МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 0321—4796

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

ВЫПУСК 10

КАЛИНИНГРАД
1979

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 0321 - 4796

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск IO

Калининград
1979

УДК 513.73

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Калининградского государственного университета

Статьи настоящего выпуска относятся к следующим разделам дифференциальной геометрии: многообразия квадрик в многомерных и трехмерных пространствах, теория многомерных сетей и тканей, дифференцируемые соответствия, связности, ассоциированные с многообразиями фигур, и структуры на многообразиях.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области геометрии.

Темплан 1979 г., поз. 101.

СОДЕРЖАНИЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.10 1979

УДК 513.73

Б.А.А н д р е е в

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЕМ $f: P_m \to A_n\ (m>n)$

В статье [1] изучалось распределение линейных элементов,порожденное отображением $P_{n+k} \to P_n$.Фиксация в пространстве P_n гиперплоскости π° ,т.е.замена проективного пространства P_n аффинным,приведет к появлению новых геометрических понятий и образов.Они изучаются в настоящей работе: это понятие главных точек и индикатриса - инвариантная направляющая конуса характеристических прямых.Доказано,что она определяет геометрические образы I дифференциальной окрестности рассматриваемого распределения.Дан способ их построения с помощью индикатрисы.Затронут вопрос о свойствах характеристической конфигурации в специальном случае. Используются обозначения работы [7].

Пусть $f: P_m \longrightarrow A_n$ дифференцируемое отображение из области m-мерного проективного пространства P_m в n-мерное аффинное пространство A_n $(n<m)$,пополненное несобственной гиперплоскостью π°.Ранг отображения f предполагается равным n в каждой точке области U .Поместим нулевую вершину подвижного репера пространства P_m в точку $P^\circ \in U$,а начало репера пространства A_n - в точку $\bar{P}^\circ = f(P^\circ)$.

Система дифференциальных уравнений отображения f имеет вид (I.4),[7],где следует положить $\omega^{\circ}_{i} \equiv 0$,а формы $\widetilde{\omega}^{i} \stackrel{d}{=} \omega^{i}_{\circ}$, $\widetilde{\omega}^{j}_{i} \stackrel{d}{=} \omega^{j}_{i} - \delta^{j}_{i}\omega^{\circ}_{\circ}$ являются структурными формами пространства A_n .Фундаментальный объект II-го порядка $\{\Lambda^{i}_{J}, \Lambda^{i}_{JK}\}$ отображения f подчиняется дифференциальным уравнениям (I.5)[7],где $\Lambda_{iJ} \equiv 0, \Lambda_{iJK} \equiv 0$.Разложение отображения f в степенной ряд имеет вид:

$$\widetilde{x}^{i} = \Lambda^{i}_{J}\widetilde{X}^{J} + \frac{1}{2}\Lambda^{i}_{JK}\widetilde{X}^{J}\widetilde{X}^{K} + (\ldots),\ (i,j,\ldots=1,\ldots,n; J,K,\ldots=1,\ldots,m),$$

где $\widetilde{X}^{J}, \widetilde{x}^{i}$ - соответственно неоднородные координаты точек $P \subset U$ и $P = f(P) \subset A_n$ и в указанных реперах.

Отображение f порождает локальное расслоение пространства P_m на n-параметрическое семейство ($m-n$)-мерных подмногообразий $W_p = f^{-1}(p)$.Уравнения касательного подпространства $L_{\circ}$ к слою $W_{P^{\circ}}$ в точке P° имеет в однородных координатах следующий вид:

$$\Lambda^{i}_{J}X^{J} = 0.$$

Можно показать,что результаты,касающиеся $K(P_{\alpha})$-главных прямых [2],переносятся без изменений на случай $m > n$, если исключить из рассмотрения прямые,лежащие в L° .

Определение 1. Точка $A \subset P_m$ называется главной,если существует касательная к отображению f коллинеация $K(P_J)$,такая,что: I/прямая $[P^{\circ}A]$ является $K(P_J)$-главной , 2/ $K(P_J)(A) \in \pi^{\circ}$.

Множество главных точек обозначим $\mathfrak{M}$.Очевидно $\mathfrak{M} K^{\circ} = \Phi$. Объектом $\{\Lambda^{i}_{J}, \Lambda^{i}_{JK}\}$ для каждой точки P° определяется инвариантное алгебраическое многообразие $\mathcal{J}$:

$$\Lambda^{i}_{JK}X^{J}X^{K} - 2\Lambda^{i}_{J}X^{J}X^{\circ} = 0$$

в общем случае размерности $m-n$ и порядка 2^{n},которое называется индикатрисой. L° является касательным подпространством к индикатрисе в точке P° .Возможны 2 случая взаимного расположения многообразий L° и $\mathcal{J}$: I/ L° и $\mathcal{J}$ как множества находятся в общем положении; 2/ $L^{\circ} \subset \mathcal{J}$.Очевидно для "общего случая" (но не только для него) выполняется условие I). В зависимости от выполнения в точке P° условий I) или 2) будем относить ее соответственно к типу G или S .

Предложение 1. Справедлива формула

$$\mathfrak{M} = \mathcal{J} \setminus (\mathcal{J} \cap L^{\circ})$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из [6].

Следствие 1. На каждой $K(P_J)$ -главной прямой существует единственная точка.

Следствие II. В общем случае имеем:

$$\mathcal{J} = \overline{\mathfrak{M}},\quad \mathcal{J} \cap L^{\circ} = \overline{\mathfrak{M}} \setminus \mathfrak{M},$$

где $\overline{\mathfrak{M}}$ -топологическое замыкание множества $\mathfrak{M}$.

Пусть χ -конус,состоящий из прямых связки $\{P^{\circ}\}$,которые а) пересекают индикатрису $\mathcal{J}$ в двух точках или б)касаются ее.

Теорема I.Конус χ состоит из характеристических прямых в смысле В.В.Рыжкова [3].Ненулевые характеристические прямые определяются условием а),нулевые-условием б).

Доказательство проводится так же,как для теоремы 7 из[5].Характеристическая гомография H_{ℓ} ,заданная на характеристической прямой ℓ ,при данной связке касательных коллинеаций определяется множеством $\mathfrak{M}$, а именно условием $H_{\ell}(A)=\pi^{\circ}$, где $A=\ell\cap\mathfrak{M}$.

Поместим вершины R_{α} $(\alpha,\ldots=n+1,\ldots,m)$ репера пространства P_m в L°. Имеем: $\Lambda^{i}_{\alpha}\equiv 0$. Пусть

$$\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}=V^{\hat\alpha}_{i}\Lambda^{i}_{\alpha\gamma},\quad \Lambda^{\hat\alpha}_{\hat\beta\hat\gamma}=-V^{\hat\alpha}_{i}\Lambda^{i}_{\hat\beta\hat\gamma},$$

где $V^{\hat\alpha}_{i}$ определены равенством $V^{\hat\alpha}_{i}\Lambda^{i}_{\hat\beta}=\delta^{\hat\alpha}_{\hat\beta}$ $(\hat\alpha,\hat\beta,\ldots=1,\ldots,n)$. Из (1.5)[7] получаем:

$$\Omega^{\hat\alpha}_{\alpha}=\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}\Omega^{\gamma}_{\circ},$$

$$\overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}=0,\ \overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta}=\delta^{\hat\alpha}_{\hat\beta}\Pi^{\circ}_{\alpha}+\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\Pi^{\beta}_{\hat\beta},\ \overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\hat\alpha}_{\hat\beta\hat\gamma}=\delta^{\hat\alpha}_{(\hat\beta}\Pi^{\circ}_{\hat\gamma)}+\Lambda^{\hat\alpha}_{\beta(\hat\beta}\Pi^{\beta}_{\hat\gamma)}.\quad(8)$$

Из (7) и (I.5)[4] заключаем, что $\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}$ является фундаментальным объектом I порядка распределения $\{L^{\circ}\}$, образованного подпространствами L° с центрами P°. Система (3) равносильна следующей:

$$\Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}+2\Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\beta}X^{\hat\alpha}X^{\beta}+\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}+2X^{\hat\gamma}X^{\circ}=0.\quad(9)$$

Под полярой $\mathcal{J}(P)$ точки $P\in P_m$ относительно индикатрисы $\mathcal{J}$ понимается пересечение поляр этой точки относительно всех гиперквадрик линейного семейства $\lambda_{\hat\alpha}\Phi^{\hat\alpha}=0$. Следующая теорема доказывается так же, как теорема 5 из [7].

Т е о р е м а 2. Пусть ℓ -прямая связки $\{P^{\circ}\}$. Множество фокальных точек, соответствующих направлению, которое определяется прямой ℓ, является пересечением поляры любой точки этой прямой относительно индикатрисы $\mathcal{J}$.

С л е д с т в и е I. Для фокального многообразия $\mathfrak{Z}(H)$ [4], соответствующего нормали I рода H распределения $\{L^{\circ}\}$, имеем:

$$\mathfrak{Z}(H)=\bigcup_{\substack{P\in H\\ P\neq P^{\circ}}}\left(L^{\circ}\cap\mathcal{J}(P)\right).$$

Под асимптотической прямой будем понимать прямую связки $\{P^{\circ}\}$, определяющую асимптотическое направление [4] распределения $\{L^{\circ}\}$.

С л е д с т в и е 2. Конус $\mathcal{J}\cap L^{\circ}$ является конусом асимптотических прямых.

С л е д с т в и е 3. В общем случае множество $\overline{\mathfrak{M}}\setminus\mathfrak{M}$ является множеством точек асимптотических прямых.

С л е д с т в и е 4. Точка P° является планарной точкой многообразия $W_{P^{\circ}}$ в том и только в том случае, когда она является точкой типа S.

Список литературы

I. Д р а г н е в М.В., Р ы ж к о в В.В. К геометрии характеристических конусов отображения P_m в P_n при $m>n$.- Известия высших уч. завдений. Математика, 1974, №5, 81-86.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.-"Геометрия 1963". Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР, 1965, 67-107.

3. Р ы ж к о в В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n.- Тр. геометрич. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, 235-242.

4. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I.- Тр. геометрич. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, 49-94.

5. А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (P,q) и точечным пространством.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, Вып.2, 1971, с.28-37.

6. А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1973. Вып.3, с.6-19.

7. А н д р е е в Б.А. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным пространством и пространством нуль-пар.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1974, Вып.5, с.6-24.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I0 I979

УДК 513.73

Х. А. Баймуратов

О ЧЕТЫРЕ-ТКАНИ, ПОРОЖДЕННОЙ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ НА ТРЕХМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В P_5

Известно, что трехмерная тангенциально невырожденная поверхность V_3 в пятимерном проективном пространстве P_5 несет четыре семейства асимптотических линий. Распределения, определяемые парами асимптотических направлений, называются асимптотическими. На поверхности V_3 всего 6 асимптотических распределений. Если четыре из этих распределений голономны, то соответствующие интегральные поверхности образуют на V_3 четыре-ткань [I]. Целью настоящей работы является изучение свойств такой ткани.

I. Присоединим к V_3 канонический репер, построенный в работе [2]. Тогда асимптотические формы имеют вид

$$\varphi^4 = (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2, \quad \varphi^5 = (\omega^1)^2 - (\omega^3)^2.$$

Асимптотические распределения задаются инвариантными формами $\omega^1 \pm \omega^2$, $\omega^1 \pm \omega^3$, $\omega^2 \pm \omega^3$. Пусть распределения $\omega^1 \pm \omega^3$, $\omega^2 \pm \omega^3$ голономны. Тогда (см. [2]) сопряженная сеть на V_3 будет голономной и уравнения поверхности могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\omega^4 = 0, \quad \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 = \omega^2, \quad \omega_3^4 = -\omega^3, \\
&\omega^5 = 0, \quad \omega_1^5 = 0, \quad \omega_2^5 = 0, \quad \omega_3^5 = -\omega^3;
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\omega_1^2 = \kappa_1 \omega^2, \quad \omega_2^3 = \kappa_2 \omega^3, \quad \omega_3^1 = \kappa_3 \omega^1, \\
&\omega_2^1 = -\kappa_2 \omega^1, \quad \omega_3^2 = -\kappa_3 \omega^2, \quad \omega_1^3 = -\kappa_1 \omega^3;
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\omega_5^4 = -2\kappa_1 \omega^1, \quad \omega_4^5 = 2\kappa_2 \omega^2, \\
&2\omega_1^1 - \omega_5^5 - \omega_0^0 = -b_1^5 \omega^1 - \kappa_2 \omega^2 + \kappa_3 \omega^3, \\
&2\omega_2^2 - \omega_4^4 - \omega_0^0 = \kappa_1 \omega^1 - b_2^4 \omega^2 - \kappa_3 \omega^3, \\
&2\omega_3^3 - \omega_4^4 - \omega_0^0 = -3\kappa_1 \omega^1 + \kappa_2 \omega^2 + b_3^4 \omega^3, \\
&2\omega_3^3 - \omega_5^5 - \omega_0^0 = -\kappa_1 \omega^1 + 3\kappa_2 \omega^2 + b_3^5 \omega^3.
\end{aligned}$$

Продолжая систему (2),(3), мы получим, в частности, следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\omega_4^3 = \ell_{42}^3 \omega^2 + \ell_{43}^3 \omega^3, \quad \omega_5^3 = \ell_{51}^3 \omega^1 + \ell_{53}^3 \omega^3, \\
&2d\kappa_1 + 2\kappa_1(\omega_0^0 - \omega_1^1) = (\ell_{53}^3 - \ell_{52}^2)\omega^1 + (\ell_{51}^2 - 2\kappa_1\kappa_2)\omega^2 - \\
&\qquad - (\ell_{51}^3 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1(b_3^5 - b_3^4))\omega^3, \\
&2d\kappa_2 + 2\kappa_2(\omega_0^0 - \omega_2^2) = (-\ell_{42}^1 + 2\kappa_1\kappa_2)\omega^1 + (\ell_{41}^1 - \ell_{43}^3)\omega^2 + \\
&\qquad + (\ell_{42}^3 + 2\kappa_2\kappa_3 - 2\kappa_3(b_3^4 - b_3^5))\omega^3, \\
&2\omega_1^0 = (\ell_{52}^2 + \ell_{53}^3 + 2\kappa_1^2)\omega^1 - (\ell_{51}^2 + 2\kappa_1\kappa_2)\omega^2 - \\
&\qquad - (\ell_{51}^3 + 6\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1(b_3^5 - b_3^4))\omega^3, \\
&2\omega_2^0 = -(\ell_{42}^1 + 2\kappa_1\kappa_2)\omega^1 + (\ell_{41}^1 + \ell_{43}^3 + 2\kappa_2^2)\omega^2 - \\
&\qquad - (\ell_{42}^3 + 6\kappa_1\kappa_2 - 2\kappa_2(b_3^4 - b_3^5))\omega^3, \\
&2\omega_3^0 = -(\ell_{31} + 2\kappa_1\kappa_3)\omega^1 + (\ell_{32} - 2\kappa_2\kappa_3)\omega^2 - \\
&\qquad - (\ell_{41}^1 + \ell_{42}^2 + \ell_{51}^1 + \ell_{52}^2 - 2\kappa_3^2)\omega^3,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$d b_3^4 + b_3^4(\omega_0^0-\omega_3^3) = \Big(-\frac{3}{2}\ell_{31}+4\ell_{51}^3+4k_1(b_3^5-b_3^4)+ b_3^4k_1-2k_1k_3\Big)\omega^1+\Big(\frac32 \ell_{32}+4\ell_{42}^3+\ell_{43}^2-2k_2(b_3^4-b_3^5)-b_3^4k_2-2k_1k_3\Big)\omega^2+a_3^4\omega^3,$$

$$d b_3^5 + b_3^5(\omega_0^0-\omega_3^3) = \Big(-\frac32 \ell_{31}+4\ell_{51}^3+\ell_{53}^1+2k_1(b_3^5-b_3^4)+b_3^5k_1-2k_1k_2\Big)\omega^1+\Big(\frac32 \ell_{32}+4\ell_{51}^3-4k_2(b_3^4-b_3^5)-b_3^5k_2-2k_2k_3\Big)\omega^2+a_3^5\omega^3.$$

