F)$ пар фигур $F=(p,q)$,где p -точка,а q -неинцидентная ей гиперквадрика [I],[2].

Получены обобщения понятия $K(p_\alpha)$-главных прямых,с их помощью введены понятия f_p- и f_q -главных точек,обнаружена их связь с асимптотическими направлениями распределений подпространств,порожденных соответствием f.

Символ (i,j) [к] означает формулу (i,j) работы [K].

§I. Распределения $\{L^\circ_p\}$ и $\{L^\circ_q\}$.

Рассмотрим индуцируемые отображением $f: U\to R(F), U\subset P_N$ отображения $f_p: U\to P_n$ и $f_q: U\to R(q)$[2,с.II-I2].Введем,в отличие от (2.5)[2],(2.6)[2],следующие обозначения:

$$\Lambda_{0i\mathcal{J}}=-a_{il}\Lambda^l_{\mathcal{J}},\ \Lambda_{0i\mathcal{J}\mathcal{K}}=-\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}}-a_{il}\Lambda^l_{\mathcal{J}\mathcal{K}}-\Lambda_{il(\mathcal{J}}\Lambda^l_{\mathcal{K})} \qquad (1.1)$$

$$(i,j,\ldots=1,\ldots,n;\ i',j',\ldots=0,1,\ldots,n;\ \mathcal{J},\mathcal{K},\ldots=1,\ldots,N).$$

Тогда уравнения отображений f_p и f_q примут,соответственно вид:

$$\widetilde{x}^i=\Lambda^i_{\mathcal{J}}\widetilde{X}^{\mathcal{J}}+\tfrac{1}{2}\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\widetilde{X}^{\mathcal{J}}\widetilde{X}^{\mathcal{K}}+<3>, \qquad (1.2)$$

$$a_{i'j}=a^\circ_{i'j}+\Lambda_{i'j\mathcal{J}}\widetilde{X}^{\mathcal{J}}+\tfrac{1}{2}\Lambda_{i'j\mathcal{J}\mathcal{K}}\widetilde{X}^{\mathcal{J}}\widetilde{X}^{\mathcal{K}}+<3>, \qquad (1.3)$$

где $a^\circ_{0j}\equiv 0$,а символ $<3>$ означает совокупность членов третьего порядка малости относительно $\widetilde{X}^{\mathcal{J}}$.

Отображения f_p и f_q порождают два расслоения области U на подмногообразия, являющиеся соответственно прообразами элементов p и q при этих отображениях. Из уравнений (I.2), (I.3) следует, что инвариантные подпространства L°_p и L°_q, уравнения которых имеют вид:

$$\Lambda^i_\gamma X^\gamma = 0, \tag{1.4}$$

$$\Lambda_{i'j\gamma} X^\gamma = 0, \tag{1.5}$$

являются касательными подпространствами в точке $P^\circ \in U$ соответственно к подмногообразиям: $f_p^{-1}(p^\circ)$ и $f_q^{-1}(q^\circ)$, где $(p^\circ, q^\circ) = f(P^\circ)$. Отсюда следует, что распределения $\{L^\circ_p\}$ и $\{L^\circ_q\}$ подпространств L°_p и L°_q являются голономными распределениями [3, с.64]. Очевидно также, что пересечение $L^\circ_p \cap L^\circ_q$ состоит из рассматриваемой точки P°, а коразмерности d_p и d_q подпространств L°_p и L°_q равны соответственно рангам [4, с.181] фигур p и q, и, таким образом, распределения $\{L^\circ_p\}$ и $\{L^\circ_q\}$ являются друг для друга распределениями нормалей первого рода [3, с.57].

§2. $K_p(P_\gamma)$-главные и $K_q(Q_\gamma)$-главные точки

Уравнения касательных к f_p и f_q дробнолинейных отображений $K_p(P_\gamma)$ и $K_q(Q_\gamma)$ имеют соответственно вид:

$$\tilde{x}^i = \frac{\Lambda^i_\gamma \tilde{X}^\gamma}{1 - P_\gamma \tilde{X}^\gamma}, \tag{2.1}$$

$$a_{i'j} = a^\circ_{i'j} + \frac{\Lambda_{i'j\gamma} \tilde{X}^\gamma}{1 - Q_\gamma \tilde{X}^\gamma}. \tag{2.2}$$

Системы величин $\{P_\gamma\}$ и $\{Q_\gamma\}$ являются квазитензорами:

$$\overset{\circ}{\nabla} P_\gamma = \overset{\circ}{\nabla} Q_\gamma = -\Pi^\circ_\gamma. \tag{2.3}$$

Введем понятие $K_q(Q_\gamma)$-главных прямых, обобщающее для отображения f_q понятие $K(p_\alpha)$-главных прямых точечных взаимнооднозначных соответствий [5, с.71]. Рассмотрим дробнолинейное отображение $\breve{K}_q : R(q) \longrightarrow P_N$. Потребуем, чтобы гомография $K_q(Q_\gamma, E) = \breve{K}_q \circ K_q(Q_\gamma)\big|_E$, где $E = im\, \breve{K}_q(R(q))$,

была тождественным отображением пространства E.

Определение I. $K_q(Q_\gamma)$-главными прямыми отображения f_q называются главные прямые точечных биективных отображений вида

$$f_q(E, Q_\gamma) = \breve{K}_q \circ f_q\big|_E \tag{2.4}$$

для касательных к ним тождественных гомографий.

Можно показать, что свойство быть $K_q(Q_\gamma)$-главной прямой не зависит от выбора отображений $\breve{K}_q$ и подпространств $\breve{K}_q(R(q))$, в которых лежит эта прямая. Очевидно также, что приведенное определение имеет смысл только для прямых, не лежащих в подпространстве L°_q, так как выполняется: $K_q(Q_\gamma)(L^\circ_q) = q^\circ$.

Определение 2. Точка A, не принадлежащая подпространству L°_q, называется f_q-главной, если существует касательное к f_q дробнолинейное отображение $K_q(Q_\gamma)$, такое, что, когда прямая $P^\circ A$ является $K_q(Q_\gamma)$-главной, то гиперквадрика $K_q(Q_\gamma)(A)$ инцидентна точке p°.

Теорема I. На каждой $K_q(Q_\gamma)$-главной прямой существует единственная f_q-главная точка.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится так же, как доказательство теоремы I работы [1]. Если прямая $P^\circ A$ является $K_q(Q_\gamma)$-главной, то необходимым и достаточным условием того, чтобы точка A была f_q-главной, является ее принадлежность гиперплоскости

$$Q_\gamma X^\gamma = X^\circ. \tag{2.5}$$

Заметим, что аналогичные построения можно провести, заменив f_q, $K_q(Q_\gamma)$, $R(q)$ и L°_q соответственно на f_p, $K_p(P_\gamma)$, P_n и L°_p и определив таким образом понятия $K_p(P_\gamma)$-главных прямых и f_p-главных точек. Место гиперплоскости (2.5) в этих построениях займет гиперплоскость

$$P_\gamma X^\gamma = X^\circ. \tag{2.6}$$

§3. p-индикатриса $\mathcal{J}_p$ и q-индикатриса $\mathcal{J}_q$

Рассмотрим инвариантные многообразия

$$\Lambda^i_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2\Lambda^i_\gamma X^\gamma X^\circ = 0, \tag{3.1}$$

$$\Lambda_{i'_j \gamma x} X^{\gamma} X^{x} - 2 \Lambda_{i'_j \gamma} X^{\gamma} X^{\circ} = 0, \qquad (3.2)$$

относящиеся ко второй дифференциальной окрестности отображения f. Будем называть их, соответственно p-индикатрисой и q-индикатрисой. В общем случае p-индикатриса $\mathcal{J}_p$ (q-индикатриса $\mathcal{J}_q$) является алгебраическим многообразием размерности $N-d_p(N-d_q)$ и порядка $2^{d_p}(2^{d_q})$, содержит точку P° и имеет в этой точке касательным подпространством подпространство $\overset{\circ}{L}_p\,(\overset{\circ}{L}_q)$.

Т е о р е м а 2. Множество $\mathcal{J}_p \setminus (\mathcal{J}_p \cap \overset{\circ}{L}_p)$ является множеством f_p—главных точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (I.4)[I], (3.I) и (2.6) следует, что f_p —главные точки лежат на p-индикатрисе $\mathcal{J}_p$. Пусть координаты X^{γ}, X° точки A удовлетворяют системе (3.I). Возьмем произвольную гиперплоскость (2.6), содержащую точку A. Получаем

$$\Lambda^{i}_{\gamma x} X^{\gamma} X^{x} = 2 P_{\gamma} \Lambda^{i}_{x} X^{\gamma} X^{x}. \qquad (3.3)$$

Если точка A не принадлежит подпространству $\overset{\circ}{L}_p$, то на основании соотношений (I.3)[I] заключаем, что прямая $P^\circ A$ является $K_p(P_\gamma)$—главной, и тогда из (2.6) следует, что точка A - f_p—главная.

Т е о р е м а 3. Многообразие $\mathcal{J}_p \cap \overset{\circ}{L}_p$ является множеством точек, лежащих на асимптотических направлениях распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Расположим вершины R_α $(\alpha,\beta,\ldots = 1,2,\ldots,n)$ в текущем элементе $\overset{\circ}{L}_p$ распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$, а вершины $R_{\hat\alpha}$ $(\hat\alpha,\hat\beta,\ldots = n+1,\ldots,N)$ —на его нормали первого рода $\overset{\circ}{L}_q$. Система дифференциальных уравнений распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$ в таком репере имеет вид [3, с.54]:

$$\Omega^{\hat\alpha}_{\alpha} = \Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma} \Omega^{\gamma}_{\circ}, \qquad (3.4)$$

причем для системы величин $\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}$ выполняется равенство:

$$\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma} \Lambda^{i}_{\hat\alpha} = - \Lambda^{i}_{\alpha\gamma}. \qquad (3.5)$$

Из (3.I) получаем систему дифференциальных уравнений многообразия $\mathcal{J}_p \cap \overset{\circ}{L}_p$:

$$\Lambda^{i}_{\alpha\beta} X^{\alpha} X^{\beta} = 0, \quad X^{\hat\alpha} = 0, \qquad (3.6)$$

которая, согласно (3.5), равносильна системе уравнений конуса асимптотических направлений распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$ [3, с.81].

Из теорем 2 и 3 вытекает следующая связь между двумя различными понятиями. Свойство быть f_p—главной точкой имеет смысл лишь для точек, не лежащих в подпространстве $\overset{\circ}{L}_p$. Рассмотрим, однако, последовательность таких точек, сходящихся к точке подпространства $\overset{\circ}{L}_p$.

Т е о р е м а 4. Если последовательность f_p-главных точек сходится к точке подпространства $\overset{\circ}{L}_p$, то эта точка лежит на асимптотической прямой распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$.

Утверждения, аналогичные теоремам 2,3,4, справедливы также для q-индикатрис и распределения $\{\overset{\circ}{L}_q\}$.

Список литературы

I. А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур. - .Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.6-19.

2 .А н д р е е в Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q).-Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6, Калининград, 1975, 5-18.

3 .Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейчатых элементов в пространстве проективной связности I.-"Труды геом.семинара", т.3, 1971, ВИНИТИ, 49-94.

4.М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. -"Труды геом.семинара", т.2, 1969, ВИНИТИ, с.179-206.

5.Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.-Итоги науки, ВИНИТИ. Геометрия, 1969, 65-107.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7
1976

УДК 513.73

Ж.Н. Багдасарян

СОПРЯЖЕННАЯ СЕТЬ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n, АССОЦИИРОВАННОЙ С СЕМЕЙСТВОМ КОНУСОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим гиперповерхность V_{n-1}, образованную вершинами $(n-1)$-параметрического семейства невырожденных $(n-2)$-мерных конусов K' второго порядка, причем каждый конус K' лежит в касательной гиперплоскости к V_{n-1} в соответствующей точке. Говорят, что сеть линий на гиперповерхности V_{n-1} является сопряженной, если в подвижном репере, построенном на касательных к линиям сети, тензор a_{ij} [2] имеет канонический вид. На гиперповерхности V_{n-1} существует много сопряженных сетей. Из всех сопряженных сетей мы выберем ту, которая сопряжена и относительно конуса K': $b_{ij}x^i x^j = 0$, $x^n = 0$. Отсюда следует, что две квадратичные формы

$$\Phi: a_{ij}x^i x^j, \quad K': b_{ij}x^i x^j \tag{1}$$

должны допускать одновременно приведение к каноническому виду. Мы будем предполагать такое приведение возможным.

Если направления $L_1(y^1, y^2, \dots, y^{n-1})$ и $L_2(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$ сопряжены относительно конусов Φ и K', то должны иметь место равенства:

$$a_{ij}x^i y^j = 0, \quad b_{ij}x^i y^j = 0, \quad i,j,k\ldots = 1,2,\ldots,n-1. \tag{2}$$

Направление $L_2(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$, обладающее сопряженным направлением относительно конусов Φ и K', определяется из системы уравнений

$$(a_{ij} - \alpha b_{ij})x^j = 0. \tag{3}$$

Система (3) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$|a_{ij} - \alpha b_{ij}| = 0. \tag{4}$$

Пусть $\quad a_{ij} = a_{ii}\delta_{ij}, \quad b_{ij} = b_{ii}\delta_{ij},$ (5)

где δ_{ij} -символ Кронекера.

Учитывая соотношение (5), решение системы (4) запишется так:

$$\alpha_i = \frac{a_{ii}}{b_{ii}}. \tag{6}$$

Здесь α_i -характеристические корни уравнения (4), которые в рассматриваемом случае предполагаются различными, а a_{ii} и b_{ii} -это собственные значения тензоров a_{ij} и b_{ij}. Условие (5) геометрически означает, что вершины A_i репера R [2] мы расположим на касательных к линиям сети. Тогда формы ω_j^i $(i \neq j)$ становятся главными, и они выражаются через базисные формы ω^i следующим образом

$$\omega_j^i = a_{jk}^i \omega^k \quad (i \neq j). \tag{7}$$

Коэффициенты a_{ii} и b_{ii} конусов Φ и K' удовлетворяют уравнениям

$$da_{ii} = a_{ii}(2\omega_i^i - \omega_0^0 - \omega_n^n) + \lambda_{iik}\omega^k,$$

$$db_{ii} = b_{ii}\left(2\omega_i^i + \frac{2}{n-1}\omega_0^0 + \frac{2}{n-1}\omega_n^n\right) + \mu_{iik}\omega^k,$$

а формы ω_j^i $(i \neq j)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a_{ii}\omega_j^i + a_{jj}\omega_i^j &= -\lambda_{ijk}\omega^k, \\ b_{ii}\omega_j^i + b_{jj}\omega_i^j &= -\mu_{ijk}\omega^k. \end{aligned} \tag{8}$$

В системе (8) $(n-1)(n-2)$ уравнений с $(n-1)(n-2)$ неизвестными. Так как в системе (8) при замене индексов i и j мы снова получаем прежнюю систему, то можем вычислить только формы

$$\omega_j^i = \frac{a_{jj}\mu_{ijk} - b_{jj}\lambda_{ijk}}{a_{ii}b_{jj} - a_{jj}b_{ii}} \qquad (i \neq j), \tag{9}$$

где $\Delta = a_{ii}b_{jj} - a_{jj}b_{ii} \neq 0$. Сравнивая соотношение (9) с соотношением (7), заключаем, что сетевой объект, связанный с сопряженной сетью, определяется функциями:

$$a_{jk}^i = \frac{a_{jj}\mu_{ijk} - b_{jj}\lambda_{ijk}}{a_{ii}b_{jj} - a_{jj}b_{ii}}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что внутренний фундаментальный объект охвачен объектами $(a_{ii}, a_{jj}, b_{ii}, b_{jj}, \lambda_{ijk}, \mu_{ijk})$.

Т е о р е м а 1. Задание поля конусов $K': b_{ij}x^ix^j=0, x^4=0$ на гиперповерхности V_{n-1} пространства P_n в общем случае выделяет единственную сопряженную сеть.

Эту сеть мы обозначим $\Sigma_{n-1}(\Phi, K')$.

Теперь посмотрим, когда сеть $\Sigma_{n-1}(\Phi, K')$ является голономной. Известно, что если сеть голономна, то в подвижном репере, построенном на касательных к линиям этой сети, каждое из уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируемо. Критерием голономности сети в указанном репере является выполнение соотношения

$$a_{jk}^i = a_{kj}^i \quad (i, j, k - \text{различны}). \tag{11}$$

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы сопряженная сеть $\Sigma_{n-1}(\Phi, K')$ на гиперповерхности V_{n-1} пространства P_n была голономной, необходимо и достаточно, чтобы имело место условие

$$\mu_{ijk} = \frac{\alpha_i + \alpha_j}{2\alpha_i\alpha_j}\lambda_{ijk}, \tag{12}$$

где α_i, α_j имеют вид (6) и i, j, k – все различны.

Необходимость. Пусть сопряженная сеть $\Sigma_{n-1}(\Phi, K')$ голономна, т.е. имеют место соотношения (11), которые с учетом (10) запишутся так:

$$\frac{b_{jj}\lambda_{ijk} - a_{jj}\mu_{ijk}}{b_{ii}a_{jj} - b_{jj}a_{ii}} = \frac{b_{kk}\lambda_{ikj} - a_{kk}\mu_{ikj}}{b_{ii}a_{kk} - b_{kk}a_{ii}}. \tag{13}$$

Равенство (13) при помощи обозначений (6) принимает вид

$$\frac{\lambda_{ijk} - \alpha_j\mu_{ijk}}{\alpha_j - \alpha_i} = \frac{\lambda_{ijk} - \alpha_k\mu_{ikj}}{\alpha_k - \alpha_i}. \tag{14}$$

После элементарных преобразований из (14) получим

$$\alpha_j(\alpha_i - \alpha_k)\mu_{ijk} + \alpha_k(\alpha_j - \alpha_i)\mu_{kij} = -(\alpha_k - \alpha_j)\lambda_{ijk}. \tag{15}$$

Если в соотношении (15) проциклируем индексы i, j, k , то получим еще два равенства:

$$\alpha_i(\alpha_k - \alpha_j)\mu_{ijk} + \alpha_k(\alpha_j - \alpha_i)\mu_{jki} = -(\alpha_i - \alpha_k)\lambda_{ijk}, \tag{16}$$

$$\alpha_j(\alpha_i - \alpha_k)\mu_{jki} + \alpha_i(\alpha_k - \alpha_j)\mu_{kij} = -(\alpha_j - \alpha_i)\lambda_{ijk}. \tag{17}$$

Полученные соотношения (15), (16), (17) можно рассматривать как систему уравнений относительно функций $\mu_{ijk}, \mu_{jki}, \mu_{kij}$. Система (15)-(17) имеет решение, так как главный определитель этой системы в силу соотношений $\alpha_i \neq \alpha_j \neq \alpha_k \neq 0$ отличен от нуля, т.е.

$$\Delta' = 2\alpha_i\alpha_j\alpha_k(\alpha_i - \alpha_k)(\alpha_j - \alpha_i)(\alpha_k - \alpha_j) \neq 0.$$

Следовательно, решение этой системы имеет вид (12).

Достаточность. Теперь покажем, что если функции μ_{ijk} и λ_{ijk} связаны соотношением (12), то сопряженная сеть $\Sigma_{n-1}(\Phi, K')$ голономна. Из (12) значение μ_{ijk} подставим в (10), тогда получим

$$a_{jk}^i = -\frac{\lambda_{ijk}}{2\alpha_i b_{ii}} \quad (i \neq j \neq k) \tag{18}$$

или

$$a_{jk}^i = -\frac{\lambda_{ijk}}{2a_{ii}} \quad (i \neq j \neq k). \tag{19}$$

Так как функции λ_{ijk} симметричны относительно всех своих индексов, то из равенства (19) выходит, что сетевой объект a_{jk}^i – симметричен относительно двух нижних индексов j и k, т.е.

$$a_{jk}^i = a_{kj}^i = -\frac{\lambda_{ijk}}{2a_{ii}} \quad (i \neq j \neq k) \tag{20}$$

З а м е ч а н и е. Для голономной сопряженной сети гиперповерхности V_{n-1} главные формы $\omega^i_j\ (i \neq j)$ записываются так:

$$\omega^i_j = -\frac{\lambda_{ijk}}{2a_{ii}}\,\omega^k \qquad (i \neq j). \tag{21}$$

Теперь выделим случай, когда гиперповерхность V_{n-1} пространства P_n является $(n-1)$-сопряженной системой. Следуя Р.В. Смирнову [I], $(n-1)$-сопряженной системой называют такую гиперповерхность $V_{n-1} \subset P_n$, на которой существует сопряженная сеть, обладающая следующими свойствами:

I/из каждой точки V_{n-1} выходит $(n-1)$ линий сети, причем каждая линия принадлежит одному из семейств;

2/касательные к линиям i-го семейства, взятые вдоль любой линии j-го семейства, образуют двумерную развертывающуюся поверхность. Как показал Р.В.Смирнов, гиперповерхность V_{n-1} является $(n-1)$-сопряженной системой, если в подвижном репере, построенном на касательных к линиям сопряженной сети, выполняется соотношение

$$a^i_{jk} = a^i_{kj} = 0 \qquad (i \neq j \neq k). \tag{22}$$

В нашем случае справедлива теорема

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы гиперповерхность V_{n-1} пространства P_n была $(n-1)$-сопряженной системой, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения

$$\mu_{ijk} = 0\,, \quad \lambda_{ijk} = 0\,. \tag{23}$$

Необходимость. Пусть гиперповерхность V_{n-1} является сопряженной системой, тогда выполняется соотношение (22). Теперь из систем уравнений (8) можем получить следующую систему:

$$\begin{gathered} a_{ii}\,a^i_{jk} + a_{jj}\,a^j_{ik} = -\lambda_{ijk}\,, \\ b_{ii}\,a^i_{jk} + b_{jj}\,a^j_{ik} = -\mu_{ijk}\,, \end{gathered} \tag{24}$$

где все i, j, k различны. Из (24) в силу (22) получим соотношение (23).

Достаточность. Пусть справедливо условие (23). Но мы имеем

$$a^i_{jk} = a^i_{kj} = -\frac{\lambda_{ijk}}{2a_{ii}} \qquad (i \neq j \neq k).$$

В силу (23) из последнего соотношения получим (22).

Список литературы

1. С м и р н о в Р.В. Преобразования Лапласа p-сопряженных систем.- ДАН, 71, №3, 1950.

2. Б а г д а с а р я н Ж.Н. Об инвариантном оснащении гиперповерхности, связанной с семейством конусов второго порядка в P_n.- Уч.зап.Ереванского ун-та, №2, 1975.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.7

1976

М.В.Бразевич

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НОРМАЛИЗАЦИИ МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА

Как следует из работы автора [3], с произволом в одну функцию двух аргументов мы можем нормализовать конгруэнцию прямых так, что все одномерные подмногообразия нормализованной конгруэнции будут инволютивными парами линейчатых поверхностей. (Под инволютивными парами линейчатых поверхностей понимаются пары, у которых основные проективитеты на лучах [4] являются инволютивными.)

Естественно поставить задачу нормализовать подобным образом комплекс прямых и все многообразие Грассмана G_r (1,3). В данной заметке доказывается, что подобную нормализацию для всего многообразия Грассмана провести нельзя.

§1. Общие вопросы

Пусть трехмерное проективное пространство P_3 отне - сено к подвижному реперу $\{A_J\}$ $(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\ldots = 1,2,3,4)$, состоящему из четырех аналитических точек A_1, A_2, A_3, A_4. Инфинитезимальное перемещение такого репера определяется уравнениями

$$dA_{\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}} A_{\mathcal{J}}. \qquad (1.1)$$

Компоненты инфинитезимального перемещения репера $\{A_{\mathcal{I}}\}$, т.е. 1-формы $\omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}}$ являются инвариантными 1-формами проективной группы $PG\ (3, R)$, структурные уравнения которой имеют вид:

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}. \qquad (1.2)$$

Пусть прямая $\ell = (A_1, A_2)$ описывает многообразие Грассмана Gr (1,3). Многообразие Грассмана назовем нормализованным, если на нем определено поле дифференциально-геометрического объекта

$$\nabla h_{\alpha}^{p} + \omega_{\alpha}^{p} = h_{\alpha\beta}^{pq}\, \omega_{q}^{\beta}, \qquad (1.3)$$
$$(p, q, \ldots = 1,2;\ \alpha, \beta, \ldots = 3,4).$$

Оснащающий объект h_{α}^{p} устанавливает дифференцируемое соответствие между прямыми пространства P_3, т.е. $\forall \ell = (A_1, A_2) \in Gr(1,3)$ ставит в соответствие прямую ℓ^*, определенную в подвижном репере $\{A_{\mathcal{I}}\}$ уравнениями

$$x^{p} = h_{\alpha}^{p} x^{\alpha} \qquad (1.4)$$

Продолжая систему дифференциальных уравнений (1.3), т.е. дифференцируя ее внешним образом и раскрывая по лемме Картана, будем иметь

$$\nabla h_{\alpha\beta}^{pq} + h_{\alpha}^{q}\omega_{\beta}^{p} + h_{\beta}^{p}\omega_{\alpha}^{q} = h_{\alpha\beta\gamma}^{pqt}\, \omega_{t}^{\gamma}, \qquad (1.5)$$

$$\nabla h_{\alpha\beta\gamma}^{pqt} + h_{\alpha\gamma}^{qt}\omega_{\beta}^{p} + h_{\beta\gamma}^{pt}\omega_{\alpha}^{q} + h_{\alpha\beta}^{tq}\omega_{\gamma}^{p} + h_{\alpha\beta}^{pt}\omega_{\gamma}^{q} +$$
$$+ h_{\gamma\beta}^{pq}\omega_{\alpha}^{t} + h_{\alpha\gamma}^{pq}\omega_{\beta}^{t} = h_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{pqts}\, \omega_{s}^{\sigma}, \qquad (1.6)$$

где величины $h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}$ и $h^{pqts}_{\alpha\beta\gamma\sigma}$ – симметричны сразу по парам индексов, начиная со второй пары, т.е.

$$h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}=h^{ptq}_{\alpha\beta\gamma}, \qquad h^{pqts}_{\alpha\beta\gamma\sigma}=h^{ptqs}_{\alpha\gamma\beta\sigma}=h^{pqst}_{\alpha\beta\sigma\gamma}. \tag{1.7}$$

В соответствии с общими положениями теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований (метода Г.Ф.Лаптева [5] - [6]), система величин $\{h^p_\alpha, h^{pq}_{\alpha\beta}\}$ образует первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект нормализованного многообразия Грассмана, а величины $\{h^p_\alpha, h^{pq}_{\alpha\beta}, h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\}$ – второй фундаментальный дифференциально-геометрический объект рассматриваемого многообразия.

Дальнейшие продолжения системы (1.3) приводят к бесконечной последовательности фундаментальных полей оснащающего объекта:

$$H^{(1)}\{h^p_\alpha, h^{pq}_{\alpha\beta}\}\subset H^{(2)}\{h^p_\alpha, h^{pq}_{\alpha\beta}, h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\}\subset\ldots$$

$$\ldots\subset H^{(\nu)}\{h^p_\alpha, h^{p_1p_2}_{\alpha_1\alpha_2},\ldots, h^{p_1p_2\ldots p_{\nu+1}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\nu+1}}\}\subset\ldots \tag{1.8}$$

Вместо последовательности (1.8) введем алгебраически ей подобную последовательность:

$$\widetilde{H}^{(1)}\{h^p_\alpha, H^{pq}_{\alpha\beta}\}\subset\widetilde{H}^{(2)}\{h^p_\alpha, H^{pq}_{\alpha\beta}, \nabla^t_\gamma H^{pq}_{\alpha\beta}\}\subset\ldots$$

$$\ldots\subset\widetilde{H}^{(\nu)}\{h^p_\alpha, H^{pq}_{\alpha\beta}, \nabla^{t_1}_{\gamma_1}H^{pq}_{\alpha\beta},\ldots,\nabla^{t_{\nu-1}}_{\gamma_{\nu-1}}\ldots\nabla^{t_1}_{\gamma_1}H^{pq}_{\alpha\beta}\}\subset\ldots, \tag{1.9}$$

где $H^{pq}_{\alpha\beta}$ – неголономная ковариантная производная оснащающего объекта h^p_α [1]относительно линейной дифферен - циально-геометрической связности, индуцируемой этим

объектом в главном расслоенном пространстве P или $\dot{Q}$ [2], а ∇^t_γ – символ неголономной ковариантной производной относительно обеих индуцируемых связностей. Заметим, что величины, составляющие последовательность (1.9), являются тензорами и выражаются через величины последовательности (1.8). Например,

$$H^{pq}_{\alpha\beta}=h^{pq}_{\alpha\beta}-h^p_\beta h^q_\alpha, \quad \nabla H^{pq}_{\alpha\beta}=H^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_t, \tag{1.10}$$

$$H^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}=h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}-h^p_\beta h^{qt}_{\alpha\gamma}-h^q_\alpha h^{pt}_{\beta\gamma}, \tag{1.11}$$

$$\nabla^t_\gamma H^{pq}_{\alpha\beta}=H^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}-h^p_\gamma H^{tq}_{\alpha\beta}-h^q_\gamma H^{pt}_{\alpha\beta}-h^t_\alpha H^{pq}_{\gamma\beta}-h^t_\beta H^{pq}_{\alpha\gamma}. \tag{1.12}$$

Отметим, что, с точки зрения расслоенных пространств, нормализованное многообразие Грассмана является секущей поверхностью расслоенного пространства

$E = Gr(1,3)\times Gr(1,3)$, т.е.

$$f: Gr(1,3)\longrightarrow E.$$

Если проективное пространство P_3 отнести к новому подвижному реперу $\{H_\mathcal{J}\}$, где

$$H_p=A_p, \quad H_\alpha=A_\alpha+h^p_\alpha A_p, \tag{1.13}$$

и его деривационные формулы записать в виде

$$dH_\mathcal{J}=\theta^\varkappa_\mathcal{J}H_\varkappa, \tag{1.14}$$

то 1-формы $\omega^\varkappa_\mathcal{J}$ и $\theta^\varkappa_\mathcal{J}$ будут связаны следующими соотношениями:

$$\theta^\alpha_p=\omega^\alpha_p, \quad \theta^p_\alpha=\nabla h^p_\alpha+\omega^p_\alpha-h^p_\beta h^q_\alpha\omega^\beta_q,$$

$$\theta_q^p = \omega_q^p - h_\alpha^p \omega_q^\alpha, \quad \theta_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha + h_\beta^p \omega_p^\alpha, \tag{1.15}$$

а в секущей поверхности f лучу $\ell = (H_1, H_2)$ соответствует пара прямых $\ell - \ell^*$, где $\ell^* = (H_3, H_4)$.

Поскольку база расслоенного пространства является четырехмерной, то естественно при изучении секущей поверхности f рассмотреть лифты m-мерных подмногообразий базы (m = 1,2,3). Эти лифты будем называть m-мерными подмногообразиями нормализованного многообразия Грассмана, и они представляют из себя при $m = 1$ пары линейчатых поверхностей, при $m = 2$ пары конгруэнций, при $m = 3$ пары комплексов. (Подмногообразия нормализованного многообразия Грассмана будем выделять локально, т.е. через каждую точку базы будем проводить m-мерное подмногообразие $Gr(1,3,m)$ и рассматривать лифт этого подмногообразия).

Зададим кривую $\ell = \ell(t)$ на базе расслоенного пространства E, т.е. линейчатую поверхность пространства P_3, дифференциальными уравнениями

$$\omega_p^\alpha = \xi_p^\alpha \theta, \ \nabla \xi_p^\alpha \wedge \theta = 0, \ \mathcal{D}\theta = 0. \tag{1.16}$$

Лифтом этой кривой является кривая секущей поверхности f: $\ell = \ell(t)$, $\ell^* = \ell^*(\ell)$. Дифференциальные уравнения лифта состоят из уравнений (1.3) и (1.16) и, в силу формул (1.10) и (1.15), приводятся к виду:

$$\omega_p^\alpha = \xi_p^\alpha \theta, \quad \theta_\alpha^p = \xi_\alpha^p \theta, \tag{1.17}$$

где

1) $$\xi_\alpha^p = H_{\alpha\beta}^{pq} \xi_q^\beta. \tag{1.18}$$

2) Величины ξ_p^α и ξ_α^p удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla \xi_p^\alpha = {}'\xi_p^\alpha \theta, \ \nabla \xi_\alpha^p = {}'\xi_\alpha^p \theta, \tag{1.19}$$

где в свою очередь

$${}'\xi_\alpha^p = H_{\alpha\beta\gamma}^{pqt} \xi_q^\beta \xi_t^\gamma + H_{\alpha\beta}^{pq} {}'\xi_q^\beta. \tag{1.20}$$

Система величин $\{\xi_p^\alpha, \xi_\alpha^p\}$ образует первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект одномерного подмногообразия нормализованного многообразия Грассмана.

§2. Постановка и решение задачи

Выделим произвольное одномерное подмногообразие в нормализованном многообразии Грассмана. Первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект этого подмногообразия $\{\xi_p^\alpha, \xi_\alpha^p\}$ имеет следующие подобъекты:

1) тензоры ξ_q^p и ξ_β^α, определенные равенствами

$$\xi_q^p = \xi_q^\alpha \xi_\alpha^p, \quad \xi_\beta^\alpha = \xi_p^\alpha \xi_\beta^p. \tag{2.1}$$

Компоненты этих тензоров являются решениями дифференциальных уравнений

$$\nabla \xi_q^p = {}'\xi_q^p \theta, \ \ \nabla \xi_\beta^\alpha = {}'\xi_\beta^\alpha \theta. \tag{2.2}$$

2) Абсолютный инвариант Λ, определенный равенствами

$$\Lambda = \xi_1^1 + \xi_2^2 = \xi_3^3 + \xi_4^4 = \xi_p^\alpha \xi_\alpha^p, \tag{2.3}$$

Причем, этот инвариант, в силу формул (1.18), можно представить в виде

$$\Lambda = P^{pq}_{\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}_{p}\,\xi^{\beta}_{q}, \qquad (2.4)$$

где тензор $P^{pq}_{\alpha\beta}$ является симметричной частью тензора $H^{pq}_{\alpha\beta}$, т.е.

$$P^{pq}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(H^{pq}_{\alpha\beta} + H^{qp}_{\beta\alpha}). \qquad (2,5)$$

Тензоры ξ^{p}_{q} и ξ^{α}_{β} определяют на лучах ℓ и ℓ^* основные проективитеты пары линейчатых поверхностей (1.17), т.е. проективитеты, задаваемые схемой

$$\forall M = t^p H_p \in \ell \longrightarrow N = \pi(M) \times \ell^* \longrightarrow \widetilde{M} = \sigma(N) \times \ell,$$

$$\forall N = t^{\alpha} H_{\alpha} \in \ell^* \longrightarrow M = \sigma(N) \times \ell \longrightarrow \widetilde{N} = \pi(M) \times \ell^*,$$

где $\pi(M)$ и $\sigma(N)$ - плоскости, касательные к линейчатым поверхностям, составляющим пару в одномерном под - многообразии, в точках M и N. Формулы этих проективитетов имеют вид:

$$\rho\,\tilde{t}^{p} = \varepsilon^{p}_{q}\,t^{q}, \quad \rho\,\tilde{t}^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha}_{\beta}\,t^{\beta}. \qquad (2.6)$$

Проективитеты (2.6) будут инволютивными тогда и только тогда, когда абсолютный инвариант $\Lambda = 0$. В силу формул (2.4) и (2.5), всякое выделенное одномерное подмногообразие будет инволютивной парой линейчатых поверхностей тогда и только тогда, когда

$$H^{pq}_{\alpha\beta} = -\,H^{qp}_{\beta\alpha}, \qquad (2.7)$$

т.е. когда ковариантная производная оснащающего объекта

кососимметрична по парам индексов.

Покажем, что нормализация многообразия Грассмана при выполнении условий (2.7) является сильно вырожденной. С этой целью частично канонизируем репер, поместив вершины A_3 и A_4 на луч ℓ^* (аналитические условия канонизации $h^{p}_{\alpha} = 0$), тогда дифференциальные уравнения нормализованного многообразия Грассмана имеют вид:

$$\omega^{p}_{\alpha} = h^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta}_{q}, \qquad (2.8)$$

а условия (2.7), в силу (1.10), сводятся к виду

$$h^{pq}_{\alpha\beta} = -\,h^{qp}_{\beta\alpha}. \qquad (2.9)$$

Дифференциальное продолжение системы (2.8), т.е. система (1.5), принимает вид:

$$\nabla h^{pq}_{\alpha\beta} = 0, \qquad (2.10)$$

так как величины $h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$, в силу следующих соотношений:

$$h^{pp}_{\alpha\alpha} = 0, \quad h^{ppt}_{\alpha\alpha\gamma} = 0, \quad h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma} = h^{ptq}_{\alpha\gamma\beta} = -\,h^{qpt}_{\beta\alpha\gamma}.$$

Например,

$$h^{112}_{344} = h^{121}_{344} = -\,h^{211}_{434} = -\,h^{211}_{443} = h^{121}_{443} = h^{112}_{434} =$$

$$= -\,h^{112}_{344} \Rightarrow h^{112}_{344} = -\,h^{112}_{344} \Rightarrow h^{112}_{344} = 0.$$

Дифференцируя уравнения (2.10) внешним образом и учитывая (2.8), имеем

$$
\begin{gathered}
(h^{sq}_{\alpha\beta} h^{pt}_{\sigma\gamma} + h^{ps}_{\alpha\beta} h^{qt}_{\sigma\gamma} + h^{pq}_{\sigma\beta} h^{st}_{\alpha\gamma} + \\
+ h^{pq}_{\alpha\sigma} h^{st}_{\beta\gamma}) \omega^{\gamma}_{t} \wedge \omega^{\sigma}_{s} = 0 .
\end{gathered} \tag{2.11}
$$

Если проальтернировать уравнения (2.11) по парам индексов $\binom{\gamma}{t}$ и $\binom{\sigma}{s}$ и положить

1) $p=q=t=s$, $\alpha=\gamma=3$, $\beta=\sigma=4$, то получим $h^{pp}_{34}=0$;

2) $\alpha=\beta=\gamma=\sigma$, $p=s=1$, $q=t=2$, то получим $h^{12}_{\alpha\alpha}=0$;

3) $p=t=1$, $q=s=2$, $\alpha=\gamma=3, \beta=\sigma=4$, то получим $h^{12}_{34}=0$;

4) $p=s=1$, $q=t=2$, $\beta=\gamma=3, \alpha=\sigma=4$, то получим $h^{12}_{43}=0$.

Таким образом, условия (2.9) приводят к равенствам

$$
h^{pq}_{\alpha\beta} \equiv 0 , \tag{2.12}
$$

из которых следует, что на нормализованном многообразии Грассмана 1-формы $\omega^{p}_{\alpha}=0$, т.е. луч ℓ^{*} - стационарен.

Итак, при выполнении условий (2.7) нормализация оказывается сильно вырожденной: всем прямым $\ell \in G_{\tau}$ (1.3) ставится в соответствие одна и та же фиксированная прямая ℓ^{*}. При такой нормализации говорить об одномерных подмногообразиях специального вида не имеет смысла.

Список литературы

1. Близникас В.И. Неголономное дифференцирование и линейные связности в пространстве опорных элементов.- Лит.мат.сб.,1966, 6, №2, с.141-208.

