КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 2

КАЛИНИНГРАД-1971

Т Р У Д Ы

КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 2

г. КАЛИНИНГРАД.   1971.

Редактор профессор В.С.МАЛАХОВСКИЙ

КУ-05188. 06.07.71. Заказ 265. Тираж 500.
Объем 5,5 п.л. Формат 60x84/16. Цена 60 коп.

Ротапринт Клайпедского отделения Гипрорыбфлот
г.Клайпеда Лит. ССР, ул.Миниос, 2

Содержание

ОТ РЕДАКТОРА

В данном сборнике публикуются работы, в которых исследуются многообразия фигур и пар фигур в трехмерном и многомерном пространствах. Основная часть работ выполнена на кафедре геометрии Калининградского университета в 1970 году. Как и в предыдущие годы, преподаватели и аспиранты кафедры, а также студенты, специализирующиеся по геометрии, работали над проблемой "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".

В статье В.С.Малаховского рассматриваются оснащенные многообразия фигур в n-мерном однородном пространстве и устанавливается их связь с пфаффовыми подмногообразиями.

Ю.И.Попов исследовал в n-мерном проективном пространстве P_n вырожденные гиперполосы ранга $r=\frac{m}{2}$.

Б.А.Андреев и В.И.Овчинников изучали локально биективные дифференцируемые отображения N-мерного проективного пространства P_N в многообразия некоторых типов фигур и пар фигур пространства P_n.

И.М.Похила исследовал в P_n пары многообразий квадратичных элементов, в частности, некоторые классы расслояемых пар конгруэнций коник в P_3.

В.А.Гриценко рассмотрел в P_n многообразия квадратичных элементов, гиперплоскости которых образуют семейство меньшей размерности.

Г.Н.Шевченко изучал в многомерном аффинном пространстве многообразия центральных квадратичных гиперцилиндров.

В работе Г.Л.Свешниковой рассмотрены конгруэнции коник с тремя вырождающимися фокальными поверхностями.

Г.П.Ткач и Ф.А.Липатова исследовали конгруэнции некоторых типов пар фигур в эквиаффинном и аффинном пространствах.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
вып 2 1971

МАЛАХОВСКИЙ В.С.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОСНАЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР.

В n-мерном однородном пространстве рассматривается m-мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ фигур F с заданным оснащающим объектом φ_k. Такое многообразие является многообразием $\mathfrak{M}^*_m$ фигур F^*, где F^* — пара фигур, образованная фигурой F и фигурой φ_k, порожденной объектом φ_k.

В трехмерном евклидовом, эквиаффинном и проективном пространствах оснащенные точечные и линейчатые многообразия исследовались, главным образом, Р.Н.Щербаковым и его учениками [4] и румынскими геометрами [9]. Чешские геометры [10] рассматривали инволютивные оснащенные многообразия некоторых классов фигур в n-мерном проективном пространстве. В [2] даны общие принципы построения многообразий индуцирующих фигур методом продолжения и охватов Г.Ф.Лаптева [1]. Г.Георгиев и И.Попа [8] предложили другой подход к исследованию многообразий индуцирующих фигур ("эквипараметрических многообразий").

В данной работе рассматриваются общие вопросы дифференциальной геометрии оснащенных многообразий фигур.

§ I. Поля фундаментальных объектов многообразия фигур.

Рассмотрим n-мерное однородное пространство E_n с фундаментальной τ-членной группой Ли G, определяемой линейно независимыми формами Пфаффа $\omega^s(u^\rho, du^\rho)$ и структурными постоянными C^s_{pq} $(p,q,s=1,\dots,\tau)$. Пусть $F(a^{\mathcal{J}})$ $(\mathcal{J},\mathcal{K}=1,2,\dots,N)$ — фигура пространства E_n ранга N [3]. Если формы Пфаффа

$$\Omega^{\mathcal{J}} \equiv da^{\mathcal{J}} - f^{\mathcal{J}}_s(a)\,\omega^s(u,du) \tag{1.1}$$

являются левыми частями уравнений стационарности фигуры F, то система дифференциальных уравнений многообразия $\mathfrak{M}_m$ фигур F запишется в виде:

$$\Omega^a = \lambda^a_i \Omega^i \quad (i,j,k=1,2,\dots,m;\quad a=m+1,\dots,N). \tag{1.2}$$

Продолжая систему (I.2), получим последовательность фундаментальных объектов многообразия $\mathfrak{M}_m$ [I]:

$$\Gamma_\nu = \{a^{\mathcal{J}}; \lambda^a_{i_1}, \lambda^a_{i_1 i_2}, \dots, \lambda^a_{i_1 i_2 \dots i_\nu}\} \quad (\nu=1,2,\dots). \tag{1.3}$$

Обозначим символом δ дифференцирование по групповым параметрам при фиксированном образующем элементе F (вторичным параметрам), а буквами $\pi^s(u,\delta u)$ — значения форм $\omega^s(u,du)$ при фиксированном F. Формы Пфаффа, обращающиеся в нуль при $\Omega^1=\dots=\Omega^m=0$, назовем главными.

Мы будем рассматривать многообразия общего вида, для которых существует основной объект Γ_{ν_0}, (см. [I], стр. 347). Фундаментальный Объект Γ_{ν_0+1} определяет многообразие $\mathfrak{M}_m$ с точностью до преобразований группы G. Репер R_{ν_0} порядка ν_0, где ν_0 — порядок основного объекта, является каноническим репером многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Если многообразие $\mathfrak{M}_m$ отнесено к реперу R_{ν_0} ([I], стр. 352), то все вторичные параметры фиксированы. Если же многообразие отнесено к реперу R_ν порядка $\nu < \nu_0$, то выделяется нетривиальная стационарная подгруппа H_{τ_ν}, группы G, размерность которой совпа-

дает с числом свободных вторичных параметров.

Определение I.I. Функция $\mathcal{J}(a^{\mathcal{K}}; \lambda^a_{i_1},\dots,\lambda^a_{i_1\dots i_\nu})$, не равная тождественно постоянной, но сохраняющая свои значения при произвольных преобразованиях подгруппы H_{τ_ν}, называется инвариантом порядка ν многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Предметом дифференциальной геометрии многообразия $\mathfrak{M}_m$ является (см. [I], стр. 349) изучение геометрических объектов многообразия $\mathfrak{M}_m$, охватываемых его фундаментальными полями.

Важную роль играет, в частности, нахождение инвариантов многообразия $\mathfrak{M}_m$ различных порядков, выделение (желательно в репере более низкого порядка) ассоциированных с $\mathfrak{M}_m$ геометрических образов и исследование подклассов многообразий $\mathfrak{M}_m$, характеризуемых различными свойствами ассоциированных образов.

§ 2. Относительно инвариантная система форм Пфаффа на многообразии.

Зададим натуральное число k $(1 \leq k < m)$ и рассмотрим на многообразии $\mathfrak{M}_m$ систему форм Пфаффа

$$\Theta^\alpha = A^\alpha_i(a,u)\,\Omega^i \qquad (\alpha,\beta = k+1,\dots,m). \tag{2.1}$$

Определение 2.I. Система форм (2.I) называется относительно инвариантной порядка ν, если в репере R_ν порядка ν имеют место соотношения

$$\delta\Theta^\alpha = B^\alpha_\beta(a,u,\delta u)\,\Theta^\beta. \tag{2.2}$$

Теорема 2.I. Система форм

$$\vartheta^a = \lambda^a_i \Omega^i - \Omega^a, \tag{2.3}$$

являющихся левыми частями дифференциальных уравнений многообразия $\mathfrak{M}_m$, относительно инвариантна.

Доказательство. Обозначим

$$\Omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} = -\frac{\partial f^{\mathcal{J}}_s}{\partial a^{\mathcal{K}}}\,\omega^s(u,du), \quad \Pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} = -\frac{\partial f^{\mathcal{J}}_s}{\partial a^{\mathcal{K}}}\,\pi^s(u,\delta u). \tag{2.4}$$

Имеем (см.[3],стр.183):

$$\mathcal{D}\Omega^{\gamma}=\Omega^{\varkappa}\wedge\Omega^{\gamma}_{\varkappa} \tag{2.5}$$

откуда следует,что

$$\delta\Omega^{\gamma}=-\Pi^{\gamma}_{\varkappa}\Omega^{\varkappa}. \tag{2.6}$$

Продолжая систему (I.2),получим (см.[3],стр.188):

$$\delta\lambda^{a}_{i}=\lambda^{a}_{j}\,(\Pi^{j}_{i}+\lambda^{b}_{i}\Pi^{j}_{b})-\lambda^{b}_{i}\Pi^{a}_{b}-\Pi^{a}_{i}\,. \tag{2.7}$$

Используя (2.6) и (2.7),находим:

$$\delta\vartheta^{a}=(\Pi^{a}_{b}-\lambda^{a}_{j}\Pi^{j}_{b})\vartheta^{b} \tag{2.8}$$

откуда следует,что ϑ^{a}—относительно инвариантная система форм.

Теорема 2.2. Если система уравнений Пфаффа

$$\theta^{\alpha}=0 \tag{2.9}$$

вполне интегрируема,то формы θ^{α} образуют относительно инвариантную систему.

Доказательство. В случае полной интегрируемости системы (2.9) внешние дифференциалы $\mathcal{D}\theta^{\alpha}$ обращаются в нуль как алгебраическое следствие системы.Имеем:

$$\mathcal{D}\theta^{\alpha}=\theta^{\beta}\wedge\theta^{\alpha}_{\beta}\,, \tag{2.10}$$

где $\theta^{\alpha}_{\beta}=\theta^{\alpha}_{\beta}(a,u,du)$ -некоторые формы Пфаффа.

В силу (2.I)

$$\theta^{\alpha}(\delta)=0. \tag{2.11}$$

Учитывая (2.10) и (2.11),находим :

$$\delta\theta^{\alpha}=B^{\alpha}_{\beta}\,\theta^{\beta}, \tag{2.12}$$

где

$$B^{\alpha}_{\beta}=\theta^{\alpha}_{\beta}\,(a,u,\delta u). \tag{2.13}$$

Теорема доказана.

Замечание. Для $K=1$ справедливо обратное утверждение. Если же $K>1$,то относительно инвариантная система форм не является в общем случае вполне интегрируемой.

Действительно,дополним формы θ^{α} частью форм Ω^{i} до полной системы m линейно независимых форм.Пусть,например,

$$\Omega^{1}\wedge\ldots\wedge\Omega^{K}\wedge\theta^{K+1}\wedge\theta^{K+2}\wedge\ldots\wedge\theta^{m}\neq 0. \tag{2.14}$$

Тогда

$$\Omega^{\alpha}=m^{\alpha}_{\beta}\,\theta^{\beta}+n^{\alpha}_{\xi}\,\Omega^{\xi}\qquad(\xi=1,\ldots,K). \tag{2.15}$$

Из относительной инвариантности системы форм θ^{α} следует,что

$$(\mathcal{D}\theta^{\alpha})_{\Omega^{\xi}=0}\equiv 0\quad(\mathrm{mod}\ \theta^{K+1},\ldots,\theta^{m}), \tag{2.16}$$

откуда

$$\mathcal{D}\theta^{\alpha}=\theta^{\alpha}_{\beta}\wedge\theta^{\beta}+a^{\alpha}_{\xi\eta}\Omega^{\eta}\wedge\Omega^{\xi} \tag{2.17}$$

причем,в общем случае,среди величин $a^{\alpha}_{\xi\eta}$ есть отличные от нуля. Если же $K=1$,то $\xi=\eta=1$ и дополнительных членов,нарушающих полную интегрируемость системы форм θ^{α} ,не будет.

Мы будем предполагать в дальнейшем,что система форм (2.I) линейно независима.Не умаляя общности,можно считать,что

$$\det\,(A^{\alpha}_{\beta})\neq 0. \tag{2.18}$$

Обозначим буквами $\overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\beta}$ приведенные миноры элементов A^{α}_{β} матрицы (A^{α}_{β}).Имеем :

$$\overset{*}{A}{}^{\gamma}_{\alpha}A^{\beta}_{\gamma}=\delta^{\beta}_{\alpha}\,,\quad A^{\gamma}_{\alpha}\overset{*}{A}{}^{\beta}_{\gamma}=\delta^{\beta}_{\alpha}\,. \tag{2.19}$$

Определение 2.2. Система форм Пфаффа

$$\tilde{\theta}^{\alpha}\equiv\tilde{A}^{\alpha}_{\xi}\,(a,u)\Omega^{\xi}+\Omega^{\alpha}\qquad(\xi=1,\ldots,K;\alpha=K+1,\ldots,m) \tag{2.20}$$

называется приведенной.Две системы форм

$$\theta^{\alpha}\equiv A^{\alpha}_{i}\,(a,u)\Omega^{i},\quad\bar{\theta}^{\alpha}=\bar{A}^{\alpha}_{i}\,(a,u)\Omega^{i} \tag{2.21}$$

называются эквивалентными,если каждая из них линейно выражается через другую .

Очевидно,введенное понятие эквивалентности рефлексивно,симметрично и транзитивно,т.е. является отношением R эквивалентности во множестве $\overset{\bullet}{\Theta}$ форм Пфаффа вида (2.I). Фактор-множество $\widetilde{\Theta}=\Theta/_R$ изоморфно множеству приведенных систем форм.

Пусть (2.I) и (2.20) - две эквивалентные системы форм. Тогда

$$\widetilde{\theta}^{\alpha}=\overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\gamma}\,\theta^{\gamma}. \qquad (2.22)$$

Отсюда следует, что всякую систему уравнений Пфаффа $\theta^{\alpha}=0$ можно заменить эквивалентной ей (т.е. имеющей одни и те же интегральные многообразия) приведенной системой уравнений $\overline{\theta}^{\alpha}=0$. Так как в дальнейшем мы будем иметь дело только с системами уравнений Пфаффа, а не с системами форм, то, не умаляя общности, можно всегда предполагать, что система форм (2.I) является приведенной, т.е.чт

$$A^{\alpha}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}\,. \qquad (2.23)$$

§ 3. Оснащенное многообразие фигур.

Теорема 3.I. Система форм Пфаффа

$$\theta^{\alpha}\equiv A^{\alpha}_{\xi}(a,u)\,\Omega^{\xi}+\Omega^{\alpha} \qquad (\xi,\eta=1,\dots,\kappa;\ \alpha,\beta=\kappa+1,\dots,m) \quad (3.1)$$

тогда и только тогда относительно инвариантна, когда величины A удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\Delta A^{\alpha}_{\xi}=A^{\alpha}_{\xi i}\,\Omega^{i}, \qquad (3.2$$

где

$$\Delta A^{\alpha}_{\xi}=dA^{\alpha}_{\xi}-A^{\alpha}_{\eta}\Omega^{\eta}_{\xi}+A^{\beta}_{\xi}A^{\alpha}_{\eta}(\Omega^{\eta}_{\beta}+\lambda^{b}_{\beta}\Omega^{\eta}_{b})-$$
$$-\lambda^{b}_{\xi}(\Omega^{\alpha}_{b}+A^{\alpha}_{\eta}\Omega^{\eta}_{b})+A^{\beta}_{\xi}(\Omega^{\alpha}_{\beta}+\lambda^{b}_{\beta}\Omega^{\alpha}_{b})-\Omega^{\alpha}_{\xi}\,. \qquad (3.3$$

Доказательство. Из (2.6) с учетом (I.2) и (3.I находим:

$$\delta\Omega^{\xi}=-(\Pi^{\xi}_{\alpha}+\Pi^{\xi}_{b}\lambda^{b}_{\alpha})\theta^{\alpha}+(A^{\alpha}_{\eta}\Pi^{\xi}_{\alpha}-\Pi^{\xi}_{\eta}+A^{\alpha}_{\eta}\lambda^{b}_{\alpha}\Pi^{\xi}_{b}-\lambda^{b}_{\eta}\Pi^{\xi}_{b})\Omega^{\eta},$$
$$\delta\Omega^{\alpha}=-(\Pi^{\alpha}_{\beta}+\Pi^{\alpha}_{b}\lambda^{b}_{\beta})\theta^{\beta}+(A^{\beta}_{\xi}\Pi^{\alpha}_{\beta}+A^{\beta}_{\xi}\lambda^{b}_{\beta}\Pi^{\alpha}_{b}-\lambda^{b}_{\xi}\Pi^{\alpha}_{b}-\Pi^{\alpha}_{\xi})\Omega^{\xi}. \qquad (3.4$$

Используя (3.4), получим:

$$\delta\theta^{\alpha}=-\{A^{\alpha}_{\xi}(\Pi^{\xi}_{\beta}+\lambda^{b}_{\beta}\Pi^{\xi}_{b})+\lambda^{b}_{\beta}\Pi^{\alpha}_{b}+\Pi^{\alpha}_{\beta}\}\theta^{\beta}+\overset{\circ}{\Delta}A^{\alpha}_{\xi}\Omega^{\xi}, \qquad (3.5$$

где нолик над формой Пфаффа ΔA^{α}_{ξ} означает значение формы при фиксированной фигуре F.

Из (3.5) следует, что система форм θ^{α} тогда и только тогда относительно инвариантна, когда $\overset{\circ}{\Delta}A^{\alpha}_{\xi}=0$, т.е. когда формы ΔA^{α}_{ξ} являются главными. Теорема доказана.

Следствие. Система форм Пфаффа Ω^{α} тогда и только тогда относительно инвариантна, когда вторичные параметры $\pi^{s}(u,\delta u)$ связаны соотношениями:

$$\Pi^{\alpha}_{\xi}+\lambda^{b}_{\xi}\Pi^{\alpha}_{b}=0. \qquad (3.6)$$

Действительно, полагая в (3.2) все величины A^{α}_{ξ} равными нулю, убеждаемся, что формы Пфаффа $\Omega^{\alpha}_{\xi}+\lambda^{b}_{\xi}\Omega^{\alpha}_{b}$ станут главными, т.е. что имеют место уравнения (3.6). Наоборот, если (3.6) заданы, то из (I.2) и (2.5) следует, что

$$\delta\Omega^{\alpha}=-(\Pi^{\alpha}_{\beta}+\lambda^{b}_{\beta}\Pi^{\alpha}_{b})\Omega^{\beta}. \qquad (3.7)$$

Теорема 3.2. Система величин $\{a^{J},\lambda^{a}_{\xi}\}$ тогда и только тогда является подобъектом фундаментального объекта $\Gamma_1=\{a^{J},\lambda^{a}_{i}\}$, когда система форм Ω^{α} относительно инвариантна.

Доказательство. Используя уравнения (2.7), находим:

$$\delta\lambda^{a}_{\xi}=\lambda^{a}_{\eta}(\Pi^{\eta}_{\xi}+\lambda^{b}_{\xi}\Pi^{\eta}_{b})-\lambda^{b}_{\xi}\Pi^{a}_{b}-\Pi^{a}_{\xi}+\lambda^{a}_{\alpha}(\Pi^{\alpha}_{\xi}+\lambda^{b}_{\xi}\Pi^{\alpha}_{b}). \qquad (3.8)$$

Сравнивая (3.6) с (3.8) и используя следствие теоремы 3.I, убеждаемся в справедливости теоремы 3.2.

Замечание. В работе [8], ошибочно утверждается (см. замечание I работы [8], что системы величин $\{a^{J},\lambda^{a}_{\xi}\}$ (в наших обозначениях) всегда являются подобъектами фундаментального объекта $\{a^{J},\lambda^{a}_{i}\}$, тогда как на самом деле, как установлено выше, это имеет место только при выполнении условий (3.6). Используя этот факт, авторы работы [8] приходят к ошибочному утверждению, что всегда система уравнений Пфаффа $\Omega^{\alpha}=0$ определяет распределение Δ_K .Эта ошибка фигурирует и в §2 работы [8].

Определение 3.I. Геометрический объект

$$\varphi_K = \{a^J, \lambda^a_i, A^\alpha_\xi\}, \qquad (3.9)$$

определенный системами уравнений (I.2) и (3.2),называется касательно . оснащающим объектом многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Оснащенным многообразием $\mathfrak{M}_m$,или многообразием $\mathfrak{M}^*_m$,называется многообразие,на котором задано поле касательно оснащающего объекта φ_K.

Касательно оснащающий объект φ_K определяет индуцирующую фигуру,которую мы тоже будем обозначать буквой φ_K .Системы величин$\{a^J\}$и$\{a^J, \lambda^a_i\}$определяют подобъекты объекта φ_K .

Многообразие $\mathfrak{M}^*_m$ фигур φ_K определяется системой уравнений

$$\Omega^a = \lambda^a_i \Omega^i, \quad \Delta A^\alpha_\xi = A^\alpha_{\xi i}\Omega^i. \qquad (3.10)$$

Так как в систему дифференциальных уравнений фундаментального объекта Γ_γ (см. (I.3)) не входят величины A^α_ξ ,то при исследовании многообразия $\mathfrak{M}^*_m$ можно осуществлять частичные продолжения любых порядков подсистемы (I.2) системы (3.I0),не затрагивая уравнений (3.2).

В связи с этим,наряду с обычным процессом канонизации репе с помощью последовательных продолжений всей системы (3.I0), можн канонизировать репер,используя уравнения (3.2) и последовательн продолжения системы (I.2)

Определение 3.2. Будем говорить,что многообразие $\mathfrak{M}^*_m$ отнесено к реперу индуцированного порядка γ ,если многообразие $\mathfrak{M}_m$ оказывается отнесенным к реперу порядка γ ,а величины A^α_ξ в процессе канонизации не участвуют.

Определение 3.3. Квазиканоническим репером многообразия $\mathfrak{M}^*_m$ будем называть репер R индуцированного порядка $\tilde{\gamma}_0$, относительно которого только $K(m-K)$ вторичных параметров ос-

таются свободными,причем уравнения $\overset{\circ}{\Delta} A^\alpha_\xi = 0$ в процессе канонизации не использовались.Репер R^* называется индуцированно каноническим репером многообразия $\mathfrak{M}^*_m$,если он получен из квазиканонического репера R фиксацией оставшихся $K(m-K)$ вторичных параметров с помощью уравнений $\overset{\circ}{\Delta} A^\alpha_\xi = 0$.

Из определения следует,что индуцированно канонический репер многообразия $\mathfrak{M}^*_m$ является репером порядка $\tilde{\gamma}_0$ многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Если γ_0 —порядок основного объекта многообразия $\mathfrak{M}_m$, γ^*_0-порядок основного объекта многообразия $\mathfrak{M}^\alpha_m$,то в общем случае

$$\gamma^*_0 < \tilde{\gamma}_0 < \gamma_0 . \qquad (3.11)$$

§ 4. Пфаффовы подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Определение 4.I. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\theta^\alpha \equiv A^\alpha_\xi(a,u)\Omega^\xi + \Omega^\alpha = 0 \qquad (\xi,\eta = 1,\dots,K;\ \alpha,\beta = K+1,\dots,m). \ (4.1)$$

Пфаффовым подмногообразием многообразия $\mathfrak{M}_m$ или подмногообразием Ψ_K называется совокупность интегральных кривых системы (4.I),принадлежащих многообразию $\mathfrak{M}_m$. Подмногообразие Ψ_K называется голономным,если система (4.I) вполне интегрируема.

Теорема 4.I. Система дифференциальных уравнений (4.I) тогда и только тогда определяет подмногообразие Ψ_K ,когда система форм θ^α относительно инвариантна.

Достаточность. Пусть θ^α -относительно инвариантная система форм,т.е.

$$\delta\theta^\alpha = B^\alpha_\beta(a,u,\delta u)\,\theta^\beta. \qquad (4.2)$$

Обозначим буквами u^J независимые первичные параметры фигуры F .Зафиксируем все вторичные параметры.Тогда (4.I) образуют систему линейно независимых уравнений относительно величин u^J и их дифференциалов.Как известно,для такой системы существуют одномерные решения. Задав, например, u^{ξ} ($\xi = 1, 2, \ldots, \kappa$) функциями от одного аргумента

$$u^{\xi} = f^{\xi}(t) \tag{4.3}$$

и подставив (4.3) в (4.I), получим систему $N-\kappa$ обыкновенных дифференциальных уравнений, которая определит $(N-\kappa)$-параметрическое семейство интегральных кривых: $u^{\mathcal{J}} = F^{\mathcal{J}}(t, c_1, .., c_{N-\kappa})$. (4.4)

При инфинитезимальном изменении вторичных параметров формы θ^{α} преобразуются в формы

$$\tilde{\theta}^{\alpha} = \theta^{\alpha} + \delta\,\theta^{\alpha}, \tag{4.5}$$

которые, в силу (4.2), имеют вид :

$$\tilde{\theta}^{\alpha} = (\delta^{\alpha}_{\beta} + B^{\alpha}_{\beta})\,\theta^{\beta}. \tag{4.6}$$

Из (4.6) вытекает, что вдоль всякой интегральной кривой (4.4) все формы $\tilde{\theta}^{\alpha}$ обращаются в нуль. Следовательно, интегральная кривая относительно инвариантной системы (4.I) является интегральной кривой системы $\tilde{\theta}^{\alpha} = 0$, получающейся из (4.I) инфинитезимальным изменением вторичных параметров. Таким образом, относительно инвариантная система уравнений (4.I) действительно определяет Ψ

Необходимость. Пусть система (4.I) определяет подмногообразие Ψ_{κ}. Пользуясь формулой (3.5) и обозначением (4.5), получим :

$$\tilde{\theta}^{\alpha} = -\{A^{\alpha}_{\xi}(\Pi^{\xi}_{\beta} + \lambda^{\theta}_{\beta}\Pi^{\xi}_{\theta}) + \lambda^{\theta}_{\beta}\Pi^{\alpha}_{\theta} + \Pi^{\alpha}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\}\theta^{\beta} + \overset{\circ}{\Delta} A^{\alpha}_{\xi}\Omega^{\xi}. \tag{4.7}$$

Так как под многообразие Ψ_{κ} инвариантно относительно инфинитезимального изменения вторичных параметров, то

$$\overset{\circ}{\Delta} A^{\alpha}_{\xi} = 0. \tag{4.8}$$

Эти условия (см. теорему 2.I) характеризуют относительную инвариантность системы форм θ^{α}.