2. Введем формы σ_j ($j=0,1,2,3$):

$$\sigma_0=\omega^1+\omega^3,\ \sigma_1=-\omega^2-\omega^3,\ \sigma_2=\omega^2-\omega^3,\ \sigma_3=-\omega^1+\omega^3. \quad (5)$$

Они связаны соотношением:

$$\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0. \quad (6)$$

В силу голономности асимптотических распределений уравнения $\sigma_j=0$ являются вполне интегрируемыми. Таким образом, на V_3 имеется четыре семейства двумерных поверхностей, причем , в силу условия (6), через каждую точку поверхности V_3 проходит одна и только одна поверхность из каждого семейства. Поэтому эти поверхности образуют на V_3 четыре-ткань. Введем далее три линейно независимые формы τ_i ($i=1,2,3$):

$$2\tau_1=\sigma_0+\sigma_1=\omega^1-\omega^2,\ 2\tau_2=\sigma_0+\sigma_2=\omega^1+\omega^2, \quad (7)$$
$$2\tau_3=\sigma_0+\sigma_3=2\omega^3.$$

Найдем внешние дифференциалы форм τ_i :

$$d\tau_1=\Big[\omega_0^0-\omega_3^3-k_1\omega^1+k_2\omega^2+\frac14(b_3^4+b_3^5)\omega^3\Big]\wedge\tau_1- \quad (8)$$
$$-\frac14(b_3^5-b_3^4+2k_3)\,\tau_2\wedge\tau_3,$$

$$d\tau_2=\Big[\omega_0^0-\omega_3^3-k_1\omega^1+k_2\omega^2+\frac14(b_3^4+b_3^5)\omega^3\Big]\wedge\tau_2+$$
$$+\frac14(b_3^5-b_3^4+2k_3)\,\tau_3\wedge\tau_1,$$

$$d\tau_3=(\omega_0^0-\omega_3^3-k_1\omega^1+k_2\omega^2)\wedge\tau_3.$$

Из соотношений (8) находим кривизны a_i ткани (см. [1]):

$$a_1=-a_2=-\frac14(b_3^5-b_3^4+2k_3),\ a_3=0. \quad (9)$$

Из этих уравнений видно, что если $b_3^5-b_3^4+2k_3=0$, то $a_1=a_2=a_3=0$, и ткань будет октаэдрической. Но соотношение $b_3^5-b_3^4+2k_3=0$, как нетрудно проверить пользуясь уравнениями (1)-(3), есть условие голономности третьей пары асимптотических распределений поверхности V_3 . Поэтому справедлива такая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы четыре-ткань, образованная интегральными поверхностями уравнений $\sigma_j=0$, была октаэдрической, необходимо и достаточно, чтобы и третья пара асимптотических распределений поверхности V_3 была голономной.

Из соотношения (8) видно, что форма связности γ ткани имеет вид:

$$\gamma=\omega_0^0-\omega_3^3-k_1\omega^1+k_2\omega^2+\frac14(b_3^4+b_3^5)\omega^3.$$

Дифференцируя γ внешним образом и используя соотношения (4), получим:

$$d\gamma=\Big(-\frac14\ell_{32}+\frac14\ell_{43}^2+\frac12k_2(b_3^4-b_3^5)-k_1k_2\Big)\omega^2\wedge\omega^3+$$
$$+\Big(\frac14\ell_{31}+\frac14\ell_{53}^1-\frac12k_1(b_3^5-b_3^4)-k_1k_3\Big)\omega^1\wedge\omega^3.$$

Четыре-ткань, образованная поверхностями, будет шестиугольной тогда и только тогда, когда $d\gamma=0$ [1], что дает в нашем случае

$$-\ell_{32}+\ell_{43}^2+2k_2(b_3^4-b_3^5)-4k_2k_3=0, \quad (10)$$
$$\ell_{31}+\ell_{53}^1+2k_1(b_3^4-b_3^5)-4k_1k_3=0.$$

3. Пусть теперь рассматриваемая нами поверхность V_3 несет четыре семейства прямолинейных асимптотических. Тогда, как показано в [3], имеют место соотношения :

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0\,, \quad \ell^2_{43} = \ell^1_{53} = \ell_{31} = \ell_{32} = 0. \tag{11}$$

Уравнения (10) примут вид:

$$d\tau_1 = (\omega^0_0 - \omega^3_3)\wedge\tau_1 - 2\kappa_3\tau_2\wedge\tau_3\,,$$
$$d\tau_2 = (\omega^0_0 - \omega^3_3)\wedge\tau_2 + 2\kappa_3\tau_3\wedge\tau_1\,,\quad d\tau_3 = (\omega^0_0 - \omega^3_3)\wedge\tau_3\,, \tag{12}$$

а форма связности четыре-ткани $\gamma = \omega^0_0 - \omega^3_3$. Условия шестиугольности (10) выполняются тождественно в силу соотношений (11). Отсюда вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если две пары асимптотических распределений поверхности V_3, несущей четыре семейства прямолинейных образующих, голономны, то четыре-ткань, образованная интегральными поверхностями голономных асимптотических распределений, будет шестиугольной.

Из (12) видно, что если $K_3 = 0$, то рассматриваемая ткань будет октаэдрической. Поверхность V_3, как доказано в [3], представляет собой в этом случае пересечение двух гиперконусов второго порядка, имеющих одномерные скрещивающиеся вершины. Отсюда приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Четыре-ткань, образованная интегральными поверхностями любых двух пар асимптотических распределений поверхности V_3, являющейся пересечением двух гиперконусов второго порядка с одномерными скрещивающимися вершинами, будет октаэдрической.

Список литературы

1. Б л я ш к е В. Введение в геометрию тканей. М., 1959.

2. Б а й м у р а т о в Х.А. О геометрии трехмерной поверхности общего вида в пятимерном проективном пространстве.-В кн.: Сборник статей по дифференциальной геометрии. Калинин, 1975. Вып. 2, с. 3-14.

3. Б а й м у р а т о в Х.А. О геометрии трехмерной поверхности V_3, несущей четыре семейства прямолинейных образующих, в проективном пространстве P_5.- Изв. вузов, 1975, с. 3-14.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

В.И.Ведерников

ПРОСТРАНСТВО ПСЕВДОРЕПЕРОВ

В статье определяется и изучается пространство псевдореперов, элементами которого являются совокупность точки аффинного пространства A_n и n направлений общего положения. Формально это пространство определяется как подпространство в пространстве матриц, и изучаются его полиномиальные морфизмы, устанавливается его редуктивность. После этого вводится понятие сети, понятие связности сети, изучаются свойства этой связности.

1. Рассматривается множество $M(n+1)$ квадратных матриц ($n+1$)-го порядка и в нем вводится структура G-пространства при помощи отображения

$$G \times M(n+1) \longrightarrow M(n+1): \ (a,x) \longrightarrow axa^{-1}.$$

Здесь G -группа аффинных преобразований, т.е.

$$G = \left\{ a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & T \end{pmatrix} \,\middle|\, T \in GL(n,R) \right\}.$$

В полученном G -пространстве рассматривается орбита элемента

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_i \neq 0, \ i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.

Для выяснения геометрического смысла элементов этого пространства рассмотрим полиномиальные морфизмы (см. [1]) этого пространства с таким расчетом, чтобы образами были симметрические орбиты. Для этого достаточно рассмотреть (как показано в статье [2]) все полиномиальные морфизмы вида

$$e_i: \ X \longrightarrow e_i(X),$$

для которых $e_i(x)^2 = e_i(x), \ \forall x \in X$.

Так же, как в статье [2], устанавливается, что такие e_i существуют, и их ровно $n+1$, и каждое представляет из себя либо точку, либо совокупность гиперплоскости и одномерного направления. Используя изоморфизм между X и множеством наборов образов симметрии $(e_0(x), \dots, e_n(x))$, получаем: Всякий $x \in X$ геометрически представляет из себя набор точки и n направлений общего положения (см. также [2]). Используя далее расслоение $\xi = (G, \pi, X)$, где $\pi(a) = a\varepsilon a^{-1}$, мы получим (так же, как в [2]) множество реперов, адаптированных элементу x. Каждый из таких реперов есть набор $(p, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$, где p -точка, определенная x, а $\bar{e}_i$ - векторы, имеющие собственные направления соответствующего оператора, т.е. они имеют направления, определенные элементом $x \in X$.

2. Используя отображение $\pi: G \to X$, введенное ранее, и дифференциал этого отображения в $e \in G$, получим касательное пространство

2 Зак. 3728

$$\mathfrak{m} = T_\varepsilon(X) = d\pi_e(\underline{G}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{V} & \omega \end{pmatrix} \middle| \, \omega = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

где $\underline{G}$ -алгебра Ли G. Тогда определится редуктивное разложение алгебры Ли

$$\underline{G} = \underline{H} \oplus \mathfrak{m}.$$

Проверка редуктивности разложения тривиальна, но отсюда следует редуктивность пространства X. Соответственно, полиномиальный морфизм $P: X \to P(X)$ также определит дифференциал отображения $dP_\varepsilon: T_\varepsilon(X) \to T_{P(\varepsilon)}[P(X)]$ и соответственно определит редуктивное разложение для алгебры Ли, которое показывает редуктивность пространства $P(X)$. В частности, отсюда получаем $\mathfrak{m} = \oplus \sum \mathfrak{m}_i$, где $\mathfrak{m}_i$-редуктивное оснащение для $e_i(X)$. Так как стационарная группа H элемента ε состоит из матриц $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix}$, где h_1-диагональная матрица, то легко подсчитать действие группы $Ad(H)$ в $\mathfrak{m}$, и оно приводит к инвариантам вида

$$\varphi_{ik} = \omega_{ik}\,\omega_{ki},$$

где $\omega = (\omega_{ik}),\ i \neq k,\ \omega_{ii} = 0.$

3. Так же, как в статье [2], определится главное расслоение

$$\xi' = (X, e_0, A_n),$$

где A_n-аффинное пространство, а e_0-полиномиальный морфизм.

О п р е д е л е н и е. Полем элементов пространства X назовем гладкое сечение S в расслоении ξ'. Следуя В.Т.Базылеву [3], это поле также будем называть плоской сетью в аффинном пространстве.

Легко видеть, что при аффинном преобразовании сеть переходит в сеть, ибо при аффинном преобразовании аффинное пространство переходит в себя, и P-морфизм G-пространства. Так же, как в [2], определится дифференциал отображения S, который определяется отображением

$$\vec{A}_n \to \mathfrak{m}: \ \bar{V} \to \omega(\bar{V}).$$

Соответственно определяются квадратичные инвариантные формы

$$\varphi_{ik}(\bar{V}) = \omega_{ik}(\bar{V}) \cdot \omega_{ki}(\bar{V}).$$

Отметим, что для выяснения геометрии сети можно использовать полиномиальные морфизмы e_i, которые позволяют свести изучение сети к изучению поля основных элементов.

4. По способу, указанному в [2], вводится индуцированная связность плоской сети аффинного пространства по формуле

$$\bar{\nabla}_X Y = \sum e_i \nabla_X (e_i Y),$$

где ∇ -каноническая связность аффинного пространства, сводящаяся к простому дифференцированию. Имеет место:

Т е о р е м а. В индуцированной связности направления сети переносятся параллельно.

Доказательство следует непосредственно из определения связности ∇.

Если ввести подвижный репер, который можно определить как сечение в расслоении $\xi = (G, \pi, X_0)$, который существует в силу хорошего топологического строения базы X_0, где X_0-подмногообразие в X, определенное в X сечением S, то можно записать общее выражение для индуцированной связности в терминах коэффициентов уравнений инфинитезимального перемещения репера

$$d\bar{e}_i = \sum \omega_i^k \bar{e}_k .$$

В результате вычислений получим

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - h(X,Y),$$

где

$$h(X,Y) = \sum_{i \neq k} \omega_k^i (X) \eta^k \bar{e}_i ,$$

где положено

$$Y = \sum \eta^k \bar{e}_k .$$

Кручение этой связности

$$T(X,Y) = h(Y,X) - h(X,Y).$$

Отсюда вытекает:

Т е о р е м а. Кручение связности $\bar{\nabla}$ равно нулю тогда и только тогда, когда каждое распределение, определенное площадками, содержащими векторные поля $[\bar{e}_i \bar{e}_j]$, для всяких i,j -инволютивно.

5. Будем называть распределение k-мерных плоскостей распределением, принадлежащим сети, если в каждой точке плоскость распределения имеет в качестве базиса векторы, имеющие направление сети.

О п р е д е л е н и е. Пусть выделены три распределения L_1, L_2, L_3, принадлежащих сети, определенные в окрестности U точки $p \in A_n$ и удовлетворяющие условию

$$L_1(q) \subseteq L_2(q), \ \forall q \in U.$$

Тогда квазифокусом называется точка

$$F = p + \bar{v},$$

где $\bar{v} \in L_1$ и такая, что существует путь

$$F(t) = p(t) + \bar{v}(t)$$

с условиями

$$F(0) = F \quad \text{и} \quad \left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=0} \in L_2 , \ h = \left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=0} \in L_3 .$$

Легко записываются аналитические условия, которым должен удовлетворять квазифокус, и показывается, что частными случаями квазифокуса являются фокусы и псевдофокусы (см. [3]). Понятие квазифокуса используется для построения канонического репера (в общем случае).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. В е д е р н и к о в С.В. Специальные морфизмы G-пространств.- В кн.: Проблемы геометрии (Итоги науки и техники), 1975, с.49-68.

2. В е д е р н и к о в С.В. Геометрия основного пространства. (Печатается в данном сборнике).

3. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей.- Уч.зап.МГПИ им.В.И.ЛЕНИНА, 1965, № 243, с.29-37.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

С.В.Ведерников

ГЕОМЕТРИЯ ОСНОВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В статье изучается орбита G -пространства $M(n+1)$ множества квадратных матриц ($n+1$)-го порядка, G -структура которого определяется отображением

$$G\times M(n+1)\longrightarrow M(n+1):\ (a,x)\longrightarrow axa^{-1}.$$

Здесь G -группа аффинных преобразований или группа движений, и для простоты изложения основное внимание уделяется последнему случаю. Основным пространством мы называем орбиту элемента $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}0_1 & \\ & -E_{n-1}\end{pmatrix}$, где E_{n-1} -единичная матрица. Показывается, что геометрия X строится на основе систематического изучения морфизмов X, $X\times X$ и касательного расслоения $T(X)$ в $M(n+1)$ (см.[1]). Вводится понятие поля основных элементов, и на основе полиномиальных морфизмов строится индуцированная аффинная связность поля (см.[2]). Указываются основные обобщения.

I. Пусть

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ \bar a & T\end{pmatrix}\ \middle|\ \bar a\in R_n,\ T\in O(n)\right\}$$

группа движений, и $\quad X=\{a\varepsilon_1 a^{-1}\mid a\in G\}$,

где $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$, $\varepsilon=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -E_{n-1}\end{pmatrix}$ орбита в G -пространстве $M(n+1)$. Легко видеть, что для $x\in X$ выполняется условие $x^3=x$, т.е. пространство X является ближайшим обобщением симметрического пространства. Легко устанавливается, что (с точностью до изоморфизма) имеются три полиномиальных морфизма X в $M(n+1)$.

$$e_1: X\to e_1(X):\ x\to E-x^2$$

$$e_2: X\to e_2(X):\ x\to \tfrac{1}{2}(x+x^2)$$

$$e_3: X\to e_3(X):\ x\to \tfrac{1}{2}(x^2-x).$$

Легко видеть, что

$$X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -C\bar a & C\end{pmatrix},\ C=T\varepsilon T^{-1},\ C^2=E,\ C=C'.$$

и тогда

$$e_1(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \bar a & 0\end{pmatrix},\ e_2(x)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -B\bar a & B\end{pmatrix},\ e_3(x)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\tilde B\bar a & \tilde B\end{pmatrix},$$

где

$$B=\tfrac{1}{2}(E+C),\ B^2=B,\ B=B',$$

и это есть ортогонально проектирующий оператор на одномерное подпространство. Из результатов статьи [I] следует: $e_1(x)$ есть точечное пространство Эвклида, $e_2(x)$ -пространство гиперплоскостей пространства Эвклида, а $e_3(x)$ -пространство прямых пространства Эвклида E_n. Кроме того, легко видеть, что отображение $x\to(e_1(x),e_2(x))$ есть изоморфизм, и поэтому пространство X есть однородное пространство геометрических образов, каждый из которых состоит из точки и проходящей через нее гиперплоскости.

Замечание 1. Если проводить рассмотрение для случая аффинной группы G, то пространство X есть однородное пространство геометрических образов, каждый из которых состоит из точки и проходящей через нее гиперплоскости и прямой, не лежащей в этой гиперплоскости.

Замечание 2. Геометрический образ пространства X естественно возникает в случае гиперповерхности пространства Эвклида, так как в каждой точке гиперповерхности возникает геометрический образ, состоящий из точки поверхности и касательной гиперплоскости. Таким образом, задание гиперповерхности пространства Эвклида порождает ($n-1$)-мерное подмногообразие в пространстве X. Полученные геометрические образы-элементы X будем называть основными элементами. Отметим, что геометрический смысл для элементов пространства X был выяснен на общем пути - изучении полиномиальных морфизмов.

2. Касательное расслоение $T(X)$ к G-пространству X принадлежит, как можно показать, прямому произведению $X \times M(n+1)$. Оно состоит из пар матриц (x,t), где $x \in X$, а $t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c\bar{v}-\omega\bar{a} & \omega \end{pmatrix}$,

где

$$2\omega=\bar{y}\bar{e}'+\bar{e}\bar{y}', \quad \bar{y}=\frac{d\bar{e}(t)}{dt}\Big|_{t=0}, \quad \bar{v}=\frac{d\bar{a}(t)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Здесь считается, что основной элемент имеет направляющий

вектор и проходит через точку $\bar{a}$, $(\bar{e}(t), \bar{a}(t))$ -пара функций определяют кривую $x(t)$ в X. Для полиномиальных морфизмов e_i определяются их дифференциальные продолжения

$$e_i^*: T(x) \longrightarrow T(e_i(x)).$$

В частности,

$$e_1^*(x,t)=\left(x, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix}\right)=(x,v), \quad v=tx+xt.$$

При помощи соответствующих вычислений выводим ряд тождеств

$$\omega^3-\lambda_0\omega=0,$$

$$B(\omega^2-\lambda_0 E)=0,$$

$$t^4-\lambda_0 t^2=0,$$

$$(E+x)(t^3-\lambda t)=0,$$

где

$$\lambda_0=\frac{1}{2}sp(t^2)=\frac{1}{2}sp(\omega^2)=(\bar{y}\bar{y}).$$

Соответственно определяются морфизмы: а/ в векторное эвклидово пространство

$$\varphi_1: T(x)\to\vec{E}_n: (x,t)\to t^3-\lambda t=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\omega^2-\lambda E)\bar{u} & 0 \end{pmatrix}$$

и б/ в точечное эвклидово пространство (полагаем $\omega\neq 0$)

$$\varphi_2: T(x)\to E_n: (x,t)\to -\frac{1}{\lambda}(E+x)(t^2-\lambda E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a}-2B\omega\bar{v} & 0 \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл этих морфизмов будет выяснен в п.3.

3. Для перехода из пространства основных элементов в пространство прямых пространства Эвклида следует рассмотреть

морфизм e_3 из X в пространство прямых, а также и его дифференциальное продолжение. Для элемента $(y, t^3) \in T(e_3(x))$ также получаем основные тождества, аналогичные приведенным выше, и полиномиальные морфизмы в векторное и точечное пространства. Выяснение геометрического смысла этих морфизмов приводит к следующему результату: Если рассмотреть в пространстве $e_3(x)$ путь $y(t)$, который представляет из себя линейчатую поверхность, проходящую через данный элемент $y \in e_3(x)$ и имеющую данный касательный вектор t, то морфизм в эвклидово пространство определит центр луча этой линейчатой поверхности (не зависящий от выбора линейчатой поверхности с указанными выше условиями), а морфизм в касательное векторное пространство определит вектор, модуль которого совпадает с модулем параметра распределения этой линейчатой поверхности. Отметим также, что в общем случае для t не имеется никаких других соотношений, кроме полученного ранее тождества $t^4 - \lambda t^2 = 0$, т.е. E, t, t^2, t^3 -линейно независимые. В частном случае возможна зависимость вида $t^3 = \lambda t$, и это характеризует торсовое направление, т.е. путь-линейчатая поверхность, проведенная через данную прямую в данном направлении t, для которого $t^3 = \lambda t$ имеет данную прямую торсовой. Если вдоль всего пути $t^3 = \lambda t$, то линейчатая поверхность будет развертывающейся.

4. Поле основных элементов определим как сечение S в расслоении

$$\xi = (x, p_1, E_n).$$

Это сечение определит его дифференциальное продолжение, которое описывается отображением

$$S^*: (p, \bar{V}) \to (c(p), \omega(\bar{V})).$$

Это сечение определит n-мерное подмногообразие в X, и всякий морфизм можно ограничить на этом подмногообразии.

Особый интерес будет представлять морфизм вида

$$p: T(x) \oplus T(x) \to \vec{E}_n: (x, t, t_1) = t x v_1 = t x (t_1 x + x t_1),$$

где $T(x) \oplus T(x)$ -сумма Уитни для векторных расслоений $T(x)$. Оказывается, что при ограничении p на нашем подмногообразии он определит вторую квадратичную форму распределения, которое определит сечение S (ибо сечение есть отнесение данной точке пространства Эвклида E_n гиперплоскости, проходящей через эту точку). Соответственно определится индуцированная связность распределения (см. [2]).

З а м е ч а н и е I. Совершенно аналогичное рассмотрение возможно в случае аффинного пространства. Но в этом случае вместо распределения будет определена структура почти произведения. Отметим, что здесь имеется связь с теорией нормализованных поверхностей аффинного пространства.

З а м е ч а н и е 2. С небольшими изменениями здесь возможно рассмотрение (несколько менее подробное) случая, когда $\varepsilon = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_{n-k} \end{pmatrix}$, что приводит к теории k-мерных распределений в пространстве Эвклида или же к теории структуры почти произведения в аффинном пространстве.

5. Укажем теперь возможные обобщения. Основное обобще-

ние состоит в рассмотрении пространства $X=\{a\varepsilon_1 a^{-1} \mid a\in G\}$, где $G=GL(n+1,K)$. Это приводит к изучению тройных структур, т.е. элементами пространства X будут тройки направлений, одно из которых одномерное, второе K-мерное и третье $(n-K)$-мерное. Это соответствует заданию соответствующей тройки в проективном пространстве, где первый элемент будет точкой проективного пространства. Легко понять, что это связано с теорией нормализации А.П.Нордена, когда точке поверхности относится нормаль первого и второго рода, и это есть задание специального подмногообразия в X.

Второе обобщение состоит в том, что рассматривается орбита элемента $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}$, где ε –диагональная матрица с ненулевыми собственными значениями в G-пространстве $M(n+1)$. Здесь G –аффинная группа или группа движений, и в этом случае мы приходим к π-структуре. Также устанавливается изоморфизм между X и пространством наборов образов симметрии. Рассматривая расслоение $\eta=(G,\pi,x)$, где $\pi(a)=a\varepsilon_1 a^{-1}$, для всякого $x\in X$ определится $\pi^{-1}(x)$, которое состоит из реперов $(p,\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n)$, где p –фиксированная точка-центр X, а векторы $\bar{e}_i$ имеют собственные направления оператора $C=T\varepsilon T^{-1}$. Здесь также вводится понятие поля элементов и соответственно вводится индуцированная связность по формуле

$$\bar{\nabla}_x y=\sum e_i \nabla_x (e_i y),$$

где e_i –проектирующие операторы, определенные указанными выше морфизмами в симметрические пространства, а связность

∇ –каноническая связность аффинного пространства. Изучены морфизмы, и оказалось, что все полиномиальные морфизмы из X в $M(n+1)$ не выводят из класса рассматриваемых пространств и приводят лишь к увеличению кратности корней характеристического многочлена элементов пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. В е д е р н и к о в С.В. Специальные морфизмы пространств.- В кн.: Проблемы геометрии (Итоги науки и техники), I975, с.49-68.

2. С о л о в ь е в А.Ф. Кривизна и кручение связности, индуцированной распределением в римановом пространстве. Томск, I976, с.26.

3. У э л л с Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М., Мир, I976.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

А. Д. Иванов

ВЗАИМНО-ПОЛЯРНЫЕ ТРИ-ТКАНИ БОЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей заметке положительно решается вопрос о существовании три-тканей, полярно сопряженных с четырехмерными три-тканями Боля гиперболического типа, поставленный профессором А.П.Широковым в рецензии на статью автора [1].

1. В работе [1] доказано, что четырехмерное точечное многообразие M_4, несущее три-ткань Боля W_m, всегда можно отобразить в четырехмерное многообразие прямых проективного пространства P_3 так, что поверхности первого и второго семейств поверхностей ткани изобразятся связками прямых, центры которых лежат на квадрике Q, а поверхности третьего семейства -связками прямых, центры которых лежат на плоскости π. При этом трем поверхностям ткани W_m, проходящим через одну точку, соответствуют три связки, центры которых лежат на одной прямой. А так как связка прямых однозначно определяется своим центром, то естественно считать, что точки квадрики Q и плоскости π изображают поверхности три-ткани W_m. Условие прохождения трех поверхностей X, Y, Z ткани через одну точку $M \in M_4$ будет означать, что соответствующие им точки x, y, z лежат на одной прямой $\ell \subset P_3$.

2. Рассмотрим три-ткань гиперболического типа (см. [1]). В этом случае квадрика Q будет кольцевидной, и, следовательно, каждой прямой ℓ, пересекающей эту квадрику в точках A_0, A_3, а плоскость π в точке R, в поляритете будет соответствовать прямая $\ell' \in P_3$, пересекающая квадрику Q в точках A_1, A_2 и плоскость π в точке R'. Точки A_1, A_2, R' можно считать образами поверхностей другой ткани W'_m, которую назовем полярной для ткани W_m.

Присоединим к квадрике Q и плоскости π проективный автополярный репер $\{A_\alpha\}$ ($\alpha = 0,1,2,3$) так, чтобы ребра A_0A_1, A_0A_2, A_3A_1, A_3A_2 были образующими этой квадрики. Относительно такого репера уравнение квадрики Q будет иметь вид:

$$g_{12}x^1x^2 + g_{03}x^0x^3 = 0. \qquad (1)$$

Нормируя вершины репера $\{A_\alpha\}$ так, чтобы $|g_{12}| = |g_{03}|$, приведем уравнение (1) к виду:

$$\varepsilon x^1x^2 + x^0x^3 = 0, \quad \varepsilon = \pm 1. \qquad (2)$$

Потребуем, чтобы точки $A_0 + A_3$ и $A_1 + A_2$ лежали в плоскости π. Тогда ее уравнение примет вид:

$$f_1(x^1 - x^2) + f_0(x^0 - x^3) = 0. \qquad (3)$$

Плоскость π пересекает квадрику Q по действительной кривой q второго порядка:

$$\varepsilon x^1x^2 + x^0x^3 = 0, \quad f_1(x^1 - x^2) + f_0(x^0 - x^3) = 0, \qquad (4)$$

которую, как показано в [2], можно считать абсолютом неевклидовой плоскости π.

Пусть P —полюс плоскости π относительно квадрики Q. Так как уравнения квадрики Q и плоскости π имеют вид (2) и (3), то полюс P имеет координаты $(-f_0; -\varepsilon f_1; \varepsilon f_1; f_0)$. Если $f_0^2 \neq f_1^2$, то полюс P не лежит ни на плоскости π, ни на квадрике Q. Проектируя точки $A_0, A_3, A_0 + A_3$ из полюса P на плоскость π, получим плоскую интерпретацию рассматриваемой ткани на неевклидовой плоскости π (см. [2]). Проектируя из полюса P на плоскость π точки A_1, A_2, $A_1 + A_2$, получим плоскую интерпретацию ткани W'_m. В этих интерпретациях поверхности ткани изобразятся точками неевклидовой плоскости π , а условие прохождения трех поверхностей X , Y , Z ткани через одну точку будет означать, что соответствующие им точки x , y , z лежат на одной прямой m (m'), которая является проекцией из полюса P на плоскость π прямой $\ell(\ell')$.

3. Установим связь между три-тканью W_m и полярной ей тканью W'_m .