2. Близникас В.И. Некоторые вопросы теории неголономных комплексов.-"Тр.Геометр.семинара", ВИНИТИ АН СССР, 1974, 5, с.69-96.

3. Бразевич М.В. Об одном проективно-инвариантном классе пар конгруэнций в трехмерном пространстве.- "Тр.Томского ун-та", 212, Геом.сб., вып.9, 1972, с.120-133.

4. Ивлев Е.Т. О парах линейчатых поверхностей в P_3 .- "Тр.Томского ун-та", 161, Геом.сб.,вып.2, 1962,с.3-10.

5. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.- Тр.Моск.мат. о-на", 1953, № 2, с.275-382.

6. Лаптев Г.Ф. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований.-"Тр. 3-го Всес.Мат. съезда", т.з, М., АН СССР, 1958, с.409-418.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Е.Т.Ивлев, Э.Н.Подскребко, А.М.Сухотин

О НОРМАЛИЗАЦИИ ОСНАЩЕННОЙ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

Настоящая статья посвящена построению поля нормалей первого и второго рода m-поверхности S_m в $P_{n,n}$, Когда на m-поверхности S_m задано: I/ поле гиперплоскостей, каждая гиперплоскость которого проходит через текущую точку S поверхности S_m, но не содержит соответствующую касательную m-плоскость L_m; 2/ поле прямых, каждая прямая ℓ которого проходит через S, но не принадлежит L_m; 3/ поле двумерных плоскостей, каждая плоскость L_2 которого пересекает плоскость по прямой ℓ_1, проходящей через S. При этом данная статья содержит результаты, полученные Е.Т.Ивлевым для случая I/, Э.Н.Подскребко-для случая 2/ при $n=2m$ и А.М.Сухотиным -для случая 3/ при $n \le m(m-1)$.

Обозначения и терминология соответствует принятым в [I] и [2]. Условимся в дальнейшем символом [I](p) обозначать формулу стоящую под номером (p) в статье [I].

§I. Оснащение m-поверхности S_m полями некоторых линейных пространств в слое P_n.

Пусть в пространстве $P_{n,n}$ задана m-поверхность S_m, определяемая относительно некоторого репера $T=\{A_\gamma\}$ (здесь и в дальнейшем принимается система индексов, о которой идет речь в [I]) слоя точки S этой поверхности дифференциальными уравнениями [I](7) и их продолжениями [I](9) и [I](II).

I. Рассмотрим гиперплоскость, не проходящую через m-плоскость [I](6), но содержащую точку A_o, которая в локальных координатах репера T слоя P_n точки A_o определяется

уравнением

$$x^m = b_u x^u + b_{\hat\alpha} x^{\hat\alpha}, \quad (u,v,w=1,\dots m-1) \tag{1.1}$$

Здесь величины b_u и $b_{\hat\alpha}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &d b_u + b_u \omega_m^m + \omega_u^m - b_v (b_u \omega_m^v + \omega_u^v) = b_{u\alpha}\omega^\alpha, \\ &d b_{\hat\alpha} + b_{\hat\alpha} \omega_m^m + \omega_{\hat\alpha}^m - b_v (b_{\hat\alpha} \omega_m^v + \omega_{\hat\alpha}^v) = b_{\hat\alpha\alpha}\omega^\alpha. \end{aligned} \tag{1.2}$$

2. Каждой точке A_o поверхность S_m в слое P_n этой точки поставим в соответствие прямую ℓ, проходящую через A_o, но не лежащую в L_m, причем в локальных координатах слоя P_n точки A_o эту прямую определим системой:

$$x^\alpha = c^\alpha x^n, \quad x^p = c^p x^n, \quad (p.q = m+1,\dots, n-1). \tag{1.3}$$

Здесь величины c^α и c^p удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &dc^\alpha - c^\alpha \omega_n^n + c^\beta \omega_\beta^\alpha + c^p \omega_p^\alpha + \omega_n^\alpha - c^\alpha c^p \omega_p^n = c_\beta^\alpha \omega^\beta, \\ &dc^p - c^p \omega_n^n + \omega_n^p + c^q \omega_q^p + c^p c^q \omega_q^n = c_\beta^p \omega^\beta. \end{aligned} \tag{1.4}$$

3. Каждой точке A_o m-поверхности S_m в слое P_n этой точки поставим в соответствие двумерную плоскость L_2, определяемую в локальных слоевых координатах системой

$$x^u = f^u x^m + g^u x^n, \quad x^p = g^p x^n. \tag{1.5}$$

Здесь величины g^u, f^u и g^p удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &dg^u - g^u\omega_n^n - g^p g^u \omega_p^n - f^u \omega_n^m - g^p f^u \omega_p^m - g^v f^u \omega_v^m + \omega_n^u + g^p \omega_p^u + g^v \omega_v^u = g_\alpha^u \omega^\alpha, \\ &df^u - f^u \omega_m^m - f^v f^u \omega_v^m + \omega_m^u + f^v \omega_v^u = f_\alpha^u \omega^\alpha, \\ &dg^p - g^p \omega_n^n - g^p g^q \omega_q^n + \omega_n^p + g^q \omega_q^p = g_\alpha^p \omega^\alpha. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Заметим, что плоскость L_2, заданная системой (I.5), проходит через точку A_o и пересекает плоскость L_m по прямой ℓ_1, определяемой системой:

$$x^u = f^u x^m, \quad x^{\hat\alpha} = 0 \tag{1.7}$$

Отметим, что дифференциальные уравнения (I.2), (I.4) и (I.6) предполагаются замкнутыми. При этом результат их замыкания с использованием структурных уравнений [I](I) мы не выписываем.

§2. Нормализация m-поверхности S_m, оснащенной полем гиперплоскостей

I. Так же, как и в 4с.79-80 найдем, что в силу (I.I)-(I.3) система

$$x^m = b_u x^u + b_{\hat\alpha} x^{\hat\alpha}, \quad (\delta_\alpha^m x^o + \Phi_{u\alpha}^m x^u + \Phi_{\hat\alpha\alpha}^m x^{\hat\alpha} \dots) t^\alpha = 0, \tag{2.1}$$

где
$$\Phi^{\hat\alpha}_{u\beta}=A^{\hat\alpha}_{u\beta}+b_u A^{\hat\alpha}_{m\beta};\ \Phi^{\hat\alpha}_{m\beta}=A^{\hat\alpha}_{m\beta};\ \Phi^{m}_{uv}=(b_v b_{um}+b_u b_v)-b_{\hat\alpha}(\Phi^{\hat\alpha}_{uv}+b_v\Phi^{\hat\alpha}_{um});$$
$$\Phi^{m}_{\hat\alpha m}=b_{\hat\alpha m}-b_{\hat\alpha}b_{\hat\beta}\Phi^{\hat\beta}_{mm};\ \ \Phi^{m}_{um}=b_{um}-b_{\hat\alpha}\Phi^{\hat\alpha}_{um};$$
$$\Phi^{m}_{\hat\alpha u}=b_{\hat\alpha u}+b_u b_{\hat\alpha m}-b_{\hat\beta}b_{\hat\alpha}(\Phi^{\hat\beta}_{mu}+b_u\Phi^{\hat\beta}_{mm}), \tag{2.2}$$
определит в слое P_n точки A_0 поверхности S_m характеристику гиперплоскости (I.I) в направлении
$$t=(A_0,A_\alpha)t^\alpha\in L_m, \tag{2.3}$$
т.е. пересечение гиперплоскости (I.I) со своей смежной в этом направлении.

Из уравнений (I.2) следует, что величины (2.2) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:
$$d\Phi^{\hat\alpha}_{\gamma\beta}+\Phi^{\hat\alpha}_{\gamma\beta}\bar\omega^0_0-\Phi^{\hat\alpha}_{\gamma\sigma}\bar\omega^\sigma_\beta-\Phi^{\hat\alpha}_{\sigma\beta}\bar\omega^\sigma_\gamma+\Phi^{\hat\beta}_{\gamma\beta}\bar\omega^{\hat\alpha}_{\hat\beta}=\Phi^{\hat\alpha}_{\gamma\beta\tau}\bar\omega^\tau,$$
$$d\Phi^{m}_{u\alpha}+\Phi^{m}_{u\alpha}(\bar\omega^0_0+\bar\omega^m_m)-\Phi^{m}_{u\gamma}\bar\omega^\gamma_\alpha-\Phi^{m}_{w\alpha}\bar\omega^w_u-\delta^m_\alpha\bar\omega^0_u=\Phi^{m}_{u\alpha\tau}\bar\omega^\tau, \tag{2.4}$$
$$d\Phi^{m}_{\hat\alpha\alpha}+\Phi^{m}_{\hat\alpha\alpha}(\bar\omega^0_0+\bar\omega^m_m)-\Phi^{m}_{\hat\beta\alpha}\bar\omega^{\hat\beta}_{\hat\alpha}-\Phi^{m}_{\hat\alpha\gamma}\bar\omega^\gamma_\alpha-\Phi^{m}_{u\alpha}\bar\omega^u_{\hat\alpha}-\delta^m_\alpha\cdot\bar\omega^0_{\hat\alpha}=\Phi^{m}_{\hat\alpha\alpha\tau}\bar\omega^\tau,$$
где
$$\bar\omega^0_0=\omega^0_0,\ \bar\omega^u_0=\omega^u_0,\ \bar\omega^m_0=\omega^m_0-b_u\omega^u_0,\ \bar\omega^0_u=b_u\omega^0_m+\omega^0_u,\ \bar\omega^0_m=\omega^0_m,$$
$$\bar\omega^v_m=\omega^v_m,\ \bar\omega^v_u=\omega^v_m b_u+\omega^v_u,\ \bar\omega^m_m=\omega^m_m-b_{\hat\alpha}\omega^{\hat\alpha}_m-b_v\omega^v_m,\ \bar\omega^0_{\hat\alpha}=\omega^0_{\hat\alpha}+b_{\hat\alpha}\omega^0_m,\ \bar\omega^v_{\hat\alpha}=\omega^v_{\hat\alpha}+b_{\hat\alpha}\omega^v_m.$$

Из 2.I следует, что характеристический элемент гиперплоскости (I.I), т.е. пересечение характеристик этой гиперплоскости вдоль всех направлений (2.3), определяется в локальных слоевых координатах системой:
$$x^0=c^0_{\hat\alpha}x^{\hat\alpha},\quad x^\alpha=c^\alpha_{\hat\alpha}x^{\hat\alpha}, \tag{2.5}$$
где
$$c^u_{\hat\alpha}=-\Phi^m_{\hat\alpha v}\Phi^{vu},\quad c^m_{\hat\alpha}=c^u_{\hat\alpha}b_u+b_{\hat\alpha},\quad c^0_{\hat\alpha}=-(\Phi^m_{um}c^u_{\hat\alpha}+\Phi^m_{\hat\alpha m}), \tag{2.6}$$
$$\Phi^m_{uv}\Phi^{vw}=\Phi^m_{wv}\Phi^{vu}=\delta^w_u. \tag{2.7}$$
Здесь предполагается, что $\det[\Phi^m_{uv}]\neq 0$, т.е. из рассмотрения исключается случай, когда размерность характеристического элемента гиперплоскости (I.I) больше $n-m-1$. Из (2.4) получаем, что величины $c^\alpha_{\hat\alpha}$, определенные из формул (2.6), удовлетворяют [I](45).

Нормаль P_I первого рода m-поверхности S_m в $P_{n,n}$ в смысле [3] определяется как линейная оболочка точки A_0 и (2.5).

2. Рассмотрим следующие величины
$$a_{\beta\sigma}=\Phi^u_{\hat\alpha\beta}\Phi^{\hat\alpha}_{u\sigma},\quad \overset{*}{a}_{\alpha\beta}=\tfrac{1}{2}a_{(\alpha\beta)},\ \overset{*}{a}_{uv}\overset{*}{a}^{uw}=-\delta^w_u, \tag{2.8}$$
$$\det[\overset{*}{a}_{uv}]\neq 0,\ \overset{*}{a}=\overset{*}{a}_{mm}+\overset{*}{a}_{um}\overset{*}{a}_{vm}\overset{*}{a}^{uv}\neq 0,\ \ell^v=\overset{*}{a}_{mu}\overset{*}{a}^{uv},$$
$$\varepsilon_w=-(\Phi^m_{wm}+\Phi^m_{wv}\ell^v),\quad \Phi^u_{\hat\alpha\beta}=c^0_{\hat\alpha}\delta^u_\beta+c^u_{\hat\alpha\beta}-c^v_{\hat\beta}c^u_{\hat\alpha}\Phi^{\hat\beta}_{v\beta}.$$
С помощью дифференциальных уравнений (2.4),(2.7),[I](46) и [I]45 находятся следующие дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют $a_{\beta\sigma}$, ℓ^v и ε_w:
$$da_{\beta\sigma}+2a_{\beta\sigma}\tilde\omega^0_0-a_{\gamma\sigma}\tilde\omega^\gamma_\beta-a_{\beta\gamma}\tilde\omega^\gamma_\sigma=a_{\beta\sigma\tau}\tilde\omega^\tau,$$
$$d\ell^v=\ell^v\tilde\omega^m_m-\ell^u\tilde\omega^v_u-\tilde\omega^v_m+\ell^v_\alpha\tilde\omega^\alpha, \tag{2.9}$$
$$d\varepsilon_w=-\varepsilon_w\tilde\omega^0_0+\varepsilon_u\tilde\omega^u_w-\tilde\omega^v_m+\ell^v_\alpha\tilde\omega^\alpha,$$
где
$$\tilde\omega^\alpha=\bar\omega^\alpha,\ \ \tilde\omega^{\hat\alpha}=\bar\omega^{\hat\alpha}_0=0,\ \ \tilde\omega^0_0=\bar\omega^0_0,\ \ \tilde\omega^0_\alpha=\bar\omega^0_\alpha-c^0_{\hat\beta}\bar\omega^{\hat\beta}_\alpha,$$
$$\tilde\omega^v_\alpha=\bar\omega^v_\alpha-\bar\omega^{\hat\beta}_\alpha c^v_{\hat\beta},\quad \tilde\omega^m_\alpha=\bar\omega^m_\alpha,\ \ \tilde\omega^{\hat\alpha}_\alpha=\bar\omega^{\hat\alpha}_\alpha.$$
Рассмотрим величины
$$\Lambda^v_\gamma=\ell^v_\gamma-\ell^v\ell^u\Phi^m_{u\gamma}. \tag{2.10}$$
Из (2.9) и (2.4) получаются следующие дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины (2.10):
$$d\Lambda^v_\gamma=-\Lambda^v_\gamma(\tilde\omega^0_0-\tilde\omega^m_m)+\Lambda^v_\beta\tilde\omega^\beta_\gamma-\Lambda^u_\gamma\tilde\omega^v_u+(\delta^v_\gamma-\ell^v\delta^m_\gamma)\cdot(\tilde\omega^0_m-\ell^u\tilde\omega^0_u)-\ell^w\Phi^m_{w\gamma}\tilde\omega^v_m+\Lambda^v_{\gamma\beta}\tilde\omega^\beta$$

Нормаль P_{II} второго рода m-поверхности S_m в $P_{n,n}$ в смысле [3] можно определить по формулам
$$c^0_u=\varepsilon_u,\quad (m-1)\,c^0_m=-\Lambda^v_v+\varepsilon_u\ell^u(m-1). \tag{2.11}$$

Так же, как и в [I ст24], показывается, что величины определяют в m-плоскости L_m конус Q_{m-1}:
$$\overset{*}{a}_{\alpha\beta}\tilde x^\alpha\tilde x^\beta=0,\ \ \tilde x^{\hat\alpha}=0,$$
где
$$\tilde x^u=x^u,\quad \tilde x^m=x^m-x^u b_u-x^{\hat\alpha}b_{\hat\alpha},\ \ \tilde x^{\hat\alpha}=x^{\hat\alpha}.$$

Следовательно, в силу (2.8) заключаем, что прямая $L=(A_\circ, A_m+\ell^v(A_v+\ell_v A_m))$ полярна $(m-1)$-плоскости $L_{m-1}=L_{n-1}\cap L_m$ относительно конуса Q_{m-1}. Здесь гиперплоскость L_{n-1} определяется в локальных координатах системой (I.I), причем из рассмотрения исключается случай $\det[\overset{*}{a}_{uv}]=0$, когда пересечение L_{m-1} с конусом Q_{m-1} вырождается в конус, по крайней мере, с прямолинейной вершиной, и случай $\overset{*}{a}=0$, когда прямая L является образующей конуса Q_{m-1}.

Из (2.I) в силу (2.8) следует, что характеристика гиперплоскости (I.I) в направлении прямой L пересекает m-плоскость L_m по $(m-2)$-мерной плоскости, определяемой в локальных координатах системой:

$$\tilde{x}^m=0,\quad \tilde{x}^{\hat{\alpha}}=0,\quad \tilde{x}^\circ=\varepsilon_u\tilde{x}^u \tag{2.12}$$

Так же, как и в [I .с.I2-I3], находим, что $(n-m)$-мерная фокусная алгебраическая поверхность порядка $m-1$ линейного подпространства, проходящего через прямую L и P_I семейства этих подпространств вдоль направлений из L_{m-1}, определяется системой

$$\det\|(\tilde{x}^\circ+\varepsilon_w\tilde{x}^w)\delta^v_u+\tilde{x}^m\Lambda^v_u+\tilde{x}^{\hat{\alpha}}\Phi^v_{\hat{\alpha}u}\|=0. \tag{2.13}$$

Следовательно, точка $U=(1+\ell^v b_v)A_m+\ell^v A_v-\frac{1}{m-1}\Lambda^v_v A_\circ$ есть точка пересечения m-плоскости L_m с линейной полярой точки $A_\circ$ относительно (2.I3). Нормаль P_{II} второго рода m-поверхности S_m в $P_{n,n}$ можно в силу (2.II) определить как линейную оболочку U и (2.I2).

З а м е ч а н и е. Так же, как и в [2 с.29] в случае $T^m_{(1)}$, для направлений из L_{m-1} можно определить гиперконус $T^{m-1}_{(1)}$ класса $(m-1)$ с вершиной L_{m-1}, который можно задать уравнениями (2.6) в [2] при $k=1$, где индексы $\hat{\alpha}_1,\dots,\hat{\alpha}_m$ принимают значения $m, m+1,\dots,n$, а величины $\underset{(1)}{G}^{\hat{\alpha}_1,\dots,\hat{\alpha}_m}$ определяются из формул (2.7), в которых вместо $A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}$ $(\hat{\alpha}=m,\dots,n)$ надо брать $\Phi^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}$ (см.(2.2)). Для гиперплоскости L_{n-1}, определяемой системой (I.I) и проходящей через L_{m-1}, плоскость L_m будет линейным полюсом относительно $T^{m-1}_{(1)}$ тогда и только тогда, когда

$$\underset{(1)}{G}^{m\hat{\alpha}_1\dots\hat{\alpha}_{m-1}}b^m_{\hat{\alpha}_1}b^m_{\hat{\alpha}_2}\dots b^m_{\hat{\alpha}_{m-1}}\neq 0,\quad \underset{(1)}{G}^{\hat{\beta}\hat{\alpha}_2\dots\hat{\alpha}_{m-1}}b^m_{\hat{\alpha}_2}\dots b^m_{\hat{\alpha}_{m-1}}=0 \tag{2.14}$$

$$(b^m_{\hat{\alpha}}=b_{\hat{\alpha}};\ b^m_m=-1;\ \hat{\beta}=m+1,\dots,n;\ \hat{\alpha}_2\dots\hat{\alpha}_{m-1}=m,\dots,n).$$

Так же, как и в [5], можно показать, что система (2.I4) в общем случае определяет конечное число гиперплоскостей L_{n-1}, проходящих через L_{m-1}, для которых L_m есть полюс относительно $T^{m-1}_{(1)}$. В рассматриваемом случае m-поверхность S_m в $P_{n,n}$ оснащается не полем гиперплоскостей L_{n-1}, а полем $(m-1)$-мерных плоскостей $L_{m-1}\in L_m$. При этом предполагается, что $n\le m(m-1)$, в противном случае $T^{m-1}_{(1)}$ будет неопределенным. Гиперплоскость L_{n-1}, определяемую системой (2.I4), будем называть ассоциированной $(m-1)$-плоскости L_{m-1}.

§3. Случай оснащения m-поверхности S_m полем двумерных плоскостей L_2 и прямых ℓ.

I. Пусть на S_m в $P_{n,n}$ при $n\le m(m-1)$ задано поле двумерных плоскостей (I.5), определяемое дифференциальными уравнениями (I.6) и их продолжениями. Каждой точке $A_\circ$ поверхности S_m в слое P_n этой точки поставим в соответствие гиперплоскость Γ_{n-1}, проходящую через L_m, которую определим в локальных координатах системой [I](I.2), где величины b_p удовлетворяют системе [I](I3). Пусть гиперплоскость Γ_{n-1} такова, что $(m+1)$-плоскость $L_{m+1}=(L_m, A_{\hat{\alpha}}g^{\hat{\alpha}})(g^n=1)$, проходящая через L_m и (I.5), есть линейный полюс этой гиперплоскости относительно гиперконуса $T^m_{(k)}$ [2 с.29]. Тогда из (2.6) в [2] следует, что $b_{\hat{\alpha}}(b_n=-1)$ удовлетворяют уравнениям

$$\underset{(k)}{G}^{n\hat{\alpha}_2\dots\hat{\alpha}_m}b_{\hat{\alpha}_2}\dots b_{\hat{\alpha}_m}=\lambda\neq 0,\ G^{p\hat{\alpha}_2\dots\hat{\alpha}_m}b_{\hat{\alpha}_2}\dots b_{\hat{\alpha}_m}=\lambda g^p \tag{3.1}$$

(k -фиксировано, $\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\dots,\hat{\alpha}_m=m+1,\dots,n$)

Так же, как и в [5.с.I3I7-I3I8], можно показать, что система (3.I) в общем случае, т.е. в случае, когда ранг якобиевой матрицы системы (3.I) равен $n-m-1$, определяет конечное число гиперплоскостей Γ_{n-1}, для которых L_{m+1} есть полюс относительно $T^m_{(k)}$.

Из (I.7) следует, что $(m-1)$-плоскость $\overset{*}{L}_{m-1}$, проходящая через $A_\circ$ и полярная прямой ℓ_1 относительно конуса [I](34), определяется в локальных координатах системой

$$\Lambda_{\alpha\beta} x^{\alpha} f^{\beta} = 0, \quad x^{\hat{2}} = 0 \quad (f^{m} = 1) \qquad (3.2)$$

Каждой точке A_0 поверхности S_m в $P_{n,n}$ в слое P_n поставим в соответствие гиперплоскость, проходящую через $\overset{*}{L}_{m-1}$ и ассоциированную ей. В локальных координатах эту гиперплоскость определим системой

$$\Lambda_{\alpha\beta} f^{\beta} x^{\alpha} + b^{m}_{\hat{2}} x^{\hat{2}} = 0 .$$

Здесь $b^{m}_{\hat{2}}$ определяется из системы типа (2.I4), где роль L_{m-1} уже играет (3.2). Следовательно, для нормализации многомерной поверхности S_m в $P_{n,n}$, оснащенной полем двумерных плоскостей L_2, можно воспользоваться результатами предыдущего параграфа.

2. Пусть на S_m в $P_{n,n}$ при $n = 2m$ задано поле прямых (I.3), определенное дифференциальными уравнениями (I.4) и их продолжениями. Тогда в m-плоскости L_m в общем случае существует единственное направление (2.3), определяемое в силу (I.4) из системы

$$\overset{*}{C}{}^{p}_{\alpha} t^{\alpha} = \lambda c^{p}, \quad \lambda \neq 0, \quad \overset{*}{C}{}^{p}_{\alpha} = c^{p}_{\alpha} - A^{p}_{n\alpha} - c^{q} A^{p}_{q\alpha}, \quad \operatorname{rang} \|\overset{*}{C}{}^{p}_{\alpha}\| = m-1, \qquad (3.3)$$

вдоль котрого L_m, прямая (I.3) и смежная к ней не выходят из $(m+1)$-плоскости $\overset{*}{L}_{m+1} = (L_m, A_{\hat{2}}) c^{\hat{\alpha}}$ $(c^{n} = 1)$, содержащей L_m и прямую (I.3). Таким образом, с m-поверхностью S_m в $P_{n,n}$, оснащенной полем прямых (I.3), в случае $n = 2m$ ассоциируется поле двумерных плоскостей, каждая из которых проходит через соответствующие прямые (I.3) и (2.3), определенную (3.3). Поэтому для нормализации многомерной поверхности S_m в $P_{n,n}$ в рассматриваемом случае можно воспользоваться результатами предыдущего пункта настоящего параграфа.

Список литературы

I. И в л е в Е.Т. Об одной нормализации многомерной поверхности пространства проективной связности. - Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 4, Калининград, 1974, 6-28.

2. Ивлев Е.Т. Об оснащении многомерной гиперполосы пространства проективной связности. - Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 5, Калининград, 1974, 25-49.

3. Норден А.П. Обобщение основной теоремы теории нормализации. - Известия высших уч. заведений. Математика", 1966, №2, 55, 9-19.

4. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I. - Труды геометрического семинара. 3. АН СССР ВИНИТИ, М., 1971, 49-94.

5. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(L, L_m, \overset{\hat{2}}{L}_{m+1})$ в n-мерном проективном пространстве P_n. - Сиб. мат. жур., 8, №6, 1967, 1307-1320.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

В.Ф.Игнатенко

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЛОСКОСТЕЙ КОСОЙ СИММЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ E^m

Пусть в m-мерном евклидовом пространстве E^m задана координатная система началом O и базисом $e_1,\dots,e_m$; F_n - есть $(m-1)$-мерная поверхность порядка n. Если множество плоскостей ортогональной симметрии поверхности F_n бесконечно, то она является поверхностью вращений. Такие поверхности рассматриваются, например, в работах [I,2]. В настоящей заметке доказывается:

Т е о р е м а. Пусть неприводимая и нецилиндрическая поверхность F_n в пространстве E^m имеет бесконечное множество плоскостей косой (в частности, ортогональной) симметрии; $N=\bigcup_i N_i$ ($i=1,2,\dots$)-множество направлений симметрии, состоящее из бесконечных орбит N_i; μ-плоскость Π^μ и μ_i-плоскости Π^{μ_i}-линейные оболочки множеств N и N_i соответственно. Тогда

$$\Pi^\mu=\bigoplus_i \Pi^{\mu_i} \quad \left(i=1,\dots,\lambda\le\left[\frac{\mu}{2}\right]\right);$$

каждая μ_j-плоскость $(1\le j\le\lambda)$, параллельная Π^{μ_j}, не лежащая на поверхности F_n и имеющая с ней в E^m общую точку, пересекает F_n по $r_j\le\left[\frac{n}{2}\right]$ (μ_j-1)-квадрикам с общей симметрией. В частности, если $\lambda=1$, $\mu=m$, поверхность F_n сама является квадрикой.

Непосредственно из теоремы вытекает

С л е д с т в и е. Если μ_i-плоскости Π^{μ_i} $(i=1,\dots,\lambda)$ взять в качестве координатных, то при квадратичных многочленах

$$\varphi_1(x_1,\dots,x_{\mu_1}),\dots,\ \varphi_\lambda(x_{\mu_{\lambda-1}+1},\dots,x_{\mu_\lambda})$$

общее уравнение поверхности F_n можно записать так:

$$F(\varphi_1,\dots,\varphi_\lambda,x_{\mu_\lambda+1},\dots,x_m)=0, \qquad (1)$$

где F -многочлен относительно $\varphi_1,\dots,\varphi_\lambda,x_{\mu_\lambda+1},\dots,x_m$.

Плоскости симметрии поверхности F_n по направлениям N_i $(i=1,\dots,\lambda)$ являются диаметральными плоскостями соответственно ($m-\mu_i$)-цилиндров второго порядка $\varphi_i=0$, сопряженными своим направлениям симметрии. И наоборот, если поверхность F_n задается уравнением (I), то диаметральные плоскости ($m-\mu_i$)-цилиндров $\varphi_i=0$ являются плоскостями симметрии поверхности F_n.

Для случая $m=2$ теорема доказана в работе [3].

I°. Пусть поверхность F_n имеет бесконечное множество (б.м.) P плоскостей симметрии; M -множество направлений симметрии плоскостей P. Так как поверхность F_n отлична от цилиндра, то с каждым направлением M сопряжена только одна плоскость симметрии. Поэтому множество M бесконечно и содержит бесконечные орбиты N_i $(i=1,2,\dots)$. Кроме них M может содержать и конечные орбиты. Исключая их из состава M, получим множество $N=\bigcup_i N_i$ $(i=1,2,\dots)$. Возьмем орбиту $H\in\{N_i\}$; Π^γ -линейная оболочка H. Если вектор $u\in H$, то каждый вектор H получается из u некоторым произведением отражений (коллинеарные векторы здесь не различаем). Множеству H в P соответствует б.м. Q. На единичной сфере с центром O, диаметрально противоположные точки которой отождествлены, векторы H определяют б.м. H' (сферическое изображение H), имеющее предельную точку. По построению H' множество таких точек бесконечно. Возможны случаи: 1) Q содержит параллельные плоскости; 2) любые две плоскости Q пересекаются по $(m-2)$-плоскости.

2°. Докажем, что в случае I произвольная γ-плоскость, параллельная Π^γ, пересекает поверхность F_n в общем по $\tau \leq [\frac{n}{2}]$ $(\gamma-1)$-квадрикам с общей симметрией. При этом воспользуемся методом полной математической индукции по размерности γ.

Пусть Π^2 $(\gamma=2)$ совпадает с координатной 2-плоскостью $\Pi^2_o = O e_1 e_2$. Б.м. параллельных плоскостей Q зададим уравнением

$$x_1 = k. \tag{2}$$

Уравнения $x_3 = k_3, \ldots, x_m = k_m$ определяют 2-плоскость $\Pi^2_* \parallel \Pi^2_o$. Положим $C = \Pi^2_* \cap F_n$. Если сечение $C \neq \varnothing$, то оно имеет б.м. параллельных осей симметрии. При $\varnothing \neq C \neq \Pi^2_*$ сечение $C = C_k$, где C_k – кривая порядка $k \leq n$. Так как множество осей симметрии кривой C_k бесконечно, то $k \geq 2$.

В случае $k=2$ кривая C_2 неприводима. Действительно, пусть некоторая C_2 распадается на две параллельные прямые. Так как они симметричны относительно (2), то C_2: $(x_1-k_1)(x_1-k_2)=0$, $k_1 \neq k_2$. При этом параметр $k \ni]k_1, k_2[$. Поскольку поверхность F_n не является цилиндром, то при некоторых $k_3, \ldots, k_m$ 2-плоскость Π^2_* пересекает F_n по кривой C_k, которая не состоит из параллельных прямых. Кривая C_k содержит неприводимую и нелинейную компоненту. Согласно работе [3], эта компонента представляет собой параболу. Так как C_k имеет оси симметрии параболы, то параметр $k \ni]-\infty, +\infty[$. Следовательно, кривая C_k в любой Π^2_* распадается на параболы, симметричные относительно прямых (2). Левая часть уравнения поверхности F_n состоит, можно считать, из членов вида

$$[\varphi(x_3, \ldots, x_m) x_1^2 - \psi(x_3, \ldots, x_m) x_2 + \sigma(x_3, \ldots, x_m)]^{\tau'}, \ldots, \tag{3}$$

где φ, ψ, σ – многочлены относительно переменных $x_3, \ldots, x_m$; число τ' делит τ. Уравнение любой кривой C_k содержит член (3), если в нем $x_3, \ldots, x_m$ заменить на подходяще выбранные параметры $k_3, \ldots, k_m$. Кривые C_k в своих 2-плоскостях Π^2_* симметричны относительно прямых пересечения Π^2_* с

плоскостями (2). Так как уравнения этих прямых во всех Π^2_* имеют один и тот же вид (2), то

$$\varphi(x_3, \ldots, x_m) = a\,\psi(x_3, \ldots, x_m), \quad a - \mathrm{Const} \neq 0; \tag{4}$$

левая часть уравнения поверхности F_n, не содержащая $a x_1^2 - x_2$, зависит только от переменных $x_3, \ldots, x_m$.

Возьмем, например, в E^4 поверхность

$$x_4^7 - (x_1^2 - x_2)^2 x_3 = 0. \tag{5}$$

Для нее $M=N$, $\gamma=2$. $\Pi^2 = \Pi^2_o$; множество $P=Q$ задают плоскости (2). Если вектор $u=(u_1, u_2, 0, 0)$, то параметр

$$k = \frac{u_2}{2u_1} \quad (u_1 \neq 0).$$

Координатная 2-плоскость Π^2_o $(x_3 = x_4 = 0)$ лежит на поверхности (5); 2-плоскость $x_3 = k_3$; $x_4 = k_4$ $(k_3 k_4 \neq 0)$ пересекает её по двум параболам. Обе эти параболы либо действительны, $k_3 k_4 > 0$, либо мнимы $k_3 k_4 < 0$; 2-плоскость $x_3 = 0$, $x_4 = k_4 \neq 0$ пересекает (5) только на бесконечности, $C = \varnothing$.

3°. Предположим теперь, что $\gamma > 2$. В γ-плоскости Π^γ возьмем $(\gamma-1)$-плоскость $\Pi^{\gamma-1}$ – линейную оболочку некоторого бесконечного подмножества H. Произвольная $(\gamma-1)$-плоскость, параллельная $\Pi^{\gamma-1}$, не лежащая на поверхности F_n и имеющая с ней в E^m общую точку, пересекает F_n по τ $(\gamma-2)$-квадрикам с общей симметрией. Примем $\Pi^{\gamma-1}$ за координатную $(\gamma-1)$-плоскость $O e_1, \ldots, e_{\gamma-1}$. Тогда, как и в п. 2°, убеждаемся, что левая часть уравнения F_n состоит из членов вида

$$[\chi(x_1, \ldots, x_{\gamma-1})\,\eta(x_\gamma, \ldots, x_m) + \xi(x_\gamma, \ldots, x_m)]^{\tau'} \ldots, \tag{6}$$

где $\deg \chi = 2$, τ' делит τ; в $\Pi^{\gamma-1}$ поверхность $\chi = 0$ относится к классу параболлоидов.

Из строения множества H' (п. I°) следует, что $\Pi^\gamma \setminus \Pi^{\gamma-1}$ содержит б.м. векторов H. Поскольку H является орбитой в N, то, отразив 2-плоскость Π^2_o по направлению некоторого вектора $v \in \Pi^{\gamma} \setminus \Pi^{\gamma-1}$,получим 2-плоскость $\Pi_1^2 \in \Pi^{\gamma-1}$, которая пересекает Π_0^2 по прямой.Пусть 2-плоскость Π_*^2 пересекает поверхность F_n по τ параболам, $C = C_\kappa$; $'\Pi_*^2$ – образ Π_*^2 при отражении по направлению v .Тогда 2 плоскость $'\Pi_*^2$ пересекает F_n также по τ параболам,аффинно эквивалентным соответствующим параболам (компонентам) кривой C_κ .Если выбрать $Oe_{\gamma-1}e_\gamma \parallel \Pi_1^2$, то выражение (6) может быть записано в виде (3) с учетом (4) и замены x_1, x_2, на $x_{\gamma-1}$, x_γ и т.д.Поэтому можно считать,что в (6) многочлены χ и η, ξ зависят от переменных $x_1,\dots, x_\gamma$ и $x_{\gamma+1},\dots, x_m$ соответственно.Следовательно,любая γ-плоскость,параллельная Π^γ ,либо пересекает поверхность F_n по $\tau \le \left[\frac{n}{2}\right]$ ($\gamma-1$)-квадрикам,либо лежит на F_n ,либо пересекает её только на бесконечности.

4°.Случай 2 (п.I°) рассматривается аналогично случаю I. При $\gamma=2$ кривая C_κ (п.2°) распадается на центральные коники с общей симметрией.В определенной системе координат левая часть уравнения поверхности F_n состоит из членов вида (3),если $(-x_2)$ заменить на $b x_2^2$, $b = \mathrm{const} \neq 0$.Пусть в 2-плоскости $\Pi_*^2 \parallel \Pi_0^2$

$$u = (u_1, u_2) \mid u_1 u_2 \neq 0$$

-неасимптотический вектор кривой C_κ (значит,и любой её компоненты).Ему сопряжена ось симметрии,которая является диаметром C_κ с угловым коэффициентом

$$-\frac{\varphi(k_3,\dots,k_m)\,u_1}{b\psi(k_3,\dots,k_m)\,u_2}.$$

Прямые пересечения всех 2-плоскостей,параллельных Π_0^2 , с плоскостью симметрии F_n по направлению u между собой параллельны.Следовательно,этот коэффициент не зависит от выбора $k_3,\dots, k_m$, и выполняется равенство (4).Дальнейшее рассмотрение случая 2 близко к п.3°;его проводить не будем.

5°.Пусть γ-плоскость Π_*^γ пересекает поверхность F_n по τ $(\gamma-1)$-поверхностям второго порядка,уравнения которых в Π_*^γ имеют вид:

$$\chi(x_1,\dots, x_\gamma) = b_s \quad (s=1,\dots,\tau)$$

В пространстве E^m эти уравнения определяют $(m-\gamma)$-цилиндры, $(m-\gamma)$-образующие которых параллельны $Oe_{\gamma+1}\dots e_m$ Плоскости симметрии множества Q по направлениям H являются их диаметральными плоскостями.

Обозначим через Π^μ, Π^{μ_i} линейные оболочки множеств $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_i$.
Тогда из пп.2°-4° следует равенство:

$$\Pi^\mu = \bigoplus_i \Pi^{\mu_i} \quad \left(i=1,\dots, \lambda \le \left[\frac{\mu}{2}\right]\right).$$

Если μ_i-плоскости Π^{μ_i} являются координатными,то уравнение поверхности F_n имеет вид (I).Зададим,например,в E^{16} поверхность F_{150} уравнением

$$\{[(x_1^2 - 5x_2^2 + x_3 - 2x_4)^4 (x_5^2 + x_6^2 - 1) + (2x_7 - x_8^2 + 4x_9^2)^3 \times$$

$$\times (x_{10}^2 - x_{11}^2)]^5 + (x_{12}^2 - 6x_{13}^2 - 2x_{14}^2)^2\}^3 -$$

$$- (2x_7 - x_8^2 + 4x_9^2)^{45} + x_{15}^2 + x_{16} - 1 = 0.$$

Множество $M \setminus N$ содержит вектор e_{15} ,которому сопряжена плоскость симметрии $x_{15} = 0$; $\lambda = 5$, $\mu = 14$.

Теорема и её следствие доказаны.

Список литературы

I .В е д е р н и к о в В.И. Поверхности вращения пространства Евклида.-"Изв.высш.учебн.заведений.Математика",№I, 1960,с.39-47.

2.И г н а т е н к о В.Ф.,Л е й б и н А.С.,К теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей в E^m. -"Украинский геом. сборник",вып.7,I970,с.39-54.

3 . Rosina A. Sulle curve algebriche piane con infiniti assi di simmetria obliqua (in particolare ortogonale) „ Ann. Univ. Ferrara," 1970, Sez.7.15, №10, p. 153-159.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

В.Б. К и м

О МНОГООБРАЗИИ КУБИК В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

§I. Структурные формы многообразия кубик.