Сравнивая теоремы 2.I и 4.I, мы приходим к следующему выводу:

Теорема 4.2. Для задания на многообразии $\mathfrak{M}_m$ распределения Δ_K необходимо и достаточно задание подмногообразия Ψ_K.

Многообразия $\mathfrak{M}^{*}_{m}$ часто получают заданием на исходном многообразии $\mathfrak{M}_m$ подмногообразия Ψ_{κ}. Практически удобно задать в репере многообразия $\mathfrak{M}_m$ произвольного порядка $\nu \leq \nu_0$ приведенную систему форм $\theta^{\alpha} \equiv A^{\alpha}_{\xi}\Omega^{\xi} + \Omega^{\alpha}$ и, потребовав (при $\nu < \nu_0$) её относительную инвариантность, получить систему (3.2).

Присоединив эту систему к системе (I.2), получают систему дифференциальных уравнений многообразия $\mathfrak{M}^{*}_{m}$.

Замечание. Если многообразие $\mathfrak{M}_m$ отнесено к каноническому реперу, то вторичные параметры отсутствуют и система уравнений (4.I) определит многообразие Ψ_{κ} Р.Н.Щербакова (см. [5], стр. I88).

§ 5. Примеры оснащенных многообразий.

Рассмотрим несколько простейших примеров оснащенных точечных и линейчатых многообразий в трехмерном пространстве.

п I. Оснащенная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве.

Отнесем поверхность S к реперу R первого порядка, направив орт $\bar{e}_3$ по нормали к поверхности. Дифференциальные уравнения поверхности S запишутся в виде:

$$\omega^3 = 0, \ \omega^3_1 = a\omega^1 + b\omega^2, \ \omega^3_2 = b\omega^1 + c\omega^2. \tag{5.1}$$

Зададим на S произвольное подмногообразие Ψ_1 при помощи относительно инвариантного уравнения

$$\theta \equiv \lambda\omega^1 + \omega^2 = 0. \tag{5.2}$$

Из относительной инвариантности формы θ вытекает уравнение:

$$d\lambda - (1+\lambda^2)\,\omega^2_1 = \lambda_i\,\omega^i \quad (i = 1, 2). \tag{5.3}$$

Система уравнений (5.I), (5.3) определяет оснащенную поверхность S^{*}. Репер R индуцированного первого порядка является в этом случае квазиканоническим репером поверхности S^{*} (см. определение 3.2).

Для получения индуцированно канонического репера поверхности S^* приводим величину λ к нулю.Подмногообразие Ψ_1 становится координатным подмногообразием $\omega^2=0$.Деривационные формулы индуцированно канонического репера оснащенной поверхности запишутся в виде: $d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i$, $d\bar{e}_3=-(a\omega^1+b\omega^2)\bar{e}_1-(b\omega^1+c\omega^2)\bar{e}_2$,

$$d\bar{e}_1=\lambda_i\omega^i\bar{e}_2+(a\omega^1+b\omega^2)\bar{e}_3,\ d\bar{e}_2=-\lambda_i\omega^i\bar{e}_1+(b\omega^1+c\omega^2)\bar{e}_3. \qquad (5.4)$$

Замыкая уравнения

$$\omega^3=0,\ \omega_1^3=a\omega^1+b\omega^2,\ \omega_2^3=b\omega^1+c\omega^2,\ \omega_1^2=\lambda_i\omega^i, \qquad (5.5)$$

убеждаемся,что оснащенная поверхность S^* определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Замечание .Задание подмногообразия Ψ_1 на поверхности S эквивалентно заданию семейства линий на поверхности.При последней канонизации мы полагали $\lambda^2+1\neq 0$, т.е.исключен случай,когда Ψ_1 является семейством линий нулевой длины.

п 2. Оснащенная прямолинейная конгруэнция в трехмерном евклидовом пространстве.

Помещая вершину A репера на луч конгруэнции K и направляя орт $\bar{e}_3$ по лучу,запишем систему дифференциальных уравнений конгруэнции K в виде:

$$\omega^1=a\omega_1^3+b\omega_2^3\ ,\ \ \omega^2=b^1\omega_1^3+c\omega_2^3\ . \qquad (5.6)$$

Задав произвольно подмногообразие Ψ_1 уравнением

$$\lambda\omega_1^3+\omega_2^3=0\ , \qquad (5.7)$$

получим систему дифференциальных уравнений оснащенной конгруэнции K ,состоящую из (5.15) и уравнения

$$\Delta\lambda\equiv d\lambda-(1+\lambda^2)\,\omega_1^2=\lambda^i\omega_i^3 \qquad (i=1,2). \qquad (5.8)$$

Продолжив один раз уравнения (5,6) и фиксируя только один вторичный параметр $(c=-a)$,получим квазиканонический репер оснащенной конгруэнции K^* .Фиксируя оставшийся вторичный параметр с помощью уравнения (5.8),построим индуцированно

канонический репер конгруэнции K^* .Деривационные формулы такого репера совпадают с формулами (2.1) работы [6].

п 3. Оснащенный линейчатый комплекс в трехмерном эквиаффинном пространстве.

Поместив вершину A репера на луч комплекса и направив вектор $\bar{e}_3$ по лучу,запишем уравнения комплекса в виде

$$\omega^2=a_1\omega^1+a_2\omega_3^1+a_3\omega_3^2\ . \qquad (5.9)$$

Так как комплекс-трехмерное линейчатое многообразие,то для него можно строить два типа оснащенных комплексов:комплекс K_1^* (с помощью задания на K подмногообразия Ψ_1) и комплекс K_2^* (с помощью задания на K подмногообразия Ψ_2).Так как оснащения с помощью Ψ_1 являлись предметом рассмотрения в предыдущих пунктах этого параграфа,то мы зададим оснащение подмногообразием Ψ_2 .Задав подмногообразие Ψ_2 уравнением

$$\theta\equiv\omega^1+\lambda_i\omega_3^i=0 \qquad (i,j=1,2), \qquad (5.10)$$

получим (в силу относительной инвариантности формы θ) систему дифференциальных уравнений оснащенного комплекса K_2^* в виде:

$$\omega^2=a_1\omega^1+a_2\omega_3^1+a_3\omega_3^2\ ,\ \ \Delta\lambda_i=\lambda_{ij}\omega_3^j\ , \qquad (5.11)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\Delta\lambda_1&=d\lambda_1+\lambda_1(\omega_3^3-2\omega_1^1)+(\lambda_1a_1-a_2)\omega_2^1-\lambda_2\omega_1^2+\omega^3,\\ \Delta\lambda_2&=d\lambda_2+2\lambda_2\omega_3^3+(\lambda_2a_1-a_3-\lambda_1)\,\omega_2^1\,.\end{aligned}\right\} \qquad (5.12)$$

Соуществляя последовательные продолжения уравнения (5.9) и канонизируя,как в [7] ,построим квазиканонический репер.Дифференциальные уравнения оснащенного комплекса K_2^* в этом репере состоят из уравнений 25,26-28,34-38,39 работы [7] и уравнений

$$\Delta\lambda_i=\lambda_{ij}\omega_3^j\ , \qquad (5.13)$$

причем выполнены конечные соотношения (33) и (41) работы [7].

Фиксируя последние два вторичных параметра с помощью уравнений (5.13) построим индуцированно канонический репер комплекса прямых. Формы ω^3, ω_2^1 стали главными .

Литература

I.Лаптев Г.Ф.,Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.Труды Московского математического общества.ГИТТЛ,М,I953,2, 275-383.

2.Малаховский В.С.,О многообразиях алгебраических фигур.Геометрический сборник,вып.5 (Труды Томского ун-та,I8I)I965,5-I4.

3.Малаховский В.С.,Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.Труды геометрическо го семинара ВИНИТИ АН СССР,т.2,I969,I79-206.

4.Щербаков Р.Н.,Итоги науки.Алгебра.Топология.Геометрия,I965, 265-32I.

5.Щербаков Р.Н.,О методе репеража подмногообразий.Геометрически сборник,3 (Труды Томского ун-та,I68),I963,5-II.

6.Щербаков Р.Н.,Репер линейчатой поверхности,принадлежащий данной конгруэнции.Уч.зап.Бурятского пединститута,вып.5,I954, 6I-89.

7.Щербаков Р.Н.,Эквиаффинный репер комплекса прямых.Геометрически й сб.,I (Труды Томского ун-та,I60),I962,70-8I.

8. Gh. Gheorghiev et I. Popa. Sur la méthode du „repérage" et la théorie des variétés „équiparamétriques". C.R Acad. Sc. Paris, t.263, p. 911-914, 1966.

Gh. Gheorghiev et I. Popa, Analele, şt. Univ., Iasi, 8, 1962, p. 425-431.

10. K. Svoboda, V. Havel, I. Kolař, La méthode du repérage des systemes de sous variétes. Comm. Math. Univ. Carolinae, 5,4, 1964, 183-201.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
вып 2 , 1971

ПОПОВ Ю.И.

ОБ ИНВАРИАНТНОМ ОСНАЩЕНИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРПОЛОС Γ_m РАНГА $\tau = \frac{m}{2}$ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n.

В работе [3] рассмотрено инвариантное оснащение вырожденны гиперполос ранга $\tau < m$ проективного пространства $P_n\ (m<n)$ при построении которого используются производные главного фундаментального тензора $\overset{0}{b}_{1ij}$ [4] гиперполосы до четвертого поря ка включительно.

В настоящей заметке показывается, что для M-конических развертывающихся гиперполос ранга $\tau = \frac{m}{2}$ инвариантное Δ-осн щение строится уже с помощью производных тензора $\overset{0}{b}_{1ij}$ не выше третьего порядка. Дано более простое определение инвариантного обобщенного Δ-оснащения гиперполос Γ_m ранга $\tau = \frac{m}{2}$, не явл щихся M-коническими развертывающимися гиперполосами.

При исследовании применяется аналитический аппарат и терми логия, введенная в работах [1] - [3].

Во всей работе мы придерживаемся следующей схемы использов ния индексов: $a, d, i, j, k, p, q, s, t, u, v, f, h = 1,2,\dots,m$; $a_1, d_1, i_1,\dots,h_1 = 1,2,\dots,\tau$; $a_2, d_2,\dots,h_2 = \tau+1,\dots,m$; $\alpha,\beta,\gamma = 1,2,\dots,n+1$. По всем индексам, встречающимся дважды сверху и снизу, предполо гается суммирование. Символ „/" вводится для обозначения ковариантного дифференцирования относительно связности Γ_i [4], а относительно связности $\bar{\Gamma}_i$, индуцируемой новым оснащением гиперполосы Γ_m, ковариантное дифференцирование обозначим символом „//". Индексы, участвующие в альтернировании отмечаются чертой снизу. Например, $2\varphi_{[ij]} = \varphi_{\underline{ij}}$.

§ I. Внутреннее Δ-оснащение M-конических развертывающихся гиперполос ранга $\tau = \frac{m}{2}$.

Определение I. Развертывающаяся гиперполоса Γ_m, все плоские образующие которой имеют общую $(m-\tau-1)$-мерную плоскость (вершину гиперполосы), называется M-конической [3], §I.

Как известно [3], §3, инвариантные обобщенные оснащения (α,β) (Ω-оснащения (α,β)) M-конической развертывающейся гиперполосы Γ_m ранга $\tau < m$ характеризуются условиями:

$$K_i = \frac{1}{m+2}\,\overset{0}{b}{}_{1ij/k}\, b_0^{1jk} = 0, \tag{1}$$

$$\Omega^1_{0p} = \alpha\mathcal{L}^1_{0p} + \beta B^1_{0p} + \alpha S^1_{0p} = 0, \tag{2}$$

$$\left|\alpha(\tau+2)\, l_{k_1t_1} + (\alpha-\beta)\, J^1_0\, \overset{0}{b}{}_{1k_1t_1}\right| \neq 0, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{L}^1_{0p} = \overset{0}{b}{}_{1ij/kt}\, \overset{0}{b}{}_{1uv/p}\, b_0^{1iu}\, b_0^{1jv}\, b_0^{1kt}, \tag{4}$$

$$B^1_{0p} = \overset{0}{b}{}_{1ij/kp}\, \overset{0}{b}{}_{1uv/t}\, b_0^{1iu}\, b_0^{1jv}\, b_0^{1kt}, \tag{5}$$

$$S^1_{0p} = \overset{0}{b}{}_{1ij/pk}\, \overset{0}{b}{}_{1uv/t}\, b_0^{1iu}\, b_0^{1jv}\, b_0^{1kt}, \tag{6}$$

$$l_{kt} = \overset{0}{b}{}_{1ij/k}\, \overset{0}{b}{}_{1pq/t}\, b_0^{1ip}\, b_0^{1jq}, \tag{7}$$

$$\mathcal{J}^1_o = \ell_{\kappa t}\, b^{1\kappa t}_o , \qquad (8)$$

α, β -произвольные действительные числа (характеристические параметры), не равные одновременно нулю.

Симметрический тензор b^{1ij}_o определяется соотношениями:

$$b^o_{1ij}\, b^{1j\kappa}_o = \Delta^\kappa_i , \qquad (9)$$

где Δ^κ_i — К-тензор типа $\left\{ {0 \atop 1} \right\}^{*)}$, т.е.

$$\Delta^\kappa_{i_2} = 0 , \ \Delta^{\kappa_1}_{i_1} = \delta^{\kappa_1}_{i_1} , \ \Delta^{\kappa_2}_{i_1} \text{ -произвольные функции от } x^i . \qquad (10)$$

Фиксированным характеристическим параметрам (α, β) соответствует определенное Ω -оснащение (α, β), не зависящее от исходного выбора Δ^i_j и от произвола $b^{1i_2j_2}_o$. Причем оснащения, индуцирующие одно и то же внутреннее обобщенное оснащение (α, β), отличаются друг от друга только положением нормалей первого рода во внутренних нормальных плоскостях $P_{n-\tau}$ [3].

Итак, будем предполагать, что все рассматриваемые в дальнейшем оснащения m -конической развертывающейся гиперполосы ранга $\tau = \frac{m}{2}$ являются Ω -оснащениями (α, β).

Построим нормали первого рода во внутренних $(n-\tau)$ мерных нормальных плоскостях $P_{n-\tau}$ данной гиперполосы. Для этой цели введем в рассмотрение тензор

$$\Pi^{111a}_{ooo} = b^o_{1ij/\kappa pq}\, b^o_{1su/v}\, b^o_{1fh/d}\, b^{1is}_o\, b^{1jf}_o\, b^{1pu}_o\, b^{1qh}_o\, b^{1vd}_o\, b^{1\kappa a}_o . \qquad (11)$$

Компоненты $\Pi^{111a_1}_{ooo}$ этого тензора не зависят от выбора $b^{1i_2j_2}_o$, так ка

$$b^o_{1ij_2/\kappa f \ldots s} = 0^{**)} \qquad (12)$$

Отсюда следует, что подтензор $\Pi^{111a_1}_{ooo}$ вполне определен заданием

тензора Δ^i_j.

При переходе от одного Ω - оснащения (α, β) к другому подтензор $\Pi^{111a_1}_{ooo}$ меняется по закону:

$$\bar{\Pi}^{111a_1}_{ooo} = \Pi^{111a_1}_{ooo} + \psi^{1t_2}_o \left(\mathcal{J}^1_o\, b^{1\kappa a_1}_o S_{\kappa t_2} + 2 \ell_{p\kappa}\, b^{1ip}_o\, b^{1\kappa a_1}_o S_{it_2} \right). \qquad (13)$$

Далее, из леммы [3.3] и соотношения

$$b^o_{1ij/\kappa t_2} = b^o_{1ij} S_{\kappa t_2} + b^o_{1i\kappa} S_{jt_2} + b^o_{1j\kappa} S_{it_2}$$

работы [3], § 3 следует, что $S_{\kappa_2 t_2} = 0$, а из соотношений (I2), (7), (8), получаем, что $\ell_{t_2 j} = 0$. Таким образом, в равенстве (I3) выражение в скобках не зависит от компонент $b^{1ij_2}_o$ тензора b^{1ij}_o.

С другой стороны, в силу теорем [3.2] и [3.6] работы [3], это выражение является инвариантом Ω-оснащений (α, β) m-конической развертывающейся гиперполосы Γ_m ранга $\tau < m$.

Потребуем, чтобы для нового Ω-оснащения (α, β) имело место равенство $\bar{\Pi}^{111a_1}_{ooo} = 0$. Тогда мы получаем следующую систему уравнений относительно компонент $\psi^{1t_2}_o$:

$$\Pi^{111a_1}_{ooo} + \psi^{1t_2}_o \left(\mathcal{J}^1_o\, b^{1\kappa a_1}_o S_{\kappa t_2} + 2 \ell_{p\kappa}\, b^{1ip}_o\, b^{1\kappa a_1}_o \right) = 0. \qquad (14)$$

При $\tau = \frac{m}{2}$ матрица

$$\left\| \mathcal{J}^1_o\, b^{1\kappa a_1}_o S_{\kappa t_2} + 2 \ell_{p\kappa}\, b^{1ip}_o\, b^{1\kappa a_1}_o \right\| \qquad (15)$$

-квадратная.

Если матрица (I5) невырожденная, то система (I4) имеет одно и только одно решение, т.е. оснащение, удовлетворяющее условию

$$\bar{\Pi}^{111a_1}_{ooo} = 0 , \qquad (16)$$

существует. Причем, как видно из (I4), двух таких оснащений построить нельзя.

Выделим теперь с помощью гиперплоскостей $\bar{N}^{1t_2}_\alpha = N^{1t_2}_\alpha + \psi^{1t_2}_o T^o_\alpha$ нормали первого рода во внутренних $(n-\tau)$ -мерных нормальных

---

*) О К -тензорах см. [2], § I.

**) См. [3], §3, стр. 40.

плоскостях $P_{n-\tau}$,мы получаем инвариантное Δ-оснащение $(\alpha,\beta,\Pi)^*$ m-конической развертывающейся гиперполосы ранга $\tau=\frac{m}{2}$.Отсюда следует

Теорема I. Для всякой m-конической развертывающейся гиперполосы ранга $\tau=\frac{m}{2}$,на которой Ω—оснащение индуцирует невырожденную матрицу (I5),существует инвариантное Δ-оснащение (α,β,Π) ,удовлетворяющее условию [I6].

§ 2. Инвариантное обобщенное Δ-оснащение вырожденной гиперполосы Γ_m ранга $\tau=\frac{m}{2}$,не являющейся m-конической развертывающейся гиперполосой.

Определение 2. Оснащение,для которого тензор (I

равен нулю,называется полувнутренним Δ-оснащением вырожде

ной гиперполосы Γ_m [3],§3 .

Пусть рассматриваемые в дальнейшем оснащения гиперполос Γ_m являются полувнутренними Δ-оснащениями,которые не зависят от произвола $\underset{\circ}{b}^{1i_2j_2}$,но зависят от выбора тензора Δ^i_j [3],§3.

Покажем,что можно упростить построение инвариантного обобщенного Δ-оснащения (I)-(3) для данного класса гиперполо

Составим тензор

$$K^1_{op}=B^1_{op}-S^1_{op}\,, \tag{17}$$

где B^1_{op} и S^1_{op}—тензоры,определяемые соотношениями (5),(6). Тогда подтензор K_{op_2} этого тензора (I7) можно представить в виде:

$$K^1_{op_2}=\overset{\circ}{b}_{1ij/kp_2}\overset{\circ}{b}_{1uv/q}\underset{\circ}{b}^{1iu}\underset{\circ}{b}^{1vj}\underset{\circ}{b}^{1qk}-\overset{\circ}{b}_{1ij/p_2k}\overset{\circ}{b}_{1uv/q}\underset{\circ}{b}^{1iu}\underset{\circ}{b}^{1jv}\underset{\circ}{b}^{1qk}=$$

$$=3\overset{\circ}{b}_{1i_2j_1/k_1p_2}\overset{\circ}{b}_{1u_2v_1/q_1}\underset{\circ}{b}^{1u_2i_2}\underset{\circ}{b}^{1v_1j_1}\underset{\circ}{b}^{1q_1k_1}-$$

$$-2\overset{\circ}{b}_{1i_2j_1/p_2k_1}\overset{\circ}{b}_{1u_2v_1/q_1}\underset{\circ}{b}^{1i_2u_2}\underset{\circ}{b}^{1j_1v_1}\underset{\circ}{b}^{1k_1q_1}-$$

$$-\overset{\circ}{b}_{1i_1j_1/p_2k_2}\overset{\circ}{b}_{1u_1v_1/q_2}\underset{\circ}{b}^{1i_1u_1}\underset{\circ}{b}^{1j_1v_1}\underset{\circ}{b}^{1k_2q_2}+Q\,, \tag{18}$$

где Q —сумма членов ,не содержащих компонент $\underset{\circ}{b}^{1i_2j_2}$ тензора $\underset{\circ}{b}^{1ij}$.

Прежде всего покажем,что подтензор $K^1_{op_2}$ не зависит от произвола $\underset{\circ}{b}^{1ij_2}$,т.е. вполне определяется заданием тензора Δ^i_j .

Действительно,из тождества Риччи для тензора $\overset{\circ}{b}_{1ij}$:

$$\overset{\circ}{b}_{1ij/\underline{k}\underline{f}}=-R^{\circ}_{okf}\overset{\circ}{b}_{1ij}+R^1_{1kf}\overset{\circ}{b}_{1ij}+R^s_{ikf}\overset{\circ}{b}_{1sj}+R^s_{jkf}\overset{\circ}{b}_{1is}$$

получаем,что

$$\overset{\circ}{b}_{1i_2j/\underline{k}\underline{f}}=R^s_{i_2kf}\overset{\circ}{b}_{1sj}$$

или

$$\overset{\circ}{b}_{1i_2j/fk_2}=\overset{\circ}{b}_{1i_2j/k_2f}-R^{s_1}_{i_2k_2f}\overset{\circ}{b}_{1s_1j}\,. \tag{19}$$

В силу уравнения Гаусса [4],§2,соотношение (I9) приводится окончательно к виду

$$\overset{\circ}{b}_{1i_2j/fk_2}=\overset{\circ}{b}_{1i_2j/k_2f}-p_{i_2k_2}\overset{\circ}{b}_{1jf}\,. \tag{20}$$

Наконец,подставив (20) в (I8) и учитывая соотношения (I) и $\overset{\circ}{b}_{1ij/k_2}\Delta^i_t=\overset{\circ}{b}_{1tj/k_2}$,приходим к равенству

$$K^1_{op_2}=Q\,,$$

что и доказывает независимость подтензора $K^1_{op_2}$ от произвола $\underset{\circ}{b}^{1ij_2}$.

С другой стороны,при переходе от одного полувнутреннего оснащения к другому имеем:

$$\bar{B}^{1}_{op_2} = B^{1}_{op} - 3\psi^{1t_1}_{o}\, \ell_{p_2 i}\, \Delta^{i}_{t_1},$$

$$\bar{S}^{1}_{op_2} = S^{1}_{op_2} - 3\psi^{1t_1}_{o}\, \ell_{p_2 i}\, \Delta^{i}_{t_1} + \qquad (2$$

$$+ 2\psi^{1t_1}_{o}\, \overset{o}{b}_{1t_1 j/p_2}\, \overset{o}{b}_{1uv/q}\, \Delta^{u}_{k}\, \overset{o}{b}^{1jv}\, \overset{o}{b}^{1kq}.$$

В силу (2I) подтензор $K^{1}_{op_2}$ преобразуется при изменении полувнутренних оснащений по закону:

$$\bar{K}^{1}_{op_2} = K^{1}_{op_2} - 2\psi^{1t_1}_{o}\, \overset{o}{b}_{1t_1 j_1/p_2}\, \overset{o}{b}_{1uv/q}\, \Delta^{u}_{k_1}\, \overset{o}{b}^{1jv}\, \overset{o}{b}^{1k_1 q}. \qquad ($$

Учитывая, что при $\tau = \frac{m}{2}$ матрица

$$\| \overset{o}{b}_{1t_1 j_1/p_2}\, \overset{o}{b}_{1uv/q}\, \Delta^{u}_{k_1}\, \overset{o}{b}^{1jv}\, \overset{o}{b}^{1k_1 q} \| \qquad ($$

квадратная, приходим к выводу: система (22) имеет единственно решение, если матрица (23) невырожденная.