Проекция m прямой ℓ из полюса P на плоскость π пересекает абсолют q в точках

$$\left(f_0^{-1}\left(f\pm\sqrt{f_1^2+\varepsilon f_0^2}\right);\ -1;\ 1;\ \varepsilon f_0\left(f_1\pm\sqrt{f_1^2+\varepsilon f_0^2}\right)^{-1}\right).$$

Если $\varepsilon = 1$, то прямая m всегда пересекает абсолют q в двух действительных точках. Если же $\varepsilon = -1$, то m с q пересекаются в двух действительных точках при условии $f_0^2 < f_1^2$, и в двух мнимых точках при условии $f_0^2 > f_1^2$.

Определим расположение относительно абсолюта q проекций x', y', z' точек A_0, A_3, A_0+A_3 из полюса P на плоскость π . В выбранном репере эти точки определяются координатами:

$$x'\left(f_0^{-1}\left(f_0^2+2\varepsilon f_1^2\right);\ -\varepsilon f_1;\ \varepsilon f_1;\ f_0\right),$$

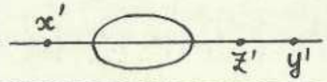
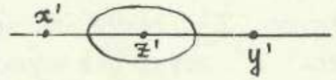
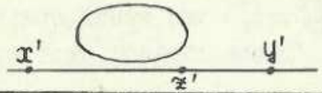
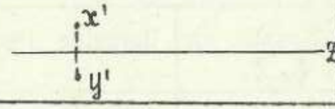
$$y'\left(f_0;\ \varepsilon f_1;\ -\varepsilon f_1;\ f_0^{-1}\left(f_0^2+2\varepsilon f_1^2\right)\right),\ z'(1;\ 0;\ 0;1).$$

Легко показать, что поляры точек x' , y' пересекают абсолют q в двух действительных точках. Следовательно, точки x' , y' лежат вне абсолюта q . Поляра точки z' пересекает абсолют q в точках с координатами:

$$\left(1;\ \varepsilon f_1\left(f_0\pm\sqrt{f_0^2+\varepsilon f_1^2}\right)^{-1};\ f_1^{-1}\left(f_0\pm\sqrt{f_0^2+\varepsilon f_1^2}\right);-1\right)$$

При $\varepsilon = 1$ точка z' является внешней по отношению к q . При $\varepsilon = -1$ точка z' будет внешней по отношению к q , если $f_0^2 < f_1^2$, и внутренней, если $f_0^2 > f_1^2$. В случае $\varepsilon = -1$ и $f_0^2 = f_1^2$ полюс P лежит в плоскости π , и ткань W_m становится особой тканью типа Γ_2 (см. [2]).

Результаты предыдущих исследований представим таблицей:

ε	Условия на f_0, f_1	Плоские интерпретации	Тип ткани W_m
$\varepsilon = 1$			Γ_{13}
$\varepsilon = -1$	$f_0^2 < f_1^2$		Γ_{12}
$\varepsilon = -1$	$f_0^2 > f_1^2$		Γ_{11}
$\varepsilon = -1$	$f_0^2 = f_1^2$		Γ_2

В последнем столбце этой таблицы указан тип ткани в соответствии с классификацией, приведенной в работе [2] .

Построим плоскую интерпретацию полярной ткани W'_m. Проекция m' прямой ℓ' из полюса P на плоскость π пересекает абсолют q в точках с координатами:

$$\left(1;\ f_1^{-1}\left(-f_0\pm\sqrt{f_0^2+\varepsilon f_1^2}\right);\ \varepsilon f_1\left(-f_0\pm\sqrt{f_0^2+\varepsilon f_1^2}\right)^{-1};\ -1\right).$$

При $\varepsilon = 1$ прямая всегда пересекает абсолют q в двух действительных точках. При $\varepsilon = -1$ пересечение m' с q будет в двух действительных точках, если $f_0^2 > f_1^2$, и в двух мнимых точках, если $f_0^2 < f_1^2$.

Проекции x'', y'' , z'' точек A_1, A_2, A_1+A_2 из

3 Зак. 3728

полюса P на плоскость π имеют координаты:

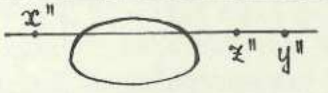
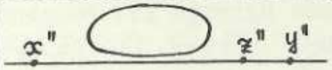
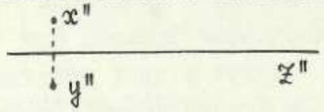
$$x''(-f_0;\ f_1^{-1}(2f_0^2+\varepsilon f_1^2);\ \varepsilon f_1;\ f_0),$$

$$y''(f_0;\ \varepsilon f_1;\ f_1^{-1}(2f_0^2+\varepsilon f_1^2);\ -f_0),\quad z''(0;1;1;0).$$

Поляры точек x'', y'' пересекают абсолют q в двух действительных точках и потому являются внешними по отношению к q. Поляра точки z'' пересекает абсолют q в точках с координатами:

$$\left(f_0^{-1}\left(-f_1\pm\sqrt{f_1^2+\varepsilon f_0^2}\right);\ 1;\ -1;\ \varepsilon f_0\left(-f_1\pm\sqrt{f_1^2+\varepsilon f_0^2}\right)\right).$$

При $\varepsilon=1$ точка z'' лежит вне абсолюта q. При $\varepsilon=-1$ точка z'' лежит вне абсолюта q, если $f_0^2<f_1^2$, и внутри q, если $f_0^2>f_1^2$. В случае $\varepsilon=-1$ и $f_0^2=f_1^2$ мы вновь приходим к особой ткани типа Γ_2. Таким образом, для ткани W_m' имеем:

ε	Условия на f_0, f_1	Плоские интерпретации	Тип ткани W_m'
$\varepsilon=1$			Γ_{13}'
$\varepsilon=-1$	$f_0^2<f_1^2$		Γ_{11}'
$\varepsilon=-1$	$f_0^2>f_1^2$		Γ_{12}'
$\varepsilon=-1$	$f_0^2=f_1^2$		Γ_2

Сравнивая плоские интерпретации тканей W_m и

W_m', видим, что ткани типов Γ_{13} и Γ_2 полярны самим себе, ткани типов Γ_{11} и Γ_{12} взаимно полярны друг другу.

Список литературы

1. И в а н о в А.Д. Об интерпретации четырехмерных тканей Боля в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Геометрия однородных пространств.М.,1973,с.42-57.(МГПИ им.В.И.Ленина).

2. И в а н о в А.Д. Четырехмерные ткани Боля и плоские геометрии Кэли-Клейна.-Тезисы докл.IУ Прибалт.геомет.конф. Тарту,1973,с.44-46.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Л.Г.Корсакова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В P_3

В работе [1] рассматривался подкласс расслояемых пар (C_1, C_2) конгруэнций коник – так называемая пара B. В данной заметке доказывается, что можно ослабить условия, выделяющие пары B.

Рассмотрим в пространстве P_3 расслояемую пару (C_1, C_2) [1] конгруэнций коник C_1, C_2, не лежащих в одной плоскости и не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей, описывающих двумерные многообразия. Отнесем пару (C_1, C_2) к подвижному реперу $R = \{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4)$, где вершины A_i $(i, j, k = 1,2;\ i \neq j)$ помещаются в точки пересечения коники C_j с прямой ℓ, A_3 и A_4 – полюсы прямой ℓ относительно коник C_1 и C_2. Уравнения коник C_1 и C_2 относительно репера R и система дифференциальных уравнений пары (C_1, C_2) имеют соответственно вид:

$$(x^3)^2 - (a_1 x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{1}$$

$$(x^4)^2 - (a_2 x^2)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \\ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \\ da_i = a_i(\omega_i^i - \omega_{i+2}^{i+2}) = A_i^k\omega_k, \quad \Omega_i = b_i^k\omega_k \end{gathered} \tag{3}$$

(по i, j не суммировать!).

где ω_α^β -компоненты инфинитезимальных перемещений репера R и $\omega_i \overset{def}{=} \omega_i^4$, $\Omega_i \overset{def}{=} \omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_{i+2}^{i+2}$.

Анализируя систему квадратичных уравнений, определяющих расслояемую пару (C_1, C_2) [1, с.211-212], мы приходим к уравнениям

$$a_1 m = 0, \quad a_2 m = 0, \tag{4}$$

где $m^2 = \Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{21}\Gamma_3^{12}$,

откуда следует, что многообразие расслояемых пар (C_1, C_2) разбивается на два типа: многообразия, для которых $m \neq 0$, и многообразия, для которых $m = 0$. Если $m \neq 0$, то из уравнений (4) получим, что $a_1 = a_2 = 0$, т.е. в этом случае коники пересекаются в точках A_i. Расслояемые пары конгруэнций коник такого типа назовем парами M_0.

Случай, когда $m = 0$, т.е. когда коники не имеют пару общих точек, полностью рассмотрен в [2].

Как известно [1, с.212], расслояемая пара (C_1, C_2) называется парой B, если: 1) точки A_3 и A_4 являются характеристическими точками плоскостей коник C_1 и C_2; 2) касательные плоскости к поверхностям (A_i) инцидентны прямой A_3A_4.

Т е о р е м а. Если полюсы A_3 и A_4 прямой A_1A_2 относительно коник C_1 и C_2 описывают поверхности, касающиеся плоскостей соответствующих коник, то пара M_0 является парой B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что

$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0,$$

причем выполняются следующие квадратичные уравнения:

$$\begin{gathered} \omega_3^i \wedge \omega_j^i = 0, \quad \omega_4^i \wedge \omega_j^i = 0, \\ \omega_3^1 \wedge \omega_1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2 = 0, \quad \omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \\ \Omega_1 \wedge \omega_3^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 - \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 = 0, \\ \Omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad \omega_i^3 \wedge \omega_3^j + \omega_i \wedge \omega_4^j = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^1 = 0, \quad \Omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_4^1 \wedge \omega_1^2 = 0,$$

$$2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 = 0.$$

Поскольку для пар M_0 выполняется условие

$$m \neq 0,$$

то формы ω_3^1 и ω_3^2 можно принять в качестве базисных линейно независимых. Обозначим

$$\omega_3^1 = \vartheta_1, \quad \omega_3^2 = \vartheta_2.$$

Считая, что

$$\omega_1^2 \, \omega_2^1 \neq 0, \tag{6}$$

осуществим переход к новому базису ϑ_i:

$$\omega_i^j = \lambda_j \vartheta_j, \quad \omega_4^1 = \gamma \vartheta_1, \quad \gamma \omega_4^2 = \vartheta_2, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0,$$

$$\omega_1 = -k\gamma\omega_4^1 + b\vartheta_2, \quad \omega_2 = b\vartheta_1 + c\vartheta_2, \quad \omega_1^3 = k\omega_4^1 + \ell\omega_4^2, \tag{7}$$

$$\omega_2^3 = \ell\omega_4^1 - c\gamma\vartheta_2, \quad \Omega_1 = -(\lambda_2\vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_2), \quad \gamma^2\Omega_2 = -(\lambda_2\gamma^3\omega_4^1 + \lambda_1\vartheta_2),$$

причем

$$2\gamma - (b + \ell)(1 + \gamma^2) = 0. \tag{8}$$

Частичное продолжение системы (7) дает следующее уравнение Пфаффа:

$$d\gamma = \frac{3}{2}(1 - \gamma^2)(\lambda_2\omega_4^1 + \lambda_1\omega_4^2). \tag{9}$$

Замыкая и продолжая уравнения

$$\omega_1^2 = \lambda_2\vartheta_2, \quad \omega_2^1 = \lambda_1\vartheta_1,$$

имеем:

$$d\lambda_1 = L\vartheta_1 - \lambda_1(\omega_3^3 - \omega_2^2) - (\lambda_1)^2\vartheta_2, \tag{10}$$

$$d\lambda_2 = F\vartheta_2 - \lambda_2(\omega_3^3 - \omega_1^1) - (\lambda_2)^2\vartheta_1. \tag{11}$$

Замыкая уравнение (9) и уравнения

$$\Omega_1 = -(\lambda_2\vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_2), \quad \gamma^2\Omega_2 = -(\lambda_2\gamma^3\omega_4^1 + \lambda_1\vartheta_2),$$

получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &L - F\gamma^2 - 2\lambda_1\lambda_2(1 - \gamma^2) = 0, \\ &\gamma(L - F) + (1 - \gamma^2)(b - 3\ell) = 0, \\ &L - F\gamma^4 + (1 - \gamma^2)[\gamma(3b - \ell) - 2\lambda_1\lambda_2(1 + \gamma^2)] = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Из анализа системы (I2) следует, что возможны два и только два случая:

$$\text{I}. \quad 1 - \gamma^2 = 0,$$

$$\text{II}. \quad 1 - \gamma^2 \neq 0.$$

Разберем в отдельности оба случая.

I. $\gamma = \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 1$.

Продолженная система (7),(8) примет вид:

$$\begin{aligned} &\omega_i^j = \lambda_j\vartheta_j, \quad \omega_4^i = \varepsilon\vartheta_i, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \\ &\omega_1 = -k\vartheta_1 + b\vartheta_2, \quad \omega_2 = b\vartheta_1 + c\vartheta_2, \quad \omega_i^3 = \vartheta_j - \varepsilon\omega_i, \\ &\Omega_1 = -(\lambda_2\vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_2), \quad \Omega_2 = \Omega_1, \\ &d\lambda_1 = L\vartheta_1 - \lambda_1(\omega_3^3 - \omega_2^2) - (\lambda_1)^2\vartheta_2, \\ &d\lambda_2 = L\vartheta_2 - \lambda_2(\omega_3^3 - \omega_1^1) - (\lambda_2)^2\vartheta_1. \end{aligned} \tag{13}$$

$$dL = (1 - 4L)(\lambda_2\vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_2). \tag{14}$$

Уравнение (14) – вполне интегрируемое. Замыкая, наконец, уравнения

$$\omega_i^3 = \vartheta_j - \varepsilon\omega_i,$$

мы приходим к условиям

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

которые противоречат (6).

Рассмотрим случай II.

II. $1-\gamma^2 \neq 0$.

Тогда из уравнений (12) и (8) имеем:

$$b=\ell, \quad \ell(1+\gamma^2)=\gamma, \tag{15}$$

$$d\lambda_1 = 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}\right)\vartheta_1 - \lambda_1(\omega_3^3-\omega_2^2) - (\lambda_1)^2\vartheta_2, \tag{16}$$

$$d\lambda_2 = 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{1+\gamma^2}\right)\vartheta_2 - \lambda_2(\omega_3^3-\omega_1^1) - (\lambda_2)^2\vartheta_1. \tag{17}$$

Осуществляя последовательные замыкания системы (I6), (I7), получим соотношения

$$\lambda_2=0, \quad \lambda_1=0,$$

противоречащие (6).

Итак, не существует пар M_0, в которых точки A_3 и A_4 являются характеристическими точками плоскостей коник C_1 и C_2, а прямая A_3A_4 не инцидентна касательным плоскостям к поверхностям (A_i). Следовательно, если A_3 и A_4 - характеристические точки плоскостей коник C_1 и C_2, то пара M_0 является парой B. Теорема доказана.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.- Тр.геометрич.семинара .М., ВИНИТИ, 3, I97I, с. I93-220.