Рассмотрим трехмерное проективное пространство P_3, отнесенное к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{J}}\}$ ($\mathcal{J},\varkappa,\mathcal{L}$ =0,I,2,3). Деривационные формулы этого репера запишем в виде

$$dA_{\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{J}}^{\varkappa} A_{\varkappa}\,, \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа $\omega_{\mathcal{J}}^{\varkappa}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{J}}^{\varkappa} = \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{L}} \wedge \omega_{\mathcal{L}}^{\varkappa} \tag{1.2}$$

и условию

$$\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} = 0\,. \tag{1.3}$$

В пространстве P_3 рассмотрим плоскую кривую третьего порядка (кубику) K_3. Вершину A_0 репера $\{A_{\mathcal{J}}\}$ поместим в некоторую точку пространства P_3 вне плоскости кубики, а вершины A_1, A_2, A_3 расположим в плоскости кубики, причем, что не умаляет общности, вершину A_1 можно считать лежащей вне кубики K_3. Уравнение кубики K_3 в выбранном репере запишется в виде:

$$a_{pqr} x^p x^q x^r = 0,\ x^0 = 0, \quad (p,q,r = 1,2,3), \tag{1.4}$$

где

$$a_{111} = 1\,. \tag{1.5}$$

Система уравнений стационарности кубики K_3 имеет вид:

$$\Delta a_{pqr} = da_{pqr} - a_{sqr}\omega_p^s - a_{psr}\omega_q^s - a_{pqs}\omega_r^s + {} \\ + 3a_{11s}a_{pqr}\omega_1^s = 0,\quad \omega_p^0 = 0\,. \tag{1.6}$$

Формы $\Delta a_{pqr}, \omega_p^0$ являются структурными формами многообразия кубик K_3 и удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\mathcal{D}\Delta a_{pqr} = -\Delta a_{sqr}\wedge\omega_p^s - \Delta a_{psr}\wedge\omega_q^s - \Delta a_{pqs}\wedge\omega_r^s + {} \\ + 3a_{11s}\Delta a_{pqr}\wedge\omega_1^s + 3a_{pqr}\Delta a_{11s}\wedge\omega_1^s + (a_{sqr}\omega_p^0 + {} \\ + a_{psr}\omega_q^0 + a_{pqs}\omega_r^0)\wedge\omega_0^s + 3a_{pqr}a_{11s}\omega_1^0\wedge\omega_0^s;\ \mathcal{D}\omega_p^0 = \omega_q^0\wedge(\delta_p^q\omega_0^0 - \omega_p^q). \tag{1.7}$$

Из (I.6) следует, что кубика K_3 задается полиномиальным объектом второй степени [2].

Совокупность всех кубик пространства P_3 образует пространство кубик $R(K_3)$. Через a^λ (λ =0,I,...,II) обозначим первые интегралы системы (I.7) и назовем их координатами пространства $R(K_3)$ [I].

§2. Общая характеристика пространства кубик.

Исключим из рассмотрения распадающиеся кубики и будем рассматривать только нераспадающиеся кубики. Известно [4], что для таких кубик существует единственный автополярный треугольник - сизигетический. Поместим вершины A_p репера в вершины сизигетического треугольника и получим следующие уравнения кубики:

$$(x^1)^3 + (x^2)^3 + (x^3)^3 + 6a\,x^1x^2x^3 = 0,\quad x^0 = 0\,, \tag{2.1}$$

где

$$a \neq -\frac{1}{2}\,. \tag{2.2}$$

В этом случае формы Δa_{pqr} примут вид:

$$\begin{aligned} \Delta a_{iii} &= 3(\omega_1^1 - \omega_i^i), \\ \Delta a_{iij} &= -\omega_j^k - 2a\,\omega_k^i, \\ \Delta a_{123} &= da + a(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь и далее индексы i,j,k принимают значения I,2,3, причем они всегда различны и по ним суммирование не производится.

Заметим,что ранг системы форм $\Delta a_{pqr}, \omega^0_p$ равен $N=12$, а ранг системы форм

$$\omega^0_p;\ 3(\omega^1_1-\omega^i_i);\ -\omega^k_j-2a\omega^i_k;\ a(2\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3)$$

равен $R=11$.Следовательно,кубика K_3 является фигурой ранга $N=12$,и жанра $\varrho=N-R=1$ [1].Ранг N кубики K_3 равен размерности пространства $R(K_3)$.

Систему уравнений стационарности кубики K_3 запишем в виде

$$\omega^0_p=0,\quad \omega^1_1-\omega^2_2=0,\quad \omega^1_1-\omega^3_3=0,$$
$$\omega^j_i+2a\omega^k_j=0,\quad da=0. \tag{2.4}$$

Последнее уравнение этой системы определяет абсолютный инвариант кубики K_3 относительно проективных преобразований пространства P_3. В [4] показано ,что две кубики K_3 и $\tilde{K}_3$ с равными значениями инварианта a проективно эквивалентны.Поэтому все пространство $R(K_3)$ разбивается на однопараметрическое семейство классов интранзитивности, каждый из которых состоит из ∞^{11} проективно эквивалентных между собой кубик.

Совокупность $R_1(K_3)$ всех кубик пространства P_3,получающихся из данной с помощью проективных преобразований, назовем,следуя [1],первым пространством кубики K_3.Размерность пространства $R_1(K_3)$ равна одиннадцати.

Пусть G группа проективных преобразований пространства P_3 с групповыми параметрами u^α ($\alpha=1,2,\dots,15$). Координаты a^λ кубики K_3 в пространстве $R(K_3)$ занумеруем таким образом,чтобы $a^0=a$.

Рассмотрим систему форм Пфаффа

$$\theta^{\varkappa}_{\jmath}=\omega^{\varkappa}_{\jmath},\quad \theta=du^0 \tag{2.5}$$

Формы (2.5) удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{D}\theta^{\varkappa}_{\jmath}=\theta^{\chi}_{\jmath}\wedge\theta^{\varkappa}_{\chi},\quad \mathcal{D}\theta=0. \tag{2.6}$$

Система (2.5) вполне интегрируема и определяет группу Ли G' с групповыми параметрами $u^{\hat{\alpha}}$ ($\hat{\alpha}=0,1,\dots,15$).При этом форма θ определяет группу G'',изоморфную группе

сдвигов евклидовой прямой.Группа G' является прямым произведением групп G и G'':

$$G'=G\times G''.$$

Действие группы G' в пространстве $R(K_3)$ можно задать по формуле

$$g'(a^0,a^1,\dots,a^{11})=(a^0+u^0,\ ga^1,\dots,ga^{11})$$
$$g'\in G',\quad g\in G,\quad u^0\in G''. \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует,что группа G' в пространстве $R(K_3)$ действует транзитивно.

Группа G ,осуществляющая переход от кубики K_3 к эквивалентной ей кубике,определяется конечным уравнением $u^0=0$, а группа G'' определяется уравнениями $u^\alpha=0$.

Две кубики K_3 и $\tilde{K}_3$,координаты которых a^λ и $\tilde{a}^\lambda$ связаны соотношениями

$$\tilde{a}^0=a^0+u^0,\quad \tilde{a}^1=a^1,\dots,\tilde{a}^{11}=a^{11}, \tag{2.8}$$

называются концентричными [1].Совокупность $R_2(K_3)$ всех кубик, концентричных данной,образует второе пространство кубики. Пространство $R(K_3)$ изоморфно прямому произведению пространств $R_1(K_3)\times R_2(K_3)$.

§3.Присоединенное расслоенное пространство

Рассмотрим m-мерное дифференцируемое многообразие V_m,на котором задана система форм θ^ξ ($\xi,\eta,\varrho=1,2,\dots,m$, $m<12$),удовлетворяющих структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\theta^\xi=\theta^\eta\wedge\theta^\xi_\eta,$$
$$\mathcal{D}\theta^\xi_\eta=\theta^\varrho_\eta\wedge\theta^\xi_\varrho+\theta^\varrho\wedge\theta^\xi_{\eta\varrho}, \tag{3.1}$$
$$\dots\dots\dots$$

Переобозначим структурные формы пространства $R(K_3)$ следующим образом:

$$\Omega^1=-\omega^3_2-2a\omega^3_1,\ \Omega^2=-\omega^1_3-2a\omega^2_1,\ \Omega^3=-\omega^2_1-2a\omega^3_2,$$

$$\Omega^4=da+a(2\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3),\ \Omega^5=-\omega^3_1-2a\omega^2_3, \tag{3.2}$$

$\Omega^6 = 3\omega_1^1 - 3\omega_2^2,\ \Omega^7 = -\omega_3^2 - 2a\omega_2^1,\ \Omega^8 = -\omega_2^3 - 2a\omega_3^1,$

$\Omega^9 = 3\omega_1^1 - 3\omega_3^3,\ \Omega^{10} = \omega_1^0,\ \Omega^{11} = \omega_2^0,\ \Omega^{12} = \omega_3^0.$

Структурные уравнения для форм Ω^a $(a, b = 1, 2, \ldots, 12)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}\Omega^a = \Omega^b \wedge \Omega_b^a, \\ &\mathcal{D}\Omega_b^a = \Omega_b^c \wedge \Omega_c^a + \Omega^c \wedge \Omega_{bc}^a. \end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$\Omega_1^1 = \frac{1}{2}\Omega_3^3 = \frac{1}{3}\Omega_6^6 = \omega_1^1 - \omega_2^2,\ \Omega_2^2 = \frac{1}{2}\Omega_5^5 = \frac{1}{3}\Omega_9^9 = \omega_1^1 - \omega_3^3,$

$\Omega_4^4 = 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3,\ \Omega_7^7 = 2\Omega_1^1 + \Omega_3^3,\ \Omega_8^8 = 2\Omega_2^2 + \Omega_1^1,$

$\Omega_{10}^{10} = \omega_0^0 - \omega_1^1,\ \Omega_{11}^{11} = \omega_0^0 - \omega_2^2,\ \Omega_{12}^{12} = \omega_0^0 - \omega_3^3,$

$\Omega_2^1 = \frac{1}{2}\Omega_4^3 = \Omega_5^4 = \frac{1}{3}\Omega_7^6 = \frac{1}{2}\Omega_8^7 = \Omega_{12}^{11} = -\omega_2^3,$

$\Omega_1^2 = \Omega_3^4 = \frac{1}{2}\Omega_4^5 = \Omega_6^7 = \frac{1}{2}\Omega_7^8 = \frac{1}{3}\Omega_8^9 = \Omega_{11}^{12} = -\omega_3^2,$

$\Omega_6^3 = \frac{1}{2}\Omega_3^1 = \frac{1}{2}\Omega_4^2 = \Omega_7^4 = \Omega_8^5 = -\frac{1}{3}\Omega_1^6 = -\frac{1}{3}\Omega_1^9 = \Omega_{11}^{10} = -\omega_1^2,$

$\Omega_5^8 = \frac{1}{2}\Omega_1^3 = \frac{1}{3}\Omega_3^6 = \frac{1}{2}\Omega_7^4 = \Omega_{10}^{11} = -\omega_2^1,$

$\Omega_3^7 = \frac{1}{2}\Omega_2^5 = \frac{1}{2}\Omega_4^8 = \frac{1}{3}\Omega_5^9 = \Omega_{10}^{12} = -\omega_3^1,$

$\Omega_7^7 = \frac{1}{2}\Omega_4^1 = \frac{1}{2}\Omega_5^2 = \Omega_8^4 = \Omega_9^5 = -\frac{1}{3}\Omega_2^6 = -\frac{1}{3}\Omega_2^9 = \Omega_{12}^{10} = -\omega_1^3,$

$\Omega_{11}^1 = \Omega_{11}^2 = -\frac{1}{2a}\Omega_{10}^4 = -\frac{1}{3}\Omega_{10}^6 = -\frac{1}{2a}\Omega_{11}^7 = -\frac{1}{2a}\Omega_{12}^8 =$

$= \frac{1}{3}\Omega_{10}^9 = -\omega_0^1,$

$\Omega_{10}^3 = \frac{1}{2a}\Omega_{10}^2 = \frac{1}{a}\Omega_{11}^4 = \frac{1}{2a}\Omega_{12}^5 = \frac{1}{3}\Omega_{11}^6 = \Omega_{12}^7 = -\omega_0^2,$

$\Omega_{10}^5 = \frac{1}{2a}\Omega_{10}^1 = \frac{1}{2a}\Omega_{11}^3 = \frac{1}{a}\Omega_{12}^4 = \Omega_{11}^8 = \frac{1}{3}\Omega_{12}^9 = -\omega_0^3;$

Невыписанные формы Ω_b^a равны нулю. Формы Ω_{bc}^a будут линейными комбинациями форм Ω_b^a.

Рассмотрим присоединенное расслоенное пространство V [3], базой которого является многообразие V_m, слоем - пространство $R(K_3)$, а группой, действующей в слое, - группа G'. Уравнения (3.I) и (3.3) будут структурными уравнениями расслоенного пространства V.

На расслоенном пространстве V тогда и только тогда будет задана линейная дифференциально-геометрическая связность, когда будет задано поле геометрического объекта Γ_ξ^a, удовлетворяющего уравнениям

$$d\Gamma_\xi^a - \Gamma_\eta^a \theta_\xi^\eta + \Gamma_\xi^b \Omega_b^a = \Gamma_{\xi\eta}^a \theta^\eta. \tag{3.5}$$

В этом случае

$$\tilde{\Omega}^a = \Omega^a - \Gamma_\xi^a \theta^\xi \tag{3.6}$$

будут формами рассматриваемой связности.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве."Труды геом. семинара ВИНИТИ", М., 2, 1969, I8I-206.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Производные и полиномиальные объекты.-"Труды Томского госуд. ун-та", I69, 1968, 3-I4

3. Л а п т е в Г.Ф. Инвариантная аналитическая теория дифференцируемых отображений.-"Труды геом. семинара ВИНИТИ", 6, 1974, 37-42.

4. С о к о л о в Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. М., ФМ, 1960.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Л.Г.Корсакова

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК В P_3.

В трехмерном проективном пространстве исследуются расслояемые пары конгруэнций коник [I] общего положения. Доказана теорема существования таких расслояемых пар и изучены их геометрические свойства.

§I. Система дифференциальных уравнений расслояемых пар конгруэнций коник.

Рассмотрим в пространстве P_3 пару (C_1, C_2) конгруэнций (C_1), (C_2) коник, не лежащих в одной плоскости и не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей.

Отнесем пространство P_3 к геометрически фиксированному реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где A_i – одна из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ $(i, j, k=1,2;\ i\neq j)$, A_3 и A_4 – полюсы прямой ℓ относительно коник C_1 и C_2.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4), \tag{1.1}$$

причем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0 . \tag{1.3}$$

Уравнения коник C_1 и C_2 относительно репера R (при соответствующей нормировке вершин A_α) будут иметь вид:

$$(x^3)^2 - (a_1 x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0 , \quad x^4 = 0 ; \tag{1.4}$$

$$(x^4)^2 - (a_2 x^2)^2 - 2x^1x^2 = 0 , \quad x^3 = 0 . \tag{1.5}$$

Рассмотрим общий случай, когда плоскости коник C_1 и C_2 образуют двупараметрические семейства, тогда ранг каждой из систем форм $\{\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_4^3\}$, $\{\omega_1^4, \omega_2^4, \omega_3^4\}$ равен двум.

Пусть

$$\omega_1^4 \wedge \omega_2^4 \neq 0 . \tag{1.6}$$

Обозначим

$$\omega_i^4 = \omega_i . \tag{1.7}$$

Система пфаффовых уравнений пары (C_1, C_2) запишется в виде

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k , \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k , \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k ,$$

$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k , \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k , \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k , \tag{1.8}$$

$$\theta_i = A_i^k\omega_k , \quad \Omega_i = b_i^k\omega_k ,$$

где

$$\theta_i = da_i - a_i(\omega_i^i - \omega_{i+2}^{i+2}) , \quad \Omega_i = \omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_{i+2}^{i+2} .$$

(по i, j не суммировать!)

Как известно [I, с.2II], пара (C_1, C_2) называется расслояемой, если существуют односторонние расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к конгруэнции (A_3A_4) прямых, инцидентных полюсам прямой ℓ относительно C_1 и C_2.

Система квадратичных уравнений, характеризующая расслоение от конгруэнции (C_1) к конгруэнции (A_3A_4), имеет вид [I, с.2II-2I2]:

$$\begin{gathered}
\omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0 , \quad \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0 , \quad (a_1)^2\omega_3^2 \wedge \omega_3^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0 , \\
\Omega_1 \wedge \omega_3^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 - 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 = 0 , \quad (a_1\theta_1 - \omega_1^2) \wedge \omega_3^2 + (a_1)^2\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 = 0 , \\
2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0 , \\
\Omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 - 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 + a_1\theta_1 \wedge \omega_3^1 + (a_1)^2(\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^1) = 0 .
\end{gathered} \tag{1.9}$$

Квадратичные уравнения, определяющие расслоение от конгруэнции (C_2) к конгруэнции (A_3A_4), получаются из уравнений (I.9) подстановкой индексов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

Они имеют вид:

$$\omega_4^2\wedge\omega_1^2=0,\ \omega_1\wedge\omega_4^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^2=0,\ (a_2)^2\omega_4^1\wedge\omega_4^2+\omega_2\wedge\omega_4^1+\omega_2^3\wedge\omega_3^1=0,$$

$$\Omega_2\wedge\omega_4^2+\omega_4^1\wedge\omega_1^2-2\omega_4^3\wedge\omega_3^2=0,\ (a_2\theta_2-\omega_2^1)\wedge\omega_4^1+(a_2)^2\omega_4^3\wedge\omega_3^1=0,$$

$$2\omega_4^2\wedge\omega_4^1+\omega_2\wedge\omega_4^2+\omega_2^3\wedge\omega_3^2-\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_1^3\wedge\omega_3^1=0, \qquad (1.11)$$

$$\Omega_2\wedge\omega_4^1+\omega_4^2\wedge\omega_2^1-2\omega_4^3\wedge\omega_3^1+a_2\theta_2\wedge\omega_4^2+(a_2)^2(\omega_4^3\wedge\omega_3^2-\omega_4^1\wedge\omega_1^2)=0.$$

Сравнивая (I.9) с (I.II), убеждаемся, что

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2-\omega_4^1\wedge\omega_4^2=0, \qquad (1.12)$$

$$a_1m=0,\quad a_2m=0, \qquad (1.13)$$

где

$$m^2=\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}. \qquad (1.14)$$

Многообразие расслояемых пар (C_1, C_2) разбивается на два типа: многообразия, для которых $m\neq 0$, и многообразия, для которых $m=0$. Если $m\neq 0$, то из уравнений (I.I3) следует, что $a_1=a_2=0$, т. е в этом случае коники пересекаются в точках A_i. Исключая из рассмотрения многообразия этого типа, мы рассмотрим случай, когда

$$m=0.$$

Пары конгруэнций такого типа назовем парами M. Пары M определяются системой пфаффовых уравнений (I.8), их замыканиями и следующими квадратичными уравнениями:

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2=0,\ \ \omega_4^1\wedge\omega_4^2=0,\ \ \omega_3^1\wedge\omega_2^1=0,\ \ \omega_4^2\wedge\omega_1^2=0,$$

$$\omega_2^3\wedge\omega_3^1+\omega_2\wedge\omega_4^1=0,\ \ \omega_1^3\wedge\omega_3^2+\omega_1\wedge\omega_4^2=0,$$

$$\omega_1^3\wedge\omega_3^1+\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2-\omega_2\wedge\omega_4^2=0, \qquad (1.15)$$

$$\Omega_1\wedge\omega_3^2+\omega_3^1\wedge\omega_1^2-2\omega_3^4\wedge\omega_4^2+a_1\theta_1\wedge\omega_3^1+(a_1)^2(\omega_3^4\wedge\omega_4^1+\omega_3^2\wedge\omega_2^1)=0,$$

$$\Omega_1\wedge\omega_3^1+\omega_3^2\wedge\omega_2^1-2\omega_3^4\wedge\omega_4^1=0,\ \Omega_2\wedge\omega_4^2+\omega_4^1\wedge\omega_1^2-2\omega_4^3\wedge\omega_3^2=0,$$

$$(a_1\theta_1-\omega_1^2)\wedge\omega_3^2+(a_1)^2\omega_3^4\wedge\omega_4^2=0,\ (a_2\theta_2-\omega_2^1)\wedge\omega_4^1+(a_2)^2\omega_4^3\wedge\omega_3^1=0,$$

$$\Omega_2\wedge\omega_4^1+\omega_4^2\wedge\omega_2^1-2\omega_4^3\wedge\omega_3^1+a_2\theta_2\wedge\omega_4^2+(a_2)^2(\omega_4^3\wedge\omega_3^2-\omega_4^1\wedge\omega_1^2)=0.$$

Т е о р е м а I. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4), ассоциированные с парой M, образуют односторонне расслояемую пару (от конгруэнции (A_1A_2) к конгруэнции (A_3A_4))

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадратичные уравнения

$$\omega_2^3\wedge\omega_3^1+\omega_2\wedge\omega_4^1=0,\ \ \omega_1^3\wedge\omega_3^2+\omega_1\wedge\omega_4^2=0,$$

$$\omega_1^3\wedge\omega_3^1+\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2-\omega_2\wedge\omega_4^2=0,$$

характеризующие расслоение от конгруэнции (A_1A_2) к (A_3, A_4), [2, с.67] содержатся в системе (I.I5), что и доказывает теорему.

Перейдем к исследованию системы квадратичных уравнений (I.I5). Поскольку семейство (A_3A_4) прямых A_3A_4 — конгруэнция, то

$$\operatorname{rang}(\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2)=2. \qquad (1.16)$$

Учитывая возможность изменения нумерации вершин репера и условие (I.I6), выделяются следующие проективно неэквивалентные пары M:

I	$\omega_3^1\,\omega_3^2\,\omega_4^1\,\omega_4^2\neq 0;$	(1.17)
II	$\omega_4^2=0,\ \ \omega_3^1\,\omega_3^2\,\omega_4^1\neq 0;$	(1.18)
III	$\omega_3^1=\omega_4^2=0;$	(1.19)
IУ	$\omega_3^1=\omega_4^1=0;$	(1.20)
У	$\omega_3^2=\omega_4^1=0;$	(1.21)
УI	$\omega_4^1=0,\ \ \omega_3^1\,\omega_3^2\,\omega_4^2\neq 0.$	(1.22)

Пары M ,характеризуемые соответственно условиями (I.I7)-(I.22),назовем парами $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$.

§ 2. Пары M_1.

Поскольку для пар M_1 выполняется неравенство (I.I7), то пару M_1 можно определить как такую пару M ,в которой плоскости $(A_i A_3 A_4)$ не являются касательными для поверхностей (A_3) и (A_4) соответственно в точках A_3 и A_4 .

Из системы (I.I5) и условия (I.I6) следует,что

$$\omega_3^1 \wedge \omega_4^1 \neq 0 . \qquad (2.1)$$

Примем эти формы за базисные линейно независимые формы пары M_1.Обозначим

$$\omega_3^1 = \omega^1 , \quad \omega_4^1 = \omega^2 . \qquad (2.2)$$

Осуществляя переход к новому базису ω^i ,из системы (I.I5) будем иметь следующую систему пфаффовых и конечных уравнений пары M_1 :

$$\omega_3^2 = \lambda_1 \omega^1 , \ \omega_4^2 = \lambda_2 \omega^2, \ \omega_2^1 = \lambda_3 \omega^1, \ \omega_1^2 = \lambda_4 \omega^2,$$

$$\omega_2^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \ \omega_2 = b\omega^1 + c\omega^2, \ \omega_1^3 = l\omega_3^2 + m\omega_4^2,$$

$$\omega_1 = m\omega_3^2 + k\omega_4^2, \ \Omega_1 = p\omega^1 + r\omega^2, \ 2\omega_3^4 = -r\omega^1 + s\omega^2,$$

$$\Omega_2 = t\omega_4^2 + n\omega_3^2 , \ 2\omega_4^3 = -n\omega_4^2 + v\omega_3^2 , \qquad (2.3)$$

$$\lambda_1 a_1 \theta_1 = \mu \omega^1 + \lambda_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2}(a_1)^2 r \omega_4^2 ,$$

$$a_2 \theta_2 = \psi \omega^2 + \omega_2^1 - \frac{1}{2}(a_2)^2 n \lambda_2 \omega^1 ;$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(m + b) = 0,$$

$$r(\lambda_1 - \lambda_2)[\lambda_1 + \tfrac{1}{2}(a_1)^2] = 0, \qquad (2.4)$$

$$n(\lambda_1 - \lambda_2)[1 + \tfrac{1}{2}(a_2)^2 \lambda_2] = 0 .$$

Из системы (2.4) следует,что мы имеем пять возможных случаев:

I/ $\lambda_1 = \lambda_2 = g$; (2.5)

2/ $m + b = 0, \ r = 0, \ n = 0$; (2.6)

3/ $r = 0, \ m + b = 0, \ 1 + \frac{1}{2}(a_2)^2 \lambda_2 = 0$; (2.7)

4/ $n = 0, \ m + b = 0, \ \lambda_1 + \frac{1}{2}(a_1)^2 = 0$; (2.8)

5/ $m + b = 0, \ \lambda_1 + \frac{1}{2}(a_1)^2 = 0, \ 1 + \frac{1}{2}(a_2)^2 \lambda_2 = 0$. (2.9)

О п р е д е л е н и е. Пары M_1,для которых выполняется условие (2.5),назовем парами M_1' ,пары M_1,характеризуемые соотношениями (2.6),называются парами M_1'' .

Т е о р е м а 2. Существует только два класса пар M_1: пары M_1' ,определяемые с произволом четырех функций двух аргументов,и пары M_1'' ,определяемые с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Для доказательства покажем сначала,что случаи 3/,4/,5/ сводятся к случаю 2/. Например,исследование третьего случая приводит нас к уравнению Пфаффа

$$(a_2)^2 \omega_4^2 + 2\omega^2 = 0 ,$$

замыкание которого дает соотношение

$$n(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 .$$

Поскольку в случае 3/ $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$,то $n = 0$,т. е. пришли к условиям (2.6).Аналогичное исследование случаев 4/ и 5/ приводит нас к тем же уравнениям (2.6).

Докажем теорему существования классов M_1', M_1'' .Пары M_1' определяются уравнениями Пфаффа:

$$\omega_3^2 = g\omega^1, \ \omega_4^2 = g\omega^2, \ \omega_2^1 = \lambda_3\omega^1, \ \omega_1^2 = \lambda_4\omega^2,$$

$$\omega_2^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \ \omega_2 = b\omega^1 + c\omega^2, \ \omega_1^3 = l\omega_3^2 + m\omega_4^2,$$

$$\omega_1 = m\omega_3^2 + k\omega_4^2, \ \Omega_1 = p\omega^1 + r\omega^2, \ 2\omega_3^4 = -r\omega^1 + s\omega^2,$$

$$\Omega_2 = t\omega_4^2 + n\omega_3^2, \ 2\omega_4^3 = -n\omega_4^2 + v\omega_3^2 , \qquad (2.10)$$

$$a_1\theta_1=\frac{\mu}{g}\omega^1+\omega_1^2-\frac{1}{2}(a_1)^2 r\omega^2,\quad a_2\theta_2=\psi\omega^2+\omega_2^1-\frac{1}{2}(a_2)^2 n\omega_3^2,$$

$$dg+g(\omega_2^2-\omega_1^1)=g^2\omega_2^1-\omega_1^2 \qquad (2.11)$$

и их замыканиями. Пфаффово уравнение (2.II)-вполне интегрируемое. Из анализа системы (2.I0),(2.II) следует, что $S_1=12,\ S_2=4,\ Q=N=20$, следовательно, произвол существования пар M_1' —четыре функции двух аргументов.

Пары M_1'' удовлетворяют уравнениям Пфаффа:

$$\omega_3^2=\lambda_1\omega^1,\ \omega_4^2=\lambda_2\omega^2,\ \omega_2^1=\lambda_3\omega^1,\ \omega_1^2=\lambda_4\omega^2, \qquad (2.12)$$

$$\omega_2^3=a\omega^1+b\omega^2,\ \omega_2=b\omega^1+c\omega^2,\ \omega_1^3=\ell\omega_3^2-b\omega_4^2,$$

$$\omega_1=-b\omega_3^2+k\omega_4^2,\ \Omega_1=p\omega^1,\ 2\omega_3^4=s\omega^2,\ \Omega_2=t\omega_4^2,$$

$$2\omega_4^3=v\omega_3^2,\ \lambda_1 a_1\theta_1=\mu\omega^1+\lambda_1\omega_1^2,\ a_2\theta_2=\psi\omega^2+\omega_2^1.$$

Осуществляя замыкание и продолжение системы (2.I2), убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Т е о р е м а 3. Пары M_1' обладают свойствами: I/характеристические точки граней $(A_1A_3A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$ инцидентны соответственно прямым A_1A_4 и A_2A_3 ; 2/поверхности (A_3) и (A_4) являются одной и той же плоскостью (A_3A_4H), где $H=A_1+gA_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Характеристические точки K_2 и K_1 соответственно граней $(A_1A_3A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$ определяются формулами $K_2=-gA_1+\lambda_4A_4,\ K_1=A_2-\lambda_3A_3$, откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

2/Имеем:

$$dA_3=\omega_3^3A_3+\omega_3^4A_4+\omega^1H,\ dA_4=\omega_4^4A_4+\omega_4^3A_3+\omega^2H,$$

причем

$$d[A_3A_4H]=(g\omega_2^1-\omega_2^2)[A_3A_4H].$$

Следовательно, плоскость (A_3A_4H) неподвижна. Отметим, что свойство I/ справедливо и для пар M_1'' .

Назовем линии, огибаемые прямыми A_3A_4 соответственно на поверхностях (A_3) и (A_4), линиями Γ_1 и Γ_2 . Для пар M_1'' справедлива

Т е о р е м а 4. I/Точки A_3 и A_4 суть фокусы луча A_3A_4 конгруэнции (A_3A_4), её торсы соответствуют линиям Γ_i . 2/Одно семейство торсов прямолинейной конгруэнции (A_2A_3) $((A_1A_4))$ соответствует линиям $\Gamma_1(\Gamma_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокусы $F=\alpha A_3+\beta A_4$ луча A_3A_4 конгруэнции (A_3A_4), её торсы, а также торсы конгруэнций (A_2A_3) и (A_1A_4) определяются соответственно из уравнений

$$(\lambda_2-\lambda_1)\alpha\beta=0,\quad (\lambda_2-\lambda_1)\omega^1\omega^2=0,$$

$$\omega^1(\lambda_3\omega_3^4-\omega_2)=0,\quad \omega^2(\lambda_4\omega_4^3-\lambda_2\omega_1^3)=0.$$

Следовательно, теорема доказана.

Аналогично, путем перехода к новому базису, доказано, что пары M_2, M_3, M_5, M_6 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов , а пары M_4 -с произволом четырех функций двух аргументов.

Список литературы

I М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур."-Труды геом.семинара".М., ВИНИТИ, 3, I97I, с. I93- 220.

2. Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций, I956, М., ГИТТЛ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

В.С.Малаховский

КОНГРУЭНЦИИ КВАДРИК С ФОКАЛЬНОЙ КОНГРУЭНЦИЕЙ КОНИК.

Даны безынтегральные представления конгруэнции квадрик, на каждой квадрике которой имеется фокальная коника, и конгруэнции C_0 коник с неопределенными фокальными поверхностями. Показано, что характеристическими признаками таких конгруэнций являются соответственно касание вдоль фокальной коники всех квадрик конгруэнции одной квадрики и принадлежность одной квадрике всех коник конгруэнции.

§I. Конгруэнции коник с неопределенными фокальными поверхностями.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 конгруэнцию (C) коник, плоскости которых образуют двупараметрическое семейство, причем характеристическая точка A_3 плоскости коники $C\in(C)$ не принадлежит конике.

В репере $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где A_i $(i,j,k=1,2)$–точки пересечения с коникой C поляры точки A_3 относительно C, уравнения коники C запишутся в виде

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0. \tag{1.1}$$

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_J=\omega_J^K A_K \quad (I,J,K=1,2,3,4), \tag{1.2}$$

причем формы Пфаффа ω_J^K удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_J^K=\omega_J^I\wedge\omega_I^K \tag{1.3}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0. \tag{1.4}$$

Положим

$$\omega_i \overset{def}{=} \omega_i^4. \tag{1.5}$$

Так как плоскости коник C образуют двупараметрическое семейство, то формы Пфаффа ω_1, ω_2 линейно независимы, т.е.

$$\omega_1\wedge\omega_2\neq 0.$$

Фокальные точки коники C и фокальные семейства конгруэнции (C) определяются уравнениями:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0, \tag{1.6}$$

$$x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)+(x^1)^2\omega_1^2+(x^2)^2\omega_2^1+$$
$$+x^1x^3(\omega_3^2-\omega_1^3)+x^2x^3(\omega_3^1-\omega_2^3)=0,$$
$$x^1\omega_1+x^2\omega_2=0.$$

Определение I. Конгруэнцией C_0 называется конгруэнция (C) с неопределенными фокальными поверхностями, т.е. такая конгруэнция коник, у которой любые две смежные коники имеют общую точку [I].

Теорема I.I. Конгруэнции C_0 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство. Из определения конгруэнции C_0 следует, что система (I.6) для неё эквивалентна системе уравнений

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0, \quad x^1\omega_1+x^2\omega_2=0. \tag{1.7}$$

Это может быть тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$(\alpha x^1+\beta x^2+\gamma x^3)(x^1\omega_1+x^2\omega_2)\equiv\{x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)+$$
$$+(x^1)^2\omega_2^1+x^1x^3(\omega_3^2-\omega_1^3)+x^2x^3(\omega_3^1-\omega_2^3)\}, \qquad (1.8)$$

где α,β,γ –некоторые функции от главных и вторичных параметров. Из (I.8) следует:

$$\alpha\omega_2+\beta\omega_1=\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3,\quad \omega_3^2-\omega_1^3=\gamma\omega_1,$$
$$\alpha\omega_1=\omega_1^2,\quad \beta\omega_2=\omega_2^1,\quad \omega_3^1-\omega_2^3=\gamma\omega_2. \qquad (1.9)$$

Замыкая (I.9), находим:

$$\delta\alpha=\alpha(\pi_4^4-\pi_2^2)-\pi_4^2,\quad \delta\beta=\beta(\pi_4^4-\pi_1^1)-\pi_4^1,$$
$$\delta\gamma=\gamma(\pi_3^3+\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_2^2)+\pi_4^3. \qquad (1.10)$$

Из (I.10) следует, что можно осуществить фиксацию

$$\alpha=\beta=\gamma=0. \qquad (1.11)$$

При этом вершина A_4 репера R фиксируется. Замыкая уравнения

$$\omega_3^4=0,\quad \omega_i^j=0,\quad \omega_3^i-\omega_j^3=0,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0, \qquad (1.12)$$

приводим систему уравнений Пфаффа конгруэнции C_o к виду (I.12) и

$$\omega_4^3=0,\quad \omega_4^i=m\omega_j,\quad \omega_i^3=a\omega_i+b_j\omega_j,$$
$$dm+8m\omega_3^3=0.$$

Здесь и в дальнейшем $i,j,k=1,2;\ i\neq j$, и по индексам i и j суммирование не производится. Анализируя эту систему, убеждаемся, что она имеет решение с произволом одной функции двух аргументов.

§2. Инвариантная квадрика Q конгруэнции C_o

Т е о р е м а 2.I. Конгруэнция коник тогда и только тогда является конгуэнцией C_o, когда все её коники C принадлежат одной квадрике.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть конгруэнция коник является конгруэнцией C_o. Тогда имеют место уравнения (I.I2), (I.I3). Рассмотрим квадрику Q :

$$\mathcal{F}\equiv(x^3)^2+m(x^4)^2-2x^1x^2=0. \qquad (2.1)$$

Коника C, определяемая уравнениями (I.I), принадлежит квадрике Q. Так как

$$d\mathcal{F}=-2\mathcal{F}\omega_3^3, \qquad (2.2)$$

то Q –инвариантная квадрика.

Достаточность. Пусть все коники C конгруэнции (C) принадлежат одной квадрике Q, причем плоскости коник C образуют двупараметрическое семейство и характеристическая точка A_3 плоскости коники не инцидентна конике.

Отнесем конгруэнцию (C) к геометрически фиксированному реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где A_4–полюс квадрики Q относительно плоскости коники C, а A_i $(i,j,k=1,2)$ – точки пересечения с Q прямой, полярно сопряженной прямой A_3A_4 относительно Q. Тогда уравнения коники C и квадрики Q запишутся соответственно в виде

$$f\equiv(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0, \qquad (2.3)$$

$$\mathcal{F}\equiv(x^3)^2+m(x^4)^2-2x^1x^2=0. \qquad (2.4)$$

Так как квадрика Q –инвариантная, то выполняется условие

$$d\mathcal{F}=\lambda\mathcal{F}. \qquad (2.5)$$

Имеем:

$$d\mathcal{F}=-2\omega_3^3\mathcal{F}+2(x^1)^2\omega_1^2+2(x^2)^2\omega_2^1+2x^1x^3(\omega_3^2-\omega_1^3)+$$
$$+2x^2x^3(\omega_3^1-\omega_2^3)+2x^1x^4(\omega_4^2-m\omega_1)+2x^2x^4(\omega_4^1-m\omega_2)-$$
$$-2x^3x^4\omega_4^3+2x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3). \qquad (2.6)$$

Сравнивая (2.6), с (2.5), и учитывая, что A_3 –характеристическая точка плоскости коники C, находим:

$$\omega_3^4=0\,,\ \omega_1^2=0\,,\ \omega_2^1=0\,,\ \omega_3^2-\omega_1^3=0,\ \omega_3^1-\omega_2^3=0,$$
$$\omega_4^2=m\omega_1,\ \omega_4^1=m\omega_2\,,\ \omega_4^3=0\,,\ \omega_1^1+\omega_2^2+2\omega_3^3=0. \tag{2.7}$$

Кроме того,

$$\omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\,\omega_k. \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.7),(2.8) эквивалентна системе уравнений (I.I2),(I.I3),определяющих конгруэнцию C_o .Из доказанной теоремы вытекает простая геометрическая характеристика вершины A_4 построенного в §I репера R конгруэнции C_o : она является полюсом плоскости коники C относительно инвариантной квадрики Q ,содержащей все коники конгруэнции C_o .Эта теорема дает безынтегральное представление конгруэнции C_o : она образована сечениями заданной квадрики касательными плоскостями произвольной гладкой поверхности.

§3.Конгруэнция квадрик с фокальной конгруэнцией коник

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией K_o называется конгруэнция невырожденных квадрик,на каждой квадрике которой фокальное многообразие [2 ,с.II7] содержит конику C конгруэнции (C).