Т е о р е м а 2. Для всякой вырожденной гиперполосы Γ_m. ранга $\tau = \frac{m}{2}$ (не являющейся M-конической развертывающейся гиперполосой), на которой полувнутреннее Δ-оснащение индуци рует невырожденную матрицу (23), существует инвариантное обо ное Δ-оснащение, удовлетворяющее условию

$$K^{1}_{op_2} = 0.$$

Следует отметить, что проведенные рассуждения не проходят случае, когда базисной поверхностью гиперполосы служит гипер верхность второго порядка, а также для вырожденных развертыв ся гиперполос ранга один. Для этих гиперполос полувнутренне оснащение, как легко показать, индуцирует нулевой тензор $\overset{o}{b}_{1ij}$

Применяя полученную теорию к частному виду вырожденных г полос-к гиперповерхностям Γ_{n-1} $(m=n-1)$, мы приходим к результат

боты [2], § 4.

Литература

Атанасян Л.С., К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства. Ученые зап. МГПИ им. В.И. ЛЕНИНА, т. I08, вып. 2, I957, 3-44.

Атанасян Л.С. и Воронцова Н.С., Построение инвариантного оснащения τ-вырожденной гиперповерхности многомерного проективного пространства. Ученые записки МГПИ им. В.И. ЛЕНИНА, I965, 243, 5-28.

Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. I (Труды Калининградского университета), I970, 27-63.

Попов Ю.И., К теории оснащенной гиперполосы в многомерном проективном пространстве. Ученые зап. МГПИ им. В.И. ЛЕНИНА, 374, т. I, Вопросы Дифференциальной геометрии, I970, стр. I02-II7.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
1971
вып 2.

АНДРЕЕВ Б.А.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВОМ ПАРЫ (p,q) И ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ.

В работе продолжается начатое в [4] изучение локально бие тивного соответствия двух пространств: точечного проективного пространства P_N и пространства $R(F)$ пар фигур $F=(p,q)$

§ I. Введение.

В [4] пара F определялась как пара фигур, состоящая из н вырожденной гиперквадрики q n-мерного проективного пространства P_n и неинцидентной ей точки p. Размерность N прос ранства P_N равна рангу пары F ([I], стр. I8I). Соответст задавалось при помощи дифференцируемого локально биективного отображения f. Пусть $\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'}$ и $\omega^{j'}_{i'}$ $(\mathcal{J}',\mathcal{K}',\ldots=0,1,\ldots N;\ i',j',\ldots=0,1,$ компоненты инфинитезимальных перемещений реперов пространст P_N и P_n; разместив соответствующим образом вершины реперов приводим уравнение гиперквадрики q и систему дифференци ных уравнений отображения f, соответственно, к виду:

$$a_{ij}x^i x^j+(x^0)^2=0 \quad (i,j,\ldots=1,2,\ldots,n),$$

$$\nabla a_{ij}=\Lambda_{ij\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_0,\ \omega^i_0=\Lambda^i_{\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_0,\ \omega^0_i=\Lambda_{i\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_0;\ (\mathcal{J},\mathcal{K},\ldots=1,2,\ldots,N),$$

где ∇ - символ ковариантного дифференцирования, так что, например:

$${}_\nabla E^j_{i\mathcal{J}}\equiv dE^j_{i\mathcal{J}}-E^j_{k\mathcal{J}}(\omega^k_i-\delta^k_i\omega^0_0)-E^j_{i\mathcal{L}}(\Omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{J}}-\delta^{\mathcal{L}}_{\mathcal{J}}\Omega^0_0)+E^k_{i\mathcal{J}}(\omega^j_k-\delta^j_k\omega^0_0).$$

Если ковариантное дифференцирование при фиксированных первичных параметрах обозначить символом $\overset{0}{\nabla}$, то законы преобразований систем величин: $\Gamma_0=\{a_{ij}\}$, $\overset{(1)}{\Gamma}_1=\{\Lambda_{ij\mathcal{J}}\}$, $\overset{(2)}{\Gamma}_1=\{\Lambda^i_{\mathcal{J}}\}$, $\overset{(3)}{\Gamma}_1=\{\Lambda_{i\mathcal{J}}\}$ запишутся в виде:

$$\overset{0}{\nabla}a_{ij}=0,\ \overset{0}{\nabla}\Lambda_{ij\mathcal{J}}=0,\ \overset{0}{\nabla}\Lambda^i_{\mathcal{J}}=0,\ \overset{0}{\nabla}\Lambda_{i\mathcal{J}}=0, \quad (1.3)$$

откуда следует, что $\Gamma_0, \overset{(1)}{\Gamma}_1, \overset{(2)}{\Gamma}_1, \overset{(3)}{\Gamma}_1$ являются тензорами.

Система величин $\Gamma_1=\{\Gamma_0,\overset{(1)}{\Gamma}_1,\overset{(2)}{\Gamma}_1,\overset{(3)}{\Gamma}_1\}$ образует фундаментальный геометрический объект первого порядка отображения f. Полученный путем продолжения Γ_1 фундаментальный объект второго порядка $\Gamma_2=\{\Gamma_1,\Lambda_{ij\mathcal{J}\mathcal{K}},\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}},\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}}\}$ с законом преобразования (I.3) и

$$\overset{0}{\nabla}\Lambda_{ij\mathcal{J}\mathcal{K}}=-\Lambda_{ij(\mathcal{J}}\overset{0}{\Pi}_{\mathcal{K})},\ \overset{0}{\nabla}\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}=-\Lambda^i_{(\mathcal{J}}\overset{0}{\Pi}_{\mathcal{K})},\ \overset{0}{\nabla}\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}}=-\Lambda_{i(\mathcal{J}}\overset{0}{\Pi}_{\mathcal{K})} \quad (1.4)$$

имеет системы величин $\overset{(1)}{\Gamma}_2=\{\overset{(1)}{\Gamma}_1,\Lambda_{ij\mathcal{J}\mathcal{K}}\}$, $\overset{(2)}{\Gamma}_2=\{\overset{(2)}{\Gamma}_1,\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\}$ и $\overset{(3)}{\Gamma}_2=\{\overset{(3)}{\Gamma}_1,\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}}\}$ своими подобъектами. Здесь и в дальнейшем выражение $a_{(\mathcal{J}}b_{\mathcal{K})}$ означает $a_{\mathcal{J}}b_{\mathcal{K}}+a_{\mathcal{K}}b_{\mathcal{J}}$. В [4] доказано, что Γ_2 является основным объектом ([2], стр. 346) отображения f.

§ 2. Ассоциированные образы I-го порядка.

Найдем инвариантно присоединенный геометрический образ, определяемый в P_N тензором $\overset{(2)}{\Gamma}_1$, и выясним его геометрическую характеристику. Пусть точке $P^*=P+dP$ пространства P_N соответствует точка $f(P^*)$ из окрестности точки $p=f(P)$ пространства P_n.

Определение I. Будем говорить, что точка P^* лежит на F_2-нулевом направлении, если

$$f(P^*) = f(P).$$

Теорема I. Система линейных однородных уравнени

$$\Phi^i \equiv \Lambda^i_{\mathcal{J}} X^{\mathcal{J}} = 0$$

задаст в P_N инвариантную $(N-n)$-плоскость, состоящую из пр

F_2- нулевых направлений.

Доказательство. Инвариантность $(N-n)$-плос

(2.I) следует из равенства:

$$\delta \Phi^i = -\Phi^j \pi^i_j + \Phi^i (\pi^0_0 - \Pi^0_0 + \theta),$$

где Θ -полный дифференциал. Фиксация точки P означает: $\omega^i_0 = 0$. Условия : $\Lambda^i_{\mathcal{J}} \Omega^{\mathcal{J}}_0 = 0$, налагаемые при этом на компонен

dP, показывают, что точка $\bar{P}^* = (1+\Omega^0_0)\bar{P} + \Omega^{\mathcal{J}}_0 \bar{R}_{\mathcal{J}}$ принадлежит $(N-n)$-плоскости (2.I).

Определение 2. Инвариантная $(N-n)$-плоскость называется F_2-нулевым подпространством.

Замечание. Тензоры $\overset{(1)}{\Gamma}_1$ и $\overset{(3)}{\Gamma}_1$, задают в P_N инвар

ные подпространства:

$$\Lambda_{ij\mathcal{J}} X^{\mathcal{J}} = 0, \quad \Lambda_{i\mathcal{J}} X^{\mathcal{J}} = 0$$

размерностей $N - C^2_{n+1}$ и $N-n$. Они называются соответств

F_1- и F_3-нулевыми подпространствами.

Биективность рассматриваемого отображения f, задавае

системой дифференциальных уравнений (I.2), позволяет опред

обратное отображение f^*:

$$\Omega^{\mathcal{J}}_0 = V^{\mathcal{J}}_i \omega^i_0 + V^{\mathcal{J}i} \omega^0_i + V^{\mathcal{J}ij} \nabla a_{ij},$$

$$V^{\mathcal{J}ij} = V^{\mathcal{J}ji}.$$

При этом все коэффициенты $V^{\mathcal{J}}_i, V^{\mathcal{J}i}, V^{\mathcal{J}ij}$ являются ч

компоненты удлинённого объекта Γ_1, являясь ко

ми матрицы преобразования (2.I), которые должны быть с

трицы преобразования (I.I). Из последнего условия получаем

ющие соотношения:

$$\Lambda^i_{\mathcal{J}} V^{\varkappa}_i + \Lambda_{i\mathcal{J}} V^{\varkappa i} + \Lambda_{ij\mathcal{J}} V^{\varkappa ij} = \delta^{\varkappa}_{\mathcal{J}}; \qquad (2.5)$$

$$\Lambda^i_{\mathcal{J}} V^{\mathcal{J}}_j = \delta^i_j, \ \Lambda_{i\mathcal{J}} V^{\mathcal{J}j} = \delta^j_i, \ \Lambda_{ij\mathcal{J}} V^{\mathcal{J}kl} = \frac{1}{2}\delta^k_{(i}\delta^l_{j)}; \qquad (2.6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda_{i\mathcal{J}} V^{\mathcal{J}}_j = 0, \ \Lambda_{ij\mathcal{J}} V^{\mathcal{J}k} = 0, \ \Lambda^i_{\mathcal{J}} V^{\mathcal{J}kl} = 0, \\ \Lambda^i_{\mathcal{J}} V^{\mathcal{J}j} = 0, \ \Lambda_{i\mathcal{J}} V^{\mathcal{J}kl} = 0, \ \Lambda_{ij\mathcal{J}} V^{\mathcal{J}}_k = 0. \end{array}\right\} \qquad (2.7)$$

ифференцируя соотношение (2.5) и используя дифференциальные

нения (I.3) и соотношения (2.5)-(2.7), находим:

$$\overset{\circ}{\nabla} V^{\mathcal{J}}_i = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} V^{\mathcal{J}i} = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} V^{\mathcal{J}ij} = 0. \qquad (2.8)$$

з (2.8) следует, что системы величин $V^{\mathcal{J}}_i, V^{\mathcal{J}i}, V^{\mathcal{J}ij}$

ются тензорами.

Теорема 2. Тензор $V^{\mathcal{J}}_i$ определяет в P_N инвариантную

-плоскость, которая является пересечением F_1-нулевого и

-нулевого подпространств.

Доказательство. Задавая n-плоскость её теку-

точкой следующим образом:

$$\bar{A}_{\sigma,\sigma^i} = \sigma \bar{P} + \sigma^i V^{\mathcal{J}}_i \bar{R}_{\mathcal{J}}. \qquad (2.9)$$

ариантность этой n-плоскости следует из равенства:

$$\bar{A}_{\sigma,\sigma^i} + \delta \bar{A}_{\sigma,\sigma^i} = \bar{A}_{\tau,\tau^i},$$

где

$$\tau=\sigma+\delta\sigma+\sigma\Pi^{\circ}_{\circ}+\sigma^{i}V^{\gamma}_{i}\Pi^{\circ}_{\gamma},\ \tau^{i}=\sigma^{i}+\delta\sigma^{i}+\sigma^{i}(\Pi^{\circ}_{\circ}-\pi^{\circ}_{\circ})+\sigma^{j}\pi$$

Пусть точка

$$\bar{P}^{*}=\bar{P}+d\bar{P}=(1+\Omega^{\circ}_{\circ})\bar{P}+\Omega^{\gamma}_{\circ}\bar{R}_{\gamma}$$

принадлежит F_1-нулевому и F -нулевому подпространствам,
есть выполняются равенства:

$$\Lambda_{ij\gamma}\Omega^{\gamma}_{\circ}=0,\ \Lambda_{i\gamma}\Omega^{\gamma}_{\circ}=0.$$

Тогда ,учитывая (2.3) получаем :

$$\bar{P}^{*}=(1+\Omega^{\circ}_{\circ})\bar{P}+(V^{\gamma}_{i}\Lambda^{i}_{\varkappa}+V^{\gamma i}\Lambda_{i\varkappa}+V^{\gamma ij}\Lambda_{ij\varkappa})\Omega^{\varkappa}_{\circ}\bar{R}_{\gamma}=$$
$$=(1+\Omega^{\circ}_{\circ})\bar{P}+\Lambda^{i}_{\varkappa}\Omega^{\varkappa}_{\circ}V^{\gamma}_{i}\bar{R}_{\gamma},$$

то есть $\bar{P}^{*}$ принадлежит n-плоскости (2.9).Справедливост
теоремы теперь следует из того факта,что размерность пересеч
ния F_1- и F_3- нулевого подпространств не может быть меньше $N-(C^{2}_{n+1}+n)=n$,то есть размерности n-плоскости (2.9).

Определение 3. Инвариантная n-плоскость (2.9
называется F_2-подпространством.

Замечание. Подобным образом тензоры $V^{\gamma ij}$ и $V^{\gamma i}$ оп
делят F_1 и F_3 -подпространства,для которых справедливы те
мы,аналогичные теореме 2.

Введем тензоры:

$$\overset{1}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma}=\Lambda_{ij\gamma}V^{\varkappa ij},\quad \overset{2}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma}=\Lambda^{i}_{\gamma}V^{\varkappa}_{i},\ \overset{3}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma}=\Lambda_{i\gamma}V^{\varkappa i};\qquad (2$$

$$\overset{\circ}{\nabla}\overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma}=0\quad (a=1,2,3).\qquad (2$$

Из соотношений (2.I)-(2.5),(2.I0) вытекают следующие теор

Теорема 3. Тензоры $\overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma}$,обладают свойствами:

$$\overset{1}{\mathcal{J}}{}^{\gamma}_{\gamma}=C^{2}_{n+1},\ \overset{2}{\mathcal{J}}{}^{\gamma}_{\gamma}=n,\ \overset{3}{\mathcal{J}}{}^{\gamma}_{\gamma}=n;\qquad (2$$

$$\overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\varepsilon}_{\gamma}\overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\varepsilon}=\overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma};\quad \sum_{a=1}^{3}\overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma}=\delta^{\varkappa}_{\gamma}.\qquad ($$

Теорема 4. F_a-нулевое подпространство задается
равнениями:

$$\overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma}X^{\gamma}=0.\tag{2.14}$$

Теорема 5. F_a-подпространство задается уравнениями:

$$\overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma}X^{\gamma}=X^{\varkappa}.\tag{2.15}$$

§ 3. F_a-характеристические направления.

Объект второго порядка $\overset{(2)}{\Gamma}_2$ определяет в P_N инвариантное
огообразие,задаваемое системой уравнений:

$$\Lambda^{i}_{\gamma\varkappa}X^{\gamma}X^{\varkappa}-2\Lambda^{i}_{\gamma}X^{\gamma}(X^{\circ}+\sigma)=0.\tag{3.1}$$

Действительно,обозначив левые части уравнений (3.I) через Φ^{i}_{σ} ,имеем:

$$\Phi^{i}_{\sigma}+\delta\Phi^{i}_{\sigma}=(1+\pi^{\circ}_{\circ}-2\Pi^{\circ}_{\circ}+2\Theta)\Phi^{i}_{\tau}-\Phi^{j}_{\tau}\pi^{i}_{j}\tag{3.2}$$

$$\tau=\sigma+\delta\sigma-\sigma(\theta-\Pi^{\circ}_{\circ}),$$

Θ-полный дифференциал. Многообразие (3.I) представляет собой
онус,образующими которого являются связки $\{P\}$,а направляющей-
нвариантная $(N-n)$-мерная алгебраическая поверхность,задавае-
ая системой (3.I) при $\sigma=0$,и имеющая порядок $\nu\leq 2^{n}$.

Определение 4. $(N-n+1)$-мерный конус (3.I)
азывается F_2-характеристическим конусом.

Определение 5. Элемент второго порядка $\{P,dP,d^{2}P\}$
зывается инфлексионным,если точки: $P,dP,d^{2}P$ лежат на одной
рямой.

Определение 6. Пусть точке $\bar{P}^{*}=\bar{P}+d\bar{P}+\frac{1}{2}d^{2}\bar{P}+\dots$
ространства P_N соответствует точка $\bar{p}^{*}=\bar{p}+d\bar{p}+\frac{1}{2}d^{2}\bar{p}+\dots$ из P_n
удем говорить,что $P+dP$ лежит на F_2-характеристическом нап-
правлении,если из того,что $\{P,dP,d^{2}P\}$ —инфлексионный

элемент, следует, что и $\{p, dp, d^2p\}$ — также инфлексионный.

Введенное понятие в известном смысле обобщает понятие хар
теристического направления из теории точечных соответствий ([3], стр. 69).

Среди образующих конуса (3.I) особое место занимают те, кот
рые касаются направляющей поверхности в точке P, а не пересе
кают её. Множество точек этих образующих выделяется из систем
(3.I) при $\sigma = \infty$, откуда видно, что оно совпадает с F_2-нуле
вым подпространством.

Теорема 6. Каждое F_2-нулевое направление являет
F_2-характеристическим.

Доказательство. Потребуем, чтобы точка $\bar{P}^*$ с
точностью до первого порядка малости лежала в F_2-нулевом по
пространстве, тогда для соответствующей ей точки $\bar{p}^* = \bar{p} + d\bar{p} + \frac{1}{2}d$
получаем: $d\bar{p} = \omega_0^0 \bar{p}$, откуда следует, что любой элемент в
рого порядка $\{\bar{p}, d\bar{p}, d^2\bar{p}\}$ при этом условии тривиальным об
зом становится инфлексионным.

Теорема 7. Совокупность прямых F_2-характеристичес
направлений образует F_2-характеристический конус (3.I)

Доказательство. Принадлежность точки $P + d$
F_2-характеристическому направлению означает, согласно опре
лению 6:

$$d^2\bar{P} = \lambda \bar{P} + \eta\, d\bar{P}, \quad d^2\bar{p} = \tilde{\lambda} \bar{p} + \tilde{\eta}\, d\bar{p}, \qquad ($$

где

$$d\bar{P} = \Omega_0^0 \bar{P} + \Omega_0^\gamma \bar{R}_\gamma, \quad d^2\bar{P} = (d\Omega_0^0 + \Omega_0^{\gamma'}\Omega_{\gamma'}^0)\bar{P} + (d\Omega_0^\gamma + \Omega_0^{\varkappa'}\Omega_{\varkappa'}^\gamma)$$

$$d\bar{p} = \omega_0^0 \bar{p} + \Lambda_\gamma^i \Omega_0^\gamma \bar{r}_i, \quad d^2\bar{p} = (d\omega_0^0 + (\omega_0^0)^2 + \Lambda_\gamma^i \Omega_0^\gamma \omega_i^0)\bar{p} +$$

$$+(\Lambda_\gamma^i d\Omega_0^\gamma - \Omega_0^0 \Lambda_\gamma^i \Omega_0^\gamma + 2\omega_0^0 \Lambda_\gamma^i \Omega_0^\gamma - \Lambda_\gamma^i \Omega_\varkappa^\gamma \Omega_0^\varkappa + \Lambda_{\gamma\varkappa}^i \Omega_0^\gamma \Omega$$

Отсюда получаем соотношения для координат точки $\bar{P} + d\bar{P}$:

$$\Lambda_{\gamma\varkappa}^i \Omega_0^\gamma \Omega_0^\varkappa + 2\Lambda_\gamma^i \Omega_0^\gamma \omega_0^0 = (\tilde{\eta} + \eta)\Lambda_\gamma^i \Omega_0^\gamma. \qquad (3.4)$$

Она удовлетворяет (3.I) при $\sigma = \frac{1}{2}(\tilde{\eta} - \eta)\Lambda_\gamma^i \Omega_0^\gamma$. И, с другой стороны, если $\bar{P} + d\bar{P}$ лежит на конусе (3.I), выполняется (3.4) при соответствующем значении $\tilde{\eta}$, что делает совместной систему (3.3).

Определение 7. Элемент второго порядка $\{P, dP, d^2P\}$ называется F_2-инфлексионным, если точки P, dP, d^2P лежат в 2-плоскости, имеющей с F_2-нулевым подпространством пересечение ненулевой размерности.

Теорема 8. Условие инфлексионности элемента $\{P, dP, d^2P\}$ в определении 6 можно заменить более слабым условием F_2-инфлексионности.

Доказательство. По предыдущему определению первое из условий (3.3) заменяется на

$$d^2\bar{P} = \lambda \bar{P} + \eta\, d\bar{P} + X^\gamma \bar{R}_\gamma,$$

причем

$$\Lambda_\gamma^i X^\gamma = 0.$$

Однако измененные условия (3.3) приводят к тем же соотношениям (3.4), так что доказываемая теорема следует из предыдущей.

Замечание. Аналогично вводятся понятия F_1- и F_3-характеристических направлений, которые выделяются образующими F_1- и F_3-характеристических конусов:

$$\Lambda_{ij\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2\Lambda_{ij\gamma} X^\gamma (X^0 + \sigma) = 0; \quad \Lambda_{i\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2\Lambda_{i\gamma\varkappa} X^\gamma (X^0 + \sigma) = 0. \qquad (3.5)$$

Они задаются в P_N объектами второго порядка $\overset{(1)}{\Gamma}_2$ и $\overset{(3)}{\Gamma}_2$.

Определение 8. F_a-характеристические направления, лежащие в F_a-подпространстве, называются собственно F_a-характеристическими.

Определение 9. Направления, являющиеся одновременно

F_1-, F_2- и F_3- характеристическими, называются вполне характерис ческими направлениями.

Зведем системы величин:

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}=\Lambda_{ij\gamma\varkappa}V^{\mathcal{L}ij},\quad \overset{2}{\Gamma}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}=\Lambda^{i}_{\gamma\varkappa}V^{\mathcal{L}}_{i},\quad \overset{3}{\Gamma}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}=\Lambda_{i\gamma\varkappa}V^{\mathcal{L}i}, \qquad (3.6$$

$$\overset{\circ}{\nabla}\overset{a}{\Gamma}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}=-\overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\mathcal{L}}_{(\gamma}\overset{\circ}{\Pi}_{\varkappa)}. \qquad (3.$$

Из соотношений **(2.11)** и **(3.7)** следует, что системы величин $\{\overset{a}{\Gamma}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa},\ \overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma}\}$ образуют геометрические объекты.

Компоненты объекта:

$$\overset{2}{\Pi}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}=\overset{2}{\Gamma}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}-\frac{1}{n}\overset{2}{\mathcal{J}}{}^{\mathcal{L}}_{(\gamma}\overset{2}{\Gamma}{}^{\mathcal{R}}_{\varkappa)\mathcal{R}}+\frac{1}{n(n+1)}\overset{2}{\mathcal{J}}{}^{\mathcal{L}}_{(\gamma}\overset{2}{\mathcal{J}}{}^{s}_{\varkappa)}\overset{2}{\Gamma}{}^{\mathcal{R}}_{s\mathcal{R}}, \qquad (3.8$$

$$\overset{2}{\Pi}{}^{\varkappa}_{\gamma\varkappa}=0,\quad \overset{\circ}{\nabla}\overset{2}{\Pi}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}=0 \qquad (3.9$$

не изменяются при любых проективных преобразованиях P_n и преобразуются по тензорному закону в P_N, то есть ведут себя как компоненты проективной связности в теории точечных соответ вий ([3], стр.90).

Определение 10. Тензор $\overset{2}{\Pi}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}$ называется объектом F_2-связности.

Аналогично вводятся F_1- и F_3-связности.

Система величин:

$$\Gamma^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}=\sum_{a=1}^{3}\overset{a}{\Gamma}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa},\quad \overset{\circ}{\nabla}\Gamma^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}=-\delta^{\mathcal{L}}_{(\gamma}\Pi_{\varkappa)} \qquad (3.1$$

образует квазитензор ([2], стр.297).

Определение 11. Квазитензор $\Gamma^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}$ называется объектом полной связности.