2. К о р с а к о в а Л.Г. Расслояемые пары конгруэнций коник в P_3 -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, I976, с.46-53.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. IO 1979

УДК 513.73

М.В.К р е т о в

КОМПЛЕКСЫ ЭЛЛИПСОИДОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассматриваются комплексы K_3 эллипсоидов. Найден основной геометрический объект [1] комплекса K_3. Показано, что центр эллипсоида $\tilde{Q}$ является его характеристической точкой [2]. Доказано существование инвариантной поверхности четвертого порядка, ассоциированной с комплексом K_3, которая содержит характеристическое многообразие эллипсоида. Рассмотрен специальный класс комплексов K_3.

§I. Основной геометрический объект комплекса K_3

Отнесем комплекс K_3 эллипсоидов к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где A -центр эллипсоида $\tilde{Q}$. Деривационные формулы репера R запишутся в виде

$$d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i=\omega_i^j\bar{e}_j \quad (i,j,k=1,2,3), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j. \tag{1.2}$$

Уравнение эллипсоида $\tilde{Q}$ имеет вид

$$F\equiv a_{ij}x^ix^j-1=0. \tag{1.3}$$

Пусть векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ направлены по тройке сопряженных диаметров эллипсоида, причем концы их лежат на эллипсоиде. Тогда уравнение эллипсоида $\tilde{Q}$ запишется в виде

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0 . \qquad (1.4)$$

Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, а символом π_i^j значения форм ω_i^j при фиксированных первичных параметрах. Тогда из соотношений $\delta \bar{A} = 0$, $\delta F = \lambda F$ будем иметь:

$$\pi^1 = \pi^2 = \pi^3 = 0 , \quad \pi_1^1 = \pi_2^2 = \pi_3^3 = 0 ,$$
$$\pi_1^2 + \pi_2^1 = 0 , \quad \pi_3^1 + \pi_1^3 = 0 , \quad \pi_3^2 + \pi_2^3 = 0 . \qquad (1.5)$$

Из формул (1.5) следует, что структурными формами эллипсоида $\widetilde{Q}$ являются формы Пфаффа: ω^i, ω_i^i (по i не суммировать!).

Рассмотрим общий случай, когда многообразие центров эллипсоидов трехмерное, т.е.

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0 . \qquad (1.6)$$

Принимая формы ω^i за независимые первичные, запишем систему уравнений Пфаффа комплекса K_3 в виде

$$\omega_i^i = a_{ik}\, \omega^k , \quad \omega_i^{i+1} + \omega_{i+1}^i = b_{ik}\, \omega^k , \qquad (1.7)$$

где

$$\omega_{i+3}^{j+3} \overset{def}{=} \omega_i^j .$$

Замыкаем систему (1.7), получаем

$$\Delta a_{ik} \wedge \omega^k = 0 , \quad \Delta b_{ik} \wedge \omega^k = 0 , \qquad (1.8)$$

где

$$\Delta a_{ik} = d a_{ik} - a_{ij}\, \omega_k^j - b_{ik}\, \omega_i^{i+1} - b_{i+2,k}\, \omega_i^{i+2} ,$$
$$\Delta b_{ik} = d b_{ik} - b_{ij}\, \omega_k^j - b_{i+1,k}\, \omega_i^{i+2} - b_{i+2,k}\, \omega_{i+1}^{i+2} + \qquad (1.9)$$
$$+ a_{ik}\, \omega_i^{i+1} - a_{i+1,k}\, \omega_i^{i+1} - a_{ik}\, \omega_{i+1}^i + a_{i+1,k}\, \omega_{i+1}^i .$$

Из формул (1.9) следует, что

$$\delta a_{ik} = a_{ij}\, \pi_k^j + b_{ik}\, \pi_i^{i+1} + b_{i+2,k}\, \pi_i^{i+2} ,$$

$$\delta b_{ik} = b_{ij}\, \pi_k^j + b_{i+1,k}\, \pi_i^{i+2} + b_{i+2,k}\, \pi_{i+1}^{i+2} -$$
$$- a_{ik}\, \pi_i^{i+1} + a_{i+1,k}\, \pi_i^{i+1} + a_{ik}\, \pi_{i+1}^i - a_{i+1,k}\, \pi_{i+1}^i . \qquad (1.10)$$

Анализ формул (1.10) позволяет утверждать, что геометрический объект $\Gamma = \{a_{ij}, b_{ij}\}$ является основным геометрическим объектом комплекса K_3.

§ 2. Характеристическое многообразие эллипсоида $\widetilde{Q}$, принадлежащего комплексу K_3

Т е о р е м а 2.1. Центр эллипсоида $\widetilde{Q}$ является его характеристической точкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\frac{1}{2}\, dF = F_k\, \omega^k , \qquad (2.1)$$

где

$$F_k = a_{1k} (x^1)^2 + a_{2k} (x^2)^2 + a_{3k} (x^3)^2 +$$
$$+ b_{1k}\, x^1 x^2 + b_{2k}\, x^2 x^3 + b_{3k}\, x^1 x^3 + x^k . \qquad (2.2)$$

Характеристическое многообразие эллипсоида $\widetilde{Q}$ задается следующей системой уравнений:

$$F_1 = 0 , \quad F_2 = 0 , \quad F_3 = 0 . \qquad (2.3)$$

Из системы (2.3) и формул (2.2) следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2.2. Существует инвариантная поверхность Φ четвертого порядка, ассоциированная с комплексом K_3, содержащая характеристическое многообразие эллипсоида $\widetilde{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим поверхность Φ четвертого порядка, определяемую уравнением:

$$\widetilde{\Phi} \equiv F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0 . \qquad (2.4)$$

Используя формулы (1.5) и (1.10), находим

$$\delta F_1 = \pi_1^2 F_2 + \pi_1^3 F_3 ,$$

$$\delta F_2 = \pi_2^1 F_1 + \pi_2^3 F_3,$$
$$\delta F_3 = \pi_3^1 F_1 + \pi_3^2 F_2. \tag{2.5}$$

Откуда $\delta\widetilde{\Phi} = 0$. Таким образом, поверхность Φ является инвариантной.

Так как равенство $\widetilde{\Phi} = 0$ является следствием системы уравнений (2.3), то поверхность Φ содержит характеристическое многообразие эллипсоида $\widetilde{Q}$. Теорема доказана.

§ 3. Комплексы K_3^o

Определение. Комплекс эллипсоидов K_3, в котором на квадрике $\widetilde{Q}$ имеются, по крайней мере, три характеристические точки A_i, которые не лежат на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, называется комплексом K_3^o, если прямая, проходящая через центр и одну из точек A_i, описывает цилиндрическую поверхность.

Теорема 3.I. Комплекс K_3^o существует и определяется с произволом трех функций двух аргументов.

Доказательство. Пусть цилиндрическую поверхность описывает прямая (AA_1). Тогда специализируем репер R таким образом, чтобы концы векторов $\overline{e}_i$ совпадали соответственно с характеристическими точками A_i. Такой репер будет каноническим. Из определения комплекса K_3^o следует, что

$$a_{ik} = -1, \tag{3.1}$$

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0. \tag{3.2}$$

Система уравнений Пфаффа комплекса K_3^o запишется в виде

$$\omega_i^i = -\omega^1 - \omega^2 - \omega^3, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \tag{3.3}$$

$$\omega_i^j = b_{ik}^j \omega^k, \text{ где } \quad i \neq j, \ i \neq 1. \tag{3.4}$$

Замыкая уравнения (3.3), получим следующие соотношения:

$$\begin{gathered} b_{21}^1 + b_{21}^3 = 0, \\ b_{32}^1 + b_{32}^2 = b_{23}^1 + b_{23}^3, \\ b_{31}^1 + b_{31}^2 = 0, \\ b_{22}^3 \cdot b_{31}^2 = b_{21}^3 \cdot b_{32}^2, \\ b_{23}^3 \cdot b_{32}^2 = b_{22}^3 \cdot b_{33}^2, \\ b_{23}^3 \cdot b_{31}^2 = b_{21}^3 \cdot b_{33}^2. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Учитывая условия (3.5), получим систему уравнений Пфаффа комплекса K_3^o в виде

$$\begin{gathered} \omega_i^i = -\omega^1 - \omega^2 - \omega^3, \quad \omega_1^2 = 0, \ \omega_1^3 = 0, \\ \omega_2^1 = -b_{21}^3\omega^1 + b_{22}^1\omega^2 + b_{23}^1\omega^3, \\ \omega_3^1 = -\lambda b_{21}^3\omega^1 + (b_{23}^1 + b_{23}^3 - \lambda b_{22}^3)\omega^2 + b_{33}^1\omega^3, \\ \omega_2^3 = b_{2k}^3\omega^k, \\ \omega_3^2 = \lambda\omega_2^3. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Чистое замыкание [3] системы (3.6) имеет вид:

$$\begin{gathered} -db_{21}^3\wedge\omega^1 + db_{22}^1\wedge\omega^2 + db_{23}^1\wedge\omega^3 + c_{11}\omega^2\wedge\omega^3 + \\ + c_{12}\omega^1\wedge\omega^3 + c_{13}\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \\ (-b_{21}^3 d\lambda + \lambda db_{21}^3)\wedge\omega^1 + (db_{23}^1 + db_{23}^3 - b_{22}^3 d\lambda - \\ -\lambda db_{22}^3)\wedge\omega^2 + db_{33}^1\wedge\omega^3 + c_{21}\omega^2\wedge\omega^3 + c_{22}\omega^1\wedge\omega^3 + \\ + c_{23}\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \qquad d\lambda\wedge\omega_2^3 = 0, \\ db_{21}^3\wedge\omega^1 + db_{22}^3\wedge\omega^2 + db_{23}^3\wedge\omega^3 + c_{31}\omega^2\wedge\omega^3 + c_{32}\omega^1\wedge\omega^3 + c_{33}\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \end{gathered} \tag{3.7}$$

где

$$c_{11} = 2 b^1_{23} b^3_{23} + b^3_{21} b^3_{23} + (b^3_{23})^2 - b^3_{22} b^1_{33} - \lambda b^3_{21} b^3_{22} -$$

$$- \lambda b^1_{22} b^3_{22} - \lambda b^3_{23} b^3_{22} - b^1_{22} + b^1_{23},$$

$$c_{12} = b^3_{21} + b^1_{23} - b^3_{21} b^1_{33} - \lambda (b^3_{21})^2 - \lambda b^1_{22} b^3_{21} - \lambda b^3_{23} b^3_{21},$$

$$c_{13} = b^3_{21} + b^1_{22} - b^3_{21} \cdot b^1_{23} - b^3_{21} \cdot b^3_{23} - (b^3_{21})^2 - b^1_{23} \cdot b^3_{21},$$

$$c_{21} = \lambda b^3_{22} + \lambda b^3_{21} b^1_{23} + \lambda b^3_{21} b^3_{23} + \lambda^2 (b^3_{22})^2 + b^1_{33} b^3_{23} +$$

$$+ b^3_{23} b^1_{22} + b^1_{33} - \lambda b^3_{21} b^1_{23} - \lambda^2 b^3_{21} b^3_{22} - \lambda b^1_{23} b^3_{22} -$$

$$- \lambda b^3_{23} b^3_{22} - b^3_{22} b^1_{23} - b^1_{23} - b^3_{23},$$

$$c_{22} = \lambda^2 b^3_{22} b^3_{21} + \lambda b^3_{21} + b^1_{33} - \lambda^2 (b^3_{21})^2 - \lambda b^1_{23} b^3_{21} -$$

$$- \lambda b^3_{23} b^3_{21} - b^3_{21} b^1_{23} - b^3_{23} b^3_{21},$$

$$c_{23} = \lambda b^3_{21} + b^3_{23} + b^1_{23} - \lambda (b^3_{21})^2 - \lambda b^3_{22} - b^3_{21} b^1_{22} - b^1_{33} b^3_{21} - b^3_{21} b^3_{22},$$

$$c_{31} = \lambda b^3_{21} b^3_{22} + (b^3_{23})^2 + b^3_{23} - \lambda (b^3_{22})^2 - b^3_{21} b^3_{23} - b^3_{22},$$

$$c_{32} = \lambda (b^3_{21})^2 + b^3_{23} - \lambda b^3_{22} b^3_{21} - b^3_{21},$$

$$c_{33} = (b^3_{21})^2 + b^3_{22} - b^3_{23} b^3_{21} - b^3_{21}.$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что

$$S_1 = 4, \quad S_2 = 3, \quad S_3 = 0, \quad N = Q = 10. \tag{3.8}$$

Система (3.6), (3.7) - в инволюции и определяет комплексы K^0_3 с произволом трех функций двух аргументов. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.2. Если индикатриса векторов $\bar{e}_2$ является поверхностью с касательной плоскостью, коллинеарной векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, то индикатриса векторов $\bar{e}_3$ тоже является поверхностью с касательной плоскостью, коллинеарной векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_3$. Справедливо также обратное утверждение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$d\bar{e}_2 = \omega^1_2 \bar{e}_1 + \omega^2_2 \bar{e}_2 + \omega^3_2 \bar{e}_3, \tag{3.9}$$

$$d\bar{e}_3 = \omega^1_3 \bar{e}_1 + \omega^2_3 \bar{e}_2 + \omega^3_3 \bar{e}_3. \tag{3.10}$$

Если $\omega^3_2 = 0$, то из последнего уравнения системы (3.6) следует, что $\omega^2_3 = 0$, т.е.

$$d\bar{e}_3 = \omega^1_3 \bar{e}_1 + \omega^3_3 \bar{e}_3. \tag{3.11}$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.- Тр.Моск.матем.о -ва, 1953, т.2, с.275-382.

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ, 1974, 6, с.113-133.

3. М а л а х о в с к и й В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Вып.10 1979

УДК 513.73

А.С.Лазарев

О ЧАСТИЧНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В E_n.

1.Поверхность V_p евклидова пространства E_n отнесем к подвижному реперу $\{x,\vec e_i,\vec e_\alpha\}$,где $x\in V_p$,единичные векторы $\vec e_i$ $(i,j,k=1,2,\dots,p)$ параллельны касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности V_p в ее точке x ,а векторы $\vec e_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=p+1,\dots,n)$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_{n-p}(x)$ касательной плоскости $T_p(x)$. Деривационные формулы подвижного репера имеют вид:

$$d\vec x=\omega^i\vec e_i\,,$$

$$d\vec e_i=\omega_i^j\vec e_j+\omega_i^\alpha\vec e_\alpha\,,$$

$$d\vec e_\alpha=\omega_\alpha^i\vec e_i+\omega_\alpha^\beta\vec e_\beta\,.$$

Имеем $\omega^\alpha=0$,откуда получим $\omega_i^\alpha=b^\alpha_{ij}\omega^j$, $b^\alpha_{ij}=b^\alpha_{ji}$. Здесь b^α_{ij} -второй основной тензор поверхности V_p .Дифференцирование тождеств $\vec e_m\vec e_\alpha=\delta_{m\alpha}$ $(m=1,2,\dots,n)$ приводит к соотношениям $\omega^\alpha_\beta+\omega^\beta_\alpha=0$, $\omega_i^\alpha+\gamma_{ij}\,\omega^j_\alpha=0$,где γ_{ij} -метрический тензор поверхности V_p .