Т е о р е м а 3.I.Конгруэнции K_o существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Отнесем конгруэнцию K_o к реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где A_3 -характеристическая точка плоскости коники, A_i $(i,j,k=I,2)$-точки пересечения с коникой C поляры точки A_3 относительно квадрики Q .При надлежащей нормировке вершин репера уравнение квадрики Q и уравнения коники C запишутся в виде:

$$\mathcal{F}\equiv(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2=0, \tag{3.1}$$

$$f\equiv(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0. \tag{3.2}$$

Так как коника C принадлежит фокальному многообразию квадрики Q ,то

$$d\mathcal{F}\big|_{x^4=0}=\lambda f. \tag{3.3}$$

Имеем:

$$\tfrac{1}{2}d\mathcal{F}=(\theta-\omega_4^4)\mathcal{F}+(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)x^1x^2+(\omega_3^2-\omega_1^3)x^1x^3+$$
$$+(\omega_3^1-\omega_2^3)x^2x^3+(\omega_4^2-\omega_1)x^1x^4+(\omega_4^1-\omega_2)x^2x^4+$$
$$+(\omega_4^4-\omega_3^3)(x^3)^2-\omega_4^3x^3x^4+\omega_1^2(x^1)^2+\omega_2^1(x^2)^2, \tag{3.4}$$

где $\mathcal{D}\theta=0$, $\omega_\mathcal{J}^\varkappa$ $(\mathcal{J},\varkappa=I,2,3,4)$-компоненты инфинитезимальных перемещений репера и $\omega_i\overset{\text{def}}{=}\omega_i^4$.Учитывая,что A_3 - характеристическая точка плоскости коники C и используя формулы (3.3),(3.4) находим:

$$\omega_3^4=0,\ \omega_i^j=0,\ \omega_3^i-\omega_j^3=0,\ \ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0. \tag{3.5}$$

Условие эквипроективности $\omega_\mathcal{J}^\mathcal{J}=0$ дает

$$3\omega_3^3+\omega_4^4=0. \tag{3.6}$$

Замыкая пфаффовы уравнения (3.5),получим:

$$\omega_4^1\wedge\omega_2=0,\ \omega_4^2\wedge\omega_1=0,\ \omega_4^3\wedge\omega_1=0,\ \ \omega_4^3\wedge\omega_2=0,$$
$$\omega_4^1\wedge\omega_1+\omega_4^2\wedge\omega_2=0,\ \ \omega_3^1\wedge\omega_1+\omega_3^2\wedge\omega_2=0. \tag{3.7}$$

В силу (3.7) пфаффова система уравнений конгруэнции K_o запишется в виде

$$\omega_i^j=0\,,\ \omega_3^i-\omega_j^3=0\,,\ \ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0,\ \omega_3^4=\omega_4^3=0,$$
$$\omega_4^i=(1+a)\omega_j\,,\ \ \omega_3^i=b_i\omega_i+c\,\omega_j\,, \tag{3.8}$$
$$4\omega_3^3=S^k\omega_k\,,\ \ da=2(1+a)(\omega_4^4-\omega_3^3).$$

Она определяет конгруэнции K_o с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 3.2. Все квадрики конгруэнции K_o касаются одной квадрики вдоль коник C .

Д о к а з а т е л ь с т в о.Рассмотрим квадрику

$$\Phi\equiv(1+a)(x^4)^2+(x^3)^2-2x^1x^2=0. \tag{3.9}$$

Квадрика (3.I) касается квадрики (3.9) вдоль коники (3.2). Так как

$$d\Phi = -\Phi\,\omega_3^3\,, \qquad (3.10)$$

то квадрика (3.9)-инвариантная.

С л е д с т в и е. Фокальная конгруэнция коник C является конгруэнцией C_0.

Т е о р е м а 3.3. Пусть Q^* –квадрика, S -произвольная гладкая поверхность, (C) -конгруэнция коник C, являющихся сечениями квадрики Q^* касательными плоскостями к поверхности S, Q –квадрики, касающиеся квадрики Q^* вдоль коник C. Конгруэнция (Q) квадрик Q является конгруэнцией K_0. Эта теорема дает безынтегральное представление конгруэнции K_0 Доказательство её аналогично доказательству теоремы 2.I.

Т е о р е м а 3.4. Фокальное многообразие квадрики $Q \in K_0$ состоит из коники C и двух точек пересечения с квадрикой Q прямой

$$a x^1 + s^1 x^4 = 0\,, \qquad a x^2 + s^2 x^4 = 0\,, \qquad (3.11)$$

проходящей через характеристическую точку A_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальное многообразие квадрики $Q \in K_0$ определяется уравнениями

$$(x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0,\ x^4(s^1x^4 - a x^1) = 0,\ x^4(s^2x^4 - a x^2) = 0. \qquad (3.12)$$

Следовательно, оно состоит из коники (3.2) и пары точек

$$M_\varepsilon = -s^k A_k + \varepsilon\sqrt{2s^1s^2 - a^2}\,A_3 + aA_4\,, \qquad (3.13)$$

инцидентных прямой (3.II), содержащей характеристическую точку A_3, и квадрике Q.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С., Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными семействами."Тр.Томского ун-та", 160, 1962, 5-15

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В., Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве."Тр.Геом.семинара ВИНИТИ СССР, 1974, 6, II3-I33.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 5I3.73

В.В.М а х о р к и н

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КВАДРИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассматриваются однопараметрические семейства невырожденных квадрик (многообразия $K(I,3)$ в трехмерном проективном пространстве. Доказано, что в общем случае квадрики огибают некоторую поверхность S, касаясь её вдоль кривой четвертого порядка L, кривая L огибает в общем случае восемь линий, лежащих на поверхности S.

§I. Фокальные многообразия ранга один и ранга два многообразия $K(I,3)$

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3, отнесенном к подвижному реперу $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, однопараметрическое семейство (многообразие (I,3) невырожденных поверхностей второго порядка. Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta\,, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1,2,3,4). \qquad (1.1)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и условию

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0\,. \qquad (1.3)$$

Квадрика Q многообразия $K(I,3)$ определяется уравнением

$$a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \tag{1.4}$$

причем

$$\det \| a_{\alpha\beta} \| = \kappa \neq 0. \tag{1.5}$$

Многообразие $K(I,3)$ задается следующей системой уравнений:

$$\nabla a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}\tau, \quad \nabla b_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}\tau, \tag{1.6}$$

где

$$\nabla a_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\,\omega^{\gamma}_{\alpha} - a_{\alpha\gamma}\,\omega^{\gamma}_{\beta}. \tag{1.7}$$

$$\nabla b_{\alpha\beta} = d b_{\alpha\beta} - b_{\gamma\beta}\,\omega^{\gamma}_{\alpha} - b_{\alpha\gamma}\,\omega^{\gamma}_{\beta} - b_{\alpha\beta}\tau_1, \tag{1.8}$$

а τ, τ_1 -инвариантные формы параметрической группы [I].

Фокальные многообразия ранга один и ранга два [2]определяются соответственно следующими системами уравнений:

$$a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \quad b_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0. \tag{1.9}$$

$$a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \quad b_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \quad c_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0. \tag{1.10}$$

В общем случае фокальное многообразие ранга один является кривой четвертого порядка,а многообразие ранга два состоит из восьми точек.

§2.Канонический репер многообразия $K(I,3)$

Осуществим следующую канонизацию репера $\{A_{\alpha}\}$:

$$\begin{gathered} a_{11} = a_{13} = a_{14} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = 0, \; a_{12} \neq 0, \\ b_{11} = b_{13} = b_{22} = b_{24} = 0, \; b_{14} \neq 0, \; b_{23} \neq 0, \\ c_{11} = c_{22} = 0, \; a_{33} = a_{44} = 1, \; a_{12} = a_{34} = -\tfrac{1}{2}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Тогда из (I,6),(I.7),(I.8) получим систему пфаффовых уравнений многообразия $K(I,3)$:

$$\begin{gathered} \omega^4_2 = l\,\omega^3_1, \quad \omega^1_3 = m\,\omega^3_1, \quad \omega^3_3 = n\,\omega^3_1, \\ \omega^1_4 = p\,\omega^3_1, \quad \omega^2_4 = r\,\omega^3_1, \quad \omega^3_4 = s\,\omega^3_1, \\ \omega^4_3 = q\,\omega^3_1, \quad \omega^1_1 + \omega^2_2 = \omega^3_1, \quad \omega^1_1 = t\,\omega^3_1, \\ \omega^2_1 = \omega^1_2 = \omega^4_1 = \omega^3_2 = 0, \quad \omega^3_1 = \tfrac{1}{2}\,\omega^2_3, \\ \omega^4_2 = \tfrac{1}{2}\,\omega^1_4 = 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Замыкая систему (2.2),получим

$$\begin{gathered} dl = l_1\omega^3_1, \quad dm = m_1\omega^3_1, \quad dn = n_1\omega^3_1, \\ dp = p_1\omega^3_1, \quad dr = r_1\omega^3_1, \quad ds = s_1\omega^3_1, \\ dq = q_1\omega^3_1, \quad dt = t_1\omega^3_1. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Канонизация (2.I) репера $\{A_{\alpha}\}$имеет следующую геометрическую интерпретацию:точки A_1, A_2 помещены в фокальные точки ранга два,не лежащие на одной прямолинейной образующей квадрики Q ,точки A_3 и A_4 помещены в точках пересечения прямой,полярно сопряженной прямой A_1A_2 относительно квадрики Q, с касательными к фокальному многообразию ранга один (кривой L) в точках A_1 и A_2 .

Анализируя предыдущее,устанавливаем справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а .Однопараметрическое семейство квадрик огибает в общем случае поверхность S ,касаясь её вдоль кривой L ,кривая L огибает в общем случае восемь линий, каждая из которых лежит на поверхности S .

Список литературы

I.Л а п т е в Г.Ф.,Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей.-Итоги науки ВИНИТИ.Геометрия,1963,5-64

2.М а х о р к и н В.В.Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.3,Калининград,1973,с.50-59.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Е.А.Митрофанова

КОНГРУЭНЦИИ ГИПЕРПАРАБОЛОИДОВ В П-МЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В п-мерном эквиаффинном пространстве A_n рассмотрено $(n-1)$-мерное многообразие (конгруэнция) M_{n-1} гиперпараболоидов Q, имеющая, по крайней мере, одну невырожденную фокальную гиперповерхность. Найден основной объект конгруэнции M_{n-1} и получены поля некоторых геометрических объектов. Исследована конгруэнция $\overset{\circ}{M}_2$ гиперболических параболоидов в A_3, у которой на каждом параболоиде Q пара прямолинейных образующих ℓ_1, ℓ_2 разных семейств является фокальным многообразием параболоида Q. Получено безынтегральное представление конгруэнции $\overset{\circ}{M}_2$.

§I. Основной объект конгруэнции гиперпараболоидов.

Отнесем конгруэнцию M_{n-1} к реперу $R=\{A, \bar{e}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n)$, где A - фокальная точка параболоида Q, описывающая невырожденную поверхность (A), векторы $\bar{e}_i$ $(i,j,k=1,\dots,n-1)$ расположены в касательной гиперплоскости к гиперпараболоиду Q в точке A, а вектор $\bar{e}_n$ направлен по его диаметру. Уравнение параболоида Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции M_{n-1} запишутся соответственно в виде:

$$F \equiv a_{ij} x^i x^j - 2x^n = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} da_{ij} - a_{kj}\omega_i^k - a_{ik}\omega_j^k - a_{ij}\omega_n^n = b_{ij,k}\omega^k, \\ \omega_i^n = \lambda_{ij}\omega^j, \quad \omega_n^i = c_k^i \omega^k, \quad \omega^n = 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\det\|a_{ij}\| \neq 0$ и ω^α, ω_α^β - компоненты деривационных формул

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \tag{1.3}$$

удовлетворяющие условию эквиаффинности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^n = 0 \tag{1.4}$$

и уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \quad \mathcal{D}\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha \tag{1.5}$$

Продолжая систему (I.2), находим

$$\begin{gathered} \delta a_{ij} = a_{kj}\pi_i^k + a_{ik}\pi_j^k - a_{ij}\pi_n^n, \\ \delta b_{ij,k} = b_{ij,h}\pi_k^h + b_{hj,k}\pi_i^k + b_{ih,k}\pi_j^h - b_{ij,k}\pi_n^n, \\ \delta\lambda_{ij} = \lambda_{ik}\pi_j^k + \lambda_{kj}\pi_i^k - \lambda_{ij}\pi_n^n, \\ \delta c_i^j = c_k^j \pi_i^k - c_i^k \pi_k^j + c_i^j \pi_n^n, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где δ - символ дифференцирования по вторичным параметрам, π_α^β - значения форм ω_α^β при фиксированных первичных параметрах.

Т е о р е м а I.I. Фундаментальный объект $\Gamma=\{a_{ij}, b_{ij,k}, \lambda_{ij}, c_i^j\}$ является основным объектом [I, с.347] конгруэнции M_{n-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Придадим следующие начальные значения компонентам объекта Γ:

$$a_{ij} = \delta_j^i, \quad b_{ii,1} = i, \quad \lambda_{ij} = \delta_i^j, \quad c_i^j = \overset{\circ}{c}{}_i^j, \tag{1.7}$$

а все остальные компоненты $b_{ij,k}$ положим равными 0. К системе (I.6) присоединим формальную алгебраическую систему:

$$\begin{gathered} Y_{ij} = X_i^j + X_j^i, \quad Y_{ii} = 2X_i^i - X_n^n, \\ Y_{ij} = jX_i^j + iX_j^i \end{gathered} \tag{1.8}$$

($i \neq j$, по индексу i не суммировать!)

Г.Ф.Лаптев установил [I], что из алгебраической разрешимости формальной системы (I.8) относительно X_α^β следует разреши-

мость системы дифференциальных уравнений (I.6) относительно π_α^β в окрестности точки ($\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$; $\overset{\circ}{b}_{ij,k}$; $\overset{\circ}{\lambda}_{ij}$; $\overset{\circ}{c}{}_i^j$).
Из уравнений (I.8),(I.4) находим

$$X_j^i=\frac{1}{j-i}\left(jY_{ij}-Y_{ij,1}\right),\quad X_i^i=-\frac{1}{2}\left((n+1)\sum_{k=1}^{n-1}Y_{kk}-Y_{ii}\right),$$

$$X_n^n=-(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}Y_{kk}.$$

Следовательно, фундаментальный объект Γ является основным объектом конгруэнции M_{n-1}.

§ 2. Поля геометрических объектов на конгруэнции M_{n-1}

Из (I.6) следует, что системы величин $\{a_{ij}\},\{\lambda_{ij}\},\{c_i^j\}$ образуют подобъекты основного объекта Γ. Симметрический тензор $\{a_{ij}\}$ определяет гиперпараболоид Q, симметрический тензор $\{\lambda_{ij}\}$ является основным дважды ковариантным тензором фокальной гиперповерхности (A), тензор $\{c_i^j\}$ определяет фокальные точки диаметра $(A\bar{e}_n)$ гиперпараболоида Q. Пусть фокальная гиперповерхность (A) является тангенсально невырожденной, т.е.

$$\det\|\lambda_{ij}\|\neq 0. \qquad (2.1)$$

Обозначим через a^{ij}, λ^{ij} —приведенные миноры матриц $\|a_{ij}\|, \|\lambda_{ij}\|$:

$$a^{jk}a_{ki}=\delta_i^j,\quad \lambda^{jk}\lambda_{ki}=\delta_i^j. \qquad (2.2)$$

На многообразии M_{n-1} определяются следующие тензоры:

$$m_{ij}=a_{ik}c_j^k,\quad \hat{m}_{ij}=\lambda_{ik}c_j^k,\quad b_i=a^{jk}b_{jk,i},$$

$$\hat{b}_i=\lambda^{jk}b_{jk,i},\quad b^i=a^{ij}b_j,\quad \hat{b}^i=\lambda^{ij}\hat{b}_j,\quad \hat{B}^i=a^{ij}\hat{b}_j, \qquad (2.3)$$

$$B^i=\lambda^{ij}b_i,\quad \hat{n}_i=\lambda_{ij}b^j,\quad n_i=a_{ij}\hat{b}^j$$

и абсолютный инвариант $m=a_{ij}\lambda^{ij}$.

Тензоры $\{m_{ij}\}$, $\{\hat{m}_{ij}\}$ определяют инвариантные гиперцилиндры

$$m_{ij}x^ix^j=0,\quad \hat{m}_{ij}x^ix^j=0. \qquad (2.4)$$

Тензоры $\{b_i\},\{\hat{b}_i\},\{n_i\},\{\hat{n}_i\}$ определяют инвариантные гиперплоскости

$$b_ix^i=0,\quad \hat{b}_ix^i=0,\quad n_ix^i=0,\quad \hat{n}_ix^i=0, \qquad (2.5)$$

проходящие через диаметр гиперпараболоида Q. Тензоры $\{\hat{B}^i\}$, $\{B^i\}$, $\{\hat{b}^i\}$ и геометрический объект $\{b^i, m\}$ определяют инвариантные направления:

$$\bar{E}_1=b^i\bar{e}_i+m\bar{e}_n,\quad \bar{E}_2=\hat{b}^i\bar{e}_i,\quad \bar{E}_3=B^i\bar{e}_i,\quad \bar{E}_4=\hat{B}^i\bar{e}_i. \qquad (2.6)$$

§ 3. Конгруэнции M_2°

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией M_2° называется конгруэнция M_2 гиперболических параболоидов Q в трехмерном эквиаффинном пространстве A_3, обладающая следующими свойствами: I/на гиперболическом параболоиде Q существует пара прямолинейных образующих ℓ_1, ℓ_2 разных семейств, являющихся фокальными прямыми параболоида Q [2]; 2/поверхность (A), где $A\equiv \ell_1\cap \ell_2$, не вырождается в линию.

Т е о р е м а 3.I. Конгруэнции M_2° существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем конгруэнцию M_2° к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где векторы $\bar{e}_i$ $(i=1,2)$ направлены по прямым ℓ_i, а вектор ℓ_3 —по диаметру гиперболического параболоида Q. Уравнение параболоида Q приводится к виду:

$$F\equiv x^1x^2-x^3=0. \qquad (3.1)$$

Так как прямые ℓ_i —фокальные прямые параболоида Q, то

$$dF\big|_{x^3=0}=\omega_3^3x^1x^2. \qquad (3.2)$$

Используя (3.2), приходим к вполне интегрируемой системе уравнений Пфаффа

$$\omega^3=0,\ \omega_3^3=0,\ \omega_j^i=0,\ \omega_i^3=\omega^j,\ \omega_3^i=m\omega^i,\ dm=0. \qquad (3.3)$$

$$(i,j=1,2;\ i\neq j)$$

Т е о р е м а 3.2. Конгруэнция M_2 гиперболических параболоидов Q тогда и только тогда является конгруэнцией

M_2°, когда существует линейчатая квадрика $\tilde{Q}$, которую огибают гиперболические параболоиды Q, причем в каждой точке $A \in \tilde{Q}$ параболоиды Q и квадрика $\tilde{Q}$, касаясь друг друга, имеют общими только пару прямолинейных образующих ℓ_1, ℓ_2, пересекающихся в точке A.

Доказательство. Необходимость. Пусть конгруэнция M_2 является конгруэнцией M_2°. Используя уравнения (3.3), убеждаемся, что квадрика $\tilde{Q}$

$$\Phi \equiv x^1 x^2 - x^3 - \frac{1}{2} m (x^3)^2 = 0 \qquad (3.4)$$

является инвариантной. Система уравнений, определяющая линию пересечения квадрик $\tilde{Q}$ и Q, имеет вид:

$$x^3 = x^1 x^2, \quad (x^3)^2 = 0, \qquad (3.5)$$

т.е. квадрики $\tilde{Q}$ и Q имеют общими только прямые ℓ_1, ℓ_2.

Достаточность. Пусть существует линейчатая квадрика $\tilde{Q}$ такая, что конгруэнция M_2 образована гиперболическими параболоидами Q, касающимися квадрики $\tilde{Q}$, причем общие точки квадрик Q и $\tilde{Q}$ образованы только прямолинейными образующими ℓ_1, ℓ_2, пересекающимися в точке A касания квадрик Q и $\tilde{Q}$. В репере $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_i$ направлены по прямым ℓ_i, а $\bar{e}_3$ -по диаметру параболоида Q, уравнения квадрик Q и $\tilde{Q}$ имеют вид (3.1) и (3.4). Условие

$$d\Phi = \lambda \Phi$$

инвариантности квадрики $\tilde{Q}$ приводит к пфаффовым уравнениям (3.3), характеризующим конгруэнции M_2°.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий."Тр.Моск.мат.об-ва",1953, II2,275-382.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.В., Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве".Тр.геом.семинара ВИНИТИ",1974, 6,II3-I33.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

В.М.Овчинников

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И ПРОСТРАНСТВОМ ГИПЕР - ПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Изучается локальное дифференцируемое отображение Ψ точечного проективного пространства P_N $(N = 2n-1)$ в пространство гиперплоскостных элементов [I] проективного пространства P_n. Во второй дифференциальной окрестности исследованы геометрические образы, ассоциированные с распределением гиперплоскостей и связанные с дифференцируемым отображением Ψ.

§I. Система дифференциальных уравнений отображения Ψ

Пусть P_n - n-мерное проективное пространство, p и π -соответственно его точка и инцидентная ей гиперплоскость. Имеем

$$N = \operatorname{rang}(p, \pi) = 2n-1.$$

Будем рассматривать дифференцируемое отображение Ψ некоторой области $V \subset P_N$ в пространство гиперплоскостных элементов.

Отображение Ψ определим следующим образом: $\Psi_1(L) = p, \Psi_2(L) = \pi$, причем

$$\Psi(L) = (p, \pi), \quad L \in V, \quad p \in \Psi_2(L).$$

$$+(\Lambda^n_I\Lambda^n_K-\Lambda^n_{IK})\omega^n_n+\Lambda^j_I\Lambda^n_K\,\omega^0_j+\Lambda^n_I\Lambda^n_K\,\omega^0_n+\Lambda^n_{IKL}\Omega^L_0\,;$$

$$d\Lambda^n_{iI}=\Lambda^n_{iK}\Omega^K_I-\Lambda^n_{iI}(\Omega^0_0+\omega^n_n)+\Lambda^n_{jI}\omega^j_i+\Lambda^n_I\omega^0_i+\Lambda^n_{iIK}\Omega^K_0\,;$$

$$d\Lambda^n_{iIK}=\Lambda^n_{iK}\Omega^L_K+\Lambda^n_{iLK}\Omega^L_I-2\Lambda^n_{iIK}\Omega^0_0-\Lambda^n_{i(K}\Omega^0_{I)}+$$
$$+(\Lambda^n_{jIK}-\Lambda^n_I\Lambda^n_{jK})\omega^j_i+\Lambda^n_K\Lambda^n_{iI}\omega^0_n+\Lambda^n_{iI}\Lambda^n_{jK}\omega^j_n+$$
$$+(\Lambda^n_{IK}-\Lambda^n_{jI}\Lambda^j_K)\omega^0_i+(\Lambda^n_I\Lambda^n_{iK}-\Lambda^n_{iIK})\omega^n_n+\Lambda^n_{iIKL}\Omega^L_0.$$

§2. Отображения Ψ_1

Рассмотрим дифференцируемое точечное отображение

$$\Psi_1(M_0)=A_0\,,\quad M_0\in V\subset P_N\,,\quad A_0\in P_n\,.$$

К каждой точке M_0 присоединим репер $\{M_1,\dots,M_N\}$ первого порядка, где точки $\{M_1,\dots,M_n\}$ лежат в касательной плоскости поверхности V_n в точке M_0, причем отображение Ψ_1 является сужением отображения Ψ_1 на V_n, что обозначим Ψ_1/V_n. Тогда сужение отображения Ψ_1/V_n выделяет проективное соответствие между направлениями в точке M_0 и направлениями в точке A_0, лежащими в гиперплоскости π. Считаем, что направления $M_0M_{\bar i}$ и $A_0A_{\bar i}$ соответствуют в этом проективитете. Из системы (I.3) получаем, что дифференциальные уравнения отображения Ψ_1/V_n примут вид:

$$\omega^{\bar i}_0=\Omega^{\bar i}_0\,,\quad \Omega^\alpha_0=0,$$
$$\omega^n_i=\Lambda^n_{i\bar j}\Omega^{\bar j}_0\,, \tag{2.1}$$

где $\alpha,\beta,\gamma=n+1,\dots,N$.

Продолжая уравнения системы (2.I), получим:

$$\Omega^{\bar i}_{\bar j}-\delta^{\bar i}_{\bar j}\Omega^0_0-\omega^{\bar i}_{\bar j}+\delta^{\bar i}_{\bar j}\,\omega^0_0=\Lambda^{\bar i}_{\bar j\bar k}\Omega^{\bar k}_0\,, \tag{2.2}$$

Выбираем в пространствах P_N и P_n подвижные реперы $M=\{M_{I'}\}$, $(I',K'=0,1,\dots,N)$ и $A=\{A_{i'}\}$, $(i',j'=0,1,\dots,n)$ с деривационными формулами

$$dM_{I'}=\Omega^{K'}_{I'}M_{K'}\,,\quad dA_{i'}=\omega^{j'}_{i'}A_{j'}, \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа $\Omega^{K'}_{I'}$, $\omega^{j'}_{i'}$ удовлетворяют уравнениям структуры Маурера-Картана

$$D\Omega^{K'}_{I'}=\Omega^{L'}_{I'}\wedge\Omega^{K'}_{L'}\,,\quad D\,\omega^{j'}_{i'}=\omega^{k'}_{i'}\wedge\,\omega^{j'}_{k'} \tag{1.2}$$

Поместим вершину M_0 в произвольную точку области V, вершину A_0 в точку $\psi_1(M_0)\in\pi$, а вершины $M_{\bar i}$ $(\bar i,\bar j=1,2,\dots,n)$ в гиперплоскость $\pi=\varphi_2(M_0)$.

Система дифференциальных уравнений отображения Ψ запишется в виде

$$\omega^i_0=\Lambda^i_I\Omega^I_0,\quad \omega^n_0=\Lambda^n_I\Omega^I_0,\quad \omega^n_i=\Lambda^n_{iI}\Omega^I_0\,, \tag{1.3}$$

где

$$(I,J,K=1,2,\dots,N;\quad i,j,k=1,2,\dots,n-1).$$

Система величин $\Gamma_1=\{\Lambda^i_I,\Lambda^n_I,\Lambda^n_{iI}\}$ образует фундаментальный геометрический объект I-го порядка отображения Ψ. Компоненты фундаментального объекта 2-го порядка $\Gamma_2=\{\Gamma_1,\Lambda^i_{IK},\Lambda^n_{iIK}\}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$d\Lambda^i_I=\Lambda^i_K\Omega^K_I+\Lambda^i_I(\omega^0_0-\Omega^0_0)-\Lambda^j_I\,\omega^i_j-\Lambda^n_I\omega^i_n+\Lambda^i_{IK}\Omega^K_0,$$
$$d\Lambda^n_I=\Lambda^n_K\Omega^K_I+\Lambda^n_I(\omega^0_0-\Omega^0_0)-\Lambda^n_I\omega^n_n+\Lambda^n_{IK}\Omega^K_0,$$
$$d\Lambda^i_{IK}=\Lambda^i_{IL}\Omega^L_K+\Lambda^i_{LK}\Omega^L_I-\Lambda^i_{(K}\Omega^0_{I)}+\Lambda^i_{IK}(\omega^0_0-2\Omega^0_0)- \tag{1.4}$$
$$-\Lambda^j_{IK}\,\omega^i_j-\Lambda^n_{IK}\omega^i_n+\Lambda^j_I\Lambda^i_K\,\omega^0_j+\Lambda^n_I\Lambda^i_K\omega^0_n+\Lambda^i_{IKL}\Omega^L_0,$$
$$d\Lambda^n_{IK}=\Lambda^n_{IL}\Omega^L_K+\Lambda^n_{LK}\Omega^L_I-\Lambda^n_{(K}\Omega^0_{I)}+\Lambda^n_{IK}(\omega^0_0-2\Omega^0_0)+$$

$$\Omega^{\alpha}_{\bar i} = \Lambda^{\alpha}_{\bar i \bar k}\Omega^{\bar k}_{0},$$

$$d\Lambda^{n}_{i\bar j} = \Lambda^{n}_{ik}\Omega^{\bar k}_{\bar j} - \Lambda^{n}_{i\bar j}(\Omega^{0}_{0} + \omega^{n}_{n}) + \Lambda^{n}_{j\bar j}\omega^{j}_{i} +$$
$$+\delta^{n}_{\bar i}\Lambda^{\bar i}_{\bar j}\omega^{0}_{i} + \Lambda^{n}_{i\bar j\bar k}\Omega^{\bar k}_{0}.$$

Осуществляя последовательные продолжения системы (2.2), получим фундаментальную последовательность геометрических объектов отображения Ψ_1/V_n :

$$\Lambda^{\bar i}_{\bar j\bar k},\ \Lambda^{\alpha}_{\bar i\bar k},\ \Lambda^{n}_{i\bar j},\ \ldots$$

Асимптотический конус для многообразия $\psi^{-1}(\psi_1(M_0))/V_n$ в точке M_0 будет иметь вид:

$$\Lambda^{\alpha}_{\bar i\bar j}X^{\bar i}X^{\bar j} = 0,\quad X^{\alpha} = 0. \tag{2.3}$$

Базисная гиперквадрика инвариантного (п-I)-параметрического линейного семейства гиперквадрик, соприкасающихся в точке M_0 с многообразием $\psi^{-1}(\psi_1(M_0))/V_n$, имеет вид:

$$\Lambda^{\alpha}_{\bar i\bar k}X^{\bar i}X^{\bar k} - 2X^{\alpha}X^{0} = 0.$$

Список литературы

I. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве."Тр.геом.семинара ВИНИТИ",1973,4,с.71-120.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.-"Итоги науки" ВИНИТИ,Геометрия,1963,с.65-107.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Н.Д.Поляков

СВЯЗНОСТИ НА ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

I. Рассмотрим нечетномерное дифференцируемое многообразие M_{n+1} $(n = 2q)$. Пусть на M_{n+1} задана почти контактная структура , т.е. дифференциально-геометрическая структура I порядка [3] со структурными объектами $\varphi^{\mathcal J}_{\mathcal K}$, $\xi^{\mathcal J}$, $\eta_{\mathcal K}$. Компоненты структурных объектов удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\varphi^{\mathcal J}_{\mathcal K}\varphi^{\mathcal K}_{\mathcal L} = -\delta^{\mathcal J}_{\mathcal L} + \xi^{\mathcal J}\eta_{\mathcal L},$$
$$\varphi^{\mathcal J}_{\mathcal K}\eta_{\mathcal J} = 0,\quad \varphi^{\mathcal J}_{\mathcal K}\xi^{\mathcal J} = 0,\quad \xi^{\mathcal J}\eta_{\mathcal J} = 1. \tag{I}$$

Автором показано [4] , что на почти контактном многообразии M_{n+1} при дополнительном оснащении полем объекта $\{F^{n+1}_{ij}\}$ возможно определить внутренним образом аффинную связность Γ без кручения. Поэтому в дальнейшем будем считать, что M_{n+1} снабжено такой аффинной связностью. Рассмотрим присоединенное расслоенное пространство $L_{n+1,n+1}$, базой которого является исходное многообразие M_{n+1} , снабженное связностью Γ, слоями которого являются касательные пространства T_x к базе. $(\mathcal J, \mathcal K, \mathcal L, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1;\ i, j, \ldots = 1, 2, \ldots n)$.

Предположим теперь, что в пространстве $L_{n+1,n+1}$ определено аналитическое сечение (поле точек), т.е. в каждом слое определена точка M -центр слоя. При фиксации точки базы фиксируется слой и точка в нем.

Пусть формами аффинной связности Γ являются формы ω^{J}, ω^{J}_{x}. Заметим, что в силу того, что задано сечение, формы ω^{J} можно отождествить с базовыми формами. Структурные уравнения для форм ω^{J}, ω^{J}_{x} имеют вид:

$$\mathcal{D}\omega^{J} = \omega^{x} \wedge \omega^{J}_{x},$$
$$\mathcal{D}\omega^{J}_{x} = \omega^{z}_{x} \wedge \omega^{J}_{z} + R^{J}_{xzm}\, \omega^{z} \wedge \omega^{m}, \tag{2}$$

где R^{J}_{xzm} -тензор кривизны пространства $L_{n+1,n+1}$.

Введем в слоях векторный репер e_{J} с вершиной в точке M, дифференциальные уравнения движения которого имеют вид: $\delta e_{J} = \overline{\omega}^{x}_{J} e_{x}$, где $\overline{\omega}^{x}_{J} = \omega^{x}_{J}\big|_{\omega^{J}=0}$.

Компоненты структурных объектов удовлетворяют следующим уравнениям:

$$d\varphi^{J}_{x} - \varphi^{J}_{z}\,\omega^{z}_{x} + \varphi^{z}_{x}\,\omega^{J}_{z} = \varphi^{J}_{xz}\,\omega^{z}, \tag{3}$$
$$d\eta_{x} - \eta_{z}\,\omega^{z}_{x} = \eta_{xz}\,\omega^{z}, \tag{4}$$
$$d\,\xi^{J} + \xi^{z}\omega^{J}_{z} = \xi^{J}_{z}\,\omega^{z}. \tag{5}$$

При продолжении (3) -(5) получим

$$d\varphi^{J}_{xz} - \varphi^{J}_{mz}\,\omega^{m}_{x} - \varphi^{J}_{xm}\,\omega^{m}_{z} + \varphi^{m}_{xz}\,\omega^{J}_{m} = \varphi^{J}_{xzm}\,\omega^{m}, \tag{6}$$
$$d\eta_{xz} - \eta_{mz}\,\omega^{m}_{x} - \eta_{xm}\,\omega^{m}_{z} = \eta_{xzm}\,\omega^{m}, \tag{7}$$
$$d\,\xi^{J}_{x} + \xi^{z}_{x}\omega^{J}_{z} - \xi^{J}_{z}\omega^{z}_{x} = \xi^{J}_{xz}\,\omega^{z}. \tag{8}$$

При дифференцировании (I) получим следующие соотношения на продолженные структурные объекты:

$$\varphi^{J}_{xm}\varphi^{x}_{z} + \varphi^{J}_{x}\varphi^{x}_{zm} = \xi^{J}_{m}\eta_{z} + \xi^{J}\eta_{zm},$$
$$\varphi^{J}_{xm}\eta_{J} + \varphi^{J}_{x}\eta_{Jm} = 0, \tag{9}$$
$$\varphi^{J}_{xm}\xi^{x} + \varphi^{J}_{x}\xi^{x}_{m} = 0, \quad \xi^{J}_{m}\eta_{J} + \xi^{J}\eta_{Jm} = 0.$$

2. Поле объекта η_{J} определяет на M_{n+1} распределение (η) гиперплоскостных элементов. Канонизируем теперь репер так, чтобы первые n векторов e_i принадлежали элементу распределения (η). Аналитически это означает, что $\eta_i = 0$. При такой канонизации дифференциальные уравнения распределения (η) имеют вид:

$$\omega^{n+1}_{i} = \eta^{n+1}_{ix}\,\omega^{x}, \tag{I0}$$

где $\eta^{n+1}_{ix} = -\dfrac{\eta_{ij}}{\eta_{n+1}}$.

Дифференцируя (I0), получим уравнения фундаментального объекта I порядка распределения:

$$\nabla\eta^{n+1}_{ij} = \eta^{n+1}_{ijx}\,\omega^{x},$$
$$\nabla\eta^{n+1}_{i\,n+1} - \eta^{n+1}_{ij}\,\omega^{j}_{n+1} = \eta^{n+1}_{i\,n+1\,x}\,\omega^{x}. \tag{II}$$

Следовательно, η^{n+1}_{ij} — тензор. В общем случае можем считать, что тензор η^{n+1}_{ij} —невырожденный, что позволяет ввести в рассмотрение обращенный фундаментальный тензор η^{ij}_{n+1}. Отметим, что тензоры η^{n+1}_{ij}, η^{ij}_{n+1} не симметричны по индексам i и j.

3. Формы ω^{i}_{j}, удовлетворяющие в силу (2) и (I0) структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^{i}_{j} = \omega^{\ell}_{j} \wedge \omega^{i}_{\ell} + \omega^{x} \wedge \left(\eta^{n+1}_{jx}\,\omega^{i}_{n+1} + R^{i}_{jxz}\,\omega^{z}\right), \tag{I2}$$

имеют расслоенную структуру по отношению к базовым формам ω^{J} и при $\omega^{J} = 0$ превращаются в инвариантные формы полной линейной группы. Обозначим через $M^{1}_{n+1,n}$ главное расслоенное пространство, определенное формами $\omega^{J}, \omega^{i}_{j}$. С $M^{1}_{n+1,n}$ ассоциируется присоединенное расслоенное пространство $A^{1}_{n+1,n}$, базой которого является исходное многообразие, слоями- плоскости (η), а структурной группой группа преобразований репера в плоскостях (η) с инвариантными формами $\bar{\omega}^i_j$.

Теорема 1. Расслоенное пространство $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ несет почти комплексную структуру со структурным объектом φ^i_j.

Действительно, из уравнений (3), в силу проведенной канонизации, получаем, что φ^i_j образует линейно однородный объект, удовлетворяющий условиям $\varphi^i_j \varphi^j_\ell = -\delta^i_\ell$.

4. Объект $\tilde{\varepsilon}^i_{n+1} = \frac{\varepsilon^i}{\varepsilon^{n+1}}$,компоненты которого удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \tilde{\varepsilon}^i_{n+1} + \omega^i_{n+1} = \tilde{\varepsilon}^i_{n+1\varkappa}\, \omega^\varkappa, \qquad (13)$$

определяет инвариантную нормаль распределения (η).

Построим следующие охваты:

$$H^i_{n+1\,j} = \varphi^i_{j\,n+1} + \varphi^i_{j\ell}\, \tilde{\varepsilon}^\ell_{n+1} - \tilde{\varepsilon}^i_{n+1}(\varphi^\ell_j\, \eta^{n+1}_{\ell\, n+1} + \varphi^{n+1}_{j\ell}\, \tilde{\varepsilon}^\ell_{n+1}), \qquad (14)$$

$$b_{ij} = \tfrac{1}{2}(H^m_{n+1[i}\, \eta^{n+1}_{|m|\ell]}\, \varphi^\ell_j + H^m_{n+1[j}\, \eta^{n+1}_{|m|\ell]}\, \varphi^\ell_i). \qquad (15)$$

Используя уравнения (3) - (8), (11), (13) с учетом проведенной канонизации и соотношений (1), (9), получаем

$$\nabla b_{ij} = b_{ij\varkappa}\, \omega^\varkappa. \qquad (16)$$

b_{ij} образует тензор, симметрический по нижним индексам и удовлетворяющий условиям переместительности I

$$b_{ij}\, \varphi^i_\ell\, \varphi^j_m = b_{\ell m}$$

В общем случае матрица тензора b_{ij} невырождена, в чем можно убедиться, подобрав соответствующим образом компоненты структурных и продолженных объектов с учетом соотношений (1) и (9). Следовательно, существует симметрический тензор b^{ij} такой, что $b^{ij}\, b_{j\ell} = \delta^i_\ell$.

При продолжении (16) получаем

$$\nabla b_{ij\varkappa} - (b_{\ell j}\, \eta^{n+1}_{i\varkappa} + b_{i\ell}\, \eta^{n+1}_{j\varkappa})\, \omega^\ell_{n+1} = b_{ij\varkappa\tau}\, \omega^\tau. \qquad (17)$$

5. Определим внутренним образом в пространстве $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ аффинные связности. Очевидно (см. (12) ,что формы ω^i_j не определяют связности.