Теорема 9. F_a-характеристические, собственно F_a-характеристические и вполне F_a-характеристические направлени определяются, соответственно, системами уравнений:

$$\overset{a}{\Gamma}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}X^{\gamma}X^{\varkappa}-\overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma}X^{\gamma}(X^{\circ}+\sigma)=0, \qquad (3.$$

$$\overset{a}{\Gamma}{}^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}X^{\gamma}X^{\varkappa}-X^{\mathcal{L}}(X^{\circ}+\sigma)=0,\quad \overset{a}{\mathcal{J}}{}^{\varkappa}_{\gamma}X^{\gamma}=X^{\varkappa}; \qquad (3.12)$$

$$\Gamma^{\mathcal{L}}_{\gamma\varkappa}X^{\gamma}X^{\varkappa}-\delta^{\mathcal{L}}_{\gamma}X^{\gamma}(X^{\circ}+\sigma)=0. \qquad (3.13)$$

еорема вытекает из соотношений: (2.15), (3.1), (3.5), (3.6) и (3.10).

Литература.

1. В.С.Малаховский, Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара, т.2, 1969, ВИНИТИ.

2. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского математического общества, 2, 1953, ГИТТЛ.

3. В.В.Рыжков, Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами. Геометрия, 1963 (Итоги науки, ВИНИТИ) Москва, 1965.

4. Б.А.Андреев, Об одном классе дифференцируемых отображений пространств пар фигур в точечные пространства. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.I. Труды Калининградского университета, 1970.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
вып 2 1971

О В Ч И Н Н И К О В В.М.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ В МНОГООБРАЗИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Изучается дифференцируемое отображение поверхности S_h проективного пространства P_n в многообразие $(h,h,n)^2$ квадратичных
элементов [I]. Такое отображение эквивалентно изучению h-мер-
ного многообразия пар фигур F_1, F_2, где F_1 -квадратичный элем
а F_2 -не инцидентная ему точка.

§ I. Постановка задачи.

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n многооб
разие $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов и h-мерную поверх-
ность S_h. Предположим, что между точками поверхности S_h и
квадратичными элементами многообразия $(h,h,n)^2$ установлено
локально биективное соответствие

$$\varphi: S_h \to (h,h,n)^2 .$$

Располагая вершины $\bar{A}_\alpha\ (\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n)$ репера $\{\bar{A}_1,\dots,\bar{A}_{n+1}\}$ в гиперпл
кости квадратичного элемента и совмещая вершину $\bar{A}_{n+1}$ с соотве
вующей точкой поверхности S_h, приведем уравнения локального
квадратичного элемента и систему дифференциальных уравнений от

ражения φ, соответственно, к виду:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0, \ \det(a_{\alpha\beta}) = 1, \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega^{\check a}_{n+1} = \Lambda^{\check a}_{\hat a}\,\omega^{\hat a}, \quad \Theta_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta,\hat a}\,\omega^{\hat a}, \\ \omega_\alpha = b_{\alpha\hat a}\,\omega^{\hat a}, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где $\omega^{\beta'}_{\alpha'}$ -компоненты инфинитезимальных перемещений репера

$$\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{n+1}\}, \quad \omega^{\hat a}_{n+1} = \omega^{\hat a}, \quad \omega^{n+1}_\alpha = \omega_\alpha ,$$

$$\Theta_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta - a_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha + \frac{2}{n} a_{\alpha\beta}\omega^\gamma_\gamma , \ (\hat a, \hat b = 1,\dots,h;\ \check a, \check b = h+1,\dots,n;\ \alpha', \beta' = 1,\dots,n+1).$$

Замыкая систему дифференциальных уравнений (I.2), получим :

$$\begin{aligned} d\Lambda^{\check a}_{\hat a} &= \Lambda^{\check a}_{\hat b}\Lambda^{\check b}_{\hat a}\cdot\omega^{\hat b}_{\check b} + \Lambda^{\check a}_{\hat b}\cdot\omega^{\hat b}_{\hat a} - \Lambda^{\check b}_{\hat a}\,\omega^{\check a}_{\check b} - \omega^{\check a}_{\hat a} + \Lambda^{\check a}_{\hat a\hat b}\,\omega^{\hat b}, \\ dP_{\alpha\beta,\hat a} &= -P_{\alpha\beta,\hat a}\,\omega^{n+1}_{n+1} + P_{\alpha\beta,\hat b}\,\Lambda^{\check b}_{\hat a}\omega^{\hat b}_{\check b} + P_{\alpha\beta,\hat b}\,\omega^{\hat b}_{\hat a} + \\ &\quad + P_{\alpha\gamma,\hat a}\,\omega^\gamma_\beta - \frac{2}{n}P_{\alpha\beta,\hat a}\,\omega^\gamma_\gamma + P_{\gamma\beta,\hat a}\,\omega^\gamma_\alpha + P^{*}_{\alpha\beta,\hat a\hat b}\,\omega^{\hat b}, \\ db_{\alpha\hat a} &= -2\,b_{\alpha\hat a}\,\omega^{n+1}_{n+1} + b_{\alpha\hat b}\,\Lambda^{\check b}_{\hat a}\,\omega^{\hat b}_{\check b} + b_{\alpha\hat b}\,\omega^{\hat b}_{\hat a} + \\ &\quad + b_{\check b\hat a}\,\omega^{\check b}_\alpha + b_{\hat b\hat a}\,\omega^{\hat b}_\alpha + b_{\alpha\hat a\hat b}\,\omega^{\hat b}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Учитывая (I.I), получим тождество :

$$a^{\alpha\beta}\cdot P_{\alpha\beta,\hat a} \equiv 0. \tag{1.4}$$

Система величин $\{\Lambda^{\check a}_{\hat a}\}$ образует квадратичный геометрический объект, который определяет касательную плоскость поверхности S_h.

Система величин,

$$P^{\hat c}_{\check a} = b^{\hat c\hat a}\,b_{\check a\hat a}, \tag{1.5}$$

где $b^{\hat a\hat e} \cdot b_{\hat a\hat c}=\delta^{\hat e}_{\hat c}$, $\det(b_{\hat a\hat c})\neq 0$, определяет характеристи кое $(n-k-1)$-мерное подпространство [2] квадратичного элем

$$x^{\hat c} + P^{\hat c}_{\breve a}\, x^{\breve a} = 0,\ \ x^{n+1} = 0. \qquad (1.$$

§ 2. Полярно-ассоциированный репер.

Назовем $(k-1)$ -мерную плоскость, по которой касательная плоскость к поверхности S_k пересекается с гиперплоскостью локального квадратичного элемента, ассоциированным подпростран вом.

Ассоциированное подпространство определяется уравнениями:

$$x^{\breve a} - \Lambda^{\breve a}_{\hat a}\, x^{\hat a} = 0,\ \ x^{n+1} = 0. \qquad (2.1$$

Будем считать, что ассоциированное подпространство не пересекается с полярным.

Расположим (k) вершин репера $\bar A_{\hat a}$ в ассоциированном подпро ранстве, а $(n-k)$ вершин репера $\bar A_{\breve a}$ в полярном ему подпростра тве относительно квадратичного элемента. Такой репер называется полярно-ассоциированным.

Все исследования в дальнейшем проводим в полярно-ассоциированном репере.

Уравнения (2.I) ассоциированного подпространства и полярног подпространства примут, соответственно, вид:

$$x^{\breve a} = 0,\ \ x^{n+1} = 0, \qquad (2.2$$

$$x^{\hat a} = 0,\ \ x^{n+1} = 0. \qquad (2.3$$

Уравнения проблемы примут вид:

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta,\hat a}\, \omega^{\hat a},\ \ \omega_{\alpha} = b_{\alpha\hat a}\, \omega^{\hat a}, \\ \omega^{\hat a}_{\breve a} = R^{\hat a}_{\breve a\hat e}\, \omega^{\hat e},\ \ \omega^{\breve a}_{\hat a} = \Lambda^{\breve a}_{\hat a\hat e}\, \omega^{\hat e}. \end{array}\right\} \qquad (2.4$$

де

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla R^{\hat a}_{\breve a\hat e} = -R^{\hat a}_{\breve a\hat e}\,\omega^{n+1}_{n+1} + R^{\hat a}_{\breve a\hat c}\,\omega^{\hat c}_{\hat e} + R^{\hat a}_{\breve e\hat e}\,\omega^{\breve e}_{\breve a} - R^{\hat c}_{\breve a\hat e}\,\omega^{\hat a}_{\hat c} + R^{\hat a}_{\breve a\hat e\hat c}\,\omega^{\hat c}, \\ \nabla \Lambda^{\breve a}_{\hat a\hat e} = -\Lambda^{\breve a}_{\hat a\hat e}\,\omega^{n+1}_{n+1} + \Lambda^{\breve a}_{\hat c\hat e}\,\omega^{\hat c}_{\hat a} + \Lambda^{\breve a}_{\hat a\hat c}\,\omega^{\hat c}_{\hat e} - \Lambda^{\hat e}_{\hat a\hat e}\,\omega^{\breve a}_{\breve e} + \Lambda^{\breve a}_{\hat a\hat e\hat c}\,\omega^{\hat c}. \end{array}\right.$$

читывая (2.4) получим, что системы величин $\{P_{\alpha\beta,\hat a}\}, \{b_{\alpha\hat a}\}$ танут тензорами.

§ 3. Геометрические объекты дифференцируемого отображения φ.

Рассмотрим системы величин

$$K_{\hat a} = a^{\hat e\hat c}\, P_{\hat e\hat c,\hat a};\ \ N^{\breve a} = b^{\hat a\hat e}\, \Lambda^{\breve a}_{\hat a\hat e},\ \ c^{\hat e} = b^{\hat a\hat e} \cdot K_{\hat a},$$

$$R_{\breve a} = R^{\hat a}_{\breve a\hat a};\ \ R^{\hat a}_{\breve a} = c^{\hat e}\cdot R^{\hat a}_{\breve a\hat e},\ \ \mathcal{L}^{\hat c} = a^{\hat a\hat c}\cdot K_{\hat a}. \qquad (3.1)$$

ни удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\delta K_{\hat a} = -K_{\hat a}\,\pi^{n+1}_{n+1} + K_{\hat e}\,\pi^{\hat e}_{\hat a},\ \ \delta N^{\breve a} = N^{\breve a}\pi^{n+1}_{n+1} - N^{\breve e}\,\pi^{\breve a}_{\breve e},$$

$$\delta c^{\hat e} = c^{\hat e}\,\pi^{n+1}_{n+1} - c^{\hat c}\,\pi^{\hat e}_{\hat c},\ \ \delta R_{\breve a} = -R_{\breve a}\,\pi^{n+1}_{n+1} + R_{\breve e}\,\pi^{\breve e}_{\breve a},$$

$$\delta R^{\hat a}_{\breve a} = R^{\hat a}_{\breve e}\,\pi^{\breve e}_{\breve a} - R^{\hat e}_{\breve a}\,\pi^{\hat a}_{\hat c},\ \ \delta\mathcal{L}^{\hat c} = \mathcal{L}^{\hat c}\left(\tfrac{2}{n}\pi^{\alpha}_{\alpha} - \pi^{n+1}_{n+1}\right) - \mathcal{L}^{\hat e}\,\pi^{\hat c}_{\hat e},$$

е $\pi^{\beta'}_{\alpha'}$ – значения форм Пфаффа $\omega^{\beta'}_{\alpha'}$ при фиксированных первич ых параметров.

Тензоры $(R_{\breve a}, R^{\hat a}_{\breve a})$ определяют инвариантное оснащение поверх ости S_k . Нормаль первого рода поверхности определяется объ ктом $(R^{\hat a}_{\breve a})$. Её уравнения имеют вид:

$$x^{\hat a} - R^{\hat a}_{\breve a}\cdot x^{\breve a} = 0. \qquad (3.2)$$

ормаль второго рода размерности $(k-1)$ определяется объектом $(K_{\hat a})$. Её уравнения

$$x^{n+1} - K_{\hat{a}}\, x^{\hat{a}} = 0, \qquad (3.3$$

$$x^{\check{\alpha}} = 0.$$

Назовем вектор $(\mathcal{L}^{\hat{c}})$ главным. Он определяет в ассоциированно подпространстве инвариантную точку $\bar{A} = \mathcal{L}^{\hat{c}}\, \bar{A}_{\hat{c}}$. Действительно

$$\delta \bar{A} = \left(\frac{2}{n}\, \pi_{\alpha}^{\alpha} - \pi_{n+1}^{n+1}\right)\bar{A}\,. \qquad (3.4$$

Пересечение нормали второго рода поверхности S_h с гиперплоскостью $x^{n+1} = 0$ является $(h-1)$ мерной полярой $K_{\hat{a}}\, x^{\hat{a}} = 0$ $x^{\check{\alpha}} = 0,\ x^{n+1} = 0$ точки $\bar{A} = \mathcal{L}^{\hat{c}}\, \bar{A}_{\hat{c}}$ относительно ассоциированного подпространства.

Литература

I. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом. сб., вып. 3(Труды Томско университета, I68)I963, 28-42.

2. В.С.Малаховский, Дифференциальная геометрия многообразий фиг и пар фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара, М., ВИНИТИ АН СССР, I969, I79-206.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Вып 2 1971

ПОХИЛА М.М.

ПАРЫ МНОГООБРАЗИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Случай пары с общими гиперплоскостями)

В n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается пара $T_{h,n}$ многообразий квадратичных элементов [I] с общими гиперплоскостями. Найден основной фундаментальный объект пары $T_{h,n}$. Исследованы различные поля геометрических объектов этой пары и геометрически охарактеризованы некоторые из них. Исследуется частный класс пар $T_{2,3}$ в P_3 (расслояемая пара $\overset{\circ}{T}_{2,3}$ конгруэнций коник).

§ I. Основной внутренний объект пары многообразий $T_{h,n}$.

Пусть $(\Phi_1), (\Phi_2)$ — пара многообразий $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 n-мерного проективного пространства P_n.

Определение I. Парой $T_{h,n}$ многообразий $(\Phi_1), (\Phi_2)$ будем называть такую пару многообразий $(h,h,n)^2$ [I], у которой гиперплоскости соответствующих локальных квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 совпадают.

Проективное пространство P_n размерности $n \geqslant 3$ отнесем к подвижному реперу $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{n+1}\}$. Инфинитиземальное перемещение репера определяется уравнениями

$$d\bar{A}_\lambda = \omega_\lambda^\eta \bar{A}_\eta , \qquad (1.$$

причем формы Пфаффа ω_λ^η удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\omega_\lambda^\eta = \omega_\lambda^\nu \wedge \omega_\nu^\eta . \qquad (1.$$

Здесь индексы $\lambda, \eta, \nu, \lambda_1 \dots$ принимают значения I,2,...,$n+$ а индексы $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \dots$ —значения I,2,..., n .Если вершины репера расположить в гиперплоскости квадратичного элемента Φ то уравнения квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 запишутся в виде

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0, \qquad (1.$$

$$A_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0, \qquad (1.$$

где

$$\det(a_{\alpha\beta}) = 1, \ \det(A_{\alpha\beta}) = 1, \ a_{\alpha\beta} = a_{\beta a}, \ A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} . \qquad (1$$

Полагая,как и в [I],

$$\omega_\alpha^{n+1} = \omega_\alpha , \qquad (1$$

приведем систему дифференциальных уравнений пары к виду:

$$\omega_a = a_a^i \omega_i , \ \Delta a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^i \omega_i , \ \Delta A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^i \omega_i , \qquad (1$$

где индексы $i, j, p, q = 1, 2, \dots, h$; $a, b, c = h+1, \dots, n$; $h \leq n$.

Имеем в силу (I.5)

$$a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}^i = 0, \ A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}^i = 0 . \qquad (1$$

Замыкая систему (I.7) ,получим :

$$\Delta a_a^i \wedge \omega_i = 0 , \ \Delta b_{\alpha\beta}^i \wedge \omega_i = 0, \ \Delta B_{\alpha\beta}^i \wedge \omega_i = 0, \qquad (1$$

где

$$\Delta a_a^i = d a_a^i + a_a^j \omega_j^i - a_b^i \omega_a^b + a_a^j a_b^i \omega_j^b - \omega_a^i ,$$

$$\Delta b_{\alpha\beta}^i = \nabla b_{\alpha\beta}^i + b_{\alpha\beta}^i \left(\frac{2}{n}\omega_\gamma^\gamma - \omega_{n+1}^{n+1}\right) + a_a^i b_{\alpha\beta}^j \omega_j^a + \qquad (1$$

$$+ \frac{2}{n} a_{\alpha\beta}(\omega_{n+1}^i + a_a^i \omega_{n+1}^a) - (\delta_\alpha^i + \delta_\alpha^a \omega_a^i) a_{\gamma\beta} \omega_{n+1}^\gamma - (\delta_\beta^i + \delta_\beta^a a_a^i) a_{\alpha\gamma} \omega$$

и аналогичное выражение для $\Delta B_{\alpha\beta}^i$. Учитывая (I.8), имеем тождества

$$a^{\alpha\beta} \Delta b_{\alpha\beta}^i \wedge \omega_i = 0 , \ A^{\alpha\beta} \cdot \Delta B_{\alpha\beta}^i \wedge \omega_i = 0 . \qquad (1.11)$$

Теорема I.I. Пары $T_{h,n}$ существуют и определяются с роизволом $2(C_{n+1}^2 - 1) + n - h$ функций h аргументов.

Доказательство. Система (I.9) с учетом тождеств I.II) содержит $N_h = 2(C_{n+1}^2 - 1) + n - h$ квадратичных равнений и $h[2(C_{h+1}^2 - 1) + n - h]$ независимых характеристичеcких форм. Производя высечение цепи интегральных элементов по ормам базиса ω_i ([2],стр.230), из уравнений (I.9) заключаем, то

$$\tau_1 = h \cdot N_h , \ s_1 = s_2 = \dots = s_{h-1} = N_h , \ s_h = \tau_1 - (s_1 + \dots + s_{h-1}) = N_h .$$

ак как $Q = s_1 + 2s_2 + \dots + h s_h = C_{h+1}^2 \cdot N_h$ и $N = C_{h+1}^2 \cdot N_h$,то истема в инволюции и определяет пару $T_{h,n}$ с произволом $2(C_{n+1}^2 - 1) + n - h$ функций h аргументов. Теорема доказана.

Используя лемму Картана, из (I.9) получаем

$$\Delta a_a^i = a_a^{ij} \omega_j , \ \Delta b_{\alpha\beta}^i = b_{\alpha\beta}^{ij} \omega_j , \ \Delta B_{\alpha\beta}^i = B_{\alpha\beta}^{ij} \omega_j . \qquad (1.12)$$

истема величин $\Gamma = \{a_a^i, a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}^i, A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}^i\}$ образует внутренний фундаментальный объект пары $T_{h,n}$ (см. [3], стр. 330). Система еличин $\Gamma_1 = \{\Gamma, a_a^{ij}, b_{\alpha\beta}^{ij}, B_{\alpha\beta}^{ij}\}$ образует продолженный внутренний фундаментальный объект этой пары многообразий.

Теорема 2.I. Внутренний фундаментальный объект $\Gamma = \{a_a^i, a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}^i, A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}^i\}$ является основным объектом пары $T_{h,n}$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 4 ([I], стр. 32).

Дифференцируя тождества $a_{\alpha\gamma} a^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$ и $A_{\alpha\gamma} A^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$, получаем

$$\begin{aligned} \nabla a^{\alpha\beta} - \frac{2}{n} a^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma &= -a^{\alpha\alpha_1} a^{\beta\beta_1} b_{\alpha_1\beta_1}^i \omega_i , \\ \nabla A^{\alpha\beta} - \frac{2}{n} A^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma &= -A^{\alpha\alpha_1} A^{\beta\beta_1} B_{\alpha_1\beta_1}^i \omega_i . \end{aligned} \qquad (1.13)$$

Следовательно,каждая из систем величин $a^{\alpha\beta}$ и $A^{\alpha\beta}$ образует дважды контравариантитный симметрический тензор.Система величин a^i_a образует нелинейный геометрический объект–подобъект основного фундаментального объекта Γ пары $T_{h,n}$.

§ 2. Пары $T_{n,n}$.

Рассмотрим случай $h = n$. Из теоремы [I] следует,что произвол существования такой пары $2(C^2_{n+1}-1)$ функций n аргументов.Основным фундаментальным объектом пары $T_{n,n}$ является объект

$$\Gamma=\{a_{\alpha\beta}, b^{\gamma}_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, B^{\gamma}_{\alpha\beta}\}. \tag{2.1}$$

Как следует из формул (I.IO),подобъектами объекта Γ являются геометрические объекты

$$(a_{\alpha\beta}, b^{\gamma}_{\alpha\beta}), (A_{\alpha\beta}, B^{\gamma}_{\alpha\beta}), (a_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, b^{\gamma}_{\alpha\beta}), (a_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, B^{\gamma}_{\alpha\beta}).$$

Обозначая $b_\alpha=b^{\beta}_{\alpha\beta}$, $B_\alpha=B^{\beta}_{\alpha\beta}$ и осуществляя свертку (I.IO) по соответствующим индексам,получаем

$$\begin{aligned}
\Delta b_\alpha &= db_\alpha - b_\beta\omega^\beta_\alpha + b_\alpha\left(\tfrac{2}{n}\omega^\beta_\beta-\omega^{n+1}_{n+1}\right)-\frac{(n-1)(n+2)}{n}a_{\alpha\beta}\omega^\beta_{n+1},\\
\Delta B_\alpha &= dB_\alpha - B_\beta\omega^\beta_\alpha + B_\alpha\left(\tfrac{2}{n}\omega^\beta_\beta-\omega^{n+1}_{n+1}\right)-\frac{(n-1)(n+2)}{n}A_{\alpha\beta}\omega^\beta_{n+1}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Следовательно,имеем еще линейные однородные геометрические объекты

$$(a_{\alpha\beta}, b_\alpha), (A_{\alpha\beta}, B_\alpha), (a_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, b_\alpha), (a_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, B_\alpha).$$

Каждый из первых двух геометрических объектов определяет в пространстве P_n инвариантный пучок гиперквадрик,содержащий локальный квадратичный элемент Φ_1, Φ_2 соответственно (см.[стр.35).Имеет место и обратное утверждение.

Теорема I.2. Для инвариантности произвольной гиперквадрики

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+2a_\alpha x^\alpha x^{n+1}+\lambda(x^{n+1})^2=0, \tag{2.3}$$

проходящей через квадратичный элемент Φ_1, необходимо выполнение равенств

$$a_\alpha=\frac{n}{(n-1)(n+2)}b_\alpha,\ \delta\lambda=2\lambda(\pi^{n+1}_{n+1}-\tfrac{1}{n}\pi^\gamma_\gamma)+\frac{2n}{(n-1)(n+2)}b_\alpha\pi^\alpha_{n+1}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Обозначим $F\equiv a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+ +2a_\alpha x^\alpha x^{n+1}+\lambda(x^{n+1})^2$.Для инвариантности гиперквадрики (2.3) должно быть δF пропорционально F .При вычислении δF используем формулы

$$\delta a_{\alpha\beta}=a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha+a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta-\tfrac{2}{n}a_{\alpha\beta}\pi^\gamma_\gamma,\ \delta x^\alpha=-x^\beta\pi^\gamma_\beta-x^{n+1}\pi^\alpha_{n+1}+\theta x^\alpha.$$

Учитывая сказанное,получаем:

$$\delta a_\alpha-a_\beta\pi^\beta_\alpha-a_\alpha\pi^{n+1}_{n+1}+\tfrac{2}{n}a_\alpha\pi^\gamma_\gamma-a_{\alpha\beta}\pi^\beta_{n+1}=0, \tag{2.5}$$

$$\delta\lambda=2\lambda(\pi^{n+1}_{n+1}-\tfrac{1}{n}\pi^\gamma_\gamma)+2a_\alpha\pi^\alpha_{n+1}. \tag{2.6}$$

Сравнивая (2.2) и (2.5), убеждаемся, что $a_\alpha=\frac{n}{(n-1)(n+2)}b_\alpha$ и теорема доказана.

Совокупность величин $(a_{\alpha\beta}, b_\alpha, \lambda)$ с законом изменения

$$\begin{aligned}
\delta a_{\alpha\beta}&=a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha+a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta-\tfrac{2}{n}a_{\alpha\beta}\pi^\gamma_\gamma,\\
\delta b_\alpha&=b_\beta\pi^\beta_\alpha+b_\alpha(\pi^{n+1}_{n+1}-\tfrac{2}{n}\pi^\gamma_\gamma)+\frac{(n-1)(n+2)}{n}a_{\alpha\beta}\pi^\beta_{n+1},\\
\delta\lambda&=2\lambda(\pi^{n+1}_{n+1}-\tfrac{1}{n}\pi^\gamma_\gamma)+\frac{2n}{(n-1)(n+2)}b_\alpha\pi^\alpha_{n+1}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

образует тензор.

Теорема 2.2. Тензор $(a_{\alpha\beta}, b_\alpha, \lambda)$ определяет совокупность всех инвариантных гиперквадрик пространства P_n, проходящих через локальный квадратичный элемент многообразия $(n,n,n)^2$.