Пусть в нормальном расслоении задано гладкое поле вектора $\vec{xy}$,тогда точка y описывает гладкую поверхность (y). Пусть $dim(y)=p$,тогда отображение $f:V_p\to(y)\,|\,x\to y,\forall x\in V_p$ полного ранга.Поверхность (y) может быть задана уравнением

$$\vec y=\vec x+y\vec e_n\,, \tag{1}$$

где $\vec e_n\parallel\vec{xy}$.Условие инвариантности вектора $\vec{xy}$ имеет вид

$$\delta y=0,\ \pi^i_n=\omega^i_n\big|_{\omega^i=0}=0\,,\ \ \pi^\alpha_n=\omega^\alpha_n\big|_{\omega^i=0}=0\,.$$

Это означает,что $y=y(x)$,а формы ω^i_n, ω^α_n главные. Пусть

$$\omega^\alpha_n=c^\alpha_{ni}\,\omega^i. \tag{2}$$

Дифференцирование тождества (2) и разрешение по лемме Картана полученных квадратичных уравнений дает выражение

$$dc^\beta_{nj}+c^\alpha_{nj}\,\omega^\beta_\alpha-c^\beta_{ni}\,\omega^i_j+\gamma^{il}\,b^n_{lk}\,b^\beta_{ij}\,\omega^k=c^\beta_{njk}\,\omega^k. \tag{3}$$

При дифференцировании по вторичным параметрам имеем

$$\theta^\beta_j=\delta^\beta_{nj}+c^\alpha_{nj}\,\pi^\beta_\alpha-c^\beta_{ni}\,\pi^i_j=0\,,$$

причем система уравнений Пфаффа $\theta^\beta_j=0$ вполне интегрируема.Следовательно,величины c^β_{nj} образуют тензор.

О п р е д е л е н и е. Поверхности V_p и (y) назовем частично параллельными,если направляющие подпространства $T^o_p(x)$ и $T^o_p(y)$ их касательных плоскостей $T_p(x)$ и $T_p(y)$ имеют непустое пересечение T^o .Если $dim\,T^o=\ell$,то поверхности V_p и (y) будем называть $\frac{\ell}{p}$ -параллельными. Число $\frac{\ell}{p}$ назовем степенью параллельности этих поверхностей.

В случае $\ell=p$ поверхности называются просто параллельными [1]. В [2] имеется аналогичное определение частичной параллельности плоскостей многомерного пространства.

Вычислим

$$d\vec y=\{(\delta^i_k-y\gamma^{ij}b^n_{jk})\vec e_i+y\,c^\alpha_{nk}\vec e_\alpha+y_k\vec e_n\}\omega^k, \tag{4}$$

где $dy=y_k\omega^k$.Векторы

$$\vec a_k=(\delta^i_k-y\gamma^{ij}b^n_{jk})\vec e_i+y\,c^\alpha_{nk}\vec e_\alpha+y_k\vec e_n$$

4 Зак. 3728

линейно независимы и являются базисом направляющего подпространства $T^\circ_p(y)$. Так как $\dim\left(T^\circ_p(x)\cap T^\circ_p(y)\right) = 2p - \dim\left(T^\circ_p(x)\cup T^\circ_p(y)\right)$, то

$$\dim\left(T^\circ_p(x)\cap T^\circ_p(y)\right) = p - \operatorname{rang}\| C^\alpha_{nk},\ y_k \|.$$

Следовательно, справедлива следующая

Т е о р е м а I. Поверхности V_p и $(y)\frac{\ell}{p}$-параллельны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang}\| C^\alpha_{nk},\ y_k \| = p-\ell. \qquad (5)$$

Перенумеруем векторы $\vec{e}_i$ так, чтобы последние $p-\ell$ строк указанной матрицы были линейно независимыми, тогда найдутся функции $\lambda^{i''}_{i'}$ $(i', j', k' = 1, 2, \dots, \ell;\ i'', j'', k'' = \ell+1, \dots, p)$ такие, что

$$C^\alpha_{ni'} = \lambda^{i''}_{i'} C^\alpha_{ni''},\quad y_{i'} = \lambda^{i''}_{i'} y_{i''}.$$

Вычислим

$$dy = y_{i''}(\omega^{i''} + \lambda^{i''}_{i'}\omega^{i'}),\quad \omega^\alpha_n = C^\alpha_{ni''}(\omega^{i''} + \lambda^{i''}_{i'}\omega^{i'}).$$

Преобразуем векторы $\vec{e}_i$ подвижного репера так, что $\vec{e}_i = \lambda^j_i \vec{e}_j$, где λ^j_i образуют матрицу

$$\|\lambda^j_i\| = \left\| \begin{array}{c|c} \delta^{j'}_{i'} & \lambda^{i''}_{i'} \\ \hline 0 & \delta^{i''}_{j''} \end{array} \right\|.$$

В новом репере имеем $\tilde{\omega}^{i'} = \omega^{i'}$, $\tilde{\omega}^{i''} = \omega^{i''} + \lambda^{i''}_{i'}\omega^{i'}$,

$$\omega^\alpha_n = C^\alpha_{ni''}\omega^{i''},\quad C^\alpha_{ni'} = 0,\quad dy = y_{k''}\tilde{\omega}^{k''},\quad y_{k'} = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. Поверхности V_p и (y) $\frac{\ell}{p}$-параллельны тогда и только тогда, когда на поверхности V_p существует подвижной репер, относительно которого $C^\alpha_{ni'} = 0$, $y_{k'} = 0$.

Геометрически тождество $y_{k'} = 0$ означает, что $y = const$ при смещении x вдоль любой интегральной кривой распределения $\Delta_\ell : x \to T^\circ_\ell(x), \forall x \in V_p$, где $T^\circ_\ell(x)$ -векторное пространство с базисом $\{\vec{e}_{i'}\}$. Зафиксируем на поверхности V_p сеть так, что векторы $\vec{e}_{i'}$, касательные к линиям $\omega^{i'}$, в каждой точке $x \in V_p$ образуют базис векторного пространства $T^\circ_\ell(x)$. Тогда формы $\omega^{i''}_{i'}$ главные. Пусть $\omega^{i''}_{i'} = a^{i''}_{i'j}\omega^j$.

Т е о р е м а 3. Распределение Δ_ℓ вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда

$$\gamma^{i\ell}\left(b^n_{\ell j'} b^\alpha_{ik'} - b^n_{\ell k'} b^\alpha_{ij'}\right) = 0. \qquad (7)$$

Действительно, из формул (3), используя условия (6), получим

$$C^\alpha_{ni''}\left(a^{i''}_{j'k'} - a^{i''}_{k'j'}\right) = \gamma^{i\ell}\left(b^n_{\ell k'} b^\alpha_{ij'} - b^n_{\ell j'} b^\alpha_{ik'}\right). \qquad (8)$$

Продолжение тождества $dy = y_{k''}\omega^{k''}$ дает выражение

$$y_{i''}\left(a^{i''}_{j'k'} - a^{i''}_{k'j'}\right) = 0.$$

Так как $\operatorname{rang}\|C^\alpha_{ni''}, y_{i''}\| = p-\ell$, то $a^{i''}_{j'k'} - a^{i''}_{k'j'} = 0$. Из последних соотношений следует утверждение теоремы.

Распределение Δ_ℓ назовем распределением, порождающим $\frac{\ell}{p}$-параллельность. Геометрическая характеристика распределения Δ_ℓ следует из равенства (4), откуда видно, что

$$\Delta_\ell(x) = \{ d\vec{x} \mid d\vec{y} \,\|\, T_p(x) \}.$$

Можно показать, что вектор $\overrightarrow{xy}$ вдоль любой интегральной кривой распределения Δ_ℓ переносится параллельно.

2. Рассмотрим задачу, приводящую к частичной параллельности поверхностей. Пусть V_p -произвольная поверхность, а σ -семейство одномерных нормалей поверхности V_p. Как множество точек σ есть $(p+1)$-мерная поверхность, уравнение которой имеет вид $\vec{t}=\vec{x}+t\vec{e}_n$, где t -независимое переменное, а вектор $\vec{e}_n$ подвижного репера параллелен в каждой точке $x\in V_p$, одномерной нормали семейства σ, проходящей через эту точку. Имеем:

$$d\vec{t}=a_k\omega^k+dt\vec{e}_n\,,\ \text{где}$$

$$\vec{a}_k=(\delta^i_k+t\gamma^{ij}b^n_{jk})\vec{e}_i+tc^\alpha_{nk}\vec{e}_\alpha\,.$$

Возьмем произвольную линию ω^{k_0} как-либо фиксированной координатной сети. Множество точек $\sigma^2_{k_0}$ одномерных нормалей, проходящих через линию ω^{k_0}, является двумерной линейчатой поверхностью, касательная плоскость в каждой точке которой параллельна векторам $\vec{a}_{k_0}, \vec{e}_n$. Для того, чтобы касательная плоскость к поверхности $\sigma^2_{k_0}$ в каждой точке одномерной нормали была постоянной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\partial\vec{a}_{k_0}/\partial t \parallel \vec{a}_{k_0}$, которое равносильно соотношениям

$$\gamma^{\tilde{\imath}j}b^n_{jk_0}=0\,,\quad c^\alpha_{nk_0}=0\quad(\tilde{\imath}=1,2,\dots,k_0-1,k_0+1,\dots,p).\ (9)$$

Первое из равенств (9) говорит о том, что линия ω^{k_0} включена в состав линий кривизны относительно нормали семейства σ. Второе - условие того, что поверхность V_p допускает $\frac{1}{p}$ -параллельную поверхность (y), а одномерное распределение касательных к линиям семейства ω^{k_0} является порождающим для указанной частичной параллельности. Кроме того, из равенства (4) следует, что при смещении вдоль линии ω^{k_0} $d\vec{y}\parallel d\vec{x}$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы семейство σ одномерных нормалей $(x,\vec{e}_n)$ поверхности V_p расслаивалось ℓ способами на развертывающиеся поверхности, необходимо и достаточно, чтобы поверхность V_p допускала $\frac{\ell}{p}$-параллельную поверхность (y): $\vec{y}=\vec{x}+y\vec{e}_n$, а распределение Δ_ℓ порождающее эту параллельность, содержало ℓ главных направлений тензора b^n_{ij}.

Список литературы

1. А к и в и с М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

2. Ш и р о к о в П.А. Тензорное исчисление. Казань, 1961

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

В. Б. Лазарева

ТРИ-ТКАНИ НА ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ТРИАКСИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть V_2 -поверхность в трехмерном проективном пространстве P_3 и ℓ_i ($i=1,2,3$) - три прямые общего положения в P_3 . Определим локально квазигруппу $q:\ell_1\times\ell_2\to\ell_3$ следующим образом: если $A_i\in\ell_i$, то плоскость $\sigma=[A_1A_2A_3]$ касается V_2 . Цель настоящей работы-изучение свойств квазигруппы q и связанных с ней три-тканей.

I. Трехмерное проективное пространство P_3 с заданными в нем тремя неподвижными прямыми ℓ_i назовем триаксиальным пространством. Рассмотрим в этом пространстве совокупность реперов, три точки A_i которых лежат соответственно на прямых ℓ_i , а плоскость $[A_1A_2A_3]$ не содержит ни одной из прямых ℓ_i . Инфинитезимальное перемещение репера определяется уравнениями

$$dA_\xi=\omega_\xi^\eta A_\eta \quad (\xi,\eta=0,1,2,3). \tag{1}$$

Формы ω_ξ^η удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega_\xi^\eta=\omega_\xi^\zeta\wedge\omega_\zeta^\eta . \tag{2}$$

За счет нормировки координат точек A_ξ получим

$$\sum_{\xi=0}^{3}\omega_\xi^\xi=0. \tag{3}$$

Так как точка A_i описывает прямую ℓ_i , то следует положить

$$\omega_i^j=\lambda_i^j\omega_i^0 . \tag{4}$$

Тогда

$$dA_i=\omega_i^iA_i+\omega_i^0B_i,\quad B_i=A_0+\lambda_i^jA_j+\lambda_i^kA_k . \tag{5}$$

Условия неподвижности прямых ℓ_i имеют вид

$$d\lambda_j^i-\lambda_j^i\omega_0^0-(\lambda_j^i)^2\omega_i^0+\lambda_j^i\omega_i^i-\omega_0^i-\lambda_j^k(\lambda_j^i-\lambda_k^i)\omega_k^0=0, \tag{6}$$

где индексы $i,j,k,$ все различны.

Зафиксируем точки A_i на прямых ℓ_i , т.е. положим $\omega_i^0=0$. Тогда из уравнений (6) получим $\delta\lambda_j^i-\lambda_j^i\pi_0^0+\lambda_j^i\pi_i^i+\pi_0^i=0$, откуда

$$\delta(\lambda_j^i-\lambda_k^i)=(\lambda_j^i-\lambda_k^i)(\pi_0^0-\pi_i^i), \tag{7}$$

где $\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$ - четная подстановка. Из уравнений (7) видно, что величины $\lambda^i=\frac{1}{2}(\lambda_j^i-\lambda_k^i)$ являются относительными инвариантами. Можно показать, что обращение величины λ^i в нуль имеет следующий геометрический смысл:

а) $\lambda^1=0$, $\lambda^2\lambda^3\neq0$, тогда прямые ℓ_2 и ℓ_3 лежат в одной плоскости σ_1 , определяемой точками A_2 , A_3 , $A_0+\lambda_2^1A_1$;

б) $\lambda^3\neq0$, $\lambda^1=\lambda^2=0$, тогда ℓ_3 есть линия пересечения плоскостей, в которых лежат ℓ_1 и ℓ_2 ;

в) $\lambda^1=\lambda^2=\lambda^3=0$, тогда прямые ℓ_i проходят через одну точку.

Далее будем предполагать, что ни один из инвариантов λ^i не обращается в нуль.