Теорема 2. Формы

$$\theta^i = \omega^i - \mathcal{L}^i_{n+1}\, \omega^{n+1},$$
$$\theta^i_j = \omega^i_j - \gamma^i_{j\varkappa}\, \omega^\varkappa \qquad (18)$$

удовлетворяют структурным уравнениям Картана-Лаптева [2] и определяют аффинную связность на $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ тогда и только тогда, когда заданы поля

$$\nabla \mathcal{L}^i_{n+1} + \omega^i_{n+1} = \mathcal{L}^i_{n+1\varkappa}\, \omega^\varkappa,$$
$$\nabla \gamma^i_{j\varkappa} + \eta^{n+1}_{j\varkappa}\, \omega^i_{n+1} = \gamma^i_{j\varkappa\tau}\, \omega^\tau. \qquad (19)$$

Таким образом, для построения на $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ внутренне определенной аффинной связности нужно построить охваты объектов $\{\mathcal{L}^i_{n+1}\}$, $\{\gamma^i_{j\varkappa}\ \ \eta^{n+1}_{j\varkappa}\}$. Рассмотрим

$$\overset{1}{\mathcal{L}}{}^i_{n+1} = \tilde{\varepsilon}^i_{n+1},$$
$$\overset{1}{\gamma}{}^i_{j\varkappa} = -\tfrac{1}{2}\, b^{it}\,[b_{tj\varkappa} - (b_{tm}\, \eta^{n+1}_{j\varkappa} + b_{mj}\, \eta^{n+1}_{t\varkappa})\, \tilde{\varepsilon}^m_{n+1}] \qquad (20)$$

и

$$\overset{2}{\mathcal{L}}{}^i_{n+1} = \tilde{\varepsilon}^i_{n+1},$$
$$\overset{2}{\gamma}{}^i_{j\varkappa} = -\tfrac{1}{2}\, \varphi^\ell_j\, (\varphi^i_{\ell\varkappa} + \eta^{n+1}_{m\varkappa}\, \varphi^m_\ell\, \tilde{\varepsilon}^i_{n+1}). \qquad (21)$$

Аффинную связность, определенную охватами (20), обозначим через $\overset{1}{\gamma}$, а охватами (21) - ($\overset{2}{\gamma}$). Формы аффинной связности обозначим, соответственно, через $\overset{1}{\theta}{}^i$, $\overset{1}{\theta}{}^i_j$ и $\overset{2}{\theta}{}^i$, $\overset{2}{\theta}{}^i_j$. В общем случае эти связности с кручением.

Можно показать, что связность $\overset{1}{\gamma}$ является метрической, а $\overset{2}{\gamma}$ -почти комплексной [I].

С аффиной связностью $\overset{1}{\gamma}$ ассоциируется пространство римановой связности $V_{n+1,n}$, метрический тензор которого удовлетворяет условию переместительности. Значит, $V_{n+1,n}$ снабжено почти эрмитовой структурой.

Итак, доказаны

Теорема 3. В расслоенном пространстве $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ определяется внутренним образом риманова связность с кручением и почти комплексная связность с кручением.

Теорема 4. Пространство римановой связности $V_{n+1,n}$, ассоциированное с аффиной связностью $\overset{1}{\gamma}$, несет почти эрмитову структуру со структурными объектами

Список литературы

I. Б е к л е м и ш е в Д.В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. В сб.: Геометрия. I963. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., I965, с. I65-2I0.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. "Тр. Моск. мат. о-ва", I953, №2, 275-382.

3. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у И.М. (f,ξ,η,g)--структура на дифференцируемых многообразиях. -В сб. Проблемы геометрии, I975 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., I975, 5-22.

4. П о л я к о в Н.Д., Структуры, индуцированные почти контактной структурой. - Тезисы докладов УI Всес. конф. по совр. пробл. геометр. Вильнюс, I975, I93-I95.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.7 1976

УДК 513.73

Ю.И.П о п о в

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРПОЛОС. I

Продолжено исследование m-мерных вырожденных (как распадающихся, так и нераспадающихся) гиперполос CH_m^r ранга r проективного пространства P_n $(n>m>r)$, которые изучались ранее в работах [1], [2]. В данной работе показано, что аффинные связности без кручения первого и второго рода внутренним инвариантным образом присоединены в окрестности 3-го порядка образующего элемента вырожденной гиперполосы CH_m^r. Рассмотрены аналитические и геометрические признаки эквиаффинных связностей первого и второго рода конических и плоских вырожденных гиперполос CH_m^r [1].

Основным аналитическим аппаратом является аппарат внешних дифференциальных форм Картана, все построения в работе ведутся в инвариантной форме в репере I-го порядка, присоединенном к элементу гиперполосы CH_m^r.

1) Во всей работе используется следующая схема индексов: $p,q,t,s,f,\ldots=1,2,\ldots,r;$ $i,j,k,\ell,\ldots=r+1,\ldots,m;$ $\alpha,\beta,\gamma,\ldots=m+1,\ldots,n-1;$ $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L},\ldots=0,1,2,\ldots,n,$

а также терминология и обозначения, введенные в статьях [1], [2].

2) Исследование проведем только для распадающихся гиперполос CH_m^r [I]. Однако аналогичные выводы и теоремы имеют место и для вырожденных нераспадающихся гиперполос CH_m^r [2].

I. Присоединим к элементу (A,τ) распадающейся гиперполосы $CH_m^r\subset P_n$ подвижной проективный точечный репер $\{A_\mathcal{J}\}$ первого порядка [1]. Точка $A \equiv A_0$ этого репера описывает τ-мерную поверхность V_τ — поверхность центров плоских образующих E_S $(S=m-\tau)$ базисной поверхности V^τ_m гиперполосы CH^τ_m. Семейство главных касательных гиперплоскостей $\tau^n(A)\equiv\tau(A)$ огибает тангенциально вырожденную гиперповерхность V^τ_{n-1}, распадающуюся на две тангенциально вырожденные поверхности V^τ_{n-s-1} и V^τ_m с общей направляющей поверхностью V_τ. Плоские $(n-\tau-1)$-мерные образующие $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V^τ_{n-1} являются характеристиками гиперполосы CH^τ_m, причем $E_S\subset E_{n-\tau-1}$. Точки $\{A_p\}$ этого репера принадлежат касательной τ-плоскости $T_\tau(A)$ поверхности V_τ; точки $\{A_i\}$ — плоскости E_S; точки $\{A_\alpha\}$ — плоской образующей E_{n-m-1} поверхности V^τ_{n-s-1}, где $E_{n-m-1}\subset E_{n-\tau-1}$, а точка A_n занимает произвольное положение, образуя с точками $\{A_0, A_p, A_i, A_\alpha\}$ проективный репер $\{A_\jmath\}$ пространства P_n.

Наряду с точечным подвижным репером $\{A_\jmath\}$ рассмотрим двойственный ему репер $\{\tau^\varkappa\}$, элементы которого $\tau^\varkappa$ являются гранями репера $\{A_\jmath\}$:

$$(A_\jmath, \tau^\varkappa)=\delta^\varkappa_\jmath.$$

В репере 1-го порядка распадающаяся гиперполоса $CH^\tau_m[1]$ задается уравнениями:

$$\omega^n_0=0, \quad (1) \qquad \omega^i_0=0, \quad (2) \qquad \omega^\alpha_0=0, \quad (3)$$

$$\omega^n_i=0, \quad (4) \qquad \omega^n_\alpha=0, \quad (5) \qquad \omega^\alpha_i=0, \quad (6)$$

$$\omega^i_\alpha=0, \quad (7) \qquad \omega^n_p=a_{pq}\omega^q, \ \det\|a_{pq}\|\neq 0, \quad (8)$$

$$\omega^p_i=b^{pq}_i\omega^n_q=b^{ps}_i a_{sq}\omega^q=a^p_{iq}\omega^q, \quad (9)$$

$$\omega^i_p=b^i_{pq}\omega^q=b^i_{ps}a^{sq}\omega^n_q=a^{iq}_p\omega^n_q, \quad (10)$$

$$\omega^p_\alpha=b^{pq}_\alpha\omega^n_q=b^{ps}_\alpha a_{sq}\omega^q=a^p_{\alpha q}\omega^q, \quad (11)$$

$$\omega^\alpha_p=b^\alpha_{pq}\omega^q=b^\alpha_{ps}a^{sq}\omega^n_q=a^{\alpha q}_p\omega^n_q, \quad (12)$$

где ω^p и ω^n_p — базисные формы гиперполосы CH^τ_m, отнесенной соответственно к точечному реперу $\{A_\jmath\}$ или к тангенциальному реперу $\{\tau^\varkappa\}$; a^{pq} — элементы матрицы $\|a^{pq}\|$ обратной матрице $\|a_{pq}\|$: $a_{pq}a^{qt}=\delta^t_p$, а величины $b^i_{pq}, b^{pq}_i, b^{pq}_\alpha, b^\alpha_{pq}$, a_{pq} (основной двухвалентный тензор гиперполосы) симметричны по индексам p, q. Кроме того, коэффициенты уравнений (9)-(12) связаны конечными соотношениями:

$$a^p_{iq}b^\alpha_{pt}=a^p_{it}b^\alpha_{pq}, \quad (13)$$

$$a^p_{\alpha q}b^i_{pt}=a^p_{\alpha t}b^i_{pq}. \quad (14)$$

Уравнения (1)-(3) задают поверхность $V_\tau\subset V^\tau_m$; уравнения (1),(2),(5),(7),(10),(11),(14) определяют тангенциально вырожденную поверхность V^τ_{n-s-1}; уравнения (1),(3),(4),(6),(12),(13) — базисную поверхность $V^\tau_m\subset CH^\tau_m$.

Известно [1],[2], что величины

$$c^i_{pq}=b^i_{pq}-\Lambda^i a_{pq}, \quad (15) \qquad c^\alpha_{pq}=b^\alpha_{pq}-\Lambda^\alpha a_{pq}, \quad (16)$$

$$c^{pq}_i=b^{pq}_i-\Lambda_i a^{pq}, \quad (17) \qquad c^{pq}_\alpha=b^{pq}_\alpha-\Lambda_\alpha a^{pq} \quad (18)$$

являются тензорами 2-го порядка, а величины

$$\Lambda_p=-\tfrac{1}{2}(d_p+\ell_p), \quad \Lambda^p=-\tfrac{1}{2}(d^p+\ell^p) \quad (19)$$

являются квазитензорами 3-го порядка распадающейся гиперполосы CH^τ_m.

Для того, чтобы гиперполоса CH^τ_m была конической [1], необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$c^{pq}_\alpha=c^{pq}_i=0 \quad (20)$$

или

$$a^p_{iq}=a_i\delta^p_q; \quad a^p_{\alpha q}=a_\alpha\delta^p_q, \quad (21)$$

где a_i и a_α квазитензоры 2-го порядка:

$$\nabla_\delta a_i=-a_i\pi^0_0+\pi^0_i; \quad \nabla_\delta a_\alpha=-a_\alpha\pi^0_0+\pi^0_\alpha.$$

Аналогично условия

$$c^{i}_{pq} = c^{\alpha}_{pq} = 0 \tag{22}$$

или

$$a^{iq}_{p} = \lambda^{i} \delta^{q}_{p}\,; \quad a^{\alpha q}_{p} = \lambda^{\alpha} \delta^{q}_{p}\,, \tag{23}$$

где λ^{i} и λ^{α} –квазитензоры 2-го порядка-являются характеристическими признаками плоских распадающихся гиперполос CH^{τ}_{m} [I].

II.Система форм $\theta^{p} = \omega^{p}$ и $\theta^{p}_{s} = \omega^{p}_{s} - \delta^{p}_{s}\omega^{o}_{o} + x^{p}_{sq}\omega^{q}$ определяет первое пространство аффинной связности без кручения ($R^{p}_{s\ell} = 0$), ассоциированное с базисной поверхностью V^{τ}_{m} гиперполосы CH^{τ}_{m} ,если

$$\nabla_{\delta} x^{p}_{s\ell} = - x^{p}_{s\ell}\pi^{o}_{o} + a_{s\ell}\pi^{p}_{n} - 2\delta^{p}_{(s}\pi^{o}_{\ell)}\,. \tag{24}$$

Действительно,непосредственной проверкой убеждаемся, что система форм θ^{p} и θ^{p}_{s} при условии (24) удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева [3]:

$$\mathcal{D}\theta^{p} = \theta^{s}\wedge\theta^{p}_{s}\,; \quad \mathcal{D}\theta^{p}_{q} = \theta^{s}_{q}\wedge\theta^{p}_{s} + R^{p}_{qs\ell}\,\theta^{s}\wedge\theta^{\ell}.$$

Система величин

$$x^{p}_{s\ell} = T^{p}_{s\ell} - a_{s\ell}\Lambda^{p} - 2\delta^{p}_{(s}\Lambda_{\ell)}\,, \tag{25}$$

где $T^{p}_{s\ell} = T^{p}_{\ell s}$ – тензор: $\nabla_{\delta} T^{p}_{s\ell} + \pi^{o}_{o} T^{p}_{s\ell} = 0$, удовлетворяет уравнениям (24).

Аналогично убеждаемся,что система форм $\vartheta_{p} = \omega^{n}_{p}$ и $\vartheta^{q}_{p} = \omega^{q}_{p} - \delta^{q}_{p}\omega^{n}_{n} + x^{q\ell}_{p}\omega^{n}_{\ell}$ определяет второе пространство аффинной связности без кручения ($R^{\ell t}_{p} = 0$), ассоциированное с тангенциально вырожденной гиперповерхностью $V^{\tau}_{n-1} \subset CH^{\tau}_{m}$,если

$$x^{q\ell}_{p} = T^{q\ell}_{p} - a^{q\ell}\Lambda_{p} - 2\delta^{(q}_{p}\Lambda^{\ell)}, \tag{26}$$

где $T^{q\ell}_{p} = T^{\ell q}_{p}$ –тензор: $\nabla_{\delta} T^{q\ell}_{p} - T^{q\ell}_{p}\pi^{n}_{n} = 0$.

Таким образом,первое и второе пространства аффинной связности без кручения внутренним инвариантным образом присоединяются в окрестности 3-го порядка элемента распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m} .

III.Рассмотрим нормализованную в смысле А.П.Нордена распадающуюся гиперполосу CH^{τ}_{m} [1];в репере,адаптированном данной нормализации,имеем:

$$\omega^{o}_{p} = c_{pq}\,\omega^{q}\,, \quad \omega^{p}_{n} = c^{p}_{q}\,\omega^{q} \tag{27}$$

или

$$\omega^{o}_{p} = \lambda^{q}_{p}\,\omega^{n}_{q}\,, \quad \omega^{p}_{n} = \lambda^{pq}\,\omega^{n}_{q}\,, \tag{28}$$

где

$$\lambda^{pq} = c^{p}_{s}\,a^{sq}\,, \quad \lambda^{q}_{p} = c_{ps}\,a^{sq}. \tag{29}$$

Тензоры кривизны пространств аффинной связности имеют тогда соответственно вид:

$$R^{p}_{qt\ell} = 2\left[a_{q[t}c^{p}_{\ell]} + c_{q[t}\delta^{p}_{\ell]} - \delta^{p}_{q}c_{[t\ell]} - a^{p}_{i[t}b^{i}_{\ell]q} - a^{p}_{\alpha[t}b^{\alpha}_{\ell]q}\right], \tag{30}$$

$$R^{qt\ell}_{p} = 2\left[\delta^{q}_{p}\lambda^{[t\ell]} - \lambda^{q[t}\delta^{\ell]}_{p} - a^{q[t}\lambda^{\ell]}_{p} + a^{i[t}_{p}b^{\ell]q}_{i} + a^{\alpha[t}b^{\ell]q}_{\alpha}\right]. \tag{31}$$

В силу условий (20)-(23) из соотношений (30) и (31) следует,что для конических и плоских гиперполос CH^{τ}_{m} тензоры Риччи соответствующих пространств аффинной связности имеют строение:

$$R_{qt} = R^{s}_{qts}\,; \qquad R^{qt} = R^{qts}_{s}\,;$$

$$R_{[qt]} = (\tau+1)\,C_{[qt]} - a_{s[q}C^{s}_{t]}\,, \tag{32}$$

$$R^{[qt]} = -(\tau+1)\,\lambda^{[qt]} + a^{s[q}\lambda^{t]}_{s}\,. \tag{33}$$

Из равенств (32),(33),(29) следуют теоремы:

Т е о р е м а 1. Для конических и плоских гиперполос аффинная связность I-го рода (2-го рода) является эквиаффинной тогда и только тогда,когда соответственно выполняются условия:

$$a_{s[q}C^{s}_{t]} = (\tau+1)\,C_{[qt]}, \tag{34}$$

$$(\tau+1)\,\lambda^{[qt]} = a^{s[q}\lambda^{t]}_{s}. \tag{35}$$

Т е о р е м а 2. Внутренние геометрии первого и второго пространств аффинных связностей, индуцируемых полями инвариантных нормалей распадающейся конической (плоской) гиперполосы CH^{τ}_{m}, являются одновременно эквиаффинными.

Известно [2], что уравнение поля соприкасающихся гиперквадрик распадающейся конической (плоской) гиперполосы имеет вид:

$$a_{pq}x^{p}x^{q} + 2d_{p}x^{p}x^{n} + (T_{0}+\sigma\ell_{0})(x^{n})^{2} = 2x^{0}x^{n}, \tag{36}$$

где σ — любой абсолютный инвариант, ℓ_0, d_p — геометрические объекты 2-го порядка; T_0 — третьего порядка данной гиперполосы CH^{τ}_{m} [2];

$$\nabla d_{p} = -d_{p}\,\omega^{0}_{0} + a_{ps}\,\omega^{s}_{n} - \omega^{0}_{p} + t_{pq}\,\omega^{q}. \tag{37}$$

Полярой прямой AA_n относительно вырожденной гиперквадрики (36), является (τ-1)-мерная плоскость $E_{\tau-1} = [A_p]$, уравнение которой есть

$$d_{p}x^{p} - x^{0} = 0;\quad x^{n}=0,\ x^{\alpha}=0,\ x^{i}=0. \tag{38}$$

Чтобы эта плоскость была нормалью 1-го рода гиперповерхности V^{τ}_{n-1}, т.е. совпадала с плоскостью $\Pi_{n-1} \equiv [M_p = A_p + x^0_p A_0]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$d_{p} \equiv 0. \tag{39}$$

Из уравнений (37), (27), (28), (39) непосредственно следует:

Т е о р е м а 3. Если коническая (плоская) распадающаяся гиперполоса $CH^{\tau}_{m} \subset P_n$ нормализована так, что поля нормалей 1-го и 2-го рода гиперповерхности V^{τ}_{n-1} являются полярно сопряженными относительно поля соприкасающихся (вырожденных) гиперквадрик (36), то соответствующая аффинная связность без кручения 1-го рода (2-го рода) эквиаффинна тогда и только тогда, когда тензор c_{pq} (λ^{pq}) симметрический.

О п р е д е л е н и е. Многообразие $X^{\tau-1}_{\tau}$ нормалей 1-го рода гиперповерхности V^{τ}_{n-1} — многообразие плоскостей $E_{\tau-1} = [A_p]$ — назовем гармоничным данной гиперповерхности V^{τ}_{n-1} [4], если тензор c_{pq}, соответствующий этой нормализации, симметрический, т.е.

$$c_{[pq]} = 0. \tag{40}$$

Многообразие $X^{n-\tau}_{\tau}$ нормалей 2-го рода гиперповерхности V^{τ}_{n-1} — многообразие плоскостей $E_{n-\tau} = [A_0, A_i, A_\alpha, A_n]$ — назовем сопряженным данной гиперповерхности V^{τ}_{n-1} [4], если тензор λ^{pq}, соответствующий этой нормализации, симметрический, т.е.

$$\lambda^{[pq]} = 0. \tag{41}$$

В силу этого определения нормализацию гиперполосы CH^{τ}_{m}, относительно которой выполняется условие (40), назовем гармоничной нормализацией данной гиперполосы; нормализацию гиперполосы CH^{τ}_{m}, относительно которой выполняется условие (41), назовем сопряженной нормализацией данной гиперполосы. В случае выполнения обоих условий (40), (41) нормализацию гиперполосы CH^{τ}_{m} назовем вполне гармоничной.

Т е о р е м а 4. Эквиаффинные связности 1-го и 2-го рода конической (плоской) распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}, индуцируемые гармоничной (сопряженной) нормализацией этой гиперполосы, являются одновременно эквипроективными.

Список литературы

1. П о п о в Ю.И. Мишенина Т.И. Инвариантное оснащение распадающейся (n-2)-мерной гиперполосы CH^{τ}_{n-2} ранга τ многомерного проективного пространства P_n. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.5, Калининград, 1974, 103-130.

2. П о п о в Ю.И. Внутренние оснащения вырожденной m-мерной гиперполосы H^{τ}_{m} ранга τ многомерного проективного пространства.- Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.6, 1975, 102-142.

3. О с т и а н у Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Г.Ф.Лаптева."-Тр.геом.семинара ВИНИТИ", 1973, т.4, 7-70.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности, 1950.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

О.С.Р е д о з у б о в а

ПАРЫ Θ НОРМАЛЬНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

Проективные свойства пар Θ конгруэнций изучались в работе [1].

Целью настоящей работы является изучение метрических свойств пары Θ конгруэнций [4], каждая из которых нормальная.

I. Известно [2], что у нормальной конгруэнции фокальные плоскости перпендикулярны. Пусть вершина O ортонормированного подвижного репера находится в центре прямой нормальной конгруэнции $\{\tau_1\}$, фокусы которой F_1 и F_1', орт $\vec{e}_3$ направлен по прямой, а орты $\vec{e}_a\ (a=1,2)$ являются векторами нормалей фокальных поверхностей конгруэнции (F_1) и (F_1'). Как обычно, деривационные формулы репера $\{O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\}$ имеют вид:

$$d\vec{O}=\omega^i\vec{e}_i\ ,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j\ ,\quad (i,j,k=1,2,3),$$

причем $\omega_i^j=-\omega_j^i$ и формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$\mathcal{D}\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i\ ,\quad \mathcal{D}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j .$$

Касательная плоскость Π_1 поверхности (F_1) в точке F_1 определяется условием:

$$(d\vec{F}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=0,$$

которое приводится к виду:

$$\omega^1=\rho\,\omega_1^3\ , \tag{1}$$

где

$$\vec{OF_1}=-\vec{OF_1'}=\rho\vec{e}_3,$$

$$d\vec{F}_1=(\omega^1-\rho\omega_1^3)\vec{e}_1+(\omega^2-\rho\omega_2^3)\vec{e}_2+(\omega^3+d\rho)\vec{e}_3 .$$

Аналогично касательная плоскость Π_2 фокальной поверхности (F_1') в точке F_1' определится условием

$$\omega^2=-\rho\,\omega_2^3 . \tag{2}$$

Другая конгруэнция, входящая в пару, есть конгруэнция $\{\tau_2\}$ с фокусами F_2, F_2'.

Известно, что парой Θ конгруэнций $\{F_1,F_1'\}$ и $\{F_2,F_2'\}$ [3] называется такая пара, у которой касательные плоскости (F_1), (F_1') проходят соответственно через фокусы F_2, F_2', а касательные плоскости поверхностей (F_2) и (F_2') проходят, соответственно через фокусы F_1' и F_1. Так как $F_2\in\Pi_1, F_2'\in\Pi_2$, то $F_2(0,y,z_1)$, $F_2'(x,0,z_2)$. Тогда

$$d\vec{F}_2=(\omega^1-y\omega_1^2-z_1\omega_1^3)\vec{e}_1+(\omega^2+dy-z_1\omega_2^3)\vec{e}_2+(\omega^3+dz_1+y\omega_2^3)\vec{e}_3 ,$$

$$d\vec{F}_2'=(\omega^1-dx-z_2\omega_1^3)\vec{e}_1+(\omega^2+x\omega_1^2-z_2\omega_2^3)\vec{e}_2+(\omega^3+dz_2+x\omega_1^3)\vec{e}_3 .$$

Условия того, что конгруэнции $\{\tau_a\}$ образуют пару Θ, имеют вид:

$$(d\vec{F}_2,\ \vec{F_2F_2'},\ \vec{F_2F_1'})=0,\quad (d\vec{F}_2',\ \vec{F_2F_2'},\ \vec{F_2'F_1})=0 .$$

Эти условия сводятся к уравнениям

$$(\omega^1-y\omega_1^2-z\omega_1^3)(z_2+\rho)y+(\omega^2+dy-z_1\omega_2^3)(\rho+z_1)x-$$
$$-(\omega^3+dz_1+y\omega_2^3)xy=0, \tag{3}$$

$$(\omega^1+dx-z_2\omega_1^3)(\rho-z_2)y-(\omega^2+x\omega_1^2-z_2\omega_2^3)(z_1-\rho)x+$$
$$+(\omega^3+dz_2+x\omega_1^3)xy=0 . \tag{4}$$

Наконец, условие нормальности конгруэнции $\{\tau_2\}$ есть условие перпендикулярности фокальных плоскостей этой конгруэнции:

$$y^2(z_1^2-\rho^2)+x^2(z_1^2-\rho^2)=-x^2y^2. \tag{5}$$

Можно доказать следующую теорему:

Т е о р е м а I. Пара Θ нормальных конгруэнций существует с произволом четырех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 2. У пары Θ нормальных конгруэнций косинус угла между соответствующими прямыми (F_1F_2') и $(F_1'F_2)$ первой пары дополнительных конгруэнций равен произведению косинусов углов, образованных этими прямыми с прямыми (F_1F_1') конгруэнции $\{\tau_1\}$. Косинус угла между соответствующими прямыми (F_1F_2) и $(F_1'F_2')$ второй пары дополнительных конгруэнций равен произведению косинусов углов, образованных этими прямыми с прямыми (F_2F_2') конгруэнции $\{\tau_2\}$.

Доказательство следует из условия нормальности конгруэнций $\{\tau_a\}$ $(a=1,2)$:

$$[\overrightarrow{F_1F_2},\ \overrightarrow{F_1F_1'}]\cdot[\overrightarrow{F_1'F_2'},\ \overrightarrow{F_1F_1'}]=0,$$

$$[\overrightarrow{F_1F_2'},\ \overrightarrow{F_2F_2'}]\cdot[\overrightarrow{F_1'F_2},\ \overrightarrow{F_2F_2'}]=0,$$

откуда следует, что

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{F_1F_2},\overrightarrow{F_1'F_2'}})=\cos(\widehat{\overrightarrow{F_1F_2},\overrightarrow{F_1F_1'}})\cos(\widehat{\overrightarrow{F_1F_1'},\overrightarrow{F_1'F_2'}}),$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{F_1F_2'},\overrightarrow{F_1'F_2}})=\cos(\widehat{\overrightarrow{F_1F_2'},\overrightarrow{F_2F_2'}})\cos(\widehat{\overrightarrow{F_1'F_2},\overrightarrow{F_2F_2'}}). \qquad (6)$$

Т е о р е м а 3. В касательных плоскостях поверхности, нормальной к прямым конгруэнции $\{\tau_1\}$, не могут лежать прямые нормальной конгруэнции $\{\tau_2\}$, образующей с $\{\tau_1\}$ пару θ.

Заметим, что если отказаться от требования нормальности конгруэнции $\{\tau_2\}$, то в касательных плоскостях некоторой поверхности можно расположить прямые конгруэнции $\{\tau_2\}$ так, чтобы она вместе с конгруэнцией нормалей этой поверхности образовала пару θ. Можно доказать:

Т е о р е м а 4. Пара θ конгруэнций, из которых одна нормальная, а прямые другой лежат в касательных плоскостях некоторой поверхности, нормальной к прямым первой конгруэнции, существует с произволом десяти произвольных постоянных.

2. Пара θ конгруэнций называется равнонаклонной, если прямые одной конгруэнции образуют с фокальными плоскостями второй углы, соответственно конгруэнтные тем углам, которые образуют прямые второй конгруэнции с фокальными плоскостями первой.

Поместим вершину ортонормированного подвижного репера $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ на прямой конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров, вектор $\vec{e}_3$ направим по этой прямой. K_a $(a=1,2)$ – точки

пересечения прямой τ с соответствующими прямыми τ_a пары, причем $\overrightarrow{OK_a}=k_a\vec{e}_3$. Направляющие векторы прямых τ_a:

$$\vec{\eta}_a=\vec{e}_1\cos\alpha_a+\vec{e}_2\sin\alpha_a. \qquad (7)$$

Деривационные формулы репера, как и ранее,

$$d\vec{O}=\omega^i\vec{e}_i\ ,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j\quad (i,j=1,2,3), \qquad (8)$$

причем

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0.$$

Фокусы прямой τ_a есть точки F_a, F_a', причем

$$\overrightarrow{K_aF_a}=\rho_a\vec{\eta}_a\ ,\quad \overrightarrow{K_aF_a'}=\rho_a'\vec{\eta}_a\ . \qquad (9)$$

О п р е д е л е н и е. Парами θ 1-го типа называются такие пары, у которых $|\rho_1|=|\rho_2|$, $|\rho_1'|=|\rho_2'|$, парами 2-го типа – пары, у которых $|\rho_1|=|\rho_2'|$, $|\rho_2|=|\rho_1'|$.

Т е о р е м а 5. Для того, чтобы пара θ конгруэнций была равнонаклонной, необходимо и достаточно, чтобы она была парой 1-го или 2-го типов.

Т е о р е м а 6. Для того, чтобы пары θ конгруэнций были равнонаклонными, необходимо и достаточно, чтобы у пары были равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых и конгруэнтны углы между фокальными плоскостями этих прямых.

Т е о р е м а 7. Для того, чтобы пара θ нормальных конгруэнций была равнонаклонной, необходимо и достаточно, чтобы фокальные расстояния соответствующих прямых были равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть конгруэнции τ_a нормальные. Тогда выполняются условия:

$$\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'=-\frac{(k_1-k_2)^2}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}. \qquad (10)$$

Если фокальные расстояния соответствующих прямых τ_1, τ_2 равны между собой, т.е. $|\rho_1-\rho_1'|=|\rho_2-\rho_2'|$, то учитывая выписанное условие, получим либо $|\rho_1|=|\rho_2|$, $|\rho_1'|=|\rho_2'|$, либо $|\rho_1|=|\rho_2'|$, $|\rho_2|=|\rho_1'|$. Итак, пары θ 1-го или 2-го типов и, следовательно, равнонаклонны.

Если пары Θ нормальных конгруэнций равнонаклонны, то в силу предыдущей теоремы, фокальные расстояния соответствующих прямых будут равны.

Т е о р е м а 8. Не существует пар Θ нормальных конгруэнций, которые пересекаются в центрах прямыми конгруэнции их общих перпендикуляров.

3. Выясним, существует ли пара Θ, образованная нормалями фокальных поверхностей некоторой конгруэнции, которая для такой пары будет конгруэнцией общих перпендикуляров. Воспользуемся сначала ортонормированным подвижным репером, введенным в предыдущем пункте.

В данном случае поверхности (K_a) являются фокальными поверхностями конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров, следовательно, $h_1 - h_2$ – фокальное расстояние конгруэнции $\{\tau\}$. Условиями того, что пара $\{\tau_a\}$ является парой Θ, будут условия:

$$(d\vec{F}_1, \vec{\eta}_1, \overrightarrow{F_1F_2}) = 0, \quad (d\vec{F}_2, \vec{\eta}_2, \overrightarrow{F_2F_1'}) = 0,$$

$$(d\vec{F}_1', \vec{\eta}_1, \overrightarrow{F_1'F_2'}) = 0, \quad (d\vec{F}_2', \vec{\eta}_2, \overrightarrow{F_2'F_1}) = 0.$$

Эти условия можно привести к виду:

$$A_1\varrho - Q_1\tau_2 + \Omega_{13}\frac{k_2\tau_1}{h_1-h_2} = 0, \quad H_1\varrho - Q_1\tau_1 + \Omega_{13}\frac{k_1\tau_2}{h_1-h_2} = 0,$$

$$A_2 g - Q_2\tau_1 - \Omega_{23}\frac{k_1\tau_2}{h_1-h_2} = 0, \quad H_2 g + Q_2\tau_2 + \Omega_{23}\frac{k_2\tau_1}{h_1-h_2} = 0. \tag{11}$$

Здесь использованы обозначения: $\tau_a = \rho_a - \rho_a'$, $g = \rho_1\rho_2 - \rho_1'\rho_2'$,

$$\varrho = \rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2', \quad k_1 = \rho_1\rho_1', \quad k_2 = \rho_2\rho_2', \tag{12}$$

$$H_a = \frac{\omega^3 + dh_a}{h_1 - h_2}, \quad A_a = \frac{\omega_1^2 + d\alpha_a}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad \Omega_a^* = \omega^1\sin\alpha_a - \omega^2\cos\alpha_a, \tag{13}$$

$$\Omega_{a3} = \omega_1^3\cos\alpha_a + \omega_2^3\sin\alpha_a, \quad \Omega_{a3}^* = -\omega_1^3\sin\alpha_a + \omega_2^3\cos\alpha_a, \quad Q_a = \frac{\Omega_a^* + h_a\Omega_{a3}^*}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}. \tag{14}$$

Известно [4], что существуют 4 класса пар Θ:

$$\Theta_1(\varrho \neq 0, g \neq 0), \quad \Theta_2(\varrho = 0, g \neq 0), \quad \Theta_3(\varrho \neq 0, g = 0), \quad \Theta_4(\varrho = 0, g = 0).$$

Конгруэнции $\{\tau_a\}$ являются конгруэнциями нормалей фокальных поверхностей (K_a). Следовательно, направляющие векторы прямых $\{\tau_a\}$ есть $\vec{\eta}_a$ из (7), и они будут коллинеарны векторам нормалей $\vec{n}_a$ поверхностей (K_a).

$$\vec{\eta}_a \parallel \vec{n}_a. \tag{15}$$

Если отнести конгруэнцию к трехграннику [3, с.404], вершина которого находится в центре прямой конгруэнции $\{\tau\}$, вектор $\vec{e}_3$ направлен по прямой τ, а векторы $\vec{e}_a$ лежат в биссекторных плоскостях этой конгруэнции, тогда из [3] следует, что

$$\omega^1 = -\hat{\rho}\,\mathrm{ctg}\,\varphi\cdot\omega_2^3, \quad \omega^2 = -\hat{\rho}\,\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\omega_1^3, \tag{16}$$

где $2\hat{\rho}$ и 2φ – фокальное расстояние и угол между фокальными плоскостями конгруэнции $\{\tau\}$.

Тогда векторы нормалей (K_a) имеют вид: $\vec{n}_a = -\vec{e}_1\sin\varphi \pm \vec{e}_2\cos\varphi$.

Условие (15) можно записать в виде

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \alpha_2 = -\alpha_1. \tag{17}$$

Обозначим $\alpha = \alpha_1$, $h = h_1$. Здесь $h_1 = -h_2 = \hat{\rho}$.

Т е о р е м а 9. Пара Θ конгруэнций, образованная нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, существует с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что не существует пар $\Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$, образованных нормалями фокальных поверхностей (K_a) конгруэнции $\{\tau\}$. В рассматриваемом репере, т.е. с учетом (16)

$$\Theta_1 = \frac{2\hat{\rho}\sin(\varphi-\alpha)}{\sin 2\alpha\cdot\sin 2\varphi}(\omega_1^3\sin\varphi + \omega_2^3\cos\varphi),$$

$$\Theta_2 = \frac{2\hat{\rho}\sin(\varphi-\alpha)}{\sin 2\alpha\cdot\sin 2\varphi}(\omega_1^3\sin\varphi - \omega_2^3\cos\varphi). \tag{18}$$

Среди уравнений, определяющих пары Θ, имеется уравнение

$$Q_1 = \Omega_{13}\frac{\rho_1'\rho_2}{2h}.$$

Сопоставляя его с (18), получим $\hat{\rho} = 0$, чего быть не может.

Аналогично доказывается,что не может быть в рассматриваемом случае ни пар Θ_3 ,ни пар Θ_4 .Пара Θ_1 в данном случае определяется системой уравнений (II),(I6),(I7).Дифференцируя внешним образом уравнения (I6) и учитывая,что $d\varphi = d\alpha$, получим

$$(\Omega_{23} \wedge A_1) + (H_1 \wedge \Omega_{13}) = 0, \quad (\Omega_{13} \wedge A_2) + (H_2 \wedge \Omega_{23}) = 0.$$

Подставляя сюда выражения H_α, A_α из (I3),получим

$$\kappa_1 = \kappa_2 = -\frac{4h^2}{\sin^2 2\alpha}. \qquad (19)$$

Можно показать,что из уравнений (II) независимых будет только два.Их линейные комбинации имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 2A_2 g \tau_1 \tau_2 &= \rho H_1 (\tau_2^2 - \tau_1^2) - g H_2 (\tau_1^2 + \tau_2^2), \\ 2A_1 \rho \tau_1 \tau_2 &= \rho H_1 (\tau_1^2 + \tau_2^2) + g H_2 (\tau_1^2 - \tau_2^2). \end{aligned} \qquad (20)$$

Дифференцируя уравнение (I9),получим

$$\begin{aligned} d\kappa_1 = [\Omega_{13} \{(\tau_1 \cos 2\alpha + \tau_2)\rho + (\tau_1 \cos 2\alpha - \tau_2) g\} + \\ + \Omega_{23} \{(\tau_2 \cos 2\alpha + \tau_1)\rho - (\tau_2 \cos 2\alpha - \tau_1) g\}] \frac{\kappa_1^2}{h g \rho}. \end{aligned} \qquad (21)$$

Внешнее дифференцирование (2I) приводит к тождеству. Исследование системы (I7),(I9),(20),(2I) показывает,что неизвестными формами являются $d\tau_1$, $d\tau_2$, т.е.

$$q = 2, \quad S_1 = 2, \quad S_2 = 0, \quad N = Q = 2.$$

Итак, пара Θ конгруэнций,образованных нормалями фокальных поверхностей некоторой конгруэнции,существует с произволом двух функций одного аргумента.

Т е о р е м а I0. Пара Θ конгруэнций,образованная нормалями фокальных поверхностей некоторой конгруэнции,симметрическая,и эта конгруэнция является конгруэнцией B .

Д о к а з а т е л ь с т в о.Из уравнений (I7) следует симметричность пары.Из уравнений (I9) следует,что $\kappa_1 = \kappa_2$ или $\rho_1 \rho_1' = \rho_2 \rho_2'$.Но ρ_a, ρ_a' есть главные радиусы кривизны поверхностей (K_α),следовательно,их полные кривизны равны между собой в точках K_1, K_2 .Из условия (I9) следует, что полные кривизны в соответствующих точках равны величине

$$-\frac{\sin^2 2\varphi}{(2\rho)^2} = -\frac{1}{d^2},$$

d -расстояние между граничными точками конгруэнции $\{\tau\}$,

$$K = K_2 = -\frac{1}{d^2}.$$

Итак,полные кривизны поверхностей (K_α) равны между собой и равны обратной величине квадрата расстояния между граничными точками конгруэнции $\{\tau\}$,взятой с противоположным знаком.Известно [2,с.90] ,что свойство

$$K_1 \cdot K_2 = \frac{1}{d^4}$$

является характеристическим для конгруэнции W .Кроме того,конгруэнция W с равной отрицательной кривизной фокальных поверхностей в точках одной прямой есть конгруэнция B [2,с.94] .Итак,конгруэнция $\{\tau\}$ входит в число конгруэнций B .

Список литературы

I.К а р а п е т я н С.Е. Конфигурация Θ Попова."Сб. научн.трудов Арм.пед.ин-та",I955,5.

2.Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций. М.-Л.,I950.

3.Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций.М.,I956.