Эти гиперквадрики задаются уравнением

$$a_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} + \frac{2n}{(n-1)(n+2)} b_{\alpha} x^{\alpha} x^{n+1} + \lambda (x^{n+1})^2 = 0. \qquad (2.8$$

Обозначим

$$\rho = a_{\alpha\beta} b^{\alpha} \iota \frac{n^2}{(n-1)^2(n+2)^2} - \lambda . \qquad (2.9$$

Имеем:

$$\delta\rho = 2\rho \left(\pi^{n+1}_{n+1} - \frac{1}{n} \pi^{\gamma}_{\gamma}\right).$$

Следовательно , ρ —относительный инвариант.

Теорема 2.3. Гиперквадрика (2.8) тогда и только тогда является гиперконусом, когда $\rho = 0$.Его вершина находится в точке

$$\bar{a} = a^{\alpha\beta} b_{\alpha} \bar{A}_{\beta} - \frac{(n-1)(n+2)}{n} \bar{A}_{n+1} \qquad (2.10$$

Вводя обозначения

$$b^{\alpha} = a^{\alpha\beta} b_{\beta} , \quad B^{\alpha} = A^{\alpha\beta} B_{\beta} , \qquad (2.11)$$

имеем

$$\delta b^{\alpha} = - b^{\beta} \pi^{\alpha}_{\beta} + b^{\alpha} \pi^{n+1}_{n+1} + \frac{(n-1)(n+2)}{n} \pi^{\alpha}_{n+1} , \qquad (2.12$$

$$\delta B^{\alpha} = - B^{\beta} \pi^{\alpha}_{\beta} + B^{\alpha} \pi^{n+1}_{n+1} + \frac{(n-1)(n+2)}{n} \pi^{\alpha}_{n+1} .$$

Квазитензоры b^{α} и B^{α} определяют инвариантные точки [I] (оснащение) $\bar{a} = b^{\alpha} \bar{A}_{\alpha} - \frac{(n-1)(n+2)}{n} \bar{A}_{n+1}$ и $\bar{A} = B^{\alpha} \bar{A}_{\alpha} - \frac{(n-1)(n+2)}{n} \bar{A}_{n+1}$.

Прямую, проходящую через эти точки, обозначим d , а точку пересечения её с гиперплоскостью квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 через P . Величины $m = a^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$ и $\eta = A^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}$ -абсолютные инварианты пары $T_{n,n}$.

Обозначим:

$$A^{\alpha}_{\beta} = A^{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} , \; a^{\alpha}_{\beta} = a^{\alpha\gamma} A_{\gamma\beta} , \; \tilde{b}^{\alpha} = A^{\alpha\beta} b_{\beta} , \; \tilde{B}^{\alpha} = a^{\alpha\beta} b_{\beta} , \; \tilde{b}_{\alpha} = A_{\alpha\beta} b^{\beta} ,$$

$$\tilde{B}_{\alpha} = a_{\alpha\beta} B^{\beta} , \; l_{\alpha} = \tilde{B}_{\alpha} - b_{\alpha} , \; b_{\alpha\beta\gamma} = a_{\gamma(\alpha} b^{\nu}_{\beta\delta)} - \frac{2}{n+1} b_{(\alpha} a_{\beta\delta)} , \; C^{\alpha} = B^{\alpha} - b^{\alpha} , \; m_{\alpha} = B_{\alpha} - \tilde{b}_{\alpha}$$

Системы величин $(\tilde{b}^{\alpha}, A^{\alpha}_{\beta}), (\tilde{B}^{\alpha}, a^{\alpha}_{\beta}), (A_{\alpha\beta}, \tilde{b}_{\alpha}), (a_{\alpha\beta}, \tilde{B}_{\alpha})$

$c^{\alpha}, l_{\alpha}, m_{\alpha}, b_{\alpha\beta\gamma}, B_{\alpha\beta\gamma}$

ределяют тензоры пары $T_{n,n}$.Тензор C^{α} определяет инва-
иантную точку P .Тензоры l_{α} и m_{α} определяют поляру точки P относительно квадрик $a_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 0$ и $A_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 0$ в гиперплоскости $x^{n+1} = 0$. Их уравнения имеют ид

$$\begin{aligned} (\bar{B}_{\alpha} - b_{\alpha}) x^{\alpha} = 0 , \quad x^{n+1} = 0 \text{ и} \\ (B_{\alpha} - \tilde{b}_{\alpha}) x^{\alpha} = 0 , \quad x^{n+1} = 0 . \end{aligned} \qquad (2.13)$$

§ 3. Расслояемые пары $T^{\circ}_{2,3}$ в P_3.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается ара конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник C_1 , C_2 с общей плоскостью пара $T'_{2,3}$), обладающая следующими свойствами :

I) Конгруэнции (C_1) и (C_2) имеют две невырожденные фокальные оверхности (A_1) и (A_2), не касающиеся общей плоскости коник.

2) Точка A_3 является характеристической точкой плоскости и е инцидентна коникам C_1 и C_2 .

3) Фокальные линии на поверхностях (A_i) не соответствуют.

4) Прямая A_1A_2 является полярой точки A_3 относительно обеих коник C_1 и C_2 .

Поместим вершины A_i (i = I,2) координатного тетраэдра $\{A_{\alpha}\}$ (α=I,2,3,4) в общие фокальные точки A_1, A_2 коник C_1, C_2, A_3-в характеристическую точку плоскости, A_4-на линию пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i). Уравнения коник C_1 , C_2 относительно этого репера записываются в виде:

$$\begin{aligned} (x^3)^2 - 2p x^1 x^2 = 0 , \quad \text{и } x^4 = 0 , \\ (x^3)^2 - 2q x^1 x^2 = 0 , \quad x^4 = 0, \end{aligned} \qquad (3.1)$$

где $p \neq 0, q \neq 0$.

Из условия инвариантности каждой из коник имеем

$$\delta \ln p = \pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3 \;, \quad \delta \ln q = \pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3 \;,$$

откуда

$$\delta \ln pq = 2\,(\pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3).$$

Следовательно, можно осуществить нормировку вершин так, чт

$$pq = 1 \;. \qquad (3.$$

После этой нормировки уравнения коник C_1 и C_2 принимаю

вид:

$$(x^3)^2 - 2p x^1 x^2 = 0 \;, \quad x^4 = 0,$$

$$p(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \qquad (3.$$

Дифференциальные уравнения пары $T'_{2,3}$ запишутся так:

$$\omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k \;, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k \;, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k \,, \quad \omega_i^j = 0,$$

$$dp = p^k\omega_k \,, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k\omega_k \;, \quad \omega_3^4 = 0. \qquad (3.$$

Здесь и в дальнейшем $\omega_i = \omega_i^4$; $i,j,k=1,2$; $i \neq j$ и по i,j не суммир

вать.

О п р е д е л е н и е 3.I. Расслояемой парой конгруэнц

$(C_1),(C_2)$ коник с общей плоскостью (парой $T^0_{2,3}$) называется

такая пара $T'_{2,3}$, для которой существует одностороннее расслоен

от каждой конгруэнции (C_1), (C_2) к многообразию прямых $(A_3A$

О п р е д е л е н и е 3.2. Пусть (C) -конгруэнция кон

C , (ℓ) -многообразие прямых ℓ зависящих от m = 2, I,

параметров. Конгруэнция (C) односторонне расслояема к многообр

зию (ℓ) ,если дано однозначное отображение (C) на (ℓ) и к к

груэнции (C) можно присоединить однопараметрическое семейств

Σ поверхностей так, чтобы касательные плоскости к каждой

поверхности семейства Σ в точках пересечения с коникой C

конгруэнции (C) содержали соответственную прямую ℓ многообра

зия (ℓ).

Условия одностороннего расслоения от (C_1) к (A_3A_4) и соответст-

но от (C_2) к (A_3A_4) записываются так:

$$(p^1 - pa^1)\Gamma_3^{12} - (p^2 - pa^2)\Gamma_3^{11} = 0,$$

$$(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}) + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} + \Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} = 0, \qquad (3.5)$$

$$(pa^1 - p^1)\Gamma_3^{22} - (pa^2 - p^2)\Gamma_3^{21} = 0$$

$$(pa^1 + p^1)\Gamma_3^{12} - (pa^2 + p^2)\Gamma_3^{11} = 0,$$

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}) + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} + \Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} = 0, \qquad (3.6)$$

$$(pa^1 + p^1)\Gamma_3^{22} - (pa^2 + p)\Gamma_3^{21} = 0.$$

Т е о р е м а 3.I. Характеристическая поверхность (A_3)

мейства плоскостей пары $T^0_{2,3}$ вырождается.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычитая средние уравнения (3.5)

(3.6) и учитывая, что $p \neq \frac{1}{p}$, ибо коники C_1 и C_2 не совпадают,

еем $\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21} = 0$,т.е. $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = 0$,что и требова-

сь доказать.

Замыкания уравнений $\omega_3^4 = 0, \omega_i^j = 0$ дают $\Gamma_3^{21} = \Gamma_3^{12}$,

$$\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{22} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{21} + \Gamma_4^{22} = 0, \quad \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{11} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{12} + \Gamma_4^{11} = 0 \;. \qquad (3.7)$$

I.Случай вырождения поверхности (A_3) в точку (пара $T^{0,1}_{2,3}$).

этом случае $\omega_3^1 = 0, \omega_3^2 = 0$.Из (3.5),(3.6) и (3.7) имеем

$$\Gamma_4^{22} = 0, \; \Gamma_4^{11} = 0 \qquad \text{и} \qquad \Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} = 0 \;. \qquad (3.8)$$

Положим $\Gamma_4^{12} = \alpha$.Имеем $\omega_4^1 = \alpha\omega_2$ и $\omega_4^2 = -\alpha\omega_1$;замыкая пос-

едние два уравнения, убеждаемся, что $\alpha = 0$.Прямая A_3A_4 ,следо-

ательно, неподвижна.

Т е о р е м а 3.2. Пара $T^{0,1}_{2,3}$ существует и определяется с произволом четырех функций двух аргументов.

Доказательство. Система для определения пар $T^{0,1}_{2,3}$ имеет следующий вид:

$$\omega^3_i=\Gamma^{3k}_i\omega_k,\ \omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^3_3=a^k\omega_k,\ d\rho=\rho^k\omega_k,\qquad (3.9$$
$$\omega^i_3=0,\ \omega^4_3=0,\ \omega^j_i=0,\ \omega^i_4=0$$

Замыкая все уравнения системы (3.9), убеждаемся в её инволю тивности и находим произвол-четыре функции двух аргументов.

Теорема 3.3. Фокальные поверхности (A_i) пары $T^{0,1}_{2,3}$ суть неподвижные плоскости. Фокальными линиями $\omega_i=0$ на поверхности (A_i) являются прямые, проходящие через неподвижную точку A_3.

Доказательство. Используя (3.9), имеем

$$d(\bar A_i\bar A_3\bar A_4)=(\omega^i_i+\omega^3_3+\omega^4_4)(\bar A_i\bar A_3\bar A_4)$$
$$d(\bar A_i\bar A_3)=(\omega^i_i+\omega^3_3)(\bar A_i\bar A_3)+\omega_i(\bar A_4\bar A_3).$$

Теорема доказана.

Условием инвариантности конуса $(x^3)^2-2px^1x^2+2\lambda x^3x^4+\lambda^2(x^4)$ с вершиной в точке $\bar K=\bar A_4-\lambda\bar A_3$ имеет вид

$$\delta\lambda=\lambda(\pi^4_4-\pi^3_3)+\pi^3_4.\qquad (3.10$$

Осуществляя канонизацию $\lambda=0$, т.е. совмещая A_4 с вершиной конуса K, получаем

$$\omega^3_4=K_1\omega_1+K_2\omega_2.\qquad (3.1$$

Замыкая это уравнение, имеем

$$[dK_1+K_1(\omega^1_1+\omega^3_3-2\omega^4_4)]\wedge\omega_1+[dK_2+K_2(\omega^2_2+\omega^3_3-2\omega^4_4)]\wedge\omega_2=0$$

Считая $K_1K_2\neq0$, нормируем так вершины репера, чтобы $K_1=K_2=1$

II. Случай вырождения поверхности (A_3) в линию (пары $T^{0,2}_{2,3}$

Пусть $\omega^2_3=\alpha\,\omega^1_3$, где $\omega^1_3\neq0$. Продолжая это уравнение убеждаемся в возможности проведения нормировки вершин репера

ак, чтобы $\alpha=1$. Замыкая уравнение $\omega^4_3=0$, получаем

$$\omega^1_3=\omega^2_3=\beta(\omega_1+\omega_2),\ \omega^2_2-\omega^1_1=\gamma(\omega_1+\omega_2),$$

де $\beta\neq0$. Система, определяющая пару $T^{0,2}_{2,3}$, состоит из урав- ний Пфаффа

$$\omega^i_4=\Gamma^{ik}_4\omega_k,\ \omega^3_i=\Gamma^{3k}_i\omega_k,\ \omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^3_3=\tilde a(\omega_1+\omega_2),\qquad (3.I2)$$
$$\omega^2_2-\omega^1_1=\gamma(\omega_1+\omega_2),\ \omega^4_3=\omega^j_i=0$$
$$\rho=\tilde p(\omega_1+\omega_2),\ \omega^1_3=\omega^2_3=\beta(\omega_1+\omega_2),$$

конечных связей

$$(\Gamma^{31}_1-\Gamma^{32}_1)\beta+\Gamma^{22}_4=0,\ (\Gamma^{32}_2-\Gamma^{31}_2)\beta+\Gamma^{11}_4=0,\qquad (3.13)$$
$$\Gamma^{11}_4+\Gamma^{22}_4-\Gamma^{12}_4-\Gamma^{21}_4=0.$$

Теорема 3.4. Пары $T^{0,2}_{2,3}$ существуют и определяются с роизволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. Замыкая (3.I2) и учитывая ко- ечные связи (3.I3) убеждаемся, что система в инволюции и произ- вол её решения две функции двух аргументов.

Теорема 3.5. Торсы прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) пары $T^{0,2}_{2,3}$ совпадают.

Доказательство. Уравнение торсов конгруэнции (A_3A_4) имеет вид $\omega^1_3(\omega^1_4-\omega^2_4)=0$. Так как из последнего уравнения (3.I3) имеем $\omega^1_4-\omega^2_4=(\Gamma^{11}_4-\Gamma^{21}_4)(\omega_1+\omega_2)$, $\omega^1_3=\beta(\omega_1+\omega_2)$, то теорема доказана.

Пара $T^{0,2}_{2,3}$ обладает многими интересными геометрическими свойствами. Случай $\alpha\equiv0$ исследуется аналогично.

Легко строится канонический репер пары $T^{0,2}_{2,3}$.

Литература

I. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом.сб., вып.3 (Труды Томского университета, I968), 28-42, I963.

2. С.П.Фиников, Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М-Л, 1948.

3. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многооб зий. Труды Московского математического общества, т.2, 275-3 ГИТТЛ, М., 1953.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
вып 2
1971

ПОХИЛА М.М.

ПАРЫ МНОГООБРАЗИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ (Общий случай)

В n-мерном проективном пространстве рассматривается пара $V_{h,n}$ ногообразий $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов [2] с несовпадающими иперплоскостями соответствующих локальных квадратичных элемен ов. Найден основной фундаментальный объект пары $V_{h,n}$. Построен аноничеакий репер пары конгруэнций коник в P_3 (пары $V_{2,3}$). сследуется частный класс расслояемых пар B [3] конгруэнций в P_3 (пары B°).

§ I. Основной внутренний объект пары многообразий $V_{h,n}$.

Пусть $(\Phi_1),(\Phi_2)$ -пара многообразий $(h,h,n)^2$ квадратичных лементов Φ_1, Φ_2 n-мерного проективного пространства P_n.

Определение I.I. Парой $V_{h,n}$ многообразий (Φ_1), (Φ_2) будем называть такую пару многообразий $(h,h,n)^2$[2], у которой гиперплоскости τ_1, τ_2 соответствующих локальных квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 не совпадают.

Пусть гиперплоскости τ_1, τ_2 пересекаются по (n-2)-плоскости

Обозначим через A_o, A_n полюсы (n-2)-плоскости ρ относите

но квадрики Φ_1, Φ_2 в (n-1)-мерном проективном пространстве

, . Пару $V_{h,n}$ отнесем к частично канонизированному репе

$\{\bar{A}_o, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n\}$, у которого $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ – произвольные нез

висимые точки плоскости ρ; A_o, A_n – полюсы плоскости ρ от

сительно квадрик Φ_1, Φ_2.

Уравнения квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 запишутся в виде

$$(x^o)^2 + a_{ij} x^i x^j = 0, \quad x^n = 0, \qquad (1.$$

$$(x^n)^2 + A_{ij} x^i x^j = 0, \quad x^o = 0, \qquad (1.$$

где индексы в дальнейшем принимают значения:

$$i, j, k, \ell = 1, 2, \dots, n-1; \ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n; \ a, b, c = 1, \dots, h; \qquad (1.$$

$$\lambda, \eta, \nu = h+1, \dots, n; \ 1 \le h \le n; \ \det(a_{ij}) \ne 0, \det(A_{ij}) \ne 0.$$

Обозначая $\omega^o_\alpha = \omega_\alpha$ и принимая формы ω_a за базисные, приведем

дифференциальные уравнения пары $V_{h,n}$ к виду:

$$\omega_\lambda = a^a_\lambda \omega_a, \ \omega^\alpha_o = \Gamma^{\alpha a}_o \omega_a, \ \omega^i_n = \Gamma^{ia}_n \omega_a, \ \omega^n_i = \Gamma^{na}_i \omega_a,$$

$$\nabla a_{ij} + 2 a_{ij} \omega^o_o = b^a_{ij} \omega_a, \ \nabla A_{ij} + 2 A_{ij} \omega^n_n = B^a_{ij} \omega_a, \qquad (1$$

где $b^a_{ij} = b^a_{ji}$, $B^a_{ij} = B^a_{ji}$.

Система величин $\Gamma = \{a^a_\lambda, \Gamma^{\alpha a}_o, \Gamma^{ia}_n, \Gamma^{na}_i, b^a_{ij}, B^a_{ij}, a_{ij}, A_{ij}\}$

образует внутренний фундаментальный объект $[\Gamma]$ пары $V_{h,n}$. Зап

уравнения (I,4), получаем:

$$\Delta a^a_\lambda \wedge \omega_a = 0, \ \Delta \Gamma^{\alpha a}_o \wedge \omega_a = 0, \ \Delta \Gamma^{ia}_n \wedge \omega_a = 0,$$

$$\Delta \Gamma^{na}_i \wedge \omega_a = 0, \ \Delta b^a_{ij} \wedge \omega_a = 0, \ \Delta B^a_{ij} \wedge \omega_a = 0, \qquad (1$$

где

$$\Delta a^a_\lambda = d a^a_\lambda - a^a_\eta \omega^\eta_\lambda + a^b_\lambda \omega^a_b + a^b_\lambda a^a_\eta \omega^\eta_b - \omega^a_\lambda,$$

$$\Delta \Gamma^{\alpha a}_o = d \Gamma^{\alpha a}_o + \Gamma^{\alpha b}_o \omega^a_b + \Gamma^{\beta a}_o \omega^\alpha_\beta - 2 \Gamma^{\alpha a}_o \omega^o_o + a^a_\eta \Gamma^{\alpha b}_o \omega^\eta_b,$$

$$\Delta \Gamma^{ia}_n = d\Gamma^{ia}_n + \Gamma^{ib}_n \omega^a_b + \Gamma^{ja}_n \omega^i_j - \Gamma^{ia}_o \omega_n - \Gamma^{ia}_n (\omega^n_n + \omega^o_o) + a^a_\lambda \Gamma^{ib}_n \omega^\lambda_b,$$

$$\Delta \Gamma^{na}_i = d\Gamma^{na}_i + \Gamma^{nb}_i \omega^a_b - \Gamma^{na}_j \omega^j_i + \Gamma^{na}_i (\omega^n_n - \omega^o_o) - \Gamma^{na}_o \omega_i + a^a_\lambda \Gamma^{nb}_i \omega^\lambda_b,$$

$$\Delta b^a_{ij} = d b^a_{ij} + b^b_{ij} \omega^a_b - b^a_{kj} \omega^k_i - b^a_{ik} \omega^k_j + b^a_{ij} \omega^o_o + a^a_\lambda b^b_{ij} \omega^\lambda_b -$$

$$2 a_{ij} (\omega^a_o + a^a_\eta \omega^\eta_o) + (a_{kj} \omega_i + a_{ik} \omega_j) \Gamma^{ka}_o + (a_{kj} \omega^n_i + a_{ik} \omega^n_j) \Gamma^{ka}_n,$$

$$\Delta B^a_{ij} = d B^a_{ij} + B^b_{ij} \omega^a_b - B^a_{kj} \omega^k_i - B^a_{ik} \omega^k_j + B^a_{ij} (2\omega^n_n - \omega^o_o) +$$

$$+ a^a_\lambda B^b_{ij} \omega^\lambda_b - 2 A_{ij} (\Gamma^{na}_o \omega_n + \Gamma^{na}_\ell \omega^\ell_n) +$$

$$+ (A_{kj} \omega_i + A_{ik} \omega_j) \Gamma^{ka}_o + (A_{kj} \omega^n_i + A_{ik} \omega^n_j) \Gamma^{ka}_n. \qquad (1.6)$$

Разрешая уравнения (I.5) по лемме Картана, получаем:

$$\Delta a^a_\lambda = a^{ab}_\lambda \omega_b, \ \Delta \Gamma^{\alpha a}_o = \Gamma^{\alpha a b}_o \omega_b, \ \Delta \Gamma^{ia}_n = \Gamma^{iab}_n \omega_b,$$

$$\Delta \Gamma^{na}_i = \Gamma^{nab}_i \omega_b, \ \Delta b^a_{ij} = b^{ab}_{ij} \omega_b, \ \Delta B^a_{ij} = B^{ab}_{ij} \omega_b. \qquad (1.7)$$

стема величин $\Gamma_1 = \{\Gamma, a^{ab}_\lambda, \Gamma^{\alpha ab}_o, \Gamma^{iab}_n, \Gamma^{nab}_i, b^{ab}_{ij}, B^{ab}_{ij}\}$

разует продолженный внутренний фундаментальный объект пары $V_{h,n}$.

Теорема I.I. Пара $V_{h,n}$ существует и определяется с

оизволом $S_{h,n} = n^2 + 3n - h - 2$ функций h аргументов.

Доказательство. Система (I.5) содержит $S_{h,n}$ не

висимых квадратичных уравнений и $h \cdot S_{h,n}$ независимых характестических форм. Производя высечение цепи по формам базиса ω_a

м.[4] стр.330), из уравнений (I.5) заключаем, что $\tau_1 = h \cdot S_{h,n}$;

$_1 = S_2 = \dots = S_{h-1} = S_{h,n}$ и, следовательно, $S_h = \tau_1 - (S_1 + \dots + S_{h-1}) = S_{h,n}$.

к как $N = Q = S_{h,n} \cdot C^2_{h+1}$, то система (I.4) в инволюции и опреде

ет пару $V_{h,n}$ с произволом $S_{h,n} = n^2 + 3n - h - 2$ функций h аргу

нтов. Теорема доказана.

Теорема I.2. Внутренний фундаментальный объект $\Gamma=\{ a^a_\lambda, \Gamma^{\alpha a}_o, \Gamma^{ia}_n, \Gamma^{na}_i, b^a_{ij}, B^a_{ij}, a_{ij}, A_{ij}\}$ является основным объект [I] пары $V_{h,n}$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 4 (см. стр.32). В случае пары $V_{2,3}$ конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник C_1, в трехмерном проективном пространстве P_3 легко строится к нический репер R_o. Помещаем вершину A_i в одну из точек сечения коники $C_j (j\neq i; i,j=1,2)$ с прямой ℓ пересечен плоскостей коник, считая, что коники C_i не касаются прямо ℓ A_o, A_3 -полюсы прямой ℓ относительно коник C_1, C_2.

Уравнения коник принимают вид:

$$(x^o)^2-(a_1x^1)^2+2a_{12}x^1x^2=0,\ x^3=0,$$
$$(x^3)^2-(a_2x^2)^2+2A_{12}x^1x^2=0,\ x^o=0,$$

где $a_{12}\neq 0$, $A_{12}\neq 0$.

Так как

$$\delta a_{12}=a_{12}(\pi^1_1+\pi^2_2-2\pi^o_o),\ \delta A_{12}=A_{12}(\pi^1_1+\pi^2_2-2$$

то вершины репера можно пронормировать так, чтобы $a_{12}=A$ Тогда $\pi^o_o=\pi^3_3=0, \pi^1_1+\pi^2_2=0$. Уравнения коник C_1, C_2 примут

$$(x^o)^2-(a_1x^1)^2-2x^1x^2=0,\ x^3=0,$$
$$(x^3)^2-(a_2x^2)^2-2x^1x^2=0,\ x^o=0.$$

Полученный частично канонизированный репер обозначим R_1

$$a_1a_2\neq 0.$$

Учитывая соотношение

$$\delta[(a_1)^2-(a_2)^2]=2[(a_1)^2+(a_2)^2]\pi_1$$

проводим оставшуюся нормировку так, чтобы

$$a_1=a_2=a.$$

построенном каноническом репере уравнения коник C_1, C_2 имеют

$$(x^o)^2-2x^1x^2-(ax^1)^2=0,\ x^3=0,$$
$$(x^3)^2-2x^1x^2-(ax^2)^2=0,\ x^o=0. \tag{1.12}$$

§ 2. Расслоение пары B^o.