2. Прямые ℓ_1,ℓ_2 и ℓ_3 определяют в P_3 невырожденную квадрику Q , для которой они служат прямолинейными образующими, принадлежащими одному семейству. Нетрудно подсчитать, что полюс A_0' плоскости $[A_1A_2A_3]$ относительно Q имеет вид

$$A_0'=A_0+\tfrac{1}{2}(\lambda_2^1+\lambda_3^1)A_1+\tfrac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_3^2)A_2+\tfrac{1}{2}(\lambda_1^3+\lambda_2^3)A_3. \tag{8}$$

Поместим вершину A_0 репера в полюс плоскости $[A_1A_2A_3]$. Тогда $\lambda_j^i+\lambda_k^i=0$ и из соотношений $2\lambda^j=\lambda_i^j-\lambda_k^j$ следует, что

$$\lambda_2^1=-\lambda_3^1=\lambda^1,\ \lambda_3^2=-\lambda_1^2=\lambda^2,\ \lambda_1^3=-\lambda_2^3=\lambda^3. \tag{9}$$

Уравнения (4) и (6) теперь примут вид

$$\left.\begin{array}{c}\omega_1^2=-\lambda^2\omega_1^0,\ \omega_1^3=\lambda^3\omega_1^0,\ \omega_2^1=\lambda^1\omega_2^0,\ \omega_2^3=-\lambda^3\omega_2^0, \\ \omega_3^1=-\lambda^1\omega_3^0,\ \omega_3^2=\lambda^2\omega_3^0,\end{array}\right\} \qquad (10)$$

$$\omega_0^i=\lambda^i(\lambda^i\omega_i^0-\lambda^j\omega_j^0-\lambda^k\omega_k^0),\ d\lambda^i=\lambda^i(\omega_0^0-\omega_i^i+\lambda^j\omega_j^0-\lambda^k\omega_k^0), \qquad (11)$$

где $\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$ - четная подстановка.

3. Пусть $q: \ell_1\times\ell_2\to\ell_3$ –локальная дифференцируемая квазигруппа [1], задающая точечное соответствие на прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и V_2 -огибающая семейства плоскостей $\sigma=[A_1A_2A_3]$, $A_i\in\ell_i$. Плоскости, проходящие через фиксированную точку M одной из прямых, например ℓ_1, образуют однопараметрическое семейство σ и касаются V_2 вдоль некоторой кривой. Меняя точку M на ℓ_1, получим однопараметрическое семейство кривых S_1 на V_2. Аналогично получим два других однопараметрических семейства кривых - S_2 и S_3. Таким образом, на V_2 возникает три-ткань $\mathfrak{M}$.

Пусть M -точка касания огибающей V_2 и плоскости $[A_1A_2A_3]$. Положим $M=x^iA_i$, тогда

$dM=dx^iA_i+x^i(\omega_i^0A_0+\omega_i^jA_j)=(dx^i+x^j\omega_j^i)A_i+x^i\omega_i^0A_0$.

Так как $dM\subset[A_1A_2A_3]$, то

$$x^i\omega_i^0=0. \qquad (12)$$

Нормируем точку M условием $M=A_1+A_2+A_3$, тогда уравнение (12) примет вид

$$\omega_1^0+\omega_2^0+\omega_3^0=0. \qquad (13)$$

Уравнение (13) представляет собой дифференциальное уравнение локальной квазигруппы q и три-ткани $\mathfrak{M}$ на поверхности V_2 [2]. Семейство кривых S_i на V_2 определяется уравнением $\omega_i^0=0$, причем эти формы попарно линейно независимы.

4. Дифференцируя уравнение (13), получим

$$\sum_{i=1}^{3}\tilde{\omega}^i\wedge\omega_i^0=0, \qquad (14)$$

где

$$\tilde{\omega}^i=\omega_1^i+\omega_2^i+\omega_3^i,\ i=1,2,3 \qquad (15)$$

Из уравнений (14) в силу (13) следует, что формы $\tilde{\omega}^i-\tilde{\omega}^j$ -главные. Следовательно, при фиксированных главных параметрах (т.е. при $\omega_i^0=0$) имеем $\tilde{\pi}^i=\tilde{\pi}^j$, а в силу (15) $\tilde{\pi}^i=\pi_i^i$. Положим $\tilde{\pi}^i=\pi$, тогда $\tilde{\pi}^i-\pi=0$ и форма $\tilde{\omega}^i-\omega$ -главная, т.е.

$$\tilde{\omega}^i=\omega+a^i\omega_k^0+b^i\omega_j^0. \qquad (16)$$

Подставляя $\tilde{\omega}^i$ в (14), получим

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3. \qquad (17)$$

Положим в соотношениях (16) $\tilde{\omega}=\omega+\sum_{i=1}^{3}\xi_i\omega_i^0$. Тогда за счет ξ_i и (17) разности a^i-b^i можно привести к нулю. Введем обозначения $\alpha_i=a^i=b^i$. При этом формулы (16) упростятся:

$$\tilde{\omega}^i=\omega-\alpha_i\omega_i^0,\ i=1,2,3 \qquad (18)$$

5. Вычислим второй дифференциал точки M поверхности V_2. Учитывая (15) и (18), получим

$$d^2M=\sum_k[d\tilde{\omega}^k+\sum_i\tilde{\omega}^i\omega_i^k]A_k-\sum_i\alpha_i(\omega_i^0)^2A_0.$$

Квадратичная форма $\varphi=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\omega_i^0)^2$ есть асимптотическая форма поверхности V_2. Если формы $\bar{\omega}_i^0$ и ω_i^0 определяют на V_2 сопряженные направления, то $\alpha_1\bar{\omega}_1^0\omega_1^0+\alpha_2\bar{\omega}_2^0\omega_2^0+\alpha_3\bar{\omega}_3^0\omega_3^0=0$. Направление, сопряженное $\omega_0^i=0$, определяется уравнением

$$\overset{*}{\omega}{}_i^0=\alpha_j\omega_j^0-\alpha_k\omega_k^0=0, \qquad (19)$$

где $\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$ - четная подстановка. Эти уравнения определяют ткань $\mathfrak{M}^*$ на поверхности V_2. При фиксированном i линии $\omega_i^0 = 0$ и $^*\omega_i^0 = 0$ образуют на поверхности V_2 сеть Кенигса, осью которой является прямая ℓ_i .

6. Продифференцировав формы ω_i^0 , получим $d\omega_i^0 = \omega_i^0 \wedge \gamma$, где

$$\gamma = \omega_0^0 - \omega + (\lambda^3 - \lambda^2)\omega_1^0 + (\lambda^1 - \lambda^3)\omega_2^0 + (\lambda^2 - \lambda^1)\omega_3^0 \qquad (20)$$

- форма связности 2 три-ткани $\mathfrak{M}$. Дифференцируя уравнения (18), найдем

$$d\omega = \Delta\alpha_i \wedge \omega_i^0 , \qquad (21)$$

где

$$\Delta\alpha_i = d\alpha_i + \alpha_i\,(\omega_i^i - \omega - \gamma). \qquad (22)$$

Разрешая уравнения (21), получим

$$\Delta\alpha_i = -\beta_i\,\omega_i^0 + \beta\,\omega_{i-1}^0 \quad (i, i-1 = 1,2,3). \qquad (23)$$

Заметим, что величины α_i являются относительными инвариантами.

Вычислим кривизну три-ткани $\mathfrak{M}$. Для этого продифференцируем внешним образом форму связности. Имеем:

$$\mathcal{D}\gamma = [-\beta + 2(\lambda^1\alpha_1 + \lambda^2\alpha_2 + \lambda^3\alpha_3)] , \qquad (24)$$

где $\Omega = \omega_1^0 \wedge \omega_2^0 = \omega_2^0 \wedge \omega_3^0 = \omega_3^0 \wedge \omega_1^0$ - поверхностный элемент ткани и

$$b = -\beta + 2(\lambda^1\alpha_1 + \lambda^2\alpha_2 + \lambda^3\alpha_3) \qquad (25)$$

-кривизна три-ткани.

7. Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Из уравнений (22) и (21) следует, что $d\omega = 0$, т.е. $\omega = d\varphi$. Уравнения (18) примут вид $\tilde{\omega}^i = d\varphi$. Складывая последние три уравнения (1), получим $dM = d\varphi M$. Следовательно, точка M неподвижна и поверхность V_2 вырождается в точку M , а многообразие касательных плоскостей к V_2 - в связку плоскостей $[A_1 A_2 A_3]$, проходящих через эту точку.

Из уравнений (23) и $\alpha_i = 0$ получаем, что $b = 0$, т.е. ткань, соответствующая рассматриваемой квази-

группе, является шестиугольной. С рассматриваемой квазигруппой связана конфигурация, изображенная на рис.1.

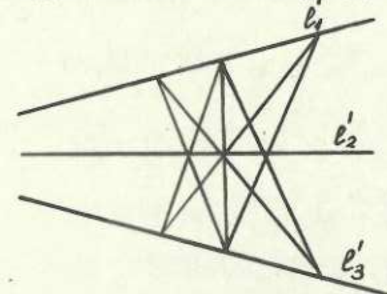


Рис.1

б) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$. Тогда из уравнений (21) имеем $d\omega = 0$ и $\omega = d\varphi$. Складывая последние три уравнения (1) и учитывая (18), получим $dM = d\varphi M - \alpha_3 \omega_3^0 A_3$. Отсюда видно, что точка M описывает кривую V_1 . Из соотношений $dA_3 = \omega_3^3 A_3 + \omega_3^0 B_3$ и $dB_3 = p_3 A_3 + q_3 B_3$ следует, что кривая V_1 лежит в плоскости, проходящей через ℓ_3. Многообразие касательных плоскостей поверхности V_2 вырождается в многообразие касательных плоскостей к кривой V_1 .

в) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$. В этом случае из (19) получаем, что уравнение $\omega_2^0 = 0$ эквивалентно $^*\omega_3^0 = 0$, так что семейства S_2 и S_3 (определяемые уравнениями $\omega_2^0 = 0$ и $\omega_3^0 = 0$) образуют сопряженную сеть. Очевидно и обратное: если указанная сеть сопряженная, то $\alpha_1 = 0$. Итак, имеет место

Теорема. $\alpha_i = 0$ тогда и только тогда, когда семейства линий S_j и S_k , $i \neq j$, $i \neq k$ образуют на сопряженную сеть.

Список литературы

1. Акивис М.А. Локальные дифференцируемые квазигруппы.- В кн.:Исследование по теории квазигрупп и луп. Кишинев,1973.

2. Бляшке В. Введение в геометрию тканей.М.,1959.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

В.С.Малаховский

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается конгруэнция $\mathcal{L}$ невырожденных линейчатых квадрик Q, у которой существуют четыре фокальные поверхности (A_α) ($\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$), описанные вершинами автополярных тензоров третьего рода квадрик $Q \in \mathcal{L}$, причем прямые A_0A_i ($i, j, k = 1, 2$) являются асимптотическими касательными поверхности (A_0) и линии, огибаемые на невырождающихся поверхностях (A_0) и (A_3) пересекающимися прямолинейными образующими квадрик Q конгруэнции, соответствуют друг другу. Доказана теорема существования и исследованы фокальные многообразия таких конгруэнций.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{L}$ к реперу $R=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид [3]

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad , \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 . \tag{3}$$

Обозначим

$$\omega^i = \omega_0^i \ , \ \Omega = \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 . \tag{4}$$

Уравнение квадрики Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{L}$ приводятся соответственно к виду:

$$\mathcal{F} \equiv x^1x^2 - x^0x^3 = 0 , \tag{5}$$

$$\omega_0^3 = 0, \ \omega_3^0 = 0, \ \omega_i^j = 0, \ \omega_i^3 = (1+c)\,\omega^j, \ \omega_3^i = b^i\omega^i,$$

$$\omega_i^0 = (1+m)\,\omega_3^j, \ dc + (1+c)\Omega = 0, \ dm + (1+m)\Omega = 0, \tag{6}$$

$$\Omega = h_k\omega^k .$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Для конгруэнции $\mathcal{L}$ справедливо неравенство:

$$b^1 b^2 (1+c)(1+m) \neq 0 . \tag{7}$$

Замыкая систему (4), получим:

$$\Delta b^i \wedge \omega^i = 0, \ \Delta h_k \wedge \omega^k = 0, \tag{8}$$

$$(b^1 - b^2)(m-c) = 0 , \tag{9}$$

где

$$\Delta b^i = db^i + b^i(\omega_0^0 - \omega_3^3), \ \Delta h_i + h_i(\omega_0^0 - \omega_i^i). \tag{10}$$

Т е о р е м а. Существуют два и только два класса конгруэнций $\mathcal{L}$: конгруэнции $\mathcal{L}_1$ ($b^1 - b^2 = 0$) и конгруэнции $\mathcal{L}_2$ ($m - c = 0$), определяемые каждая с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если

$$b^1 - b^2 = 0 , \tag{11}$$

то

$$\Delta b^1 = \Delta b^2 = 0 , \tag{12}$$

и замыкание системы (6) состоит только из одного квадратичного уравнения $\Delta h_k \wedge \omega^k = 0$. Если $m - c = 0$, то

$$\omega_i^0 = b^i \omega_i^3 , \tag{13}$$

причем замыкание системы (13) удовлетворяется в силу (7). В обоих случаях произвол решения - одна функция двух аргументов. Теорема доказана.

Имеем:

$$d\mathcal{F} = 2\vartheta\mathcal{F} + \Phi_k \omega^k, \tag{14}$$

где

$$\Phi_i = h_i x^1 x^2 + m b^i x^j x^3 + c x^0 x^3,$$

а ϑ -некоторая форма Пфаффа.

Фокальные точки квадрики $Q \in \mathcal{L}$ [1] определяются системой уравнений

$$\mathcal{F} = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0. \tag{15}$$

Следовательно, A_i - сдвоенные фокальные точки. Из (6) непосредственно вытекает, что поверхности (A_i) вырождаются в линии.

Если $c=0$ или $m=0$, то на квадрике Q существует коника, каждая точка которой - фокальная [2]. Если же

$$cm \neq 0, \tag{16}$$

то кроме точек A_α существуют только две фокальные точки квадрики Q, определяемые уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \quad h_1 x^1 + b^1 m x^3 + c x^0 = 0, \\ h_2 x^2 + b^2 m x^3 + c x^0 = 0 . \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Труды геом. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113-133.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, 1976, с.54-60.

3. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана, М.-Л., 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 10 1979

УДК 513.73

А.В. М а х о р к и н

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА ОДНОГО КЛАССА КОМПЛЕКСОВ КВАДРИК В P_3

В работе рассматривается комплекс (трехпараметрическое семейство) невырожденных квадрик трехмерного проективного пространства, такой, что фокальное многообразие квадрики комплекса содержит конику. Доказано, что система дифференциальных уравнений Пфаффа, определяющая комплекс квадрик, вполне интегрируема, и ее решение определяется с произволом девяти постоянных; коники, входящие в фокальное многообразие квадрики комплекса, принадлежат стационарной квадрике.

О п р е д е л е н и е. Комплексом K_s называется трехпараметрическое семейство невырожденных квадрик трехмерного проективного пространства, такое, что фокальное многообразие [1] квадрик семейства содержит конику.

В дальнейшем текущую квадрику комплекса K_s обозначим через Q, а конику, принадлежащую фокальному многообразию квадрики Q, через C.