4.Р е д о з у б о в а О.С. О метрических свойствах пар Θ конгруэнций.- Дифференциальная геометрия многообразий фигур ,Вып.6,Калининград,I975.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Г.Л.Свешникова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИИ КОНИК В P_3

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции $\mathcal{Y}$ кривых второго порядка C (коник), когда характеристическая точка A_3 плоскости коники инцидентна конике. При этом предполагается, что конгруэнция $\mathcal{Y}$ имеет, по крайней мере, две невырождающиеся фокальные поверхности.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{Y}$ к реперу $R=\{A_\alpha\}, \alpha,\beta...=1,2,3,4$. Уравнения инфинитезимального перемещения этого репера имеют вид $dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta$, где линейные дифференциальные формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$ и условию $\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0$.

Вершины A_1, A_2 репера R совмещаются с фокальными точками коники C, описывающими невырождающиеся поверхности. Пусть p есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i), $i,j,k...=1,2$, R_i – точка пересечения прямой p с касательной к линии $\omega_j^4=0$ на поверхности (A_i), Q – точка пересечения прямой p с плоскостью коники. Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Вершина A_4 репера R помещается в четвертую гармоническую к точке Q относительно точек R_1 и R_2.

Уравнения коники C относительно данного репера при соответствующей нормировке вершин репера записываются в виде

$$x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3=0,\quad x^4=0. \tag{1}$$

Конгруэнция $\mathcal{Y}$ определяется системой уравнений Пфаффа

$$\begin{gathered}\omega_i^j+\omega_i^3=0,\quad \omega_1^3=\Gamma_1^{3k}\omega_k,\quad \omega_2^3=\Gamma_2^{31}\omega_1-\Gamma_1^{31}\omega_2,\\ \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^4=0,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\\ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\quad \omega_i^i-\omega_3^3=b_i^k\omega_k,\end{gathered} \tag{2}$$

конечными соотношениями $\Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21}$,

$$(\Gamma_3^{ii}-b_i^i)\Gamma_1^{31}+(-1)^i(b_i^j\Gamma_j^{3i}+\Gamma_i^{3j}\Gamma_j^{3i}-\Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{3i}+\Gamma_4^{3i}+\Gamma_4^{ii}+(\Gamma_1^{31})^2)=0 \tag{3}$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (2),(3), причем $\omega_i^4=\omega_i$, $\omega_1\wedge\omega_2\neq0$. Анализируя систему, убеждаемся, что конгруэнция $\mathcal{Y}$ существует с произволом пяти функций двух аргументов. Обозначим буквой K_i точку пересечения касательной к конике в точке A_i с прямой A_jA_3, K_i^* – четвертую гармоническую к точке K_i относительно A_j и A_3.

Определение. Конгруэнцией $\mathcal{Y}_0$ называется конгруэнция $\mathcal{Y}$, для которой выполняются следующие условия: 1/касательная к линии $\omega_j=0$ на поверхности (A_i) инцидентна точке A_4; 2/касательные плоскости к поверхностям (K_i) и (K_i^*) содержат прямую A_iA_4.

Теорема. Конгруэнция $\mathcal{Y}_0$ существует и определяется вполне интегрируемой системой уравнений.

Доказательство. В силу условий, определяющих конгруэнцию $\mathcal{Y}_0$, системы уравнений Пфаффа (2) и соотношений (3) получаем следующие равенства.

$$\begin{gathered}\Gamma_4^{ii}=\Gamma_4^{ij}=\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31},\quad \Gamma_4^{3i}=-\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31},\quad \Gamma_1^{31}=0,\\ \Gamma_3^{12}-\Gamma_3^{21}=0,\quad \Gamma_1^{32}=\Gamma_2^{31}=a.\end{gathered} \tag{4}$$

Так как поверхности (A_1) и (A_2) не вырождаются в линии, то $a\neq0$. Система пфаффовых уравнений (2) с учетом равенств (4) принимает вид:

$$\omega_i^j + \omega_i^3 = 0, \quad \omega_i^3 = a\,\omega_j, \quad \omega_i^3 - \omega_3^i = 0,$$

$$\omega_4^1 = a^2(\omega_1 + \omega_2), \quad \omega_4^2 = \omega_4^1, \quad \omega_4^3 = -\omega_4^1, \qquad (5)$$

$$\omega_3^4 = 0, \quad \omega_i^i - \omega_3^3 = 0.$$

Осуществляя частичное продолжение системы уравнений (5), получаем уравнение Пфаффа

$$da + a(\omega_1^1 - \omega_4^4) = 0. \qquad (6)$$

Система уравнений (5),(6), определяющая конгруэнции $\mathcal{G}_0$, вполне интегрируема.

Т е о р е м а. Конгруэнция $\mathcal{G}_0$ обладает следующими геометрическими свойствами: I/огибающие поверхности (P_i) граней $(A_j A_3 A_4)$ вырождаются в точки; 2/поверхности (A_i), (P_i^*) являются плоскостями; 3/фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят точки A_1 и A_2; 4/точки пересечения касательных к линиям $\omega_1 - \omega_2 = 0$, $\omega_1 + \omega_2 = 0$ на поверхности (A_i) гармонически делят точки A_4 и K_i; 5/вершина A_3 является фокальной точкой коники C, дана геометрическая характеристика всех остальных фокальных точек коники C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Текущая точка P_i огибающей поверхности грани $(A_j A_3 A_4)$ определяется формулой

$$P_i = A_4 + aK_i. \qquad (7)$$

Дифференцируя равенство (7), убеждаемся, что

$$dP_i = P_i\,(\omega_4^4 + a\,\omega_j),$$

т.е. точка P_i неподвижна.

2/Уравнения для определения асимптотических линий на поверхностях (A_i) и (P_i^*), где $P_i^* = A_4 - aK_i$, удовлетворяются тождественно, следовательно, поверхности (A_i), (P_i^*) являются плоскостями, причем плоскости (A_i) совпадают с плоскостями $(A_i A_4 K_i)$.

3/Фокусами луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) являются точки $E = A_1 + A_2$, $E^* = A_1 - A_2$.

4/Касательные к линиям $\omega_1 - \omega_2 = 0$, $\omega_1 + \omega_2 = 0$ на поверхности (A_i) определяются из условий

$$(dA_i)_{\omega_1 - \omega_2 = 0} = \omega_i^i A_i + P_i^* \omega_1,$$

$$(dA_i)_{\omega_1 + \omega_2 = 0} = \omega_i^i A_i + P_i\,\omega_1.$$

Эти касательные пересекают прямую A_4K_i в точках P_i^*, P_i, но

$$(A_4K_i\,;\ P_iP_i^*) = -1.$$

5/Из системы уравнений [I]

$$x^3(-x^3(\omega_1 + \omega_2) + 2x^1\omega_2 + 2x^2\omega_1) = 0,$$
$$x^1\omega_1 + x^2\omega_2 = 0,$$
$$x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 = 0, \quad x^4 = 0$$

находим все шесть фокальных точек коники. Ими являются, кроме точек A_i, A_3, точки $\mathcal{F}_i = A_i - 2K_i^*$ пересечения прямой $A_iK_i^*$ с коникой и точка $\mathcal{F}_3 = 2E - A_3$ пересечения прямой EA_3 с коникой. Наиболее полно изучена поверхность (A_3) – огибающая поверхность плоскостей коник C конгруэнции $\mathcal{G}_0$.

Получено каноническое представление поверхности (A_3) в виде

$$az = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + [4],$$

где $x = \frac{x^1}{x^4}$, $y = \frac{x^2}{x^4}$, $z = \frac{x^3}{x^4}$, [4] – слагаемые, порядок малости которых не ниже 4.

Трехпараметрическое семейство соприкасающихся квадрик к поверхности (A_3) имеет вид:

$$2(xy - az) + 2a_{14}xz + 2a_{24}yz + a_{44}z^2 = 0.$$

Из этого семейства выделена квадрика Ли

$$2x^1x^2 - 2a\,x^3x^4 - a^2(x^4)^2 = 0.$$

Через каждую точку поверхности (A_3) проходят две асимптотические линии $\omega_1\omega_2=0$. Найдены соприкасающиеся линейные комплексы этих асимптотических линий, выделены специальные комплексы и их оси (директрисы Вильчинского). Оказывается, что директрисами Вильчинского, соответствующими данной точке A_3 поверхности (A_3), являются ребра A_3A_4 и A_1A_2 репера R.

Главными квадриками [2] поверхности (A_3), т.е. квадриками, которые имеют в данной точке соприкосновение четвертого порядка с каждой из асимптотических линий, проходящих через данную точку, являются квадрики

$$2x^1x^2 - 3a x^3x^4 + a_{44}(x^4)^2 = 0.$$

Квадрики

$$a_{44}z^2 + 2(xy+z) = 0$$

образуют пучок квадрик Дарбу. Первое ребро Грина и первая ось Чеха совпадают с первой директрисой Вильчинского A_3A_4. Следовательно, поверхность (A_3) является коинцидентной.

При пересечении квадрики Ли координатной плоскостью $x^3=0$ получается коника C^*, уравнения которой имеют вид:

$$2x^1x^2 - a^2(x^4)^2 = 0,$$
$$x^3 = 0.$$

Итак, имеем конгруэнцию (C^*) коник C^*, ассоциированную с конгруэнцией $\mathcal{G}_0$. Фокальными точками коники C^*, кроме точек A_1 и A_2, являются точки

$$\Phi_i = aE + (-1)^j\sqrt{2}A_4, \quad \Phi_i' = aS_i + 2A_4,$$

причем точки Φ_i есть точки пересечения прямой EA_4 с коникой C^*, а точки Φ_i' - это точки пересечения прямой S_iA_4 с коникой C^*, где $S_i=2A_i+A_j$ есть точка пересечения прямых $\mathcal{F}_j K_i$ и A_1A_2.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.-"Тр.Томского ун-та", вып.3, 1963, т.168, с.43-53.

2. Щ е р б а к о в Р.Н. Курс аффинной и проективной геометрии. Томск, 1960.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Е.В.С к р ы д л о в а

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ВТОРОГО РОДА, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРОЙ КОНИК

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные конгруэнции (двупараметрические семейства) второго рода [1], порожденные парой $\{C_1,C_2\}$ коник C_1 и C_2. Такие конгруэнции характеризуются тем, что размерность семейства (C_1,C_2) пар $\{C_1,C_2\}$ больше размерностей каждого из семейств (C_1) и (C_2) коник C_1 и C_2 соответственно, т.е.

$$\dim(C_1,C_2) > \dim(C_1), \quad \dim(C_1,C_2) > \dim(C_2). \tag{1}$$

В силу неравенств (1), имеем:

$$\dim(C_1) = \dim(C_2) = 1. \tag{2}$$

При этом каждой конике C_i семейства (C_i) $(i,j=1,2;\ i\neq j)$ соответствуют все коники C_j семейства (C_j).

Построен геометрически фиксированный репер вырожденных конгруэнций (C_1,C_2). Исследован класс, в котором все коники семейств (C_i) инцидентны инвариантным квадрикам Q_i. Рассмотрен подкласс, в котором квадрики Q_1 и Q_2 пересекаются по четырехкратной прямой.

§1. Система пфаффовых уравнений вырожденных конгруэнций второго рода (C_1,C_2)

Отнесем пространство P_3 к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta. \tag{1.1}$$

Формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0 . \qquad (1.3)$$

Пусть ℓ -линия пересечения плоскостей коник C_1 и C_2. Совместим вершину A_i репера R с одной из точек пересечения прямой ℓ с коникой C_j, вершину A_{i+2} поместим в полюс прямой ℓ относительно коники C_i. Уравнения коник C_1 и C_2 и система уравнений Пфаффа вырожденных конгруэнций (C_1, C_2) относительно репера R записываются в виде:

$$(x^3)^2 - (a_1 x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0 , \quad x^4 = 0 ; \qquad (1.4)$$

$$(x^4)^2 - (a_2 x^2)^2 - 2x^1x^2 = 0 , \quad x^3 = 0 ; \qquad (1.5)$$

$$\omega_1^2 = \Gamma_1^2\omega_2, \quad \omega_2^1 = \Gamma_2^1\omega_1, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^3\omega_2, \quad \omega_i^4 = \Gamma_i^4\omega_1,$$

$$\omega_3^1 = \Gamma_3^1\omega_1 + \omega_2^3 , \quad \omega_3^2 = \Gamma_3^2\omega_1 + \omega_1^3 - (a_1)^2\omega_2^3 ,$$

$$\omega_4^1 = \Gamma_4^1\omega_2 + \omega_2^4 - (a_2)^2\omega_1^4 , \quad \omega_4^2 = \Gamma_4^2\omega_2 + \omega_1^4 , \qquad (1.6)$$

$$a_1\Theta_1 = A_1\omega_1 + \omega_1^2 , \quad a_2\Theta_2 = A_2\omega_2 + \omega_2^1 ,$$

$$\Omega_1 = p\,\omega_1 , \quad \Omega_2 = q\,\omega_2 ,$$

где

$$\Theta_i = da_i - a_i(\omega_i^i - \omega_{i+2}^{i+2}), \quad \Omega_i = -\omega_i^i - \omega_j^j + 2\omega_{i+2}^{i+2} , \qquad (1.7)$$

и формы

$$\omega_1 \stackrel{def}{=} \omega_3^4 , \quad \omega_2 \stackrel{def}{=} \omega_4^3 \qquad (1.8)$$

приняты в качестве базисных.

Произвол существования вырожденных конгруэнций второго рода $(C_1 C_2)$ -четырнадцать функций одного аргумента.

§2. Вырожденные конгруэнции второго рода $(C_1, C_2)^Q$

О п р е д е л е н и е 1. Вырожденные конгруэнции второго рода (C_1, C_2) будем называть конгруэнциями $(C_1, C_2)^Q$, если для них выполняются следующие условия: 1/все коники C_i семейства (C_i) принадлежат инвариантной квадрике Q_i ; 2/прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены относительно квадрик Q_1 и Q_2.

Уравнения квадрик Q_1 и Q_2, удовлетворяющих условиям определения 1, имеют вид:

$$Q_1 \equiv (x^3)^2 - (a_1x^1)^2 - 2x^1x^2 + a_{44}(x^4)^2 + 2a_{34}x^3x^4 = 0, \qquad (2.1)$$

$$Q_2 \equiv (x^4)^2 - (a_2x^2)^2 - 2x^1x^2 + b_{33}(x^3)^2 + 2b_{34}x^3x^4 = 0 . \qquad (2.2)$$

В силу инвариантности квадрик имеем

$$\omega_1^2 = 0 , \quad \omega_2^1 = 0 ; \qquad (2.3)$$

$$\Omega_1 = 2a_{34}\omega_1 , \quad \Omega_2 = 2b_{34}\omega_2 ; \qquad (2.4)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_3^1 &= a_{34}\omega_2^4 + \omega_2^3 , \quad \omega_3^2 = b_{33}\omega_1^3 + b_{34}\omega_1^4 , \\ \omega_4^1 &= a_{44}\omega_2^4 + a_{34}\omega_2^3 , \quad \omega_4^2 = b_{34}\omega_1^3 + \omega_1^4 ; \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

$$a_1\Theta_1 + (a_1)^2a_{34}\omega_1 = 0 , \quad a_2\Theta_2 + (a_2)^2b_{34}\omega_2 = 0 ; \qquad (2.6)$$

$$\left.\begin{aligned} &(a_1)^2\omega_3^1 + \omega_3^2 - a_{34}\omega_1^4 - \omega_1^3 = 0 ; \ (a_2)^2\omega_4^2 + \omega_4^1 - b_{34}\omega_2^3 - \omega_2^4 = 0 ; \\ &(a_1)^2\omega_4^1 + \omega_4^2 - a_{44}\omega_1^4 - a_{34}\omega_1^3 = 0 ; \ (a_2)^2\omega_3^2 + \omega_3^1 - b_{33}\omega_2^3 - b_{34}\omega_2^4 = 0 ; \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

$$\left.\begin{aligned} &da_{34} + a_{34}(\omega_3^3 - \omega_4^4) - \omega_2 - a_{44}\omega_1 + 2(a_{34})^2\omega_1 = 0 , \\ &db_{34} + b_{34}(\omega_4^4 - \omega_3^3) - b_{33}\omega_2 - \omega_1 + 2(b_{34})^2\omega_2 = 0 , \\ &\tfrac{1}{2}da_{44} + a_{44}(\omega_3^3 - \omega_4^4) - a_{34}\omega_2 + a_{34}a_{44}\omega_1 = 0 , \\ &\tfrac{1}{2}db_{33} + b_{33}(\omega_4^4 - \omega_3^3) - b_{34}\omega_1 + b_{33}b_{34}\omega_2 = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

Подсистема уравнений (2.7) приводит к следующим соотношениям:

$$(a_1)^2 a_{34} \Gamma^4_2 - (a_{34} - b_{34}) \Gamma^4_1 = 0, \qquad (a)$$

$$(a_1)^2 \Gamma^3_2 + (b_{33} - 1) \Gamma^3_1 = 0, \qquad (b)$$

$$(a_1)^2 a_{44} \Gamma^4_2 + (1 - a_{44}) \Gamma^4_1 = 0, \qquad (c)$$

$$(a_1)^2 a_{34} \Gamma^3_2 + (b_{34} - a_{34}) \Gamma^3_1 = 0, \qquad (d)$$

$$(a_2)^2 \Gamma^4_1 + (a_{44} - 1) \Gamma^4_2 = 0, \qquad (e)$$

$$(a_2)^2 b_{34} \Gamma^3_1 + (a_{34} - b_{34}) \Gamma^3_2 = 0, \qquad (f)$$

$$(a_2)^2 b_{34} \Gamma^4_1 + (a_{34} - b_{34}) \Gamma^4_2 = 0, \qquad (g)$$

$$(a_2)^2 b_{33} \Gamma^3_1 + (1 - b_{33}) \Gamma^3_2 = 0 . \qquad (h)$$

Из равенств (b),(d) и (e),(g) получим

$$\Gamma^3_1 (b_{34} - b_{33} a_{34}) = 0, \quad \Gamma^4_2 (a_{34} - a_{44} b_{34}) = 0. \qquad (2.9)$$

В дальнейшем целесообразно рассматривать вырожденные конгруэнции $(C_1 C_2)^Q$ отдельно в каждом из следующих четырех случаев:

$$\text{I}: \ \Gamma^3_1 = 0, \Gamma^4_2 = 0; \qquad \text{II}: \ \Gamma^3_1 \Gamma^4_2 \neq 0;$$

$$\text{III}: \ \Gamma^3_1 = 0, \Gamma^4_2 \neq 0; \qquad \text{IV}: \ \Gamma^3_1 \neq 0, \Gamma^4_2 = 0,$$

причем случаи III и IУ приводят к проективно эквивалентным классам конгруэнций $(C_1, C_2)^Q$, а случай I является тривиальным, так как прямые $A_1 A_2$ и $A_3 A_4$ для него неподвижны.

Более подробно рассмотрим случай III. Для него будем иметь

$$\Gamma^3_1 = 0, \ \Gamma^4_1 = 0, \ \Gamma^3_2 \Gamma^4_2 \neq 0, \qquad (2.10)$$

тогда из соотношений (a)-(h)

$$a_1 = 0, \ a_{44} = b_{33} = 1, \ a_{34} = b_{34} \stackrel{def}{=} \lambda. \qquad (2.11)$$

Система уравнений (2.8) приводит к равенству:

$$d\lambda + (\lambda^2 - 1)(\omega^1 + \omega^2) = 0 . \qquad (2.12)$$

Система уравнений Пфаффа вырожденных конгруэнций $(C_1,C_2)^Q$ и уравнения квадрик Q_1 и Q_2 окончательно принимают вид:

$$\begin{gathered} \omega^i_i = 0, \ \omega^3_1 = 0, \ \omega^4_1 = 0, \ \omega^3_2 = \Gamma^3_2 \omega_2, \ \omega^4_2 = \Gamma^4_2 \omega_1, \\ \omega^1_3 = \lambda \omega^4_2 + \omega^3_2, \ \omega^2_3 = 0, \ \omega^1_4 = \omega^4_2 + \lambda \omega^3_2, \ \omega^2_4 = 0, \\ a_2 \theta_2 + (a_2)^2 \lambda \omega_2 = 0, \ \Omega_1 = 2\lambda\omega_1, \ \Omega_2 = 2\lambda\omega_2, \\ d\lambda + (\lambda^2 - 1)(\omega_1 + \omega_2) = 0; \end{gathered} \qquad (2.13)$$

$$\theta_1 \equiv (x^3)^2 - 2x^1x^2 + 2\lambda x^3 x^4 + (x^4)^2 = 0; \qquad (2.14)$$

$$Q_2 \equiv (x^4)^2 - 2x^1x^2 + 2\lambda x^3 x^4 + (x^3)^2 - (a_2 x^2)^2 = 0. \qquad (2.15)$$

Произвол существования вырожденных конгруэнций $(C_1, C_2)^Q$ этого типа-две функции одного аргумента. Линия пересечения квадрик Q_1 и Q_2 задается уравнениями

$$(x^3)^2 + (x^4)^2 + 2\lambda x^3 x^4 = 0, \quad (x^2)^2 = 0, \qquad (2.16)$$

т.е. является парой сдвоенных прямых, проходящих через точку A_1 и лежащих в плоскости $(A_1 A_3 A_4)$.

Т е о р е м а I. 1/Точка A_1 и плоскость $(A_1 A_3 A_4)$ неподвижны. 2/Прямолинейные конгруэнции $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$ образуют двусторонне расслояемую пару.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Так как

$$dA_1 = \omega^1_1 A_1, \quad d(A_1 A_3 A_4) = (\omega^1_1 + \omega^3_3 + \omega^4_4)(A_1 A_3 A_4),$$

то точка A_1 и плоскость $(A_1 A_3 A_4)$ неподвижны.

2/Условия двустороннего расслоения прямолинейных конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$ в силу системы (2.13) удовлетворяются тождественно.

В частном случае, когда

$$\lambda^2 - 1 = 0, \qquad (2.17)$$

квадрики Q_1 и Q_2 являются конусами с общей вершиной $K=\lambda A_3-A_4$ и общей прямолинейной образующей A_1K.

Семейство прямых A_3A_4 в этом случае является однопараметрическим, так как

$$d[A_3A_4]=(\omega_3^3+\omega_4^4)[A_3A_4]+\omega_3^1([A_1A_4]-\lambda[A_1A_3]).$$

Рассмотрим плоскость $(A_1A_2K^*)$, где K^* вместе с K гармонически разделяет вершины A_3 и A_4. Эта плоскость описывает двупараметрическое семейство и пересекает конусы Q_1 и Q_2 соответственно по коникам

$$C^*:\begin{cases} 2(x^4)^2-x^1x^2=0, \\ x^3-\lambda x^4=0; \end{cases} \qquad C^{**}:\begin{cases} 4(x^4)^2-2x^1x^2-(a_2x^2)^2=0, \\ x^3-\lambda x^4=0, \end{cases}$$

каждая из которых описывает конгруэнцию.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции (C^*) и (C^{**}) коник C^* и C^{**} соответственно расслояемы к однопараметрическому семейству прямых A_3A_4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия расслоения от конгруэнций (C^*) и (C^{**}) к линейчатому многообразию (A_3A_4) удовлетворяются тождественно, что и доказывает теорему.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Е.П. С о п и н а

КОНГРУЭНЦИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРКВАДРИК В П-МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В п-мерном аффинном пространстве A_n рассмотрены $(n-1)$-мерные многообразия (конгруэнции) V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик Q. Исследованы поля некоторых геометрических объектов на V_{n-1}. Для конгруэнций эллипсоидов в A_3, имеющих фокальную конгруэнцию коник с центром в центре эллипсоидов, получено безынтегральное представление.

§1. Поля геометрических объектов на многообразии V_{n-1}

Отнесем конгруэнцию V_{n-1} к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n\}$, где A -центр гиперквадрики Q Деривационные формулы репера R запишутся в виде

$$d\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha,\quad d\bar{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{e}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,\dots,n), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha,\quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta. \tag{1.2}$$

Уравнение гиперквадрики Q запишется в виде

$$F\equiv a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta-1=0, \tag{1.3}$$

$$\det\|a_{\alpha\beta}\|\neq 0,\quad a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}. \tag{1.4}$$

Исключая из рассмотрения конгруэнции V_{n-1} с вырождающейся гиперповерхностью центров (A), примем ω^i ($i,j,k=1,2,\dots,n-1$) за независимые первичные формы конгруэнции. Система уравнений Пфаффа конгруэнции V_{n-1} принимает вид:

$$da_{\alpha\beta}-a_{\gamma\beta}\omega^{\gamma}_{\alpha}-a_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}=b_{\alpha\beta,i}\,\omega^{i}, \quad \omega^{n}=c_i\,\omega^{i}. \qquad (1.5)$$

Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, а символом π^{β}_{α} значения форм ω^{β}_{α} при фиксированных первичных параметрах. Продолжая систему (I.5), находим:

$$\delta a_{\alpha\beta}=a_{\gamma\beta}\pi^{\gamma}_{\alpha}+a_{\alpha\gamma}\pi^{\gamma}_{\beta}, \quad \delta c_i=c_k\pi^{k}+c_k c_i\pi^{k}_{n}-c_i\pi^{n}_{n}-\pi^{n}_{i},$$

$$\delta b_{\alpha\beta,i}=b_{\gamma\beta,i}\pi^{\gamma}_{\alpha}+b_{\alpha\gamma,i}\pi^{\gamma}_{\beta}+b_{\alpha\beta,k}(\pi^{k}_{i}+c_i\pi^{k}_{n}). \qquad (1.6)$$

Фундаментальный объект $\Gamma=\{a_{\alpha\beta}; b_{\alpha\beta,i}; c_i\}$ является основным объектом конгруэнции V_{n-1} ([I], стр.325). Подобъект $\{a_{\alpha\beta}\}$ определяет гиперквадрику Q, а подобъект $\{c_i\}$ -касательную гиперплоскость к гиперповерхности центров. Действительно,

$$d\bar{A}=\omega^{i}(\bar{e}_i+c_i\bar{e}_n). \qquad (1.7)$$

Из (I.6) следует, что совокупность компонент $b_{\alpha\beta,i}$ не образует самостоятельного геометрического объекта, но тождественное равенство нулю всех компонент $b_{\alpha\beta,i}$ имеет инвариантный смысл.

Рассмотрим одномерные инвариантные алгебраические многообразия $M^{(\alpha)}_{1}$, определяемые соответственно уравнениями

$$\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2=\dots=\mathcal{F}_{n-1}=0, \qquad (1.8)$$

$$\Phi_1=\Phi_2=\dots=\Phi_{n-1}=0, \qquad (1.9)$$

$$\Psi_1=\Psi_2=\dots=\Psi_{n-1}=0, \qquad (1.10)$$

где

$$\Phi_i=b_{\alpha\beta,i}x^{\alpha}x^{\beta}, \quad \Psi_i=(a_{\alpha i}+a_{\alpha n}c_i)x^{\alpha}, \quad \mathcal{F}_i=\Phi_i-2\Psi_i. \qquad (1.11)$$

Многообразие $M^{(1)}_{1}$ является характеристическим многообразием ранга 1. конгруэнции V_{n-1} [2, с. II7], многообразие $M^{(3)}_{1}$ – это диаметр гиперквадрики Q, сопряженный относительно Q касательной гиперплоскости к гиперповерхности центров (A), а многообразие $M^{(2)}_{1}$ принадлежит пучку с базисными кривыми $M^{(1)}_{1}$ и $M^{(3)}_{1}$. На конгруэнции V_{n-1} определяются поля геометрических объектов $\{\hat{h}^{\alpha}_{\varepsilon}\}$ и $\{b_i, c_j\}$, где

$$\hat{h}^{\alpha}_{\varepsilon}=\frac{\varepsilon h^{\alpha}}{h}, \quad h^{\alpha}=a^{\alpha n}-a^{\alpha i}c_i, \quad h=\sqrt{a_{\alpha\beta}h^{\alpha}h^{\beta}}, \quad \varepsilon^2=1, \qquad (1.12)$$

$$b_i=a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta,i}, \quad a^{\beta\gamma}a_{\gamma\alpha}=\delta^{\beta}_{\alpha}. \qquad (1.13)$$

Имеем

$$\delta h^{\alpha}_{\varepsilon}=-h^{\beta}_{\varepsilon}\pi^{\alpha}_{\beta}, \quad \delta b_i=b_k\pi^{k}_{i}+b_k c_i\pi^{k}_{n}. \qquad (1.14)$$

Тензоры $\{h^{\alpha}_{1}\}$ и $\{h^{\alpha}_{-1}\}$ определяют инвариантные точки

$$\bar{M}_1=\bar{A}+h^{\alpha}_{1}\bar{e}_{\alpha}, \quad \bar{M}_{-1}=\bar{A}+h^{\alpha}_{-1}\bar{e}_{\alpha}, \qquad (1.15)$$

являющиеся точками пересечения диаметра $M^{(3)}_{1}$ с квадрикой Q.

Геометрический объект $\{b_i, c_j\}$ определяет инвариантную (n-2)-мерную плоскость

$$b_i x^{i}=0, \quad x^{n}-c_i x^{i}=0, \qquad (1.16)$$

лежащую в касательной гиперплоскости к гиперповерхности и проходящую через центр A гиперквадрики Q.

Определение I. Направление

$$\omega^{i}=\lambda^{i}\theta, \quad \lambda^{n}=c_i\lambda^{i}, \qquad (1.17)$$

где θ –параметрическая форма [3, с.4I], называется аффинно-главным направлением на поверхности (A) конгруэнции V_{n-1}, если диаметр $x^{\alpha}=\lambda^{\alpha}t$ сопряжен относительно гиперквадрики Q характеристике касательной гиперплоскости к (A) соответствующей этому направлению.

Теорема I.I. На гиперповерхности центров (A) существует в общем случае 2^{n-1} аффинно-главных направлений.

Доказательство. Характеристика касательной гиперплоскости к (A) вдоль (I.17) определяется уравнениями

$$x^{n}-c_i x^{i}=0, \quad c_{ij}x^{i}=0.$$

Из определения 1 следует, что она должна совпадать с (n-2)-мерной плоскостью

$$a_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}x^{\beta}=0,$$

сопряженной диаметру $x^{\alpha}=\lambda^{\alpha}t$ относительно Q. Условия совпадения этих (n-2)-мерных плоскостей приводят к системе n-2 квадратичных уравнений относительно λ^i, определяющей в общем случае 2^{n-1} аффинно-главных направления на гиперповерхности центров, которые удобно использовать для построения канонического репера конгруэнции центральных квадрик в A_3.

§2. Конгруэнции эллипсоидов в A_3 с фокальной конгруэнцией эллипсов

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией V_2° называется конгруэнция эллипсоидов в A_3, обладающая следующими свойствами: 1/ каждый эллипсоид $Q \in V_2^\circ$ содержит в качестве фокального многообразия эллипс C с центром в центре эллипсоида Q; 2/ плоскости эллипсов C образуют двупараметрическое семейство, причем характеристическая точка M плоскости эллипса не совпадает с центром квадрики Q.

Т е о р е м а 2.1. Конгруэнции V_2° существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем конгруэнцию V_2° к каноническому реперу $R=\{A;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где A - центр эллипсоида, вектор $\bar{e}_1$ направлен по прямой AM, вектор $\bar{e}_2$ расположен в плоскости коники C и сопряжен относительно C вектору $\bar{e}_1$, а вектор $\bar{e}_3$ направлен по диаметру эллипсоида Q, сопряженному плоскости коники C, причем концы векторов $\bar{e}_\alpha$ $(\alpha=1,2,3)$ расположены на эллипсоиде Q. Уравнения эллипсоида Q и эллипса C запишутся, соответственно, в виде

$$F \equiv (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1=0, \tag{2.1}$$

$$f \equiv (x^1)^2+(x^2)^2-1=0, \quad x^3=0. \tag{2.2}$$

Так как каждая точка эллипса C является фокальной точкой эллипсоида Q, то

$$dF\big|_{x^3=0}=\mu f.$$

В силу (2.3) система Пфаффовых уравнений конгруэнции приводится к виду:

$$\omega^1=0,\ \omega^2=0,\ \omega_3^1=0,\ \omega_3^2=0,\ \omega_1^1=0,\ \omega_2^2=0,$$
$$\omega_1^2+\omega_2^1=0,\ \omega^3+\lambda\omega_1=0,\ \omega_1^2=a^k\omega_k,\ \omega_3^3=b^k\omega_k, \tag{2.4}$$

где

$$\omega_i=\omega_i^3.$$

Анализируя систему (2.4), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2.2. Конгруэнции V_2° обладают следующими свойствами: 1/ центры всех эллипсоидов располагаются на одной прямой (линии центров); 2/ все эллипсоиды конгруэнции V_2° касаются цилиндра $f=0$ вдоль коники C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Имеем: $d\bar{A}=\omega^3\bar{e}_3$, $d\bar{e}_3=\omega_3^3\bar{e}_3$, 2/ $df=-2\omega_3^3 f$. Следовательно, цилиндр $f=0$ - инвариантный. Сравнивая уравнения $f=0$ и $F=0$, видим, что эллипсоид Q касается цилиндра $f=0$ вдоль коники C.

Т е о р е м а 2.3. Конгруэнция эллипсоидов допускает следующее безынтегральное представление: возьмем произвольную гладкую поверхность (M) (одна функция двух аргументов) и эллиптический цилиндр H (6 параметров). Пусть C - эллипс, являющийся сечением цилиндра H касательной плоскостью к поверхности (M) в точке M. Зададим для каждой коники эллипсоид Q, касающийся цилиндра H вдоль эллипса (одна функция двух аргументов). Тогда конгруэнция (Q) эллипсоидов есть конгруэнция V_2°.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем конгруэнцию (Q) к реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$, где A - центр эллипса C, $\bar{e}_1$ направлен по прямой AM, $\bar{e}_3$ - по оси цилиндра H, а $\bar{e}_2$ расположен в плоскости коники C и сопряжен вектору $\vec{e}_1$ относительно C. Тогда уравнение цилиндра H запишется в виде $f=0$. Условие инвариантности цилиндра H: $df=\mu f$ приводит к системе пфаффовых уравнений (2.4), определяющей конгруэнцию V_2°.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Индуцированно оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве. - Тр. геом.

семинара. ВИНИТИ", М., 1973, 5, 319-334.

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. "Тр. геометрич. семинара", М., ВИНИТИ, 1974, 6, 113-133.

3. Л а п т е в Г.Ф. Распределение касательных элементов. "Тр. геом. семинара", М., ВИНИТИ, 1971, 3, 29-48.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

А.В. С т о л я р о в

О ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ КАРТАНА

Работа посвящена изучению некоторых вопросов геометрии поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$. Исследования проводятся методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [6]; все построения ведутся в инвариантной аналитической форме в минимально канонизированном репере 2-го порядка (в репере, отнесенном к линиям сопряженной сети); исключение составляет п.5, где порядок репера выше второго.

На протяжении всего изложения индексы будут принимать следующие значения:

$$i, j, k, s, t, \ell = 1, 2, \dots, m; \quad \alpha, \beta, \gamma = m+1, \dots, 2m;$$
$$\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = 0, 1, \dots, 2m.$$

I. Рассмотрим m-мерную поверхность V_m ($m \geqslant 2$), погруженную в проективное пространство P_{2m} размерности $2m$. В репере первого порядка $\{A_{\mathcal{J}}\}$ дифференциальные уравнения поверхности $V_m \subset P_{2m}$ имеют вид $\omega_0^\alpha = 0$; продолжая эти уравнения, имеем $\omega_i^\alpha = b_{ik}^\alpha \omega_0^k$, $b_{[ik]}^\alpha = 0$. Последовательные продолжения уравнений последней системы приведут к системе дифференциальных уравнений последовательности фундаментальных объектов [6] поверхности: $b_{ij}^\alpha, b_{ijk}^\alpha, b_{ijks}^\alpha, \dots$; в частности,

$$\nabla_d b^{\alpha}_{ik} + b^{\alpha}_{ik}\omega^{o}_{o} + b^{\beta}_{ik}\omega^{\alpha}_{\beta} = b^{\alpha}_{iks}\omega^{s}_{o}; \qquad (1)$$

здесь величины b^{α}_{iks} симметричны по каждой паре нижних индексов.

Предположим, что поверхность $V_m \subset P_{2m}$ является поверхностью Картана [I5], то есть рассматриваемая поверхность несет сеть сопряженных линий и число ее линейно независимых квадратичных асимптотических форм $\Phi^{\alpha} = b^{\alpha}_{ik}\omega^{i}_{o}\omega^{k}_{o}$ равно m. Отнеся репер к линиям сопряженной сети $\Sigma_m \subset V_m$, получим $b^{\alpha}_{ij} = 0,\ i \neq j$; в выбранном репере 2-го порядка уравнение сети Σ_m имеет вид (см.[2],[3]):

$$\omega^{j}_{i} = a^{j}_{ik}\omega^{k}_{o}, \quad i \neq j. \qquad (2)$$

Из дифференциальных уравнений (I) равенств $b^{\alpha}_{ij} = 0,\ i \neq j$ находим

$$b^{\alpha}_{ii} a^{i}_{js} + b^{\alpha}_{jj} a^{j}_{is} = - b^{\alpha}_{ijs}, \quad i \neq j. \qquad (3)$$

В силу линейной независимости m форм Φ^{α} имеем $b \overset{def}{=} = |b^{\alpha}_{ii}| \neq 0$; следовательно, существует обратная $m \times m$ матрица из элементов b^{ii}_{α}, определяемых соотношениями

$$b^{\alpha}_{ss} b^{ss}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad b^{\gamma}_{ii} b^{kk}_{\gamma} = \delta^{k}_{i}. \qquad (4)$$

Совокупность величин b^{ii}_{α}, как и b^{α}_{ii}, при любом фиксированном i представляет собой тензор 2-го порядка.

Из соотношений (3), (4) непосредственно следует, что $a^{i}_{js} = - b^{ii}_{\alpha} b^{\alpha}_{ijs}, \quad i \neq j$, то есть сеть $\Sigma_m \subset V_m$ в 3-й дифференциальной окрестности внутренним образом определена самой поверхностью Картана. При $m > 2$ все $a^{i}_{jk} = 0$ (индексы попарно различны). Действительно, из (3) имеем $b^{\alpha}_{ii} a^{i}_{jk} - b^{\alpha}_{jj} a^{j}_{ik} = 0$; свертывая последние равенства с b^{ii}_{α} по α, с учетом (4) получим $a^{i}_{jk} = 0$; согласно (3), теперь очевидно, что $b^{\alpha}_{ijk} = 0$ (все индексы различны). Таким образом, поверхность Картана есть m-сопряженная система, а следовательно, существует с произволом в $m(m-1)$ функций 2 аргументов.

Определитель b есть относительный инвариант:

$$d \ln b = 3\omega^{s}_{s} - (m-1)\omega^{o}_{o} + b_s\omega^{s}_{o},$$

где $b_s = b^{tt}_{\alpha} b^{\alpha}_{tts}$.