ассмотрим пары $V_{2,3}$ конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник C_1, C_2 в ерном проективном пространстве. Если C_1, C_2 не касаются пря- пересечения плоскостей коник C_1, C_2, то относя пару $V_{2,3}$ перу R_1 приведем уравнения коник к виду:

$$(x^o)^2-2x^1x^2-(a_1x^1)^2=0,\ x^3=0, \tag{2.1}$$
$$(x^3)^2-2x^1x^2-(a_2x^2)^2=0,\ x^o=0. \tag{2.2}$$

пределение 2.I. Парой B [3] называется такая $V_{2,3}$, для которой: I)существует одностороннее расслоение аждой конгруэнции (C_i) коник C_i к линейчатому многообразию их A_oA_3; 2)точки A_o, A_3 являются характеристическими точками костей коник C_1, C_2; 3)касательные плоскости к поверхностям) содержат прямую $m\equiv A_oA_3$.

ары B определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\omega^o_i=\Gamma^{ok}_i\omega_k,\ \omega^i_o=\Gamma^{ik}_o\omega_k,\ \omega^i_3=\Gamma^{ik}_3\omega_k,\ \omega^3_o=0,\ \omega^o_3=0,$$
$$\equiv da_1-a_1(\omega^1_1-\omega^o_o)=A^k_1\omega_k,\ \theta_2\equiv da_2-a_2(\omega^2_2-\omega^3_3)=A^k_2\omega_k,$$
$$\equiv\omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^o_o=b^k_1\omega_k,\ \Omega_2\equiv\omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^3_3=b^k_2\omega_k,\ \omega^j_i=0; \tag{2.3}$$

кже системой квадратичных уравнений:

$$\omega_i\wedge\omega^j_3+\omega^o_i\wedge\omega^j_o=0,\ \Omega_1\wedge\omega^1_o=0,\ \Omega_2\wedge\omega^2_3=0,$$
$$_1\wedge\omega^2_o+a_1\theta_1\wedge\omega^1_o=0,\ \Omega_2\wedge\omega^1_3+a_2\theta_2\wedge\omega^2_3=0, \tag{2.4}$$

$$a_1\theta_1\wedge\omega_0^2=0,\ a_2\theta_2\wedge\omega_3^1=0,\ \omega_0^k\wedge\omega_k=0,\ \omega_3^k\wedge\omega_k^0=0,$$

$$2\omega_0^1\wedge\omega_0^2+\omega_1^0\wedge\omega_0^1+\omega_1\wedge\omega_3^1-\omega_2^0\wedge\omega_0^2-\omega_2\wedge\omega_3^2=0,\quad (2$$

$$\omega_0^1\wedge\omega_0^2-\omega_3^1\wedge\omega_3^2=0,\quad a_1\omega_0^1\wedge\omega_0^2=0,\ a_2\omega_0^1\wedge\omega_0^2=0,$$

где $\omega_i^3\equiv\omega_i$, $\omega_1\wedge\omega_2\neq0$, $\omega_1^0\wedge\omega_2^0\neq0$, $i\neq j$; $i,k=1,2$, (2

по i,j не суммировать.

В работе [3] рассматривается случай пары B с невырожда мися характеристическими поверхностями $(A_0),(A_3)$. Рассмотри пары B в случае, когда характеристические поверхности (A_0) вырождаются в точки.

Т е о р е м а 2.I. Если характеристическая поверхност пары B вырождается в точку (линию), то и характеристическая поверхность (A_3) вырождается в точку (линию) и наоборот.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_3 -неподвижная точ Тогда $\omega_3^1=\omega_3^2=0$. Из (2.4) имеем: $\omega_0^1\wedge\omega_0^2=0, \omega_i^0\wedge$ $\omega_1^0\wedge\omega_2^0\neq0, \omega_1^0\wedge\omega_0^1-\omega_2^0\wedge\omega_0^2=0$. Отсюда $\omega_0^1=\omega_0^2=0$. Наобор если $\omega_0^1=\omega_0^2=0$, то из (2.4) следует, что $\omega_3^1=\omega_3^2=0$ Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пары B, для которых хара ристические поверхности $(A_0),(A_3)$ вырождаются в точки, называ парами B^0 .

Т е о р е м а 2.2. Пары B^0 существуют и определяютс произволом шести функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для пары B^0 квадратично нения (2.4) удовлетворены тождественно, а система Пфаффа к вид:

$$\omega_i^0=\Gamma_i^{0k}\omega_k,\ \Omega_i=b_i^k\omega_k,\ \theta_i=A_i^k\omega_k,\qquad(2.6)$$

$$\omega_0^i=0,\ \omega_3^i=0,\ \omega_i^j=0,\ \omega_0^3=0,\ \omega_3^0=0.$$

икая (2.6), убеждаемся в её инволютивности. Произвол её решния шесть функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2.3. Каждая из поверхностей (A_i) пары B^0 вы- дается в плоскость.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $d\bar A_i=\omega_i^0\bar A_0+\omega_i^i\bar A_i+\omega_i\bar A_3$, плоскость $A_0A_iA_3$ касается поверхности (A_i). Далее имеем $\bar A_0\bar A_i\bar A_3)=(\omega_0^0+\omega_i^i+\omega_3^3)(\bar A_0\bar A_i\bar A_3)$, то есть плоскость одвижна. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.4. Точки A_i являются фокальными точками ики C_j. Фокальные линии на фокальных поверхностях (A_i) являютнепересекающимися прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выписывая уравнения для определеия фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции) убеждаемся, что точка A_2 является фокальной для коники C_1, равнение фокальной линии на поверхности (A_2) имеет вид $\omega_2=0$. как $d\bar A_2=\omega_2^2\bar A_2+\omega_2^0\bar A_0+\omega_2\bar A_3$ и $d[\bar A_2\bar A_0]=(\omega_2^2+\omega_0^0)[\bar A_2\bar A_0]+\omega_2[\bar A_3\bar A_0]$, действительно линия $\omega_2=0$ на поверхности (A_2) является ной, проходящей через неподвижную точку A_0. Аналогично дока- ается, что точка A_1 является фокальной точкой коники C_2 и альная линия на поверхности (A_1) есть прямая с уравнением $= 0$, проходящая через неподвижную точку A_3. Допуская ожность вырождения поверхностей (A_i) в линию (в определе- 3.I требование 3 заменяем уравнением $\omega_i^j=0$), имеем ующую теорему:

е о р е м а 2.5. Фокальная точка A_j коники C_i пары B^0

тогда и только тогда является фокусом луча A_1A_2 прямолиней конгруэнции (A_1A_2), когда фокальная поверхность (A_j) конгру (C_i) вырождается.

Доказательство. Если точка $\bar{F}=\ell_1\bar{A}_1+\ell_2\bar{A}_2$ я ся фокусом прямой A_1A_2 конгруэнции (A_1A_2), то имеем:

$$\Gamma_1^{02}(\ell_1)^2+(\Gamma_2^{02}-\Gamma_1^{01})\ell_1\ell_2-\Gamma_2^{01}(\ell_2)^2=0.$$

Отсюда видим, что A_j тогда и только тогда является фокус луча A_1A_2, когда $\Gamma_j^{0i}=0$. Так как $d\bar{A}_j=\omega_j^j\bar{A}_j+\omega_j\bar{A}_3+(\Gamma_j^{0j}\omega_j+$ то теорема доказана.

Пары B° обладают ещё многими интересными геометрически свойствами.

Литература

I.Г.Ф.Лаптев,Дифференциальная геометрия погруженных многоо зий.Труды Московского матем.общества,т.2,275-383,ГИТТЛ,

2.В.С.Малаховский,Многообразия алгебраических элементов в мерном проективном пространстве.Геом.сб.вып.3 (Труды То университета (68), 28-42,1963.

3.В.С.Малаховский,Расслояемые пары конгруэнций фигур.Тру семинара,т.3,1971 (печатается).

4.С.П.Фиников,Метод внешних форм Картана,ГИТТЛ,М.-Л.,19

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

1971

ГРИЦЕНКО В.А.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ n-МЕРНОГО ВЫРОЖДЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Исследуется n-мерное многообразие квадратичных элементов [I] -мерного проективного пространства P_n, гиперплоскости которых разуют $(n-1)$-мерное многообразие. Построен основной фундамен- льный объект многообразия $(n-1, n, n)^2$. Выделена система тен- ров и квазитензоров многообразия $(n-1, n, n)^2$. При $n=3$ такие огообразия были рассмотрены В.С.Малаховским [2].

§ I. Система дифференциальных уравнений многообразия $(n-1,n,n)^2$.

Отнесем проективное пространство P_n к реперу $\{\bar{M}_{\alpha'}\}$ $(\alpha'=1,\dots,n+1)$. авнения инфинитезимальных смещений репера имеют вид

$$d\bar{M}_{\alpha'}=\omega_{\alpha'}^{\beta'}\bar{M}_{\beta'},$$

е формы $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\omega_{\alpha'}^{\beta'}=\omega_{\alpha'}^{\gamma'}\wedge\omega_{\gamma'}^{\beta'}.$$

авнения квадратичного элемента пространства P_n запишутся в де

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0\ ,\ x^{n+1}=0\ ,\ \det(a_{\alpha\beta})=1\ (\alpha,\beta,\gamma\ldots=1,\dots,n) \qquad (1.1)$$

рмы Пфаффа

$$\omega_\alpha^{n+1}\equiv\omega_\alpha,\ \Theta_{\alpha\beta}\equiv da_{\alpha\beta}-a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma-a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma+\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\gamma$$

суть главные формы многообразия квадратичных элементов.Имее
место тождество [I]: $a^{\alpha\beta}\,\Theta_{\alpha\beta} = 0.$ (

Наряду с пространством P_n рассмотрим n-мерное пространс
S_n, в котором действует бесконечная аналитическая группа пре
разований.Обозначим инвариантные формы этой группы через τ
Формы τ^α образуют вполне интегрируемую систему форм и подчи
следующим структурным уравнениям [4]:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{D}\tau^\alpha = \tau^\gamma\wedge\tau^\alpha_\gamma, \quad \mathcal{D}\tau^\alpha_\beta = \tau^\gamma_\beta\wedge\tau^\alpha_\gamma + \tau^\gamma\wedge\tau^\alpha_{\gamma}, \\ &\mathcal{D}\tau^\alpha_{\gamma_1\ldots\gamma_r} = \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s!\,(r-s)!}\,\tau^\beta_{(\gamma_1\ldots\gamma_s}\wedge\tau^\alpha_{\gamma_{s+1}\ldots\gamma_r)\beta} + \tau^\beta\wedge\tau^\alpha_{\gamma_1\ldots\gamma_r\beta} \end{aligned}\right\}.$$

Пространство S_n будем называть пространством параметров
Многообразие $(n-1, n, n)^2$ можно задать в параметрической
ме следующей системой дифференциальных уравнений [4],[5]:

$$\omega_\alpha = \lambda_{\alpha\gamma}\tau^\gamma, \quad \Theta_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta\gamma}\tau^\gamma$$

Система (I.3) правильно продолжаема [3],[4].Её последова
ные продолжения приводят к бесконечной последовательности
ций $\lambda_{\alpha\gamma},\ b_{\alpha\beta\gamma};\ \lambda_{\alpha\gamma\eta},\ b_{\alpha\beta\gamma\eta};\ \ldots,$
которые и определяют дифференциальную геометрию данного по
женного многообразия (I.3).

Как легко проверить,эти функции удовлетворяют следующей
теме дифференциальных уравнений :

$$d\lambda_{\alpha\gamma} = \lambda_{\alpha\eta}\tau^\eta_\gamma + \lambda_{\eta\gamma}\omega^\eta_\alpha - \lambda_{\alpha\gamma}\omega^{n+1}_{n+1} + \lambda_{\alpha\gamma\eta}\tau^\eta,$$
$$db_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta\eta}\tau^\eta_\gamma + b_{\alpha\eta\gamma}\omega^\eta_\beta + b_{\eta\beta\gamma}\omega^\eta_\alpha - \frac{2}{n}b_{\alpha\beta\gamma}\omega^\eta_\eta +$$
$$+ (a_{\alpha\eta}\lambda_{\beta\gamma} + a_{\eta\beta}\lambda_{\alpha\gamma} - \frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\lambda_{\eta\gamma})\omega^\eta_{n+1} + b_{\alpha\beta\gamma\eta}\tau^\eta.$$

Из уравнений (I.4) видно,что система величин $\{a_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha\gamma},$
образует геометрический объект.Этот объект мы будем назы

ундаментальным объектом I-го порядка многообразия $(n-1,n,n)^2$.

§ 2. Основной объект многообразия $(n-1, n, n)^2$.

Теорема. Фундаментальный объект I-го порядка
$= \{a_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha\gamma}, b_{\alpha\beta\gamma}\}$ является основным.

Доказательство. Из определения основного объек-
[3] следует,что надо доказать алгебраическую разрешимость
стемы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \delta a_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta + a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha - \frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\pi^\gamma_\gamma, \\ \delta\lambda_{\alpha\beta} &= \lambda_{\alpha\gamma}\tau^\gamma_\beta + \lambda_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha - \lambda_{\alpha\beta}\pi^{n+1}_{n+1}, \\ \delta b_{\alpha\beta\gamma} &= b_{\alpha\beta\eta}\tau^\eta_\gamma + b_{\alpha\eta\gamma}\pi^\eta_\beta + b_{\eta\beta\gamma}\pi^\eta_\alpha - \frac{2}{n}b_{\alpha\beta\gamma}\pi^\eta_\eta + \\ &+ (a_{\alpha\eta}\lambda_{\beta\gamma} + a_{\eta\beta}\lambda_{\alpha\gamma} - \frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\lambda_{\eta\gamma})\pi^\eta_{n+1} \end{aligned}\right. \qquad (2.1)$$

носительно всех вторичных форм.Так как система дифференциаль-
х уравнений (2.I) вполне интегрируема,то начальные значения
ндаментального объекта первого порядка можно задавать произ-
льно,с учетом тождества (I.2).

Зададим для компонент Γ_1 следующие начальные значения:

$$\begin{aligned} &a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \lambda_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad b_{iii} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots,n-1), \\ &b_{nnn} = 1-n, \quad b_{\alpha\beta\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad b_{\alpha\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha\neq\beta), \\ &b_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad \alpha\neq\beta,\ \alpha\neq\gamma,\ \beta\neq\gamma \end{aligned} \qquad (2.2)$$

олучим:

$$\tilde{\pi}^{\tilde\alpha}_{\tilde\alpha} - \frac{1}{n}\tilde{\pi}^\gamma_\gamma = \frac{1}{2}\delta\tilde{a}_{\tilde\alpha\tilde\alpha}, \qquad \text{(по } \tilde\alpha \text{ не суммировать!)}$$
$$\tilde{\tau}^\alpha_\beta + \tilde{\pi}^\beta_\alpha = \delta\tilde{\lambda}_{\alpha\beta} \quad (\alpha\neq\beta),$$
$$+ 2\tilde{\pi}^{\tilde\alpha}_{\tilde\alpha} + (2-\frac{2}{n})\tilde{\pi}^\alpha_{n+1}][1+(1-n)\delta^n_\alpha] = \delta\tilde{b}_{\tilde\alpha\tilde\alpha\tilde\alpha}, \qquad (2.3)$$
$$\tilde{\tau}^{\tilde\alpha}_{\tilde\alpha} + \pi^{\tilde\alpha}_{\tilde\alpha} - \tilde{\pi}^{n+1}_{n+1} = \delta\tilde{\lambda}_{\tilde\alpha\tilde\alpha},$$
$$\delta\tilde{b}_{\tilde\alpha\tilde\alpha\beta} = \tilde{\tau}^\alpha_\beta - \frac{2}{n}\tilde{\pi}^\beta_{n+1} \quad (\alpha\neq\beta),$$

$$\delta \widetilde{b}_{\alpha\beta\beta} = \widetilde{\pi}^{\beta}_{\alpha} + \widetilde{\pi}^{\alpha}_{n+1} \quad (\alpha \neq \beta).$$

Откуда для определения π^{α}_{n+1} получаем систему

$$\widetilde{\pi}^{\alpha}_{n+1} - \frac{2}{n^2}\sum_{\kappa} \widetilde{\pi}^{\kappa}_{n+1} = \frac{1}{n}\,\delta\Big(\sum_{\beta}^{n+1}(b_{\alpha\alpha\beta} + b_{\alpha\beta\beta} - \lambda_{\alpha\beta})\Big).$$

Из (2.3) находим π^{α}_{α}.После чего легко находим и остальны

формы

$$\widetilde{\tau}^{\alpha}_{\beta} = \delta\widetilde{b}_{\alpha\alpha\beta} + \frac{2}{n}\widetilde{\pi}^{\beta}_{n+1} \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$\widetilde{\pi}^{\beta}_{\alpha} = \delta\lambda_{\alpha\beta} - \widetilde{\tau}^{\alpha}_{\beta} \quad (\alpha \neq \beta),$$

$\widetilde{\tau}^{\alpha}_{\alpha} = C^{-1}\,\delta\,\widetilde{b}_{\alpha\alpha\alpha} - 2\,\widetilde{\pi}^{\alpha}_{\alpha} - (2-\frac{2}{n})\widetilde{\pi}^{\alpha}_{n+1}$, где $C=1+(1-n)\delta$

$$\widetilde{\pi}^{n+1}_{n+1} = -\delta\Big(\sum_{\alpha}\widetilde{\lambda}_{\alpha\alpha}\Big) + \widetilde{\tau}^{\alpha}_{\alpha} + \widetilde{\pi}^{\alpha}_{\alpha}.$$

§3.Обращенный тензор второй валентности.

Предположим,что для семейства индуцированных гиперплоск тей построен некоторый относительный инвариант $\mathfrak{J}$,охвач фундаментальным объектом I-го порядка $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(\lambda_{\alpha\beta})$.Тогда мож ввести обращенный тензор [5] $V^{\alpha\beta}$.Компоненты $V^{\alpha\beta}$ удовлетв дифференциальным уравнениям

$$dV^{\alpha\beta} = V^{\alpha\beta}_{\gamma}\tau^{\gamma} - V^{\alpha\gamma}\tau^{\beta}_{\gamma} - V^{\gamma\beta}\omega^{\alpha}_{\gamma} + V^{\alpha\beta}\omega^{n+1}_{n+1}.$$

Компоненты объекта $V^{\alpha\beta}$ связаны с компонентами $\lambda_{\alpha\beta}$ сл щими конечными соотношениями :

$$V^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta} = n\,,\; V^{\alpha\beta}\lambda_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}\,,\; V^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma}\,.$$

§ 4. Квазитензор b^{β}.

Рассмотрим систему величин :

$$b^{\rho}_{\alpha\beta} = V^{\rho\gamma}\, b_{\alpha\beta\gamma}\,,$$

$$\delta b^{\rho}_{\alpha\beta} = b^{\rho}_{\alpha\gamma}\pi^{\gamma}_{\beta} + b^{\rho}_{\gamma\beta}\pi^{\gamma}_{\alpha} - \frac{2}{n}\, b^{\gamma}_{\alpha\beta}\pi^{\rho}_{\gamma} + b^{\rho}_{\alpha\beta}\pi^{n+1}_{n+1} +$$

$$+ (a_{\alpha\gamma}\delta^{\rho}_{\beta} + a_{\gamma\beta}\delta^{\rho}_{\alpha} - \frac{2}{n}\, a_{\alpha\beta}\,\delta^{\rho}_{\gamma})\,\pi^{\gamma}_{n+1}\,.$$

видно из (4.2) система величин (4.I) вместе с величинами

$\}$ образует линейный геометрический объект

Рассмотрим систему величин : $b^{\beta} = b^{\beta}_{\alpha\beta}$, (4.3)

$$= b_{\gamma}\pi^{\gamma}_{\alpha} - \frac{2}{n}\, b_{\alpha}\pi^{\gamma}_{\gamma} + b_{\alpha}\pi^{n+1}_{n+1} + \frac{n^2+n-2}{n}\, a_{\alpha\gamma}\pi^{\gamma}_{n+1}\,. \qquad (4.4)$$

Как видно из (4.4) система величин $\{b_{\alpha}\}$самостоятельного екта не образует.Рассмотрим систему величин :

$$b^{\beta} = a^{\alpha\beta}\, b_{\alpha}\,, \qquad (4.5)$$

$$a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}\,,\quad \delta b^{\beta} = -b^{\gamma}\pi^{\beta}_{\gamma} + b^{\beta}\pi^{n+1}_{n+1} + \frac{n^2+n-2}{n}\,\pi^{\gamma}_{n+1}\,. \qquad (4.6)$$

(4.6) видно,что система величин $\{b^{\beta}\}$ образует квазитензор.Для метрической характеристики квазитензора b^{β} рассмотрим точку

$$\bar{A} = b^{\beta}\bar{M}_{\beta} + \frac{2-n(n+1)}{n}\,\bar{M}_{n+1}\,. \qquad (4.7)$$

зывается

$$\delta A = \pi^{n+1}_{n+1}\bar{A}\,.$$

им образом квазитензор b^{β} определеяет инвариантную точку $\bar{A}$, нцидентную гиперплоскости квадратичного элемента.

Литература

.С.Малаховский,Многообразия алгебраических элементов в n-ном проективном пространстве.Геом.сб.,вып.3,Труды Томского та,т.I68,стр.28-42,I963.

.С.Малаховский,Комплексы кривых второго порядка в трехмерном ективном пространстве.Геом.сб.,вып.4,Труды Томского ун-та, 4,т.I76,28-36.

.Ф.Лаптев,Дифференциальная геометрия погруженных многообразий удн Московского математического общества,2,I953,ГИТТЛ.

.Ф.Лаптев,Дифференциальная геометрия многомерных поверхнос-."Геометрия",I963 (Итоги науки,ВИНИТИ АН СССР) М.I965,5-64.

.М.Остиану,Об инвариантном оснащении семейства многомерных скостей в проективном пространстве.Труды геом.сб.,т.2,М.I969.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
вып 2

ШЕВЧЕНКО Ю.И.

КОНГРУЭНЦОИД ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ГИПЕРЦИЛИНДРОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В $(n+1)$- мерном аффинном пространстве рассмотрено n-п
раметрическое многообразие (конгруэнцоид $\mathfrak{M}_n$) центральных
вырожденных квадратичных гиперцилиндров (каждый гиперцилинд
имеет единственную ось).Найден основной объект конгруэнцоида
Исследованы различные охватываемые им объекты:тензоры,квази
зоры,инварианты,инвариантные дифференциальные формы.Наиболе
подробно изучен случай $n=2$ (когда конгруэнцоид является ко
груэнцией).

§ I. Поля геометрических объектов конгруэнцоида $\mathfrak{M}_n$.

Рассмотрим в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве конгр
цоид гиперцилиндров $\mathfrak{M}_n$.Вершину A подвижного репера $\{A;\bar{e}_i$
поместим на ось образующего гиперцилиндра;вектор $\bar{e}_{n+1}$ напр
по оси.Тогда уравнение гиперцилиндра запишется в виде:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta-1=0. \quad (\alpha,\beta,\gamma,\ldots=1,2,\ldots,n),$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}, \quad \det(a_{\alpha\beta})\neq 0.$$

оложим
$$\Theta_{\alpha\beta}=da_{\alpha\beta}-a_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta-a_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha. \tag{1.3}$$

стема уравнений стационарности гиперцилиндра имеет вид:
$$\mathring{\Theta}_{\alpha\beta}=0, \quad \pi^\alpha=0, \quad \pi^\alpha_{n+1}=0, \tag{1.4}$$

е нолик над формой Пфаффа или символом означает фиксацию пер
чных параметров.

Примем формы ω^α за независимые формы конгруэнцоида $\mathfrak{M}_n$,
гда система дифференциальных уравнений конгруэнцоида $\mathfrak{M}_n$ за
шется в виде:
$$\omega^\alpha_{n+1}=\Gamma^\alpha_\gamma\omega^\gamma, \quad \Theta_{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma. \tag{1.5}$$

Продолжая (I.5) и фиксируя первичные параметры,получим:
$$\delta\Gamma^\alpha_\gamma=\mathring{\nabla}\Gamma^\alpha_\gamma+\Gamma^\alpha_\gamma\pi^{n+1}_{n+1}-\Gamma^\alpha_\eta\Gamma^\eta_\gamma\pi^{n+1},$$
$$\delta\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=\mathring{\nabla}\Gamma_{\alpha\beta\gamma}-\Gamma_{\alpha\beta\eta}\Gamma^\eta_\gamma\pi^{n+1}-\Gamma^\eta_\gamma(a_{\alpha\eta}\pi^{n+1}_\beta+a_{\eta\beta}\pi^{n+1}_\alpha). \tag{1.6}$$

(I.4) имеем:
$$\delta a_{\alpha\beta}=\mathring{\nabla}a_{\alpha\beta}. \tag{1.7}$$

Теорема. Фундаментальный объект первого порядка
$$\Gamma_1=\{a_{\alpha\beta},\Gamma^\alpha_\gamma,\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\}$$
ляется основным объектом конгруэнцоида $\mathfrak{M}_n$.