2. Составим величины 3-го порядка

$$q^{o}_{i} \overset{def}{=} -\frac{1}{m-1}\sum_{j \neq i} a^{j}_{ij}, \quad t_i \overset{def}{=} -\frac{1}{3}\left[b_i - (m+2)q^{o}_{i}\right],$$

$$A^{i}_{kk} \overset{def}{=} \begin{cases} a^{i}_{kk} & \text{при } i \neq k, \\ t_k & \text{при } i = k, \end{cases} \quad \Phi^{i}_{\alpha} \overset{def}{=} A^{i}_{ss} b^{ss}_{\alpha},$$

$$\tilde{a}^{j}_{ij} \overset{def}{=} a^{j}_{ij} + q^{o}_{i}, \quad \text{по } j \neq i \text{ нет суммирования,} \qquad (5)$$

$$\tilde{a}_i \overset{def}{=} \sqrt{\frac{1}{m-1}(\tilde{a}^{j}_{ij})^2}, \quad b_{\alpha} \overset{def}{=} b^{ss}_{\alpha}(\tilde{a}_s)^2;$$

каждая из величин $q^{o}_{i}, \Phi^{i}_{\alpha}, b_{\alpha}$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} &dq^{o}_{i} + q^{o}_{i}(\omega^{o}_{o} - \omega^{i}_{i}) + \omega^{o}_{i} = q^{o}_{is}\omega^{s}_{o}, \\ &d\Phi^{i}_{\alpha} + \Phi^{i}_{\alpha}\omega^{i}_{i} - \Phi^{i}_{\beta}\omega^{\beta}_{\alpha} + \omega^{i}_{\alpha} = \Phi^{i}_{\alpha s}\omega^{s}_{o}, \\ &db_{\alpha} + b_{\alpha}\omega^{o}_{o} - b_{\beta}\omega^{\beta}_{\alpha} = b_{\alpha s}\omega^{s}_{o}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Равенство нулю тензора 3-го порядка b_{α} равносильно тому, что сопряженная сеть Σ_m на поверхности Картана является сетью с совпавшими фокусами. Следовательно, для поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$, обладающей тем свойством, что хотя бы на одной касательной к линии сопряженной сети $\Sigma_m \subset V_m$ имеется, по крайней мере, два несовпавших фокуса, тензор b_{α}

отличен от нуля; последнее возможно лишь при $m>2$.

3. Согласно [I0], дифференциальные уравнения поля объекта $(\nu^i_\alpha, \nu^\circ_\alpha)$ инвариантного оснащения (в смысле Э.Картана) [I6] поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$ в выбранном репере 2-го порядка имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &d\nu^i_\alpha + \nu^i_\alpha \omega^i_i - \nu^i_\beta \omega^\beta_\alpha + \omega^i_\alpha = \nu^i_{\alpha s} \omega^s_\circ, && (\text{а}) \\ &d\nu^\circ_\alpha + \nu^\circ_\alpha \omega^\circ_\circ + \nu^s_\alpha \omega^\circ_s - \nu^\circ_\beta \omega^\beta_\alpha + \omega^\circ_\alpha = \nu^\circ_{\alpha s} \omega^s_\circ. && (\text{б}) \end{aligned} \qquad (7)$$

Подобъект ν^i_α объекта оснащения определяет инвариантную нормаль первого рода [9]. Инвариантно присоединенное к поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$ поле ($m-1$)-мерных нормалей 2-го рода [9] определяется полем объекта ν°_i:

$$d\nu^\circ_i + \nu^\circ_i (\omega^\circ_\circ - \omega^i_i) + \omega^\circ_i = \nu^\circ_{is} \omega^s_\circ \qquad (8)$$

Сравнивая уравнения (6) с (7-а), (8), имеем:

Т е о р е м а I. Поля квазитензоров Φ^i_α, q°_i 3-го порядка определяют инвариантную нормализацию поверхности Картана.

Отметим, что построенная инвариантная нормаль первого рода $N_m(\Phi^i_\alpha)$ поверхности Картана является одной из m-параметрического семейства нормалей Фосса [I], поле нормалей $N_{m-1}(q^\circ_i)$ второго рода совпадает с полем гармонических плоскостей [3] сети.

З а м е ч а н и е. В охватах величин t_i (см.(5) вместо нормали q°_i второго рода можно взять и другие объекты ν°_i, удовлетворяющие уравнениям (8):

$$t_i(\nu) = -\tfrac{1}{3}\left[b_i - (m+2)\nu^\circ_i\right],$$

$$A^i_{kk}(\nu) = \begin{cases} a^i_{kk} & \text{при } i \neq k, \\ t_k(\nu) & \text{при } i = k, \end{cases} \quad \Phi^i_\alpha(\nu) = A^i_{ss}(\nu)\, b^{ss}_\alpha; \qquad (9)$$

при этом имеем другое поле нормалей Фосса $\Phi^i_\alpha(\nu)$, соответствующее выбранному полю нормалей второго рода по закону (9).

Составим

$$q^\circ_\alpha \stackrel{def}{=} -\frac{1}{m}\left\{\Phi^s_{\alpha s} - \left[(m-1)q^\circ_s + b^\beta_{ss}\Phi^s_\beta\right]\Phi^s_\alpha\right\};$$

эти величины вместе с Φ^i_α удовлетворяют уравнениям (7), а следовательно, в 4-й дифференциальной окрестности определяют инвариантную оснащающую плоскость $Q_{m-1}(\Phi^i_\alpha)$; эта плоскость является линейной полярой точки $A_\circ \in V_m$ относительно ($m-1$)-мерной фокальной поверхности [5],[8] порядка m инвариантной нормали $N_m(\Phi^i_\alpha)$:

$$\begin{aligned} &\left|\left(\Phi^i_{\alpha k} + \sum_{j \neq i} \Phi^j_\alpha a^i_{jk} - b^\beta_{kk}\Phi^k_\alpha \Phi^i_\beta\right)x^\alpha + \delta^i_k x^\circ\right| = 0, \\ &x^i - \Phi^i_\alpha x^\alpha = 0. \end{aligned} \qquad (\text{I0})$$

Отметим, что оснащающий объект $(\Phi^i_\alpha, q^\circ_\alpha)$ построен по образцу [I0],[II]. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. Поле геометрического объекта $(\Phi^i_\alpha, q^\circ_\alpha)$ 4-го порядка определяет инвариантное оснащение (в смысле Э.Картана) поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$, причем оснащающая ($m-1$)-плоскость является линейной полярой точки $A_\circ \in V_m$ относительно фокальной поверхности (I0).

З а м е ч а н и е I. Построенное оснащение поверхности Картана отличается от ее оснащения, полученного в работе [4], ибо в [4] оснащающая плоскость, вообще говоря, не является линейной полярой точки $A_\circ \in V_m$ относительно фокальной поверхности; заметим также, что в работе [4] оснащение поверхности Картана построено в сильно канонизированном репере 3-го порядка.

З а м е ч а н и е 2. Согласно [7], нетрудно показать, что построенное инвариантное оснащение поверхности Картана индуцирует пространство проективной связности без кручения, определенное формами

$$\theta_0^i \overset{def}{=} \omega_0^i\,, \quad \theta_i^k \overset{def}{=} \omega_i^k - b_{ii}^\alpha \Phi_\alpha^k \omega_0^i\,,$$

$$\theta_0^0 \overset{def}{=} \omega_0^0\,, \quad \theta_i^0 \overset{def}{=} \omega_i^0 - b_{ii}^\alpha q_\alpha^0 \omega_0^i\,.$$

При $m > 2$ каждая из величин $b_{ii} \overset{def}{=} b_\alpha b_{ii}^\alpha$ 3-го порядка, вообще говоря, отлична от нуля. Составим $B \overset{def}{=} \prod\limits_i b_{ii}$; эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\ln B = 2(\omega_s^s - m\,\omega_0^0) + B_s \omega_0^s$$

Следующие охваты удовлетворяют уравнениям (8) и (7, а):

$$F_i^0 \overset{def}{=} \frac{1}{2(m+2)} \left(B_i + 2\, b_{\beta i} b_{ii}^\beta b^{ii}\right),$$

$$F_\alpha^i \overset{def}{=} (b_{\alpha i} - b_\alpha F_i^0)\, b^{ii}, \quad b^{ii} = (b_{ii})^{-1};$$

следовательно, справедлива

Т е о р е м а 3. Поля квазитензоров 4-го порядка F_α^i, F_i^0 определяют инвариантную нормализацию поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$ ($m > 2$).

4. Согласно [6], для поверхности $V_m \subset P_n$ в общем случае существует полный внутренний фундаментальный объект. Для поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$ (а также и для общей поверхности $V_m \subset P_n$ при известных ограничениях на m , см. [I0]) ее фундаментальный геометрический объект порядка не ниже пятого является полным, ибо внутреннее оснащение (в смысле Э. Картана) [I6] поверхности строится в дифференциальной окрестности 4-го порядка. С другой стороны, показано [I4], что порядок полного внутреннего фундаментального объекта поверхности $V_m \subset P_n$ ($2 < m < n-1$) не превосходит шести. Справедлива

Т е о р е м а 4. Фундаментальный геометрический объект 5-го порядка поверхности Картана при $m > 2$ является полным.

5. При некоторой нормализации поверхности Картана система форм ω_0^i, $\overset{1}{\theta}{}_k^i \overset{def}{=} \omega_k^i - \delta_k^i \omega_0^0$ в адаптированном репере удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева [I2], а следовательно, определяет первое пространство аффинной связности без кручения. Рассматриваемая нормализация, согласно [I3], индуцирует и вторую аффинную связность без кручения, определяемую системой форм ω_0^i, $\overset{2}{\theta}{}_k^i \overset{def}{=} \overset{1}{\theta}{}_k^i + b_\alpha^{ii} b_{iks}^\alpha \omega_0^s$. Справедливы:

Т е о р е м а 5. Внутренние геометрии первого и второго пространств аффинных связностей без кручения, индуцируемых на поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$ при ее нормализации полем нормалей ν_i^0 второго рода и соответствующим ему по закону (9) полем нормалей Фосса $\Phi_\alpha^i(\nu)$, могут быть эквиаффинными лишь одновременно; если при этом в качестве поля нормалей второго рода взять псевдоконгруэнцию ($m-1$)-мерных плоскостей, гармоничную V_m , то обе геометрии являются эквиаффинными.

Т е о р е м а 6. Внутренняя геометрия первого пространства аффинной связности, индуцируемого полями инвариантных нормалей F_α^i, F_i^0 на поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$ ($m > 2$), является эквиаффинной; при этом вторая связность эквиаффинна тогда и только тогда, когда $a_{[ik]}^0 = 0$.

Список литературы

I. А к и в и с М.А. О нормалях Фосса поверхности, несущей сеть сопряженных линий.- Матем. сб., т.58, № 2, 1962, с. 695-706.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях и их преобра-

зованиях.- Итоги науки. Геометрия (1963). ВИНИТИ АН СССР, М., 1965, с. 138-164.

3. Б а з ы л е в В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства.-"Изв. вузов. Матем.", 1966, № 2, с.9-19.

4. Г о л ь д б е р г В.В. Об инвариантном оснащении картановского многообразия V_p в проективном пространстве P_{2p} .-"Изв. вузов. Матем., 1970, № 12, с. 11-21.

5. И в л е в Е.Т. О многообразии $E(0,n-m,m)$ в n-мерном проективном пространстве P_n $(m>2, n>m(m+1))$.-"Сиб. мат. журн.", 1967, т.8, № 5, с. 1143-1155.

6. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр. Моск. матем. о-ва", 1953, т.2, с.275-382.

7. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства.-"Тр. 4-го Всес. матем. съезда"(1961), 1964, т. 2, Л., „Наука", с. 226-233.

8. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I.-"Тр. Геометр. семинара." Ин-т научн. информ. АН СССР, 1971, т. 3, с.49-94.

9. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

10. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства.-"Тр. Геометр. семинара." Ин-т научн. информ. АН СССР, 1966, т.1, с.239-263.

11. О с т и а н у Н.М. Инвариантное оснащение поверхности, несущей сеть.-"Изв. вузов. Матем.", 1970, № 7, с.72-82.

12. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-"Тр. Геометр. семинара." Ин-т научн. информ. АН СССР, 1973, т.4, с.7-70.

13. С т о л я р о в А.В. Внутренняя геометрия сетей на распределениях m-мерных линейных элементов проективного пространства P_n . Тезисы докл. на 6-й Всес. геом. конф. по совр. проблемам геометрии. Вильнюс, 1975, с. 231-233.

14. С т о л я р о в А.В. Приложение теории регулярных гиперполос к изучению геометрии многомерных поверхностей проективного пространства.-"Изв. вузов. Матем.", 1976, № 2.

15. Cartan E. Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidiene on non euclidiene. Bull. Soc. Math. de France, 1919, 47, 125-160; 1920, 48, 132-208.

16. Cartan E. Les espaces á connexion projective .-"Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу," 1937, в.4, с.147-159.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

В.А. Т и х о н о в

СТУПЕНЧАТО - ЧЕБЫШЕВСКИЕ СЕТИ НА МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

В настоящей статье на многомерных поверхностях аффинного пространства рассматривается класс сетей , названных нами ступенчато - чебышевскими. В основу построения этих сетей положено аффинно - инвариантное свойство : параллельность (в смысле объемлющего пространства) образующих элементов специальным образом выбранной последовательности распределений , касательных к поверхности.

1. В N - мерном аффинном пространстве A_N рассмотрим поверхность V_n , отнесенную к подвижному реперу $\{M, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, где точка M есть текущая точка поверхности , а векторы $\vec{e}_i$ $(i,j,k\ldots=1,2,\ldots,n)$ лежат в её касательной в этой точке плоскости. Инфинитезимальное перемещение выбранного репера определяется уравнениями $(\alpha,\beta,\ldots=n+1,\ldots,N)$

$$d\vec{M}=\omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i=\omega_i^k\vec{e}_k+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\ d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta .$$

Тогда $\omega^\alpha=0,\quad \omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j$ (1)

и система функций b_{ij}^α образует , как известно , симметричный по нижним индексам тензор.

2. Зададим на поверхности V_n сеть Σ_n. Векторы $\vec{e}_i$ подвижного репера расположим теперь на касательных к линиям сети Σ_n в точке M. Линейные формы ω^i_k $(i \neq k)$ [I] станут главными :

$$\omega^i_k = a^i_{kj}\,\omega^j . \qquad (2)$$

Пусть m - натуральное число , удовлетворяющее условию $1 \leq m \leq n-1$. Векторные поля $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$ порождают содержащее их m - мерное распределение Δ_m , которое можно рассматривать как поле m - мерных направлений $\Delta_m(M)$. Мы назовём сеть $\Sigma_n \subset V_n \subset A_N$ ступенчато - чебышевской , если для каждого значения m поле направлений $\Delta_m(M)$ параллельно вдоль линии ω^{m+1} сети Σ_n.

Для того , чтобы в выбранном репере уравнения (I) , (2) определяли ступенчато - чебышевскую сеть $\Sigma_n \subset V_n$, к ним необходимо присоединить условия

$$a^i_{kj} = 0 \quad \text{для} \quad k < j \leq i \ , \quad b^\alpha_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \qquad (3)$$

Асимптотические формы $\Phi^\alpha = \omega^\alpha_i\,\omega^i$ поверхности V_n имеют в этом случае канонический вид $\Phi^\alpha = \sum_i b^\alpha_{ii}(\omega^i)^2$. Справедлива

Т е о р е м а I. Ступенчато - чебышевская сеть Σ_n на поверхности V_n аффинного пространства A_N есть сеть сопряжённая.

3. Векторы $\vec{b}_k = b^\alpha_{kk}\vec{e}_\alpha$ вместе с векторами $\vec{e}_i$ определяют соприкасающуюся плоскость к поверхности V_n в точке M. Поверхность V_n будем считать тангенциально невырожденной, то есть все векторы $\vec{b}_k$ предполагаем ненулевыми.

Каждая из $n-1$ точек $\vec{F}^j_i = \vec{M} - (a^j_{ij})^{-1}\vec{e}_i$ $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_n называется псевдофокусом прямой $[M, \vec{e}_i]$. Известно [I] , что в неметрическом пространстве положение псевдофокусов на касательных к линиям сети $\Sigma_n \subset V_n$ не зависит от выбора оснащения поверхности V_n только в том случае , если сеть Σ_n - сопряженная. Следовательно , все псевдофокусы касательных к линиям ступенчато - чебышевской сети $\Sigma_n \subset V_n$ инвариантны относительно выбора поля нормалей первого рода данной поверхности. Ступенчато - чебышевская сеть $\Sigma_n \subset V_n$ имеет на касательных к своим линиям специальное расположение псевдофокусов : на прямой $[M, \vec{e}_i]$ существуют только псевдофокусы $F^1_i, F^2_i, \dots, F^{i-1}_i$. Остальные псевдофокусы этой прямой бесконечно удалены.

Каждая из точек $\vec{F}_i = \vec{M} - (n-1)\left(\sum_{j \neq i} a^j_{ij}\right)^{-1}\vec{e}_i$ называется гармоническим полюсом точки M относительно псевдофокусов F^j_i касательной $[M, \vec{e}_i]$, а $(n-1)$ - мерная плоскость , проведённая через все точки F_i - гармонической плоскостью сети Σ_n . Для ступенчато - чебышевских сетей поле гармонических плоскостей является инвариантным , и для каждой точки $M \in V_n$ прямая $[M, \vec{e}_1]$ параллельна соответствующей этой точке гармонической плоскости.

4. Продифференцировав внешним образом систему уравнений Пфаффа (I) , (2) с учётом равенств (3) , находим совокупность конечных соотношений :

$(a^j_{ik}-a^j_{ki})\vec{b}_j+a^i_{jk}\vec{b}_i-a^k_{ji}\vec{b}_k=0$ при $i<j<k$ (4)

$(a^j_{ik}-a^j_{ki})\vec{b}_j+a^i_{jk}\vec{b}_i=0$ при $j<i<k$ (5)

$a^j_{ki}\vec{b}_j-a^i_{jk}\vec{b}_i+a^k_{ji}\vec{b}_k$ при $i<k<j$ (6)

$a^i_{kq}(a^q_{st}-a^q_{ts})+a^p_{kt}a^i_{ps}-a^i_{kr}a^r_{ts}=0$ (7)

В равенствах (7) $q<s\le p<t<r$ и по индексам q, p, r $(q=1,2,\dots,k;\ p=k+1,\dots,i;\ r=i+1,\dots,n)$ ведется суммирование. В равенствах (4) , (5) , (6) суммирование нигде не проводится и , как можно показать , каждая из трёх подсистем этих условий есть следствие двух других.

5. Сеть $\Sigma_n\subset V_n$ называется голономной [I] , если каждое из уравнений $\omega^i=0$ вполне интегрируемо. Пусть ступенчато - чебышевская сеть $\Sigma_n\subset V_n\subset A_N$ голономна. Из конечных соотношений (4) - (6) с учётом тангенциальной невырожденности поверхности V_n находим , что при различных индексах i, k, j все $a^i_{kj}=0$. Сеть $\Sigma_n\subset V_n$ будет теперь определена дифференциальными уравнениями

$$\omega^i_k=a^i_{ki}\omega^i+a^i_{kk}\omega^k \quad \text{для} \quad i<k$$
$$\omega^i_k=a^i_{kk}\omega^k \quad \text{для} \quad i>k$$

и есть - сопряженная система частного вида. Замыкая эти уравнения внешним образом , получим

$\Delta a^i_{ki}\wedge\omega^i+\Delta a^i_{kk}\wedge\omega^k=0\ (i<k)$, $\Delta a^i_{kk}\wedge\omega^k=0\ (i>k)$

где , например , $\Delta a^i_{ki}=da^i_{ki}-a^i_{ki}\omega^k_k$ + линейная комбинация форм ω^j. Присоединяя к полученной системе квадратичные уравнения $\Delta b^\alpha_{ii}\wedge\omega^i=0$ и проводя исследование всей системы на совместность , в известных обозначениях находим :

$s_1=n(N-1)$, $s_2=\frac{n(n-1)}{2}$, $s_3=\dots=s_n=0$. Доказана

Т е о р е м а 2. Поверхность $V_n\subset A_N$, несущая голономную

ступенчато - чебышевскую сеть , есть n - сопряженная система частного вида. Произвол существования такой системы $\frac{n(n-1)}{2}$ функций от двух аргументов.

Уравнение $\omega^1=0$ расслаивает в этом случае поверхность V_n на ∞^1 подповерхностей V_{n-1} , вдоль каждой из которых прямые $[M,\vec{e}_1]$ параллельны. Сами поверхности V_{n-1} уравнением $\omega^2=0$ расслаиваются на ∞^1 V_{n-2}, причём вдоль поверхностей V_{n-2} плоскости $[M,\vec{e}_1,\vec{e}_2]$ параллельны и т.д. Наконец , поверхности V_3 , несущие сети Σ_3 из линий $\omega^{n-2}, \omega^{n-1}, \omega^n$ сети Σ_n , уравнением $\omega^{n-2}=0$ расслаиваются на ∞^1 V_2 и вдоль поверхностей V_2 $(n-2)$ - плоскости $[M,\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-2}]$ параллельны. Кроме того , вдоль линии ω^n параллельны $(n-1)$ - мерные плоскости $[M,\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-1}]$

6. При исследовании неголономных ступенчато - чебышевских сетей $\Sigma_n\subset V_n$ существенную роль играют разности $a^i_{jk}-a^i_{kj}$ $(j<i<k)$. В силу требования неголономности они ненулевые. В общем случае $a^i_{jk}\neq 0\ (j<i<k)$. Рассмотрим подкласс ступенчато - чебышевских сетей $\Sigma_n\subset V_n$ в этом предположении. После соответствующих выкладок , которые мы здесь опускаем , получается:

Т е о р е м а 3. Если поверхность $V_n\subset A_N$ несет ступенчато - чебышевскую сеть наиболее общего задания , то она расслаивается вдоль линии ω^n на однопараметрическое семейство подповерхностей класса I , несущих сети Σ_{n-1} из остальных линий сети Σ_n .

В терминах классификации сетей на дифференцируемых многообразиях по объекту неголономности [3] можно сказать ,что ступенчато - чебышевская сеть самого общего вида есть сеть ранга $n-1$.

Каждая из поверхностей V_{n-1} , о которых говорится в теореме 3 , сама несет ступенчато - чебышевскую сеть Σ_{n-1} из линий $\omega^1,\dots,\omega^{n-1}$, а следовательно , к ней также можно применить эту теорему. Вдоль линий ω^{n-1} поверхности V_{n-1} расслаиваются на ∞^1 подповерхностей V_{n-2} класса I , несущих ступенчато - чебышевские сети Σ_{n-2} из линий $\omega^1,\dots,\omega^{n-2}$ сети Σ_n . Применяя последовательно теорему 3 нужное число раз , находим , наконец , что поверхности V_3 , несущие ступенчато - чебышевские сети Σ_3 из линий ω^1, ω^2, ω^3 расслаиваются вдоль линии ω^3 на ∞^1 подповерхностей V_2 класса I , несущих получебышевские сопряженные сети Σ_2 из линий ω^1, ω^2 сети Σ_n. Таково строение многомерной поверхности , несущей ступенчато - чебышевскую сеть самого общего вида.

Для сетей $\Sigma_3 \subset V_3 \subset A_N$ верна

Т е о р е м а 4 . Ступенчато - чебышевская сеть $\Sigma_3 \subset V_3 \subset A_N$, расслаивающаяся вдоль линии ω^3 на ∞^1 сетей Σ_2 из линий ω^1 , ω^2 , расположенных на поверхностях V_2 класса I , существует с произволом одной функции от трёх аргументов.

В этом случае главная компонента оснащения поверхности V_n [I] двумерна. Располагая векторы $\vec{e}_{n+1}$, $\vec{e}_{n+2}$ в плоскости главной компоненты оснащения , убеждаемся , что поверхность V_n имеет две независимые квадратичные формы φ^{n+1}, φ^{n+2}. Остальные асимптотические формы тождественно равны нулю.

7. Отметим , что если нам дано расслоение поверхности V_n на последовательность вложенных друг в друга подповерхностей $V_2 \subset V_3 \subset \dots \subset V_{n-1}$ класса I , то при заданной сопряженной получебышевской сети $\Sigma_2 \subset V_2$ однозначно определяется вся ступенчато - чебышевская сеть $\Sigma_n \subset V_n$.

Действительно , каждая из поверхностей $V_m (m=2,3,\dots,n-1)$ есть гиперповерхность своего соприкасающегося пространства и в силу предполагаемой нами невырожденности гиперраспределения её касательных плоскостей допускает оснащение этого распределения полем аффинной нормали $\vec{L}_m$ [4] (нормали, вдоль векторных линий которой образующий элемент гиперраспределения переносится параллельно).

В каждой точке $M \in V_n$ мы имеем теперь n линейно - независимых I - распределений : $n-2$ из них порождены полями $\vec{L}_m$, а два других касаются линий сети Σ_2. Они и определяют на поверхности V_n ступенчато - чебышевскую сеть.

8. Возникает следующий вопрос : чем же геометрически интересен тот подкласс ступенчато - чебышевских сетей , для которого все функции $a^i_{jk}=0 \ (j<i<k)$. Соотношения (5) примут вид: $(a^j_{ik}-a^j_{ki})\vec{e}_j=0 \ (j<i<k)$, равносильные в силу тангенциальной невырожденности поверхности V_n следующим :

$$a^j_{ik}-a^j_{ki}=0 \quad (j<i<k) \qquad (8)$$

Внешнее дифференцирование уравнений (2) сети Σ_n при наличии условий (8) конечных соотношений не дает , а равенства (4) - (6) приведутся к виду :

$$a^i_{kj}\vec{b}_i + a^k_{ij}\vec{b}_k - a^{j}_{ki}\vec{b}_j = 0 \quad (j<i<k) \qquad (9)$$

Уравнение $\omega^1=0$ расслаивает в этом случае поверхность на ∞^1 подповерхностей V_{n-1}, несущих несопряженные сети Σ_{n-1} из линий $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ сети Σ_n. Поверхности V_{n-1} уравнением $\omega^2=0$ расслаиваются на ∞^1 подповерхностей V_{n-2}, несущих несопряженные сети Σ_{n-2} из линий $\omega^1, \dots, \omega^{n-2}$ сети Σ_n и т.д. Наконец, поверхности V_3 уравнением $\omega^{n-2}=0$ расслаиваются на ∞^1 V_2, несущих несопряженные сети Σ_2 из линий ω^1, ω^2 сети Σ_n.

Равенства (9) показывают, что любая тройка векторов $\vec{b}_\ell$ компланарна, но никакие два из них не коллинеарны. Главная компонента оснащения поверхности V_n двумерна. Векторы $\vec{e}_{n+1}, \vec{e}_{n+2}$ расположим в плоскости главной компоненты оснащения. Тогда $\vec{b}_i = b^{n+1}_{ii}\vec{e}_{n+1} + b^{n+2}_{ii}\vec{e}_{n+2}$ и значит, $b^\sigma_{ii}=0$ $(\sigma=n+1,\dots,N)$. Поверхность V_n имеет две линейно независимые квадратичные формы $\Phi^{n+1}=\sum_i b^{n+1}_{ii}(\omega^i)^2$, $\Phi^{n+2}=\sum_i b^{n+2}_{ii}(\omega^i)^2$. Матрица, составленная из коэффициентов этих форм, в силу неколлинеарности каждой пары векторов $\vec{b}_k$ удовлетворяет требованиям обобщённой теоремы Сегре [2] и поверхность V_n имеет коразмерность 2.

Для трёхмерных поверхностей пятимерного аффинного пространства, несущих рассматриваемые сети Σ_3, верна

Т е о р е м а 5. Ступенчато - чебышевская сеть $\Sigma_3 \subset V_3 \subset A_5$, расслаивающаяся вдоль линии ω^1 на ∞^1 несопряженных сетей Σ_2 из линий ω^2, ω^3, расположенных на поверхностях V_2, существует с произволом четырёх функций двух аргументов.

В рассматриваемом случае сеть Σ_n также имеет ранг $n-1$.

9. Пусть тангенциально - невырожденная гиперповерхность V_n аффинного пространства A_{n+1} есть n - сопряженная система относительно некоторой выбранной на ней сети Σ_n. В репере $\{M, \vec{e}_i, \vec{e}_{n+1}\}$, векторы $\vec{e}_i$ которого направлены по касательным к линиям сети Σ_n, эта система определена уравнениями

$$\omega^{n+1}=0,\ \omega^{n+1}_i = b_{ii}\omega^i,\ \omega^i_k = a^i_{kk}\omega^k + a^i_{ki}\omega^i \ (i\neq k). \qquad (10)$$

Зададим оснащение поверхности V_n некоторым полем нормали первого рода и в каждой её точке M вектор $\vec{e}_{n+1}$ направим по оснащающей прямой. Тогда

$$\omega^i_{n+1} = c^i_j\,\omega^j. \qquad (11)$$

Система функций c^i_j образует геометрический объект. Потребуем, чтобы в связности, индуцируемой построенным оснащением $[M, \vec{e}_{n+1}]$, линии сети $\Sigma_n \subset V_n$ были геодезическими. Для этого надо к уравнениям (10) присоединить условия: $a^i_{kk}=0$ $(i\neq k)$. Внешнее дифференцирование системы уравнений (10) с учётом присоединённых условий приводит при $n>2$ к ряду конечных соотношений, в силу которых уравнения 11 примут вид: $\omega^i_{n+1} = c^i_i\,\omega^i$.

Это означает, что сеть $\Sigma_n \subset V_n$ есть сеть линий кривизны поля одномерных нормалей $[M, \vec{e}_{n+1}]$.

Таким образом, при $n>2$ сеть Σ_n, относительно которой гиперповерхность V_n n - сопряженная система, будет геодезической сетью линий для некоторого оснащения $[M, \vec{e}_{n+1}]$ этой поверхности только в том случае, если она есть сеть линий кривизны оснащения $[M, \vec{e}_{n+1}]$. Исследуя систему пфаффовых уравнений, определяющих рассматриваемую сеть ,и систему их квадратичных уравнений , находим произвол существования - $n(n+1)$ функций одного аргумента.

Пусть теперь сеть $\Sigma_n \subset V_n \subset A_{n+1}$ — ступенчато - чебышевская n - сопряженная система. В этом случае (при $n>2$)

$$\omega^1_{n+1} = c^1_1 \omega^1 , \qquad \omega^p_{n+1} = 0 \qquad (p=2,3,\dots,n).$$

Произвол существования геодезической ступенчато - чебышевской n - сопряженной системы $\frac{n(n+1)}{2}+1$ функций одного аргумента. Гиперповерхность V_n вдоль линий ω^1 расслаивается на ∞^1 подповерхностей V_{n-1} таких, что любая линия этой подповерхности V_{n-1} есть линия кривизны поля нормали первого рода $[M, \vec{e}_{n+1}]$, относительно которого сеть Σ_n — геодезическая. Линии ω^1 - также линии кривизны поля $[M, \vec{e}_{n+1}]$, они соответствуют фокусу

$$\vec{F} = \vec{M} - (c^1_1)^{-1} \vec{e}_{n+1} .$$

Если нормаль Бляшке $\vec{\beta} = -\frac{1}{n+2} b^{kk} \sum_i b^{ii} b_{iik} \vec{e}_k + \vec{e}_{n+1}$ [4] гиперповерхности V_n принадлежит гиперплоскости $[M, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_{n+1}]$, то семейство линий ω^1 сети Σ_n есть семейство линий Дарбу. Верно и обратное утверждение.

Тензор кривизны связности ∇ , индуцируемой оснащением $[M, \vec{e}_{n+1}]$, имеет вид : $R^1_{jj1} = c^1_1 b_{jj}$, а его тензор Риччи $R_{jj} = c^1_1 b_{jj}$. Следовательно , связность ∇ - - эквиаффинная , и направления касательных к линиям сети Σ_n сопряжены относительно конуса Риччи этой связности.

В частности , если фокус $\vec{F}$ бесконечно удалён $(c^1_1 = 0)$, то сеть Σ_n лежит на аффинной сфере.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства.-"Известия вузов. Математика", №2, 51, 1966, с. 9-19.

2. Б а з ы л е в В.Т. Об одном классе многомерных поверхностей.-"Изв. вузов. Математика", №1, 20, 1961, с. 27-33.

3. Б а з ы л е в В.Т. Сети на многообразиях.-"Труды геом. семинара ВИНИТИ", 1974, 6, с. 189-206.

4. А л ш и б а я Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве.-"Тр. геом. семинара ВИНИТИ", 1973, 5, с. 169-193.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Т.П.Ф у н т и к о в а

БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУХ КЛАССОВ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ $(CL)_{1,2}$

В [3] в трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривались вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ пар фигур $\{C,L\}$, где C – эллипс, L – прямая, не инцидентная плоскости эллипса. Каждому эллипсу C в этом случае соответствует одномерное подмногообразие $(L)_c$ прямых L конгруэнции (L).

Исследованы конгруэнции $(CL)_{1,2}$, у которых все коники C инцидентны одной квадрике F (конгруэнции Q). Выделены два класса конгруэнций Q (Q_1 и Q_2), включающих в себя соответственно классы конгруэнций с осевой аффинной симметрией и центральной аффинной симметрией [2].

Для конгруэнций Q_1 и Q_2 получена полная совокупность свойств, позволяющая осуществить безынтегральное представление этих конгруэнций [I].

§I. Геометрические свойства вырожденных конгруэнций Q_1 и Q_2

Канонический репер $R=\{A\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\}$ конгруэнции Q геометрически характеризуется следующим образом: начало A репера помещается в точку пересечения прямой L с плоскостью эллипса C, конец вектора $\vec{e}_3$ совмещается с центром эллипса, направление вектора $\vec{e}_2$ сопряжено с направлением вектора $\vec{e}_3$ и точка $\vec{E}=\vec{A}+\vec{e}_2+\vec{e}_3$ инцидентна эллипсу, вектор $\vec{e}_1$ направлен по прямой L.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией Q_1 (Q_2) называется торсовая характеристическая конгруэнция Q [2, с.209],

у которой: I/ торсы $(L)_c$ являются коническими поверхностями; 2/ выполняются условия $m=0,\ n+1\neq 0$, $(m\neq 0,\ n+1=0)$.

Конгруэнции Q_1 и Q_2 в репере R определяются соответственно системами дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\omega^3=0,\ \omega_2^1=0,\ \omega_3^1=0,\ d\ln b=2(\alpha-\beta)\omega^1,\ b\omega_2^3=\omega^2,\\&\omega_3^2=-\omega^2,\ \omega_2^2=\beta\omega^1,\ \omega_1^3=\Gamma_{11}^3\omega^1,\ \omega_1^2=\alpha\omega^2,\ \omega_3^3=\alpha\omega^1,\\&d\alpha=\alpha(\omega_1^1-\omega_3^3)-\omega_1^3,\ d\beta=\beta[-2\omega_2^2+\omega_1^1],\ d\Gamma_{11}^3\wedge\omega^1=0;\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega^3=0,\ db=0,\ b\omega_2^3=\omega^2,\ \omega_3^1=-\omega^1,\ \omega_2^1=m\omega^1,\ \omega_2^2=0,\\&\omega_1^2=-bm\Gamma_{11}^3\omega^1-\alpha\omega^2,\ \omega_3^2=-bm\alpha\omega^1-\omega^2,\ \omega_1^3=\Gamma_{11}^3\omega^1,\\&\omega_3^3=\alpha\omega^1,\ d\alpha=0,\ d\Gamma_{11}^3=0,\ [dm+(m^2+\tfrac{1}{b})\omega^2]\wedge\omega^1=0\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

(ω^i, ω_i^j – компоненты инфинитезимального перемещения репера) с произволом одной функции одного аргумента.

Уравнения эллипса C в репере R имеют вид:

$$f\equiv b(x^3-1)^2+(x^2)^2-1=0,\quad x^1=0. \qquad (3)$$

Т е о р е м а I. Конгруэнции Q_1 характеризуются следующими свойствами: I/ квадрика F

$$b(x^3-1)^2+(x^2)^2+b\alpha^2(x^1)^2-2b\alpha x^1x^3+2(b\alpha-\beta)x^1-1=0, \qquad (4)$$

содержащая эллипсы C, является эллиптическим параболоидом; 2/ диаметр параболоида

$$1-x^3+\alpha x^1=0,\quad x^2=0, \qquad (5)$$

проходящий через центр эллипса C и фокальную точку $\vec{F}=\vec{A}-\frac{1}{\alpha}\vec{e}_1$ луча L прямолинейной конгруэнции (L), неподвижен; 3/ плоскости $\{A\vec{e}_1\vec{e}_3\}$ образуют пучок плоскостей с осью (5); 4/ плоскости эллипсов взаимно параллельны; 5/ прямолинейная конгруэнция (L) есть конгруэнция Рибокура; 6/ аффинные нормали к поверхности (A) пересекают неподвижную прямую (5); 7/ линии $\omega^2=0$ на поверхности (A) – это союзные линии конгруэнции аффинных нормалей, линии кривизны, плоские линии тени, инцидентные плоскости $\{A\vec{e}_1\vec{e}_3\}$; 8/ линии $\omega^1=0$ на поверхности (A) являются эллипсами f_1, подобными эллипсу (3) (касательные к эллипсам f и f_1 в соответствующих точках, т.е. точках пересечения их с прямыми, проходящими через центр эллипсов, параллельны); 9/поверхность (A) -собственная аффинная поверхность вращения.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции Q_2 обладают следующими свойствами: I/все эллипсы C принадлежат центральной квадрике

$$\Phi \equiv \Delta - 1 = 0\,,\quad \Delta = \mathfrak{b}(x^3-1)^2 + (x^2)^2 + \mathfrak{b}\Gamma^3_{11}(x^1)^2 + \mathfrak{b}\alpha x^1 x^2 \qquad (6)$$

с центром в точке O, которая инцидентна прямой, проходящей через центр эллипса C и фокальную точку $\vec{F}_1 = \vec{A} + \frac{1}{\alpha}\vec{e}_1$ луча L; 2/поверхность (A) является квадрикой $\Phi_1 \equiv \Delta - \mathfrak{b} = 0$; 3/линия центров эллипсов C, а также фокальная линия прямолинейной конгруэнции (L), описываемая точкой F_1, принадлежат соответственно квадрикам $\Phi_2 \equiv \Delta = 0$, $\Phi_3 \equiv \Delta + \mathfrak{b}(\alpha + \Gamma^3_{11}) : \alpha^2 = 0$, причем касательные к этим линиям в соответствующих точках параллельны между собой.

§2. Безынтегральное представление конгруэнций Q_1 и Q_2

Указанные в §I свойства позволяют высказать следующие предположения о построении произвольных конгруэнций Q_1 и Q_2.

I. Для того, чтобы построить конгруэнцию Q_1, следует задать: I/произвольный эллиптический параболоид; 2/один из диаметров MN параболоида; 3/в некоторой плоскости α, проходящей через диаметр MN, кривую Γ.

Обозначим буквами β_0 —касательную плоскость к параболоиду в точке M пересечения его с диаметром MN, β - плоскость, параллельную плоскости β_0.

Конгруэнцию Q_1 в этом случае будут составлять одномерное многообразие эллипсов C, являющихся линиями пересечения параболоида плоскостями β, и конгруэнция прямых L, касательных к однопараметрическому семейству линий, полученному при вращении линии Γ вокруг оси MN по направляющему эллипсу, подобному эллипсу C.

Соответствие между элементами многообразий (C) и (L)

устанавливается следующим образом: каждому эллипсу C соответствует одномерное подмногообразие $(L)_C$ прямых L, касательных к линиям Γ, проведенных в точках пересечения этих линий с плоскостью β эллипса C. Обратно, каждой прямой L, прямолинейной конгруэнции (L), соответствует тот эллипс C, который инцидентен плоскости β, проходящей через точку касания прямой L и линии Γ.

Осуществляя указанные выше построения, получаем некоторую конгруэнцию $\mathfrak{A}$ типа $(CL)_{1,2}$. Докажем, что эта конгруэнция является конгруэнцией Q_1. Для этого отнесем конгруэнцию $\mathfrak{A}$ к подвижному реперу $R = \{A\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\}$, вершину A которого поместим в произвольную точку кривой Γ, вектор $\vec{e}_1$ направим по касательной L к линии Γ в точке A, конец вектора $\vec{e}_3$ совместим с центром эллипса C, соответствующего прямой L, вектор $\vec{e}_2$ помещаем в плоскости эллипса C таким образом, что направления векторов $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ сопряжены, и нормируем так, что точка $\vec{E} = \vec{A} + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ инцидентна эллипсу C.

В построенном репере уравнение параболоида и уравнения эллипса C имеют соответственно вид (3) и (4). Так как плоскости эллипсов взаимно параллельны, то

$$\omega^1_2 = 0\,,\quad \omega^1_3 = 0\,. \qquad (7)$$

Согласно построению репера R, касательную плоскость к поверхности (A) определяют векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, следовательно,

$$\omega^3 = 0\,. \qquad (8)$$

Условия инвариантности параболоида в репере R запишутся в виде

$$d\ln\mathfrak{b} = 2(\alpha-\beta)\omega^1,\ \mathfrak{b}\omega^3_2 = \omega^2,\ \omega^2_3 = -\omega^2,\ \omega^2_2 = \beta\omega^1,\ \omega^2_1 = \alpha\omega^2,$$
$$\omega^3_3 = \alpha\omega^1,\ d\alpha = \alpha(\omega^1_1 - \omega^3_3) - \omega^3_1,\ d\beta = \beta[-2\omega^2_2 + \omega^1_1]. \qquad (9)$$

Дифференциальные уравнения (7)-(9) совпадают с уравнениями системы (I). Таким образом, конгруэнция $\mathfrak{A}$ есть конгруэнция Q_1. Предложение доказано.

Аналогичными рассуждениями можно доказать справедливость следующего предложения.

II. Чтобы построить конгруэнцию Q_2, следует взять три подобных эллипсоида $\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2$ с общим центром O и на эллипсоиде Φ_1 задать произвольную линию Γ (линию центров эллипсов C).

Обозначим буквами : α -плоскости, касающиеся эллипсоида Φ_1 в точках линии Γ, β -прямые проходящие через центр O и пересекающие линию Γ .

Конгруэнцию Q_2 составляют однопараметрическое семейство эллипсов C , являющихся линиями пересечения эллипсоида Φ плоскостями α, и конгруэнция прямых L , касающихся эллипсоида Φ_2 в точках пересечения его с плоскостями α и пересекающих прямые β .

Соответствие между элементами многообразий (C) и (L) устанавливается следующим образом. Каждому эллипсу C соответствует однопараметрическое семейство $(L)_c$ прямых L , касающихся эллипсоида Φ_2 в точках пересечения его с плоскостью α эллипса C и пересекающих прямую β , проходящую через центр O и центр эллипса C . Обратно, пусть имеем прямую L , касающуюся эллипсоида Φ_2 в некоторой точке M_0 . Плоскость, инцидентная прямой L и центру O, пересекает линию Γ в некоторых точках $N_1,\dots,N_k$. Проводим плоскость α, касательную к эллипсоиду Φ_1 и проходящую через точку M_0 и одну из точек $N_1,\dots,N_k$. Линия пересечения плоскости α с эллипсоидом Φ определит эллипс C , соответствующий прямой L .

Список литературы

1. Г р и н ц е в и ч ю с К. О линейных неголономных комплексах.-"Литовский матем.сб.", 1974, т.14

2. Ф у н т и к о в а Т.П. Вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$.-Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1974, вып.4, с.107-117.

3. Ф у н т и к о в а Т.П. О некоторых классах вырожденных конгруэнций $(CL)_{1,2}$ -Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1975, вып.6, с.205-212 .

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7

1976

УДК 513.73

Е.А.Х л я п о в а

ИНВАРИАНТНЫЕ ОБРАЗЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С КОНГРУЭНЦИЕЙ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В A_n.

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматриваются конгруэнции Ψ_{n-1} ($(n-1)$-мерные многообразия) центральных квадратичных элементов $\mathcal{F}$ [1]. Аналитически строится инвариантная точка B , не инцидентная гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$. Построены и геометрически охарактеризованы инвариантная прямая, не коллинеарная гиперплоскости α_{n-1}, и инвариантная точка, инцидентная этой гиперплоскости.

§1. Инвариантная точка B

Отнесем конгруэнцию Ψ_{n-1} к подвижному реперу $R^1=\{A,\bar e_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n)$, начало A которого совмещено с центром квадратичного элемента $\mathcal{F}$, векторы $\bar e_i$ $(i,j,k,\ell=1,\dots,n-1)$ расположены в его гиперплоскости, а вектор $\bar e_n$ — вне её. В репере R^1 уравнения квадратичного элемента $\mathcal{F}$ и замкнутая система уравнений Пфаффа конгруэнции Ψ_{n-1} запишутся соответственно в виде

$$a_{ij}x^i x^j-1=0,\quad x^n=0; \tag{1}$$

$$\omega^n=\Lambda^n_i\omega^i,\quad \omega^n_i=\Lambda^n_{ij}\omega^j,\quad \theta_{ij}=\Lambda_{ijk}\omega^k; \tag{2}$$

где $\Delta\Lambda^n_i\wedge\omega^i=0,\ \Delta\Lambda^n_{ij}\wedge\omega^j=0,\ \Delta\Lambda_{ijk}\wedge\omega^k=0,$ (3)

$\omega^\alpha,\ \omega^\beta_\alpha$ -компоненты инфинитезимальных перемещений репера R^1,

$$\theta_{ij} = da_{ij} - a_{kj}\omega^k_i - a_{ik}\omega^k_j\,;$$
$$\Delta\Lambda_i = d\Lambda_i - \Lambda_j\omega^j_i + \Lambda^n_i\omega^n_n - \Lambda_j\Lambda^n_i\omega^j_n + \omega^n_i\,;$$
$$\Delta\Lambda^n_{ij} = d\Lambda^n_{ij} - \Lambda^n_{kj}\omega^k_i - \Lambda^n_{ik}\omega^k_j + \Lambda^n_{ij}\omega^n_n - \Lambda^n_{ik}\Lambda^n_j\omega^k_n\,;$$
$$\Delta\Lambda_{ijk} = d\Lambda_{ijk} - \Lambda_{\ell jk}\omega^\ell_i - \Lambda_{i\ell k}\omega^\ell_j - \Lambda_{ij\ell}\omega^\ell_k - \qquad (4)$$
$$-\Lambda_{ij\ell}\Lambda^n_k\omega^\ell_k - (a_{\ell j}\Lambda^n_{ik} + a_{i\ell}\Lambda^n_{jk})\omega^\ell_n\,;\ \omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^{n-1}\neq 0.$$

Рассмотрим систему величин $\{\Lambda^n_{ij}\}$. Пусть $\det\|\Lambda^n_{ij}\|\neq 0$, Λ^{ij}_n -приведенные миноры элементов Λ^n_{ij}. Тогда
$$\Lambda^{ik}_n\Lambda^n_{jk} = \delta^i_j\,,\quad \delta\Lambda^{ij}_n = -\Lambda^{kj}_n\pi^i_k - \Lambda^{ik}_n\pi^j_k + \Lambda^{ij}_n\pi^n_n - \Lambda^{ik}_n\Lambda^n_k\pi^j_n\,.$$

Обозначим:
$$\ell_i = \Lambda_{ijk}\Lambda^{jk}_n\,,\quad \ell^i = a^{ij}\ell_j\,. \qquad (6)$$

Так как
$$\delta\ell_i = \ell_j\pi^j_i + a_{ji}\pi^j_n + n\cdot a_{ij}\pi^j_n + \ell_i\pi^n_n\,,$$
$$\delta\ell^i = -\ell^j\pi^i_j + \ell^i\pi^n_n + (1+n)\pi^i_n\,,$$
то система величин $\{\ell^i\}$ образует геометрический объект (квазитензор), который задает инвариантную точку B, не инцидентную гиперплоскости квадратичного элемента $\mathcal{F}$:
$$\bar{B} = \bar{A} + \bar{e}_n - \frac{1}{1+n}\ell^i\bar{e}_i\,.$$

§2. Оснащение поверхности центров

В общем случае касательная гиперплоскость гиперповерхности центров (A) не инцидентна гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$. Отнесем конгруэнцию Ψ_{n-1} к реперу $R^2 = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, выделенному из репера R^1 условием компланарности векторов $\bar{e}_a$ $(a = 2, \ldots, n)$ касательной гиперплоскости поверхности центров (A). Система пфаффовых уравнений конгруэнции Ψ_{n-1} в репере R^2 имеет вид:

$$\omega^1 = 0;\ \omega^a_1 = \Lambda^a_{1\ell}\omega^\ell;\ \omega^n_i = \Lambda^n_{ia}\omega^a;\ \omega^1_a = \Lambda_{a\ell}\omega^\ell;\ \theta_{ij} = \Lambda_{ija}\omega^a, \qquad (7)$$
где
$$\omega^2\wedge\omega^3\wedge\ldots\wedge\omega^n\neq 0\,;\quad \Lambda_{a\ell} = \Lambda_{\ell a}\,.$$

Имеем:
$$\delta\Lambda_{a\ell} = \Lambda_{ac}\pi^c_\ell + \Lambda_{c\ell}\pi^c_a - \Lambda_{a\ell}\pi^1_1\,. \qquad (8)$$

Дифференциальное уравнение гиперповерхности (A) запишется в виде
$$\omega^1 = 0\,. \qquad (9)$$

Асимптотическая форма гиперповерхности (A) имеет вид:
$$\Phi \equiv \omega^a\omega^1_a = \Lambda_{a\ell}\omega^a\omega^\ell\,. \qquad (10)$$

Два направления ω^a и $\bar{\omega}^\ell$ на гиперповерхности (A) будут сопряжены, если
$$\Lambda_{a\ell}\omega^a\bar{\omega}^\ell = 0\,. \qquad (11)$$

Пересечение касательной гиперплоскости гиперповерхности (A) и гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$ есть $(n-2)$ -мерная плоскость α_{n-2}, определяемая точкой A и векторами $\bar{e}_{\hat{a}}$ $(\hat{a} = 2, \ldots, n-2)$.

Направление $\bar{\ell}$ на поверхности (A), сопряженное любому направлению, принадлежащему плоскости α_{n-2}, задается следующим образом:
$$\Lambda_{a\hat{\ell}}\,\omega^a = 0\,,\quad \omega^1 = 0\,. \qquad (12)$$

Инвариантная прямая, проходящая через точку A и коллинеарная $\bar{\ell}$, определяется системой уравнений
$$\mathcal{F}_{\hat{\ell}} \equiv \Lambda_{a\hat{\ell}}\,x^a = 0\,,\quad x^1 = 0\,. \qquad (13)$$

§3. Инвариантная точка гиперплоскости α_{n-1}

Отнесем конгруэнцию Ψ_{n-1} к реперу $R^3 = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, выделенному из репера R^2 совмещением конца E_1 вектора $\bar{e}_1$ с характеристической точкой гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$.

В построенном репере конгруэнция Ψ_{n-1} определяется системой пфаффовых уравнений (7) и уравнениями

$$\omega_1^n = -\omega^n, \quad \omega_1^1 = \Lambda_{1a}^1 \omega^a. \qquad (14)$$

Уравнения поляры β_{n-2} точки E_1 относительно квадратичного элемента $\mathcal{F}$ имеют вид:

$$a_{1i} x^i - 1 = 0, \quad x^n = 0. \qquad (15)$$

Обозначим буквой Q_1 квадрику

$$a_{\hat a \hat b} x^{\hat a} x^{\hat b} - 1 = 0, \quad x^1 = 0, \quad x^n = 0, \qquad (16)$$

полученную при пересечении квадратичного элемента $\mathcal{F}$ плоскостью α_{n-2}.

Сечение γ_{n-3} поляры β_{n-2} плоскостью α_{n-2} определяется уравнениями

$$a_{1\hat a} x^{\hat a} - 1 = 0, \quad x^1 = 0, \quad x^n = 0. \qquad (17)$$

Полюс M плоскости γ_{n-3} относительно квадрики Q_1 задается формулой

$$\bar{M} = \bar{A} - a^{\hat a \hat b} a_{1\hat b} \bar{e}_{\hat a}. \qquad (18)$$

Таким образом, построена инвариантная точка M гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. "Труды геом.семинара". М., ВИНИТИ, 1969, 2, 179-206.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Ю.И.Ш е в ч е н к о

СВЯЗНОСТИ В ГЛАВНЫХ РАССЛОЕНИЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ТАНГЕНЦИАЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В проективном пространстве P_N рассмотрим тангенциально вырожденную поверхность $S_{n,m}$ как r-мерное многообразие ($r = n - m$) пар плоскостей (L_m, T_n), обладающее тем свойством, что плоскость L_m вместе со своей первой дифференциальной окрестностью принадлежит плоскости T_n. С тангенциально вырожденной поверхностью $S_{n,m}$ ассоциируется главное расслоение, базой которого является r-мерное многообразие плоских образующих L_m, а слоем-группа, действующая на паре плоскостей (L_m, T_n). Показано, что для задания связности в ассоциированном расслоении достаточно произвести обобщенную нормализацию тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$, т.е. к каждой образующей L_m присоединить: 1/нормаль 1-го рода - ($N-r$)-мерную плоскость P_{N-r}, пересекающую касательную плоскость T_n по образующей L_m; 2/нормаль 2-го рода - ($r-1$)-мерную плоскость P_{r-1}, принадлежащую касательной плоскости T_n и не имеющую общих точек с образующей L_m. Аналогичным образом рассмотрена нормально центрированная тангенциально вырожденная поверхность.

Отнесем N-мерное проективное пространство P_N к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{J}'}\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA_{\mathcal{J}'} = \theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'} A_{\mathcal{K}'} \quad (\mathcal{I}', \mathcal{J}', \mathcal{K}' = 0, 1, \ldots, N), \tag{1}$$

причем линейные формы $\theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'} = \theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{J}'} \wedge \theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}.$$

В качестве инвариантных форм проективной группы $GP(N,R)$ будем рассматривать формы

$$\omega^{\mathcal{J}} = \theta_0^{\mathcal{J}}, \quad \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}} = \theta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}} - \delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}} \theta_0^0,$$

$$\omega_{\mathcal{J}} = \theta_{\mathcal{J}}^0 \quad (\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = \overline{1, N}),$$

которые удовлетворяют структурным уравнениям [I-3]

$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}} = \omega^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}},$$

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}} \wedge \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} + (\delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}} \omega_{\mathcal{J}} + \delta_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \omega_{\mathcal{K}}) \wedge \omega^{\mathcal{J}},$$

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}.$$

Формулы (I) теперь можно записать в виде

$$dA_0 = \theta_0^0 A_0 + \omega^{\mathcal{J}} A_{\mathcal{J}},$$

$$dA_{\mathcal{J}} = \theta_0^0 A_{\mathcal{J}} + \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}} + \omega_{\mathcal{J}} A_0.$$

В проективном пространстве P_N рассмотрим тангенциально вырожденную поверхность $S_{n,m}$ [4], которая представляет собой такой частный случай линейчатой поверхности X_{m+r} $(r = n-m)$ с m-мерными плоскими образующими L_m, когда касательная плоскость T_n постоянна вдоль образующей L_m.

Произведем специализацию подвижного репера $R_0 = \{A_0, A_a, A_i, A_\alpha\}$, где индексы принимают значения:

$$a, b, c = 1, \ldots, m; \quad i, j, k = m+1, \ldots, n;$$

$$\alpha, \beta, \gamma = n+1, \ldots, N \quad (1 \leq m < n < N).$$

Вершины $A_0, A_1, \ldots, A_m$ репера R_0 поместим на плоскую образующую L_m, вершины A_i – на касательную плоскость T_n, содержащую плоскую образующую L_m.

Система дифференциальных уравнений тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$ в репере R_0 имеет вид:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_a^\alpha = 0, \tag{2}$$

$$\omega_a^i = \Lambda_{aj}^i \omega^j, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j. \tag{3}$$

Замыкая систему уравнений (2), получим тождества

$$\Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ji}^\alpha, \quad \Lambda_{ai}^k \Lambda_{kj}^\alpha = \Lambda_{aj}^k \Lambda_{ki}^\alpha.$$

Продолжая систему уравнений (3), получим

$$\overline{\nabla} \Lambda_{a(j)}^i - \delta_j^i \omega_a \equiv 0, \quad \overline{\nabla} \Lambda_{i(j)}^\alpha \equiv 0,$$

причем символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i, а дифференциальный оператор $\overline{\nabla}$ действует следующим образом:

$$\overline{\nabla} \Lambda_{i(j)}^\alpha = d\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ik}^\alpha \overline{\omega}_j^k - \Lambda_{kj}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha,$$

где

$$\overline{\omega}_j^k = \omega_j^k - \Lambda_{aj}^k \omega^a. \tag{4}$$

Совокупность функций $\Lambda = (\Lambda_{aj}^i, \Lambda_{ij}^\alpha)$ будем называть фундаментальным объектом первого порядка тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$, рассматриваемой как специальное r-мерное многообразие пар плоскостей (L_m, T_n), а репер R_0 – репером нулевого порядка.

С тангенциально вырожденной поверхностью $S_{n,m}$ ассоциируется главное расслоение $G(B_r)$ со структурными уравнениями

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \overline{\omega}_j^i, \tag{5}$$

$$\mathcal{D}\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^i \wedge \omega_i^a, \tag{6}$$

$$\mathcal{D}\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + (\delta_b^a \omega_c + \delta_c^a \omega_b) \wedge \omega^c + \omega^i \wedge \omega_{bi}^a, \tag{7}$$

$$\mathcal{D}\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b + \omega^i \wedge \omega_{ai}, \tag{8}$$

$$\mathcal{D}\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_a \wedge \omega^a + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i,$$

$$\mathcal{D}\omega_i = \omega_i^a \wedge \omega_a + \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij},$$

$$\mathcal{D}\omega_i^a = \omega_i^b \wedge \omega_b^a + \omega_i^j \wedge \omega_j^a + \omega_i \wedge \omega^a + \omega^j \wedge \omega_{ij}^a,$$

где

$$\omega_{bi}^a = \Lambda_{bi}^j \omega_j^a - \delta_b^a \omega_i, \quad \omega_{ai} = \Lambda_{ai}^j \omega_j,$$
$$\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^\alpha \omega_\alpha^i - \Lambda_{ak}^i \omega_j^a - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j, \qquad (9)$$
$$\omega_{ij} = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha, \quad \omega_{ij}^a = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha^a.$$

Базой главного расслоения $G(B_\tau)$ является τ-мерное многообразие B_τ плоских образующих L_m, а слоем-группа $G \subset GP(N,R)$, действующая на паре плоскостей (L_m, T_n). Расслоение $G(B_\tau)$ содержит расслоение проективных реперов [2-3] со структурными уравнениями (5)-(8), слоем которого является проективная группа $GP(m,R) \subset G$, действующая на плоской образующей L_m.

Связность в главном расслоении $G(B_\tau)$ зададим с помощью поля объекта связности [5]

$$\Gamma = (\Gamma_i^a, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ij}^a)$$

на базе B_τ:

$$\bar\nabla \Gamma_{(i)}^a - \Gamma_{bi}^a \omega^b + \omega_i^a \equiv 0,$$
$$\bar\nabla \Gamma_{b(i)}^a + \delta_b^a (\Gamma_{ci}\omega^c - \Gamma_i^c \omega_c) + \Gamma_{bi}\omega^a - \Gamma_i^a \omega_b + \omega_{bi}^a \equiv 0,$$
$$\bar\nabla \Gamma_{a(i)} + \Gamma_{ai}^b \omega_b + \omega_{ai} \equiv 0, \qquad (10)$$
$$\bar\nabla \Gamma_{j(k)}^i + \delta_j^i (\Gamma_{ak}\omega^a - \Gamma_k^a \omega_a) + \omega_{jk}^i \equiv 0,$$
$$\bar\nabla \Gamma_{i(j)} + \Gamma_{ij}^a \omega_a + \Gamma_{ij}^k \omega_k - \Gamma_{aj}\omega_i^a + \omega_{ij} \equiv 0,$$
$$\bar\nabla \Gamma_{i(j)}^a - \Gamma_{bj}^a \omega_i^b + \Gamma_{ij}^k \omega_k^a + \Gamma_{ij}\omega^a - \Gamma_j^a \omega_i + \omega_{ij}^a \equiv 0.$$

Т е о р е м а. Обобщенная нормализация тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$ позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G(B_\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нормаль 1-го рода $P_{N-\tau}$ зададим системой уравнений

$$x^i - \lambda_\alpha^i x^\alpha = 0,$$

где

$$\nabla \lambda_\alpha^i + \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha j}^i \omega^j,$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует обычным образом:

$$\nabla \lambda_\alpha^i = d\lambda_\alpha^i - \lambda_\beta^i \omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^j \omega_j^i.$$

Нормаль 2-го рода $P_{\tau-1}$ зададим системой точек

$$B_i = A_i + \lambda_i^a A_a + \lambda_i A_0.$$

Из условий инвариантности плоскости $P_{\tau-1}$ найдем

$$\nabla \lambda_i^a + \lambda_i \omega^a + \omega_i^a = \lambda_{ij}^a \omega^j,$$
$$\nabla \lambda_i + \lambda_i^a \omega_a + \omega_i = \lambda_{ij} \omega^j. \qquad (11)$$

Продолжая систему уравнений (II), получим

$$\bar\nabla \lambda_{i(j)}^a - \lambda_k^a \omega_{ij}^k + \lambda_i^b \omega_{bj}^a + \lambda_{ij}\omega^a + \lambda_i \omega_j^a + \omega_{ij}^a \equiv 0,$$
$$\bar\nabla \lambda_{i(j)} - \lambda_k \omega_{ij}^k + \lambda_{ij}^a \omega_a + \lambda_i^a \omega_{aj} + \omega_{ij} \equiv 0.$$

Обобщенная нормализация тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$ задается полем квазитензора $\lambda = (\lambda_\alpha^i, \lambda_i^a, \lambda_i)$ на базе B_τ. Фундаментальный объект первого порядка Λ и частично продолженный нормализующий объект

$$\lambda' = (\lambda, \lambda_{ij}^a, \lambda_{ij})$$

позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma_i^a = \lambda_i^a, \quad \Gamma_{bi}^a = \Lambda_{bi}^j \lambda_j^a - \delta_b^a \lambda_i, \quad \Gamma_{ai} = \Lambda_{ai}^j \lambda_j,$$

$$\Gamma^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_\alpha - \Lambda^i_{ak}\lambda^a_j - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j,$$

$$\Gamma_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_k\Gamma^k_{ij} - \lambda^a_i\Gamma_{aj},$$

$$\Gamma^a_{ij} = \lambda^a_{ij} + \lambda^a_k\Gamma^k_{ij} - \lambda^b_i\Gamma^a_{bj} - \lambda_i\lambda^a_j.$$

З а м е ч а н и е. I. Известно, что тангенциально вырожденная поверхность является частным случаем поверхности, рассматриваемой как многообразие точек. С другой стороны, поверхность, рассматриваемая как многообразие центрированных плоскостей [6], является частным случаем тангенциально вырожденной поверхности, представляемой нами как специальное многообразие пар плоскостей. В последнем частном случае обобщенная нормализация совпадает с нормализацией А.П.Нордена [7].

З а м е ч а н и е 2. Л.С.Атанасян и Н.С.Воронцова [8-9] ввели обобщенное оснащение тангенциально вырожденной гиперповерхности, рассматриваемой как многообразие точек. В связи с другой точкой зрения, на тангенциально вырожденную гиперповерхность понятия обобщенного оснащения и обобщенной нормализации не совпадают.

З а м е ч а н и е 3. С учетом обозначений (4), (9) из системы уравнений (I0) следует, что объект связности Γ не является геометрическим объектом (относительно подгруппы стационарности пары плоскостей (L_m, T_n), но вместе с фундаментальным объектом первого порядка Λ образует геометрический объект. Объекты связности такого рода использовались главным образом в работах Ю.Г.Лумисте [2-3], однако указанная особенность не отмечалась.

Рассмотрим нормально центрированную [I0] тангенциально вырожденную поверхность $S^*_{n,m}$, т.е. тангенциально вырожденную поверхность $S_{n,m}$, на каждой плоской образующей которой задана точка, причем: а/ центр C описывает r-мерную поверхность X_r; б/ касательная плоскость T_r к поверхности X_r и центрированная образующая L^*_m пересекаются в центре C.

С поверхностью $S^*_{n,m}$ ассоциируется главное расслоение $G^*(X_r)$, базой которого является поверхность X_r, а слоем-группа $G^* \subset G$, действующая на паре плоскостей (L^*_m, T_n). Справедливы следующие результаты.

Т е о р е м а. Для задания связности в главном расслоении $G^*(X_r)$ достаточно произвести обобщенную нормализацию поверхности $S^*_{n,m}$, т.е. к каждой точке базисной поверхности X_r присоединить: I/ нормаль первого рода - $(N-n)$-мерную плоскость P_{N-n}, пересекающую касательную плоскость T_n в центре C; 2/ нормаль второго рода - $(r-1)$-мерную плоскость P_{r-1}, принадлежащую касательной подплоскости T_r и не проходящую через центр C.

П р е д л о ж е н и е I. Задание поля нормалей первого рода P_{N-n} эквивалентно заданию полей двух плоскостей: а/ $(N-m)$-мерной плоскости P_{N-m}, пересекающей касательную плоскость T_n по подплоскости T_r; б/ $(N-r)$-мерной плоскости P_{N-r}, пересекающей касательную плоскость T_n по образующей L^*_m, в/ плоскости P_{N-m}, P_{N-r} пересекаются по нормали первого рода P_{N-n}.

П р е д л о ж е н и е 2. Задание поля нормалей второго рода P_{r-1} эквивалентно присоединению к каждой точке базисной поверхности X_r $(n-1)$-мерной плоскости P_{n-1}, принадлежащей касательной плоскости T_n, не проходящей через центр C и пересекающей образующую L^*_m по некоторой внутренним образом определенной $(m-1)$-мерной плоскости L_{m-1}.

Из предложений I, 2 следует, что обобщенную нормализацию нормально центрированной тангенциально вырожденной поверхности $S^*_{n,m}$ можно представить в 4-х эквивалентных видах.

Список литературы

I. Л а п т е в Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. "Тр.Моск.матем.об-ва", т. 2, I953, 275-382.

2. Л у м и с т е Ю.Г., Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях. "Уч. зап. Тартуск. у-та", вып. I77, I965, 6-4I.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Проективные связности в канонических

расслоениях многообразий плоскостей. Матем. сб., 1973, т. 91, №2, 211-233.

4. А к и в и с М.А., Р ы ж к о в В.В. Многомерные поверхности специальных проективных типов. Тр. 4-го Всесоюз. матем. съезда, 1961, т. 2, Л., "Наука", 1964, 159-164.

5. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961, т. 2, "Наука", 1964, 226-233.

6. К а р а п е т я н С.Е. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей и её интерпретации. Лит. матем. сб., 1963, т. 3, №2, 222-223.

7. Н о р д е н А.П., Пространства аффинной связности. М.-Л. ГИТТЛ, 1950

8. А т а н а с я н Л.С., В о р о н ц о в а Н.С., Специальные нормализации вырожденных гиперповерхностей (n+1)-мерного проективного пространства. Волжский матем. сб., вып. 1, Куйбышев, 1963, 5-9.

9. А т а н а с я н Л.С., В о р о н ц о в а Н.С., Построение инвариантного оснащения τ-вырожденной гиперповерхности многомерного проективного пространства. Вопросы дифф. геом. М., 1965, 5-28.

10. В а г н е р В.В., Теория поля локальных гиперполос. Тр. Семин. по вектор. и тензорн. анализу, 1950, вып. 8, 197-272.

С е м и н а р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском государственном университете.

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 28 мая 1975 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 15 октября 1975 года по 26 мая 1976 года.

15.10.1975г. М а х о р к и н В.В. Представление фундаментальной группы однородного пространства в его касательном расслоении.

22.10.1975г. Ю.И. П о п о в. Аффинные связности вырожденной распадающейся гиперполосы.

29.10.1975г. Б.А. А н д р е е в. Дифференцируемые соответствия между пространством нуль-пар и точечным пространством.

5.11.1975г. В.М. О в ч и н н и к о в. Об одном классе дифференцируемых отображений пространств с различными образующими элементами.

12.11.1975г. Т.П. Ф у н т и к о в а. Вырожденные конгруэнции линейных пар фигур.

19.11.1975г. М.В. Б р а з е в и ч (г. Омск). Об одной задаче нормализации многообразия Грассмана.

26.11.1975г. Е.В. С к р ы д л о в а. О вырожденных конгруэнциях пар коник.

3.12.1975г. Ю.И. Ш е в ч е н к о. Обобщенные нормализации полосы и тангенциально вырожденной поверхности в проективном пространстве.

10.12.1975г. В.Б. К и м. (г. Комсомольск-на-Амуре) О многообразии кубик в проективном пространстве.

17.12.1975г.Е.А.Х л я п о в а.Псевдофокальные точки оснащенного квадратичного элемента конгруэнции φ_{n-1} .

24.12.1975г.Л.Г.К о р с а к о в а.Пары конгруэнций коник,инцидентных одной квадрике.

11.2.1976г.Е.А.Х л я п о в а.Гиперконгруэнции оснащенных квадратичных элементов в A_n.

18.2.1976г.В.С.М а л а х о в с к и й.Об одном классе конгруэнции квадрик в P_3.

25.2.1976г.Г.Л.С в е ш н и к о в а.Оснащенные конгруэнции коник в P_3.

10.3.1976г.Ю.И.Ш е в ч е н к о.Связность в главных расслоениях,ассоциированных с некоторыми многообразиями фигур в проективном пространстве.

17.3.1976г.В.С.М а л а х о в с к и й.Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник.

24.3.1976г.Ю.И.П о п о в.Аффинные связности вырожденной нераспадающейся гиперполосы.

31.3.1976г.Е.П.С о п и н а.Гиперконгруэнции центральных невырожденных гиперквадрик в A_n.

7.4.1976г.Л.Г.К о р с а к о в а.Расслояемые пары конгруэнций коник в P_3.

14.4.1976г.В.С.М а л а х о в с к и й.Безынтегральное представление конгруэнций коник с неопределенными фокальными поверхностями.

21.4.1976г.В.П.Ц а п е н к о.Конгруэнции параболоидов в E_3.

28.4.1976г.Г.П.Т к а ч.Об одном классе аффинно-расслояемых пар фигур в A_3.

5.5.1976г. С.П е т р о в а.Конгруэнции квадратичных элементов с вырождающейся характеристической гиперповерхностью.

5.5.1976г.М.О с т р о в с к а я .Многообразия гиперэллипсов с неподвижным центром.

12.5.1976г.Э.В.С о н и н а.Регулярные гиперполосы многомерного аффинного пространства.

12.5.1976г.Т.Г р о б е р.Геометрия специального класса регулярных гиперполос.

19.5.1976г.Л.Ж и г а л о в а.Квадратичные гиперполосы многомерного проективного пространства.

19.5.1976г.О.Ф у р с о в а.Некоторые типы вырожденных конгруэнций квадратичных пар.

26.5.1976г.Н.П о л и щ у к.Конгруэнции коник с одной вырождающейся фокальной поверхностью.

26.5.А.Т у ч и н.Гиперполосы проективного пространства с невырождающимся абсолютом.

26.5.1976г. Е.А.М и т р о ф а н о в а.Конгруэнции гиперпараболоидов в n-мерном эквиаффинном пространстве.

УДК 513.73

О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и пространством пары (P,q). А н д р е е в Б.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.7, Калининград, 1967, с.5-9.

Изучается локальное соответствие между точечным проективным пространством и пространством пар фигур, состоящих из точки n-мерного проективного пространства и неинцидентной ей гиперквадрики.

Библиография: 5 названий.

УДК 513.73

Сопряженная сеть на гиперповерхности проективного пространства P_n, ассоциированной с семейством конусов второго порядка. Б а г д а с а р я н Ж.Н. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7., Калининград, 1976, с.10-15.

Рассматривается гиперповерхность в n-мерном проективном пространстве с заданным полем конусов второго порядка, инцидентных соответствующим касательным гиперплоскостям. В общем случае на такой гиперповерхности выделяется сопряженная сеть.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Об одной задаче нормализации многообразия Грассмана. Б р а з е в и ч М.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7, Калининград, 1976, с.16-25.

Найдена специальная нормализация многообразия Грассмана $Gr(1,3)$, все одномерные подмногообразия которого будут соответствовать инволютивным парам линейчатых поверхностей.

Библиография: 6 названий.

УДК 513.73

О нормализации оснащенной многомерной поверхности пространства проективной связности. И в л е в Е.Т., П о д с к р е б к о Э.Н., С у х о т и н А.М. - "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7, Калининград, 1976, с.26-32.

Строится нормализация m-мерной поверхности пространства проективной связности, оснащенной полем гиперплоскостей общего положения.

Б и б л и о г р а ф и я: 5 названий.

УДК 513.73

Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии в пространстве E^m. И г н а т е н к о В.Ф., "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7, Калининград, 1976, с.33-38.

Рассматриваются алгебраические поверхности в m-мерном евклидовом пространстве, имеющие бесконечные множества плоскостей косой симметрии.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

О многообразии кубик в проективном пространстве. К и м В.Б. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7, Калининград, 1976, с.39-44.

Дана общая характеристика пространства кубик.

Библиография: 4 названия.

УДК 513.73

Расслояемые пары конгруэнций коник в P_3. К о р с а к о в а Л.Г. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.7, Калининград, 1976, с.45-52.

В трехмерном проективном пространстве выделены семь проективно неэквивалентных классов расслояемых пар конгруэнций коник.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник. М а л а х о в с к и й В.С. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7, Калининград, 1976, с.53-59.

Показано, что характеристический признак конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник - касание всех квадрик конгруэнции одной квадрики вдоль фокальной коники, характеристический признак конгруэнции коник с неопределенными фокальными поверхностями - принадлежность всех коник конгруэнции одной квадрике.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Однопараметрические семейства квадрик в трехмерном проективном пространстве. М а х о р к и н В.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.7, Калининград, 1976,с.60-62.

На каждой квадрике однопараметрического семейства квадрик выделяются алгебраические многообразия и дается их геометрическая интерпретация.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Конгруэнции гиперпараболоидов в n-мерном эквиаффинном пространстве. М и т р о ф а н о в а Е.А."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.7,Калининград, 1976,с.63-67.

Найден основной объект (n-1)-мерного многообразия гиперпараболоидов и некоторые охватываемые им объекты. Получено безынтегральное представление одного частного класса гиперболических параболоидов в A_3.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Некоторые вопросы геометрии соответствий между точечным пространством и пространством гиперплоскостных элементов. О в ч и н н и к о в В.М."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.7,Калининград,1976,с.68-71.

Найдены некоторые геометрические образы, ассоциированные с локальным дифференцируемым отображением точечного проективного пространства в пространство гиперплоскостных элементов.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Связности на почти контактном многообразии. П о л я к о в Н.Д."Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7,Калининград,1976,с.72-77.

На почти контактном многообразии оснащенном полем некоторого объекта, определена внутренним образом аффинная связность без кручения.

Библиография: 4 названия.

УДК 513.73

Аффинные связности вырожденных гиперполос. П о п о в Ю.И."Дифференциальная геометрия многообразий фигур",Вып.7, Калининград,1976,с.78-84.

Рассмотрены аналитические и геометрические признаки эквиаффинности связностей первого и второго рода конических и плоских вырожденных нормально центрированных m-мерных гиперполос ранга r.

Библиография: 4 названия.

УДК 513.73

Пары Θ нормальных конгруэнций. Р е д о з у б о в а О.С."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.7, Калининград,1976,с.85-92.

Получен ряд свойств пар Θ, образованных нормальными прямолинейными конгруэнциями.

Библиография: 4 названия.

УДК 513.73

Об одном классе конгруэнций коник в P_3. С в е ш н и к о в а Г.Л."Дифференциальная геометрия многообразий фигур",вып7,Калининград,1976,с.93-97.

Рассмотрены конгруэнции коник в трехмерном проективном пространстве, у которых характеристические точки плоскостей коник инцидентны соответствующим коникам.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

О вырожденных конгруэнциях второго рода, порожденных парой коник. С к р ы д л о в а Е.В."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.7,Калининград,1976,с.98-103

Рассматривается двупараметрическое семейство пар коник, когда каждая коника описывает одномерное многообразие.

Библиография: 1 название.

УДК 513.73

Конгруэнции центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве. С о п и н а Е.П."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.7,Калининград,1976,с.104-109.

В n-мерном аффинном пространстве исследуются $(n-1)$-мерные многообразия центральных невырожденных гиперквадрик.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

О внутренней геометрии поверхности Картана. С т о л я р о в А.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" Вып.7, Калининград, 1976, с.110-117.

Построены две инвариантные нормализации поверхности Картана. Доказана полнота фундаментального объекта пятого порядка этой поверхности. Рассмотрены индуцируемые нормализациями аффинные связности.

Библиография: 16 названий.

УДК 513.73

Ступенчато-чебышевские сети на многомерных поверхностях аффинного пространства. Т и х о н о в В.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7, Калининград, 1976, с.118-128.

Рассмотрен класс сетей на многомерных поверхностях аффинного пространства-ступенчато-чебышевские сети. Доказано, что такая сеть является сопряженной сетью на поверхности.

Библиография: 4 названия.

УДК 513.73

Безынтегральное представление двух классов вырожденных конгруэнций $(CL)_{1,2}$. Ф у н т и к о в а Т.П. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7, Калининград, 1976, с.129-133.

Даны безынтегральные представления двух классов вырожденных конгруэнций полуквадратичных пар фигур в эквиаффинном пространстве.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

Инвариантные образы, ассоциированные с конгруэнцией центральных квадратичных элементов в A_n. Х л я п о в а Е.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7, Калининград, 1976, с.134-137.

Рассматриваются (n-1)-мерные многообразия центральных квадратичных элементов в n-мерном аффинном пространстве. Найдены и геометрически охарактеризованы инвариантная прямая, не коллинеарная гиперплоскости квадратичного элемента, и инвариантная точка, принадлежащая этой гиперплоскости.

Библиография: 1 название.

УДК 513.73

Связности в главных расслоениях, ассоциированных с тангенциально вырожденными поверхностями в проективном пространстве. Ш е в ч е н к о Ю.И. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.7, Калининград, 1976, с.138-145.

Вводится понятие обобщенной нормализации тангенциально вырожденной поверхности, позволяющей задавать связность в ассоциированном расслоении.

Библиография: 10 названий.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 7

Редактор **В. И. Васильева.** Техн. редактор **Н. Д. Шишкова.**

Сдано в набор 20/V 1976 г. Подписано к печати 23/VI 1976 г. Формат бумаги $60 \times 90^{1}/_{16}$
Сорт бумаги офсетн. № 1. 80 г/м. Печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 9,375. КУ 02352. Заказ 3188
Тираж 500 экз. Цена 1 руб.

Калининградский государственный университет. ул. Университетская, 2.

Типография издательства «Калининградская правда»
Калининград обл., ул. Карла Маркса, 18

1 руб.