Доказательство. Из определения основного объек
[2] следует,что надо доказать алгебраическую разрешимость
стемы дифференциальных уравнений (I.6,7) относительно всех
оричных форм хотя бы при некоторых начальных значениях компо
нт Γ_1 (начальные значения будем обозначать знаком $\sim$ сверху).
Положим:
$$\tilde{a}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}, \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta1}=\delta_{\alpha\beta}, \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}=0 \quad \text{при } \gamma>1;$$
$$\tilde{\Gamma}^\alpha_\beta=\alpha\delta^\alpha_\beta \quad (\text{по } \alpha \text{ не суммировать!})$$

Из уравнений (I.6),(I.7) находим:
$$2\tilde{\pi}^\alpha_\alpha=\delta\tilde{a}_{\alpha\alpha} \quad (\text{по } \alpha \text{ не суммировать!}),$$

$$(\alpha-\beta)\tilde{\pi}^{\alpha}_{\beta}=\delta\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta}\quad(\alpha\neq\beta),$$
$$\tilde{\pi}^{n+1}=\tilde{\pi}^{1}_{1}+2\tilde{\pi}^{2}_{2}-\delta\tilde{\Gamma}_{221},$$
$$\tilde{\pi}^{n+1}_{n+1}=\delta\tilde{\Gamma}^{1}_{1}+\tilde{\pi}^{n+1},$$
$$\tilde{\pi}^{n+1}_{\alpha}=\delta\tilde{a}_{1\alpha}-\delta\tilde{\tilde{\Gamma}}_{1\alpha 1}\quad\text{при }\ \alpha>1,$$
$$2\tilde{\pi}^{n+1}_{1}=3\tilde{\pi}^{1}_{1}-\tilde{\pi}^{n+1}-\delta\tilde{\Gamma}_{111}.$$

Следствие. Надлежащее задание компонент фундаме ного объекта второго порядка

$$\Gamma_2=\{\Gamma_1,\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},\Gamma_{\alpha\beta\gamma\eta}\}$$

определяет конгруэнцоид $\mathfrak{M}_n$ с точностью до постоянных [2].

Из (I.7) видно, что система величин $\{a_{\alpha\beta}\}$ образует тензо Система приведенных миноров $\{a^{\alpha\beta}\}$ матрицы $(a_{\alpha\beta})$ является т ром, так как

$$\delta a^{\alpha\beta}=\overset{\circ}{\nabla}a^{\alpha\beta}$$

Рассмотрим:

$$\Gamma=|\Gamma^{\alpha}_{\beta}|,\ \delta\Gamma=\Gamma(n\pi^{n+1}_{n+1}-\Gamma^{\eta}_{\eta}\pi^{n+1}).$$

Будем предполагать $\Gamma\neq 0.$

Система приведенных миноров $\{\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta}\}$ матрицы $(\Gamma^{\alpha}_{\beta})$ образует к тензор, так как

$$\delta\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta}=\overset{\circ}{\nabla}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta}-\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta}\pi^{n+1}_{n+1}+\delta^{\alpha}_{\beta}\pi^{n+1}.$$

Изучим следующие системы величин и законы их инфините ных изменений по вторичным параметрам:

$$\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}^{\eta}_{\eta},\ \delta\tilde{\Gamma}=-\tilde{\Gamma}\pi^{n+1}_{n+1}+n\pi^{n+1};$$

$$\hat{q}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(q_{\alpha\beta}+q_{\beta\alpha}),\ \delta\hat{q}_{\alpha\beta}=\overset{\circ}{\nabla}\hat{q}_{\alpha\beta}-\hat{q}_{\alpha\beta}\pi^{n+1}_{n+1},$$
$$q_{\alpha\beta}=a_{\alpha\gamma}(\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\beta}-\frac{1}{n}\delta^{\gamma}_{\beta}\tilde{\Gamma});$$

$$q_{\alpha}=\Gamma_{\alpha\gamma\eta}\tilde{\Gamma}^{\eta}_{\zeta}a^{\zeta\gamma},\ \delta q_{\alpha}=\overset{\circ}{\nabla}q_{\alpha}-q_{\alpha}\pi^{n+1}_{n+1}-(n+1)\pi^{n+1}_{\alpha};\tag{1.14}$$

$$\tau_{\alpha\beta\gamma}=\Gamma_{\alpha\beta\eta}\tilde{\Gamma}^{\eta}_{\gamma}-\frac{1}{n+1}(q_{\alpha}a_{\beta\gamma}+q_{\beta}a_{\alpha\gamma}),$$

$$\hat{\tau}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{3}(\tau_{\alpha\beta\gamma}+\tau_{\alpha\gamma\beta}+\tau_{\gamma\beta\alpha}),\tag{1.15}$$

$$\delta\hat{\tau}_{\alpha\beta\gamma}=\overset{\circ}{\nabla}\hat{\tau}_{\alpha\beta\gamma}-\hat{\tau}_{\alpha\beta\gamma}\pi^{n+1}_{n+1};$$

$$\tau_{\alpha}=\tau_{\gamma\alpha\zeta}a^{\zeta\gamma},\quad\delta\tau_{\alpha}=\overset{\circ}{\nabla}\tau_{\alpha}-\tau_{\alpha}\pi^{n+1}_{n+1};\tag{1.16}$$

$$\tau^{\alpha}=a^{\alpha\eta}a^{\zeta\gamma}\tau_{\gamma\eta\zeta},\quad\delta\tau^{\alpha}=\overset{\circ}{\nabla}\tau^{\alpha}-\tau^{\alpha}\pi^{n+1}_{n+1};\tag{1.17}$$

$$a=|a_{\alpha\beta}|,\quad\delta a=2a\pi^{\eta}_{\eta};\tag{1.18}$$

$$q=|q_{\alpha\beta}|,\quad\delta q=-qn\pi^{n+1}_{n+1};\tag{1.19}$$

$$\tau=\tau_{\alpha}\tau^{\alpha},\quad\delta\tau=-2\tau\pi^{n+1}_{n+1};\tag{1.20}$$

$$c=\ln\frac{\tau^{n}}{q^{2}}\ (q\neq 0),\ \delta c=0;\tag{1.21}$$

$$V_{\alpha}=\Gamma^{\gamma}_{\alpha}\tau_{\gamma},\ \delta V_{\alpha}=V_{\eta}(\pi^{\eta}_{\alpha}-\Gamma^{\eta}_{\alpha}\pi^{n+1});\tag{1.22}$$

$$W_{\alpha}=\tau^{\eta}(\tau^{\zeta}\Gamma_{\eta\zeta\alpha}-\frac{2}{n+1}q_{\eta}V_{\alpha}),\tag{1.23}$$

$$\delta W_{\alpha}=W_{\eta}(\pi^{\eta}_{\alpha}-\Gamma^{\eta}_{\alpha}\pi^{n+1})-2W_{\alpha}\pi^{n+1}_{n+1}.$$

Квазиотносительный инвариант $\tilde{\Gamma}$ определяет инвариантную точку $\mathcal{J}(0,\dots,0,-\frac{1}{n}\tilde{\Gamma})$; тензор $\hat{q}_{\alpha\beta}$ —квадратичный ги- рцилиндр:

$$\hat{q}_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0.\tag{1.24}$$

азитензор q_{α} совместно с $\tilde{\Gamma}$ —гиперплоскость (Ψ—гипер- оскость):

$$nq_\alpha x^\alpha - n(n+1)x^{n+1} - (n+1)\tilde{\Gamma} = 0; \qquad (1.$$

тензор $\hat{\tau}_{\alpha\beta\gamma}$ —кубический гиперцилиндр:

$$\hat{\tau}_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0; \qquad (1$$

тензор τ_α —гиперплоскость:

$$\tau_\alpha x^\alpha = 0$$

Из (I.9),(I.18)-(I.21) следует,что Γ, a, q, τ – относительны инварианты, C —абсолютный инвариант.Дифференциальная форма $\Omega_1 = V_\alpha \omega^\alpha$ является абсолютно инвариантной,а форма $\Omega_2 =$ W относительно инвариантной.

§2.Конгруэнция $\mathfrak{M}_2$ цилиндров в эквиаффинном 3 -пространстве.

Рассмотрим случай $n=2$ в эквиаффинном пространстве.Кано ческий репер построим следующим образом:начало A поместим точку $\mathfrak{J}$,концы B_α векторов $\bar{e}_\alpha$ поместим в фокусы направл щей (ψ—направляющей),лежащей в ψ—плоскости.Уравнение (I примет вид:

$$(x^1)^2 + 2px^1x^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad p^2 \neq 1. \qquad ($$

Фокальные точки и фокальные семейства конгруэнции ψ-на ляющих определяются системой уравнений:

$$(x^1)^2 + 2px^1x^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0,$$
$$d[(x^1)^2 + 2px^1x^2 + (x^2)^2] = 0, \quad dx^3 = 0.$$

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением одного из классов груэнции $\mathfrak{M}_2$,когда:

1)направления векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены,

2)касательная плоскость к поверхности (A) совпадает с ψ костью,

3)ось цилиндра вдоль линий $\omega^\alpha = 0$ описывает торсы,

4)поверхность (B_α) является огибающей плоскостей $\{\bar{e}_\beta, \bar{e}$

Из этих условий следует:

$$p = 0, \ \Gamma_1^2 = \Gamma_2^1 = 0, \qquad (2.3)$$
$$\omega^3 = 0, \ \omega^\alpha + \omega_\alpha^\alpha = 0 \qquad (2.4)$$

(по α не суммировать!).

Уравнения конгруэнции $\mathfrak{M}_2$ примут вид

$$\omega_3^\alpha = \Gamma_\gamma^\alpha \omega^\gamma, \quad \omega_\alpha^3 = S_{\alpha\gamma}\omega^\gamma, \qquad (2.5)$$
$$\omega_\alpha^\beta = g_{\alpha\gamma}^\beta \omega^\gamma \quad (\alpha \neq \beta).$$

мыкая уравнения (2.4,5),получим

$$S_{12} = S_{21} \overset{df}{=} S, \qquad (2.6)$$

е связи и шесть основных квадратичных уравнений,общий вид ко- рых неинтересен.Откуда следует,что наш класс конгруэнции $\mathfrak{M}_2$ ределен с произволом одной функции двух аргументов.

Найдем фокусы и торсы конгруэнции осей цилиндра в общем виде:

$$\bar{F} = \bar{A} + t\bar{e}_3, \quad t^2\Gamma + t(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^2) + 1 = 0,$$
$$(\omega^1)^2\Gamma_1^2 + \omega^1\omega^2(\Gamma_2^2 - \Gamma_1^1) - (\omega^2)^2\Gamma_2^1 = 0. \qquad (2.7)$$

куда видно,что нелинейный геометрический объект Γ_β^α в случае 2 характеризует фокусы и торсы конгруэнции осей цилиндра, редположение (I.IO) соответствует непараболичности этой нгруэнции.

Рассматриваемый класс имеет следующие свойства:

I)характеристическая точка плоскости $\{\bar{e}_\alpha, \bar{e}_3\}$ лежит на оси индра,

2)точка A является фокусом прямолинейных конгруэнций $\{\bar{e}_1\}$ $\{\bar{e}_2\}$.

Определение. Будем говорить,что тройка прямолиней конгруэнций внешне расслояема,если существуют односторонние слоения от одной конгруэнции к двум другим.

Решим задачу о внешнем расслоении прямолинейных конгруэнций: $\{\bar{e}_3\}$ к касательным в фокусах B_α к ψ —направляющей.Конеч- соотношения,соответствующие этой задаче,вместе с двумя связями имеют вид:

$$\Gamma^2_2=\Gamma^1_1\overset{df}{=}\mathcal{L},\ q^1_{21}=q^2_{12}=0,\ S=\frac{1}{\mathcal{L}}q^2_{11}q^1_{22}, \qquad (2$$

причем $S\neq0$, так как в противном нарушается биективное соотве

вие между лучами прямолинейных конгруэнций.

Подставляя значения (2.8) в (2.5) и замыкая первые два ур

ния, получим:

$$\mathcal{L}=\mathrm{Const}. \qquad (2$$

Следовательно, конгруэнция цилиндров, допускающая индуциров

ное внешнее расслоение, существует с произволом четырех функ

одного аргумента.

Литература

1. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в
мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып
Труды Томского ун-та, т.168, стр.28-42, 1963.

2. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многоо
зий, Труды Московского математического общества, 2, 1953, ГИТТ

3. В.С.Малаховский, Конгруэнция парабол в эквиаффинной геоме
Геометрический сб., вып.2, Труды Томского ун-та, 1962, 161, 76-

---

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

вып 2 1971

СВЕШНИКОВА Г.Л.

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются конгру-
нции коник [1], три фокальных поверхности которых вырождаются
линии и точки. Конгруэнцией $[h,\kappa]$ называется конгруэнция коник,
которой h фокальных поверхностей вырождаются в линии, κ фо-
альных поверхностей вырождаются в точки. Исследованы конгруэнции
3,0], [2,1], [1,2].

§ 1. Конгруэнции [3,0].

Пусть фокальные поверхности $(A_{\alpha'})$ $(\alpha'=1,2,3)$ конгруэнции
оник C вырождаются в линии, причем касательные ℓ_i $(i,j,\kappa=1,2)$
линиям (A_i) в точках A_i не инцидентны плоскости коники.

Отнесем конгруэнцию [3,0] к реперу $R\equiv\{A_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$,
де A_4 – точка, лежащая вне плоскости коники. Инфинитезимальные
еремещения репера R определяются деривационными формулами:

$$d\bar{A}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\bar{A}_\beta,$$

ричем пфаффовы формы ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega_{\alpha}^{\beta}=\omega_{\alpha}^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}^{\beta}$$

и эквипроективности.

Уравнения коники C и система уравнений Пфаффа конгруэн [3,0] при соответствующей нормировке вершин приводятся к вид

$$x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3=0,\quad x^4=0. \qquad (1$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega_i^3=\Gamma_i^{3i}\omega_i;\quad \omega_i^j+\omega_i^3=b_i\omega_i;\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k;\\&\omega_3^1=b\,\omega_3^4;\quad \omega_3^1+\omega_3^2=b_3\omega_3^4;\quad \omega_i^i-\omega_3^3=b_i^k\omega_k.\end{aligned}\right\} \qquad (1$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i и j сумм вание не производится.

Из анализа системы уравнений (I.2) следует, что конгруэнц [3,0] существуют и определяются с произволом трех функций аргументов.

Пусть ℓ --линия пересечения плоскостей, проходящих чер сательные к конике в точках A_i и прямые ℓ_i; M -точка сечения прямой ℓ с плоскостью коники; M_i -точки пересеч прямых ℓ_i с прямой ℓ.

Помещаем вершину A_4 репера на прямую ℓ в четвертую г ническую к точке M относительно точек M_i. Тогда

$$b_1=0,\ b_2=0,\ \Gamma_k^{3k}=0.$$

При

$$b_3=0,\ b=0$$

касательная к фокальной линии (A_i) проходит через точку A_4 тема уравнений Пфаффа, определяющая конгруэнцию [3,0] при у виях (I,4) записывается так :

$$\left.\begin{aligned}&\omega_i^3=(-1)^{i-1}\Gamma_1^{31}\omega_i,\ \omega_i^j+\omega_i^3=0,\ \omega_3^1=\omega_3^2=0,\ \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\\&\omega_4^i=t_i\omega_3^4,\ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\ \omega_i^i-\omega_3^3=b_i^k\omega_k.\end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

Определение. Конгруэнция [3,0] называется конгруэнцией F_1, если для неё выполняются условия:

$$b_3=b=0,\ t_1=t_2,\ \Gamma_1^{31}=-b_1^1,\ b_i^j=0,\ b_1^1+b_2^2=0. \qquad (1.6)$$

Теорема I.I. Конгруэнции F_1 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Доказательство непосредственно следует из анализа системы (I.5) и условий (I.3) и (I.6).

Деривационные формулы репера запишутся в виде:

$$\bar{A}_1=\omega_1^1\bar{A}_1+[b_1^1(\bar{A}_2-\bar{A}_3)+\bar{A}_4]\omega_i,\ d\bar{A}_2=\omega_2^2\bar{A}_2+[-b_1^1(\bar{A}_1-\bar{A}_3)+\bar{A}_4]\omega_2,$$

$$\bar{A}_3=\omega_3^3\bar{A}_3+\Gamma_3^{4k}\omega_k\bar{A}_4,\ d\bar{A}_4=t_1\Gamma_3^{4k}\omega_k(\bar{A}_1+\bar{A}_2-\bar{A}_3)+\omega_4^4\bar{A}_4. \qquad (1.7)$$

Теорема I.2. Прямолинейная конгруэнция (A_3A_4), ассоциированная с конгруэнцией F_1, вырождается в линейчатую поверхность. Прямая A_4M неподвижна.

Доказательство. Используя деривационные формулы (I.7), получаем

$$d[A_3A_4]=(\omega_3^3+\omega_4^4)[\bar{A}_3\bar{A}_4]+\omega_4^1[\bar{A}_3\bar{M}];\ d[\bar{A}_4\bar{M}]=-2\omega_3^3[\bar{A}_4\bar{M}],$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Теорема I.3. Конгруэнция F_1 имеет только одну невырождающуюся фокальную поверхность. Фокальные линии (A_i) являются плоскими сдвоенными линиями.

Доказательство. Уравнения для определения фокальных семейств и фокусов конгруэнции F_1 приводятся к виду:

$$\left.\begin{aligned} x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3=0,\ x^4=0,\\ x^3\mathit{b}_1^1(x^1\omega_1-x^2\omega_2)=0,\ (x^1+x^3\Gamma_3^{41})\omega_1+(x^2+x^3\Gamma_3^{42})\omega_2=0\end{aligned}\right\}\ (1.$$

Из системы (I.7), кроме фокусов A_i, которые являются сдвоенными, и фокуса A_3, находим фокус

$$\bar{F}=\bar{A}_1+p_1\bar{A}_2+p_2\bar{A}_3, \qquad (1.$$

где

$$P_1=\frac{\Gamma_3^{42}-2}{2-\Gamma_3^{41}}, \qquad P_2=\frac{\Gamma_3^{42}-2}{\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42}}.$$

В силу (I.7) для любого $n=I,2,3...$ получаем:

$$(d^n\bar{A}_i\bar{A}_i\bar{M}\bar{A}_4)=0,$$

что и доказывает вторую часть теоремы.

§ 2. Конгруэнции [2,I].

Вершины A_i репера $R\equiv\{A_\alpha\}$ конгруэнции [2,I] помещаем в фокальные точки коники C, которые описывают линии, вершину в полюс прямой A_1A_2 относительно коники, вершину A_4 – на прямую ℓ.

Единичную точку $\bar{E}=\bar{A}_1+\bar{A}_2$ выбираем на прямой A_1A_2 так, чтобы прямая A_3E проходила через неподвижный фокус F.

Уравнения коники C и система пфаффовых уравнений конгр ции [2,I] при надлежащей нормировке вершин приводятся соотве венно к виду:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0 \qquad (2$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_i^j=0;\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3i}\omega_i,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^4=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1+\omega_2),\\ \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\quad \omega_i^i-\omega_3^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3+\omega_2^3-2\omega_3^i),\end{aligned}\right\}\ (2.2)$$

причем

$$\Gamma_4^{ii}+\Gamma_j^{ij}\Gamma_3^{ii}=0. \qquad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что конгруэнции [2,I] существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Пусть B_i –точка пересечения прямой ℓ_i с прямой ℓ. Помещая вершину A_4 репера на прямой ℓ так, чтобы $(A_4A_3;B_1B_2)=-1$, будем иметь:

$$\Gamma_k^{3k}=0. \qquad (2.4)$$

Определение. Конгруэнцией F_2 называется конгруэнция [2,I], для которой существуют расслоения от конгруэнции коник C к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) [2] и от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) [3].

Из определения конгруэнции F_2 следует, что

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_4^{12}=-\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}-m^2,\ \Gamma_4^{21}=\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{21}-m^2,\\ \Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21},\ \ \Gamma_1^{31}(\Gamma_4^{12}+\Gamma_4^{21})=0,\ 2\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}-\Gamma_4^{12}+\Gamma_4^{21}=0\end{aligned}\right\}\ (2.5)$$

При $\Gamma_4^{12}+\Gamma_4^{21}=0$ получаем вырождение прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) в линейчатую поверхность, чего быть не может. Значит $\Gamma_1^{31}=0$ и система уравнений Пфаффа приведется в силу (2.3), (2.4), (2.5) к виду:

$$\left.\begin{aligned} \omega_i^j=\omega_i^3=\omega_4^3=0,\ \ \omega_3^1=a\omega_1+\mathit{b}\omega_2,\ \omega_3^2=\mathit{b}\omega_1+c\omega_2,\\ \omega_3^4=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1+\omega_2),\ \omega_4^i=-m^2\omega_j,\ \ \omega_i^i-\omega_3^3=-\sqrt{2}\,\omega_3^i,\end{aligned}\right\}\ (2.6)$$

$$dm^2+m^2\,(\omega_1^1+\omega_2^2-2\,\omega_4^4)=0, \qquad (2$$

где

$$\Gamma_3^{11}=a,\Gamma_3^{22}=c,\ \Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21}=b,\ m^2=\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-(\Gamma_3^{12})^2. \qquad (2$$

Исходя из условий (2.6),можно осуществить последнюю норм
ровку вершин репера R так,чтобы

$$m^2=-1. \qquad (2.$$

Тогда получим связь

$$b^2-ac=1. \qquad (2$$

Т е о р е м а 2.2. Конгруэнции F_2 существуют и опреде
ляются с произволом двух функций одного аргумента.

Анализируя систему уравнений (2.6) с учетом условий (2.8)
(2.9),получаем утверждение теоремы 2.2.

Т е о р е м а 2.3. Конгруэнции F_2 имеют одну сдвоенну
вырождающуюся фокальную поверхность (P) ,фокальные линии (
являются плоскими.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения фокальных п
верхностей и фокальных семейств конгруэнции коник F_2 имее
систему:

$$\left.\begin{aligned} &x^3\left[\tfrac{1}{2}x^3(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)+x^1\omega_3^2+x^2\omega_3^1\right]=0,\\ &(x^1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}x^3)\,\omega_1+(x^2-\tfrac{1}{\sqrt{2}}x^3)\,\omega_2=0,\\ &(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ \ x^4=0.\end{aligned}\right\} \quad (2$$

Из этой системы,кроме фокальных точек A_i и F ,получаем с
енную фокальную точку:

$$\bar{P}=\bar{A}_1+\frac{c}{a}\bar{A}_2-\sqrt{\frac{2c}{a}}\,\bar{A}_3.$$

Фокальные линии (A_i) плоские,так как

$$(d^n\bar{A}_i\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_4)=0,\ (n=1,2,3\ldots) \qquad (2.11)$$

Т е о р е м а 2.4. Фокальное семейство поверхности (P) соответствует одному семейству торсов прямолинейной конгруэнции (A_3A_4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,фокальное семейство (P) и торсы конгруэнции (A_3A_4) определяются соответственно формулами:

$$\sqrt{a}\,\omega_1+\sqrt{c}\,\omega_2=0,\ \ a(\omega_1)^2-c(\omega_2)^2=0.$$

§ 3. Конгруэнции [I,2].

Вершины A_i репера $R=\{A_\alpha\}$ конгруэнции [I,2] помещаем в неподвижные фокальные точки коники C ,вершину A_3 -в полюс прямой A_1A_2 относительно коники.Единичную точку $\bar{E}=\bar{A}_1+\bar{A}_2$ выбираем на прямой A_1A_2 так,чтобы прямая A_3E проходила через фокальную точку F коники,которая описывает линию.

Уравнения коники C и система уравнений Пфаффа конгруэнции [I,2] приводятся при соответствующей нормировке вершин к виду:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0 \qquad (3.1)$$

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_1^2=\omega_1^3=\omega_1^4=0;\ \ \omega_2^1=\omega_2^3=\omega_2^4=0,\ \ \omega_3^4=\Gamma_{3k}^4\omega^k,\\ &\omega_1^1-\omega_3^3=a_2^1(\lambda\omega_3^1+\omega_3^2)-\sqrt{2}\,\omega_3^1,\ \omega_2^2-\omega_3^3=a_2^2(\lambda\omega_3^1+\omega_3^2)+\lambda\sqrt{2}\,\omega_3^1,\end{aligned}\right. \qquad (3.2)$$

где

$$\lambda=\frac{\Gamma_{31}^4}{\Gamma_{32}^4}.$$

Дифференцируя уравнения (3.2) внешним образом и анализиру полученную при этом систему квадратичных уравнений, получаем конгруэнции [I,2] существуют и определяются с произволом од функции двух аргументов.

Конгруэнции [I,2] имеют в общем случае одну невырождающу фокальную поверхность, описываемую точкой

$$\bar{F}^*=\bar{A}_1+\lambda^2\bar{A}_2-\sqrt{2}\lambda\bar{A}_3 .$$

Литература

I. Н.Г.Туганов, О конгруэнции линий второго порядка в трехмер проективном пространстве. ДАН СССР, 1955, т. IOO, №I.

2. В.С.Малаховский, Конгруэнции коник, порожденные расслояемо парой C_ℓ. Дифференциальная геометрия многообразий фигур (Труды Калининградского университета), I970, стр.5-26.

3. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., I956.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

I971

вып 2

ТКАЧ Г.П.

ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ В ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Определение 1. Назовем пару фигур $F=\{F_1,F_2\}$ квадра- чной, если одна из фигур F_1 является квадратичным элементом, вторая - F_2 является k-плоскостью $(0 \leq K < n-1)$ или вадратичным элементом [I].

Определение 2 Квадратичная пара $F=\{F_1,F_2\}$ азывается нецентральной, если каждый квадратичный элемент, входя- ий в пару, является нецентральным.

Для $n=3$ квадратичными парами являются пары $F=\{F_1,F_2\}$, где F_1 — парабола, а F_2 — точка, прямая или парабола.

В данной работе ограничимся рассмотрением двупараметрического емейства нецентральных квадратичных пар в трехмерном эквиаффин- ом пространстве, т.е. пар конгруэнций парабол. Такие двупарамет- ические семейства назовем парами B.

§ I. Пары B с непараллельными плоскостями парабол.

Рассмотрим сначала общий случай, когда плоскости парабол F_i

(i,j,k=1,2) пары B не параллельны.

Пусть ℓ' -линия пересечения плоскостей парабол F_i .Отнесе пару B к каноническому реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$,где век $\bar{e}_3$ направлен по прямой ℓ', векторы $\bar{e}_i$– параллельны диаметрам па рабол F_i ,а точка A является центром прямолинейной конгруэ ции $\{A,\bar{e}_3\}$ и векторы $\bar{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ пронормированы так,что уравнения парабол F_i имеют вид:

$$(x^3)^2-2x^i+2a^i_3x^3+a^i_0=0,\quad x^j=0. \qquad \text{(1.1}$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha,\quad d\bar{e}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\bar{e}_\beta, \qquad \text{(1.2}$$

где формы Пфаффа ω^α, ω^β_α удовлетворяют уравнениям структу

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta,\quad \mathcal{D}\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma \qquad \text{(1.}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3=0. \qquad \text{(1.}$$

Система дифференциальных уравнений,определяющих пару B имее вид:

$$\left.\begin{aligned}&\omega^3=\Gamma^3_k\omega^k,\quad \omega^3_i=\Gamma^3_{ik}\omega^k,\quad \omega^i_3=\Gamma^i_{3k}\omega^k,\quad \omega^i_j=\Gamma^i_{jk}\omega^k,\\ &\omega^j_j=\Gamma^j_{jk}\omega^k,\quad da^i_3=a^i_{3k}\omega^k,\quad da^i_0=a^i_{0k}\omega^k,\quad \Gamma^1_{31}+\Gamma^2_{32}=0.\end{aligned}\right\} \text{(1.}$$

Замыкая систему (I.5),находим :

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\Gamma^3_k\wedge\omega^k=0,\quad \Delta\Gamma^3_{ik}\wedge\omega^k=0,\quad \Delta\Gamma^i_{3k}\wedge\omega^k=0,\quad \Delta\Gamma^i_{jk}\wedge\omega^k=0,\\ &\Delta\Gamma^j_{jk}\wedge\omega^k=0,\quad \Delta a^i_{3k}\wedge\omega^k=0,\quad \Delta a^i_{0k}\wedge\omega^k=0,\quad d\Gamma^1_{31}+d\Gamma^2_{32}=0,\end{aligned}\right\} \text{(1}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\Gamma^3_i=d\Gamma^3_i+\Gamma^3_i(B^*-2\Gamma^i_{ij}-\Gamma^j_{jj})\omega^j+\Gamma^3_{ij}\omega^j,\\
&\Delta\Gamma^3_{ii}=d\Gamma^3_{ii}+\Gamma^3_{ii}(B^*-3\Gamma^i_{ij}-\Gamma^j_{jj})\omega^j+\Gamma^j_{ii}\Gamma^3_{jj}\omega^j,\\
&\Delta\Gamma^3_{ji}=d\Gamma^3_{ji}+\Gamma^3_{ji}[B^*-2(\Gamma^i_{ij}+\Gamma^j_{jj})]\omega^j+\Gamma^i_{ji}\Gamma^3_{ij}\omega^j,\\
&\Delta\Gamma^i_{3i}=d\Gamma^i_{3i}+\Gamma^i_{3i}(B^*-\Gamma^i_{ij}-\Gamma^j_{jj})\omega^j+\Gamma^j_{3i}\Gamma^i_{jj}\omega^j,\\
&\Delta\Gamma^j_{3i}=d\Gamma^j_{3i}+\Gamma^j_{3i}(B^*+2\Gamma^j_{jj})\omega^j+\Gamma^i_{3i}\Gamma^j_{ij}\omega^j,\\
&\Delta\Gamma^i_{ji}=d\Gamma^i_{ji}+\Gamma^i_{ji}(B^*-\Gamma^j_{jj})\omega^j+\Gamma^3_{ji}\Gamma^i_{3j}\omega^j,\\
&\Delta\Gamma^j_{ii}=d\Gamma^j_{ii}+\Gamma^j_{ii}(B^*-2\Gamma^i_{ij}+\Gamma^j_{jj})\omega^j+\Gamma^3_{ii}\Gamma^j_{3j}\omega^j, \qquad (1.7)\\
&\Delta\Gamma^j_{ji}=d\Gamma^j_{ji}+\Gamma^j_{ji}(B^*-\Gamma^i_{ij})\omega^j+(\Gamma^i_{ji}\Gamma^j_{ij}+\Gamma^3_{ji}\Gamma^j_{3j})\omega^j,\\
&\Delta\Gamma^i_{ii}=d\Gamma^i_{ii}+\Gamma^i_{ii}(B^*-\Gamma^i_{ij})\omega^j+(\Gamma^j_{ii}\Gamma^i_{jj}+\Gamma^3_{ii}\Gamma^i_{3j})\omega^j,\\
&\Delta a^i_{3i}=da^i_{3i}+a^i_{3i}(B^*-\Gamma^i_{ij})\omega^j,\\
&\Delta a^j_{3i}=da^j_{3i}+a^j_{3i}(B^*-\Gamma^i_{ij})\omega^j,\\
&\Delta a^i_{0i}=da^i_{0i}+a^i_{0i}(B^*-\Gamma^i_{ij})\omega^j,\\
&\Delta a^j_{0i}\equiv da^j_{0i}+a^j_{0i}(B^*-\Gamma^i_{ij})\omega^j,\\
&\qquad B^*=\Gamma^i_{ji}-\Gamma^3_i\Gamma^i_{3j}+\Gamma^3_j\Gamma^i_{3i}
\end{aligned}$$

Из (I.5) и (I.6) непосредственно следует, что пара B определяется с произволом двенадцати функций двух аргументов.

Рассмотрим случай, когда параболы F_i касаются друг друга в точке A. Назовем такую пару парой B^0. Пары B^0 существуют определяются с произволом восьми функций двух аргументов. Ура ния (I.I) приводятся для этого случая к виду:

$$(x^3)^2-2x^i=0, \quad x^j=0.$$

Определение 3. Пара B^0 называется индуцированно расслояемой или парой B^0_ℓ, если прямолинейные конгруэнци (ℓ') и (ℓ), где ℓ – прямая, соединяющая концы векторов $\bar{e}$ образуют двусторонне расслояемую пару [2].

Теорема 1. Пары B^0_ℓ существуют и определяются с произ лом трех функций двух аргументов.

Доказательство. Условия двусторонней расслоя ти прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ') приводятся к виду:

$$\begin{aligned}
&\omega^1\wedge\omega^2_3-\omega^2\wedge\omega^1_3=0,\\
&\omega^1\wedge(\omega^3+\omega^3_1)+\omega^2\wedge(\omega^3+\omega^3_2)=0,\\
&\omega^i\wedge(\omega^j_j+\omega^i_j+\omega^j)+(\omega^3+\omega^3_j)\wedge\omega^i_3=0,\\
&\omega^i\wedge(\omega^i_i+\omega^j_i+\omega^j)-(\omega^3+\omega^3_j)\wedge\omega^j_3=0
\end{aligned}$$

Учитывая (I.5), имеем :

$$\begin{cases}
\Gamma^2_{32}-\Gamma^1_{31}=0,\\
\Gamma^3_2+\Gamma^3_{12}-\Gamma^3_1-\Gamma^3_{21}=0,\\
\Gamma^j_{jj}+\Gamma^i_{jj}+1+(\Gamma^3_i+\Gamma^3_{ji})\Gamma^i_{3j}-(\Gamma^3_j+\Gamma^3_{jj})\Gamma^i_{3i}=0,
\end{cases}$$

$$\Gamma^i_{ij}+\Gamma^j_{ij}+1-(\Gamma^3_i+\Gamma^3_{ji})\Gamma^j_{3j}+(\Gamma^3_j+\Gamma^3_{jj})\Gamma^j_{3i}=0. \qquad (1.10)$$

з (I.5), (I.6) и (I.10) вытекает утверждение теоремы.

§ 2. Характеристические пары B^0_F.

В P_3 для пар конгруэнций коник В.С. Малаховским было введено понятие расслояемых пар [3].

В эквиаффинном пространстве можно ввести определение расслояемой пары конгруэнций парабол следующим образом.

Определение 4. Пара B конгруэнций (F_1), (F_2) парабол F_1, F_2 называется двусторонне расслояемой или парой B_F, если существуют односторонние расслоения от конгруэнции (F_i) парабол к линейчатому многообразию, описываемому прямой ℓ.

Определение 5. Пара B^0_F называется характеристической, если прямая ℓ инцидентна характеристическим точкам плоскостей парабол.

Теорема 2. Характеристическая пара B^0_F существует с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. Замкнутая система уравнений, определяющих характеристическую пару B^0_F приводится к виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^i_i+\omega^i=0,\ \omega^i_j+\omega^i=0,\ \omega^3_i+\omega^3=0,\\
&\omega^3=\Gamma^3_k\omega^k,\ \ \omega^i_3=\Gamma^i_{3k}\omega^k,\ \Gamma^1_{31}+\Gamma^2_{32}=0;
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases}
d\Gamma^3_1\wedge\omega^1+d\Gamma^3_2\wedge\omega^2+[(\Gamma^3_1)^2\Gamma^1_{32}-(\Gamma^3_2)^2\Gamma^2_{31}-2\Gamma^3_1\Gamma^3_2\Gamma^1_{31}-\Gamma^3_1+\Gamma^3_2]\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
d\Gamma^i_{3i}\wedge\omega^i+d\Gamma^i_{3j}\wedge\omega^j+\{3(\Gamma^i_{3i}-\Gamma^i_{3j})-\Gamma^3_j[(\Gamma^i_{3i})^2+\Gamma^i_{3j}\Gamma^j_{3i}]\}\,\omega^i\wedge\omega^j=0. \qquad (2.2)
\end{cases}$$

Система' (2.I) и (2.2) в инволюции и определяет характеристическую пару B_F^0 с произволом двух функций двух аргументов.

Теорема 3. Плоскости парабол характеристической пары B_F^0 образуют связки плоскостей с центром в характеристических точка

Доказательство. Учитывая (2.I), находим

$$d\bar{M}_i = d(\bar{A}+\bar{e}_j)=0, \tag{2.3}$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Теорема 4. Вершина A репера R^0 является фокальной точкой конгруэнции парабол (F_j) для характеристической пары B_F^0.

Доказательство. Система уравнений для определени фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнций (F_j) характеристической пары B_F^0 приводятся к виду:

$$\left.\begin{array}{l} (x^3)^2-2x^i=0,\ \ x^j=0,\ \ x^i\omega^j-x^3\omega_3^j-\omega^j=0, \\ (x^3)^2(\omega^i+\omega^j)-x^ix^3\omega^3+x^i\omega^i-x^3\omega_3^i=0, \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

откуда непосредственно следует, что A - фокальная точка парабо F_j.

§ 3. Пары B с параллельными плоскостями парабол.

Рассмотрим пару B, когда F_i расположены в параллельных плоскостях π_i. Назовем такую пару, парой $\bar{B}$.

Канонический репер $\bar{R}$ построен следующим образом. Начало репера помещено в середину отрезка, соединяющего характеристические точки M_i параллельных плоскостей π_i, вектор $\bar{e}_3=\overline{AM}$ а векторы $\bar{e}_i$ направлены параллельно диаметрам парабол F_i. Уравнения параболы F_i относительно репера R имеет вид:

$$(x^j)^2-2px^i+2a_j^jx^j+a_0^j=0,\ \ x^3=(-1)^j. \tag*{(3.}$$

Система дифференциальных уравнений, определяющих пару $\bar{B}$ записывается в виде:

$$\left.\begin{array}{l} \omega^3=0,\ \omega_k^k=0,\ \omega_i^3=\Gamma_{ik}^3\omega^k,\ \omega_3^i=\Gamma_{3k}^i\omega^k,\ \omega_1^1=\Gamma_{1k}^1\omega^k, \\ \omega_j^i=\Gamma_{jk}^i\omega^k,\ dp=p_k\omega^k,\ da_i^i=a_{ik}^i\omega^k,\ da_0^i=a_{0k}^i\omega^k. \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

Пары $\bar{B}$ существуют и определяются с произволом десяти функций двух аргументов.

Назовем пару $\bar{B}$ парой $\bar{B}^0$, если характеристические точки M_1 и M_2 инцидентны соответственно параболам F_1 и F_2, и уравнения парабол имеют вид:

$$(x^j)^2-x^i=0, \quad x^3=(-1)^j. \tag{3.3}$$

Пары $\bar{B}^0$ существуют с произволом шести функций двух аргументов. Анализируя систему уравнений пары $\bar{B}^0$, убеждаемся, что:

I. Характеристические точки M_i являются фокальными точками конгруэнции (F_i) парабол пары $\bar{B}^0$.

2. Касательная плоскость к поверхности (A) параллельна плоскостям парабол.

3. Одно семейство торсов прямолинейных конгруэнций $(A,\bar{e}_i)$ и $(M_i,\bar{e}_i)$ соответствуют.

Теорема 5. Индуцированно расслоение пары $\bar{B}^0$ существует с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. Условие двусторонней расслояемости прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (m), где $m=M_1M_2$, приводится к виду:

$$\begin{array}{c} \omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0, \\ \omega^1\wedge(\omega_1^2+\omega_1^1)+\omega^2\wedge(\omega_2^1-\omega_1^1)=0, \\ \omega_1^3\wedge\omega_3^1+\omega_2^3\wedge\omega_3^2=0, \end{array} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \omega^1 \wedge (\omega_1^2 + \omega_1^1 + \omega^2) - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \\ \omega^i \wedge (\omega_j^j + \omega_j^i + \omega^j) + \omega_j^3 \wedge \omega_3^i = 0, \end{cases} \qquad (3.4)$$

или, учитывая систему уравнений Пфаффа, определяющих пару $\overline{B}^\circ$, получаем конечные соотношения:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{12}^3 - \Gamma_{21}^3 = 0, \\ &\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{11}^1 = 0, \\ &\Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^1 - \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^2 = 0, \\ &\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^1 + 1 - \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^2 = 0, \\ &\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1 + 1 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^1 - \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^1 = 0, \\ &\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 + 1 + \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^2 = 0. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Из (2.3) и (2.5) следует утверждение теоремы.

Литература

1. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3 (Труды Томского университета, 168), 1963, 28-42.

2. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1956.

3. В.С.Малаховский, Расслояемые пары конгруэнций фигур в трехмерном проективном пространстве. Труды геометрического семинара ВИНИТИ, т.3 (печатается).

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
вып 2 1971

ЛИПАТОВА Ф.А.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПАР ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассматривается двупараметрическое семейство V (конгруэнция) пар фигур C, M, где C – эллипс, а M – точка, не инцидентная плоскости эллипса.

Семейство V называется парой V_0, если характеристическая точка A_1 плоскости эллипса лежит на эллипсе.

Помещая начало A репера R в центр эллипса C, конец вектора $\bar{e}_1$ в точку A_1, конец вектора $\bar{e}_3$ в точку M, конец вектора $\bar{e}_2$ в точку эллипса и, направляя вектор $\bar{e}_2$ по сопряженному к $\bar{e}_1$ направлению, приводим систему пфаффовых уравнений пары V_0 к виду:

$$\begin{gathered} \omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \ \omega_1^2 = c\omega^1 + f\omega^2, \ \omega_2^1 = e\omega^1 + h\omega^2, \\ \omega_1^3 = -a\omega^1 - b\omega^2, \ \omega_2^3 = p\omega^1 + k\omega^2, \ \omega_3^3 = s\omega^1 + t\omega^2, \\ \omega_1^1 = \eta\omega^1 + \alpha\omega^2, \ \omega_2^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega^2, \ \omega_3^2 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2, \\ \omega_3^1 = q\omega^1 + z\omega^2, \end{gathered} \qquad (1)$$

где $\omega^i, \omega^\alpha_i$ -компоненты деривационных формул репера R ,удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства :

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k \ , \ \mathcal{D}\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k . \qquad (2)$$

Уравнения эллипса относительно репера R имеют вид:

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \\ x^3 = 0 . \end{cases} \qquad (3)$$

Определение. Пары V_0 называется парой V'_0 ,если

$$\begin{gathered} \rho = b = \tau = m_1 = e = c = t = \gamma = \alpha = 0 , \\ a + k = 0 , \ \beta = \eta = -1 , \ h = -f , m_2 = \frac{1}{k} , q = \frac{1}{k} , \end{gathered} \qquad (4)$$

причем

$$k(1 - f) \neq 0 . \qquad (5)$$

Теорема I. Пара V'_0 существует с произволом двух функций одного аргумента.

Доказательство. Система (I) в силу условий (4) примет вид:

$$\begin{gathered} \omega^3 = -k\omega^1 , \ \omega^2_1 = f\omega^2 , \ \omega^1_2 = -f\omega^2 , \ \omega^3_1 = k\omega^1 , \\ \omega^3_2 = k\omega^2 , \ \omega^3_3 = S\omega^1 , \ \omega^1_1 = -\omega^1 , \ \omega^2_2 = -\omega^1 , \\ \omega^2_3 = \frac{1}{k}\omega^2 , \ \omega^1_3 = \frac{1}{k}\omega^1 . \end{gathered} \qquad (6)$$

Продолжая эту систему ,убеждаемся,что пара V'_0 существует и определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Теорема 2. Фокальные поверхности конгруэнции (C) являются неопределенными.

Доказательство. Для определения фокусов имеем систему:

$$(x^1)^2\omega^1 + (x^2)^2\omega^1 - x^1\omega^1 - x^2\omega^2 = 0 ,$$

$$\begin{gathered} x^1\omega^1 + x^2\omega^2 - \omega^1 = 0 , \\ (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1 , \\ x^3 = 0 . \end{gathered} \qquad (7)$$

Исключая из уравнений системы (7) формы ω^1 и ω^2 мы не получим дополнительного соотношения на координаты x^1, x^2.Это означает,что конгруэнция (C) является конгруэнцией коник с неопределенными фокальными поверхностями.

Теорема 3. Все эллипсы конгруэнции (C) принадлежат конусу φ :

$$\varphi \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - \frac{1}{k^2}(x^3 + k) = 0 . \qquad (8)$$

Доказательство.Учитывая соотношение

$$dk = -k(1 + S)\omega^1 , \qquad (9)$$

являющееся дифференциальным следствием системы (6) ,и уравнения стационарности

$$dx^\alpha = -x^\beta\omega^\alpha_\beta - \omega^\alpha \qquad (10)$$

точки аффинного пространства ,убеждаемся,что

$$d\varphi = \lambda\varphi , \ \lambda = 2\omega^1 . \qquad (11)$$

Следовательно, φ -инвариантный конус.

Теорема 4. Характеристическая точка грани $(\bar{e}_2, \bar{e}_3)$ инцидентна прямой AM .

Доказательство.Характеристическая точка грани $(\bar{e}_2, \bar{e}_3)$ определяется формулой

$$\bar{N} = \bar{A} - k\bar{e}_3 , \qquad (12)$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Теорема 5. Плоскости $x^2 = 0$ пары V'_0 образуют однопараметрическое семейство.

Утверждение теоремы следует из того,что каждая точка прямой

$$\begin{cases} \kappa f x^1 + x^3 + \kappa = 0, \\ x^2 = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

является характеристической.

Теорема 6. Поверхность (A) является торсом.

Доказательство. Перейдя к реперу $R' = \{A, \tilde{\bar{e}}_1, \tilde{\bar{e}}_2, \tilde{\bar{e}}_3\}$,

где

$$\tilde{\bar{e}}_1 = \bar{e}_1 - \kappa \bar{e}_3 , \ \tilde{\bar{e}}_2 = \bar{e}_2 , \ \tilde{\bar{e}}_3 = \bar{e}_3 , \qquad (14)$$

получим, что

$$\tilde{\omega}_1^3 = 0, \quad \tilde{\omega}_2^3 = \kappa (1 - f) \omega^2 . \qquad (15)$$

Уравнение асимптотических линий поверхности (A) в силу соотношения (5) примет вид:

$$(\omega^2)^2 = 0. \qquad (16)$$

Литература

I. В.С.Малаховский, Конгруэнции коник, порожденные расслояемой парой C_ℓ. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.I (Труды Калининградского университета), I970, 5-26.

2. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. Москва, I956.

3. С.П.Фиников, Теория конгруэнций, Москва. I950..

4. Ф.А.Липатова, Конгруэнции пар фигур в трехмерном аффинном пространстве, образованные эллипсом и точкой. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.I (Труды Калининградского университета), I970, 86-93.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
Вып 2 I971

СЕМИНАР
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР ПРИ КАЛИНИНГРАДСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ.

Научный семинар при кафедре геометрии Калининградского государственного университета начал работу в январе I970 года. В предыдущем выпуске освещена работа семинара до I2 мая I970 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с I4 октября I970 года по 5 мая I971 года.

I4.X.I970. В.С.Малаховский, Индуцированно-расслояемая пара поверхностей в P_3.

21.X.I970. В.С.Малаховский, Расслояемая пара конгруэнций фигур в P_3.

28.X.I970. Ф.А.Липатова, Об одном классе пар фигур, порожденных эллипсом и точкой.

4.XI.I970. Г.П.Ткач, Пары конгруэнций нарабол в эквиаффинном пространстве.

II.XI.I970. Ю.И.Попов, Об инвариантном оснащении вырожденных гиперполос Γ_m ранга $\tau = \frac{m}{2}$ многомерного проективного пространства P_n.

I8.XI.I970. И.Н.Фетисова, Многообразия пар фигур в P_n, образованных гиперквадрикой и точкой.

25.XI.I970. В.С.Малаховский, Вырожденные конгруэнции пар фигур в P_3.

2.XII,I970. Г.Л.Свешникова, Конгруэнции кривых второго порядка с тремя фокальными поверхностями, вырождающимися в линии.

6.I.I971. В.С.Малаховский, О способах задания подмногообразий.

I3.I.I971. Б.А.Андреев, О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p, q) и точечным пространством. Ассоциированные образы первого порядка.

22.I.I971. В.С.Малаховский, Подмногообразия многообразий фигур в однородном пространстве.

I0.II.I97I. Ю.И.Шевченко, Конгруэнции центральных гиперцилиндров в аффинном пространстве.

I7.II.I97I. В.А.Андреев, О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством. Ассоциированные образы второго порядка.

3.III.I97I. В.П.Семенова, Конгруэнции прямых круговых цилиндров в E_3.

I0.III.I97I. Л.А.Уткина, Конгруэнции пар фигур, образованных эллипсоидом и точкой в A_3.

I7.III.I97I. Л.И.Бондаренко, Однопараметрическое семейство прямых круговых цилиндров в E_3.

I7.III.I97I. О.В.Спиганова, Конгруэнции эллиптических цилиндров в эквиаффинном пространстве.

24.III.I97I. Л.Л.Похила (г. Черновцы), Пары многообразий квадратичных элементов в P_n.

3I.III.I97I. Н.Е.Навротская, Конгруэнции эллипсов с постоянными полуосями в E_3.

3I.III.I97I. В.И.Худенко, Конгруэнции гиперболических цилиндров в E_3.

I4.IУ.I97I. Н.С.Кузнецова, Конгруэнции параболических цилиндров в E_3.

2I.IУ.I97I. В.В.Овчинников, Дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов.

28.IУ.I97I. Л.А.Гриценко, Вырожденные многообразия квадратичных элементов в P_n.

5.У.I97I. Н.М.Никифорова, Конгруэнции эллипсов со специальными свойствами фокальных поверхностей в эквиаффинном пространстве.