Рассмотрим комплекс K_s в репере $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0 является полюсом плоскости коники C относительно квадрики Q, а вершины A_1, A_2, A_3 расположены в плоскости коники C так, чтобы репер $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ был автополярным репером для квадрики Q. В таком репере уравнение квадрики Q будет иметь вид:

$$Q \equiv a_{00}(x^0)^2 + a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 = 0, \quad (1)$$

причем

$$a_{00}\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33} = -1. \quad (2)$$

Положим,

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i \quad (i, j, k, \ldots = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Так как формы

$$da_{11} - a_{11}\omega_1^1, \ da_{22} - a_{22}\omega_2^2, \ da_{33} - a_{33}\omega_3^3 \quad (4)$$

являются главными, то полагая

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1, \quad (5)$$

из (2) получим $a_{00} = 1$. При такой канонизации и из условия

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 \quad (6)$$

следует, что формы $\omega_0^0, \omega_1^1, \omega_2^2, \omega_3^3$ стали главными.

Коника C определяется уравнением

$$C \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad x^0 = 0, \quad (7)$$

тогда из определения комплекса K_s

$$dQ\Big|_{x^0=0} = \lambda C, \quad (8)$$

откуда получаем:

$$\omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \quad \omega_1^3 + \omega_3^1 = 0, \quad \omega_2^3 + \omega_3^2 = 0, \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3. \quad (9)$$

Тогда система дифференциальных уравнений Пфаффа комплекса K_s запишется в виде

$$\omega_i^0 = \Gamma_{ik}\,\omega^k, \quad (10)$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \quad \omega_1^3 + \omega_3^1 = 0, \quad \omega_2^3 + \omega_3^2 = 0, \quad (11)$$

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^2 - \omega_3^3 = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \quad (12)$$

Замыкая (11), получим:

$$\Gamma_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad \Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma_{33}.$$

Следовательно, систему (10) можно записать в виде

$$\omega_i^0 = c\,\omega^i \quad (c = \Gamma_{11}). \quad (13)$$

Замыкая (13), получим

$$dC = 8C\,\omega_1^1. \quad (14)$$

Анализируя (11), (12), (13), (14), получаем [2]:

Т е о р е м а 1. Система дифференциальных уравнений Пфаффа комплекса K_s вполне интегрируема, и ее решение определяется с произволом девяти постоянных.

Рассмотрим квадрику $\widetilde{Q}$, определенную следующим уравнением:

$$\widetilde{Q} \equiv (x^0)^2 - c\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right] = 0. \quad (15)$$

Так как

$$d\widetilde{Q} = 6\,\omega_1^1\,\widetilde{Q}, \quad (16)$$

то квадрика $\tilde{Q}$ стационарна и касается квадрики Q вдоль коники C. Таким образом, получена

Теорема 2. Коники C принадлежат стационарной квадрике $\tilde{Q}$, и квадрика Q комплекса K_s касается $\tilde{Q}$ вдоль C.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр.геометр.семинара ВИНИТИ, 1974, 6, с.113-133.

2. Малаховский В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Е.А.Митрофанова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПАРАБОЛОИДОВ В A_3

В настоящей статье рассматривается класс M_2^* конгруэнции M_2 гиперболических параболоидов в трехмерном эквиаффинном пространстве A_3, для которого ассоциированные квадрики вырождаются в пары пересекающихся плоскостей. Доказана теорема существования и установлены некоторые геометрические свойства конгруэнции M_2^*.

Отнесем конгруэнцию гиперболических параболоидов к реперу $R=\{A, \bar{e}_\alpha\}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$), где A -фокальная точка параболоида Q, описывающая невырожденную поверхность (A), векторы ($i, j, k = 1, 2$) направлены по прямолинейным образующим параболоида Q, а вектор $\bar{e}_3$ - по его диаметру. Уравнение этого параболоида в данном репере имеет вид:

$$F \equiv x^1 x^2 - p x^3 = 0 . \tag{1}$$

Для получения канонического репера осуществим нормировку векторов $\bar{e}_\alpha$ таким образом, чтобы точка $\mathcal{F}_1 = (1; 1; \frac{1}{p})$ являлась фокальной точкой параболоида Q.

Система пфаффовых уравнений конгруэнции M_2 запишется в виде

$$\begin{gathered} \omega^3 = 0, \quad \omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \omega^k, \quad \omega_3^i = \Gamma_{3k}^i \omega^k, \quad 2p\omega_3^3 - dp = p_k \omega^k, \\ p\omega_i^3 - \omega^j = \Gamma_{ik}^3 \omega^k, \quad \omega_3^3 = a_k \omega^k, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = b_k \omega^k, \ (i \neq j). \end{gathered} \tag{2}$$

Из замыкания уравнения $\omega^3 = 0$ получим

$$\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{21} = 0 . \qquad (3)$$

Рассмотрим инвариантные ассоциированные квадрики Q_i [1], которые определяются уравнениями:

$$\mathcal{F}_i \equiv \Gamma^2_{1i}(x^1)^2 + \Gamma^1_{2i}(x^2)^2 + \Gamma^1_{3i}x^2x^3 + \Gamma^2_{3i}x^1x^3 - \Gamma^3_{1i}x^1 - \Gamma^3_{2i}x^2 - \rho_i x^3 = 0. \quad (4)$$

(по i не суммировать!)

Квадрики Q_i позволяют дать относительную характеристику инвариантов конгруэнции M_2. Условия

$\Gamma^2_{3i} = 0$ означает, что $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_3$ сопряжены относительно Q_i,

$\Gamma^1_{3i} = 0$ означает, что $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ сопряжены относительно Q_i,

$\Gamma^3_{ki} = 0$ означает, что направление $(A\ell_k)$ является асимптотическим относительно Q_i.

Рассмотрим класс M^*_2 конгруэнции M_2, для которого ассоциированные квадрики Q_i (4) распадаются на пары плоскостей соответственно с осями (Ae_j). В этом случае уравнения (4) примут вид:

$$\mathcal{F}_i \equiv \Gamma^j_{ii}(x^i)^2 + \Gamma^j_{3i}x^ix^3 = 0 \quad (i \neq j), \qquad (5)$$

а система дифференциальных уравнений конгруэнции M^*_2 запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, && \omega^1_3 = \Gamma^1_{32}\omega^2, \\ &p\omega^2_1 + \omega^2_3 = 0, && \omega^2_3 = \Gamma^2_{31}\omega^1, \\ &p\omega^3_1 = \omega^2, && \omega^3_3 = a_k\omega^k, \\ &p\omega^1_2 + \omega^1_3 = 0, && dp = 2\omega^3_3, \\ &p\omega^3_2 = \omega^1, && \omega^1_1 - \omega^2_2 = b_k\omega^k. \end{aligned} \qquad (6)$$

Анализируя систему (6), убеждаемся, что конгруэнции M^*_2 существуют и определяются с произволом четырех функций одного аргумента.

Обозначим через ℓ_α прямые (Ae_α).

Т е о р е м а. Конгруэнция M^*_2 обладает следующими геометрическими свойствами: 1/прямые ℓ_1 и ℓ_2 сопряжены относительно каждой из ассоциированных квадрик Q_i; 2/прямолинейные образующие ℓ_i являются асмптотическими касательными фокальной поверхности (A); 3/прямолинейная конгруэнция (ℓ_3) сопряжена фокальной поверхности (A); 4/существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (ℓ_3) к конгруэнции касательных плоскостей поверхности (A) [2].

Справедливость этих утверждений вытекает из уравнений (4) и (6).

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8. Калининград, 1977, с.32-38.

2. Т к а ч Г.П. О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций в трехмерном эквиаффинном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.143-152.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.IO 1979

УДК 513.73

Л. С. Нечитайлова

ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ n-ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВА V_n В СЕБЯ

В статье перечислены τ-членные группы Ли ($\tau = 2,3,4$), которые могут быть группами движений n-ортогональной системы в себя и указан вид ряда получаемых при этом метрик риманова пространства.

Координатная система (x^α) в некоторой области риманова пространства V_n (произвольной сигнатуры) называется n-ортогональной системой, если в этой координатной системе матрица фундаментального тензора имеет диагональный вид

$$g_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta \quad (g_{\alpha\alpha} \neq 0 \text{ для всех } \alpha = \overline{1,n}). \quad (1)$$

Векторное поле ξ^α определяет инфинитезимальное преобразование:

$$x^\alpha \longrightarrow x^{\alpha'} = x^\alpha + t\xi^\alpha. \qquad (2)$$

ξ^α есть инфинитезимальное преобразование, сохраняющее n-ортогональность системы, если выполнено условие

$$(L_\xi g)_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta. \qquad (3)$$

Всякое инфинитезимальное движение или конформное преобразование есть частный случай инфинитезимального преобразования n-ортогональной системы.

Здесь мы рассмотрим движения n-ортогональной системы в себя.

Для того, чтобы инфинитезимальное преобразование (2) было движением, необходимо, чтобы

$$(L_\xi g)_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \forall \alpha,\beta. \qquad (4)$$

В случае пространства с метрикой (1) уравнения (4) имеют вид:

$$g_{\alpha\alpha}\xi^\alpha_\beta + g_{\beta\beta}\xi^\beta_\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \qquad (5)$$

$$\xi^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\gamma} + 2g_{\alpha\alpha}\xi^\alpha_\alpha = 0, \qquad (6)$$

где $\xi^\alpha_\beta = \dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}$, в (5) суммирования по α, β нет.

Безотносительно к метрике g на поле ξ^α накладывается условие:

$$\xi^\alpha_\beta \xi^\beta_\gamma \xi^\gamma_\alpha + \xi^\beta_\alpha \xi^\alpha_\gamma \xi^\gamma_\beta = 0 \quad (\forall \alpha,\beta,\gamma;\ \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha). \qquad (7)$$

Координатная система преобразуется в себя, если

$$\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^\alpha).$$

Из уравнений движения (2) видно, что в этом случае $\xi^\alpha(x) = \xi^\alpha(x^\alpha)$, то есть зависит только от соответствующего x^α. Тогда уравнения (5) и (7) выполняются тривиальным образом.

Будем считать, не нарушая общности, что вектор Киллинга лежит в p-мерной координатной площадке ($1 \le p \le n$), то есть имеет вид:

$$\{\xi^1(x), \ldots, \xi^p(x), 0, \ldots, 0\}. \qquad (8)$$

В случае преобразования системы в себя мы можем привести ненулевые компоненты вектора Киллинга к постоянным величинам, а именно сделаем их равными единице, то есть положим

$$\vec{\xi} = \{1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}. \qquad (9)$$

Тогда метрика будет иметь вид:

$$ds^2=\sum_{\alpha=1}^{n} g_{\alpha\alpha}(x^2-x^1,\dots,x^p-x^1;\ x^a) \quad (a=\overline{p+1,n}). \qquad (10)$$

Рассмотрим случай, когда n-ортогональная система допускает r-членную группу движений в себя ($r \geq 2$). В данной статье исследованы группы до $r=4$.

Используем классификацию в форме, данной в книге А.З.Петрова "Пространства Эйнштейна". Исследование уравнений структуры $[X_i X_j]=C_{ij}^{\alpha} X_\alpha$ группы Ли показывает, что из указанных групп лишь следующие являются группами движения системы в себя:

$r=2$

$\underline{\mathrm{I}}$ $[X_1X_2]=0$ – абелева G_2,

$\underline{\mathrm{II}}$ $[X_1X_2]=X_1$.

$r=3$

$\underline{\mathrm{I}}$ $[X_iX_j]=0$ $(i,j=1,2,3)$ – абелева G_3,

$\underline{\mathrm{III}}$ $[X_1X_2]=0,\ [X_2X_3]=0,\ [X_3X_1]=-X_1,$

$\underline{\mathrm{V}}$ $[X_1X_2]=0,\ [X_2X_3]=X_2,\ [X_3X_1]=-X_1,$

$\underline{\mathrm{VI}}$ $[X_1X_2]=0,\ [X_2X_3]=qX_2,\ [X_3X_1]=-X_1 \quad (q\neq 0,1),$

$\underline{\mathrm{VIII}}$ $[X_1X_2]=X_1,\ [X_2X_3]=X_3,\ [X_3X_1]=-2X_2.$

$r=4$

$\underline{\mathrm{IV}}$ $[X_1X_2]=0,\ [X_2X_3]=X_2,\ [X_3X_1]=0,$

$[X_1X_4]=X_1,\ [X_2X_4]=0,\ [X_3X_4]=0,$

$\underline{\mathrm{VI}}_1$ $[X_iX_j]=0 \quad (i,j=1,2,3),$

$[X_1X_4]=aX_1+bX_4,\ [X_2X_4]=cX_2+dX_4,\ [X_3X_4]=eX_3+fX_4,$

$\underline{\mathrm{VII}}$ $[X_1X_2]=X_1,\ [X_2X_3]=X_3,\ [X_3X_1]=-2X_2,\ [X_iX_4]=0\ (i=1,2,3).$

Соответствующие метрики могут быть найдены. Приведем некоторые из них. ($\Phi_\alpha=\ln|g_{\alpha\alpha}|$).

$r=2$. $\underline{\mathrm{II}}$ $\Phi_i=-2x^{p+1}+\Psi_i(u^j,v^k,x^l) \quad (i=\overline{1,p}),$

$\Phi_a=\Psi_a(u^j,v^k,x^l) \quad (a=\overline{p+1,n}),$

$u^j=x^j-x^1-\exp x^{p+1}, \quad v^k=x^k-x^{p+1},$

$(j=\overline{2,p};\ k=\overline{p+1,p+q},\ l=\overline{p+q+1,n}).$

$r=3$. $\underline{\mathrm{III}}$ $\Phi_i=-2\ln(x^2-x^1)+\Psi_i(u^j,v^k,w^l,x^m) \quad (i=\overline{1,p}),$

$\Phi_a=\Psi_a(u^j,v^k,w^l,x^m) \quad (a=\overline{p+1,n})$

$u^j=\dfrac{x^j-x^1}{x^2-x^1},\ v^k=-\ln(x^2-x^1)+\dfrac{1}{b^k-b^{p+1}}(x^k-x^{p+1}),$

$w^l=\ln(x^2-x^1)-x^l$

$(j=\overline{3,p};\ k=\overline{p+2,p+q};\ l=\overline{p+q+1,p+q+s};\ m=\overline{p+q+s+1,n}),$

$b^k,b^{p+1}=\mathrm{const},\ b^k\neq b^{p+1}\ (v^k=x^k-x^{p+1},\ b^k=b^{p+1}).$

$\underline{\mathrm{VIII}}$. $\Phi_1=2\ln\dfrac{x_3-x_2}{(x_3-x_1)(x_2-x_1)}+\Psi_1(u^j,x^k),$

$\Phi_2=2\ln\dfrac{x_3-x_1}{(x_3-x_2)(x_2-x_1)}+\Psi_2(u^j,x^k),$

$\Phi_i=2\ln\dfrac{x_2-x_1}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)}+\Psi_i(u^j,x^k) \quad (i=\overline{3,p}),$

$\Phi_a=\Psi_a(u^j,x^k) \quad (a=\overline{p+1,n}),$

$u^j=\dfrac{(x^j-x^2)(x^3-x^1)}{(x^j-x^1)(x^3-x^2)} \quad (j=\overline{4,p};\ k=\overline{p+1,n}).$

$$\tau = 4.\ \overline{\text{VI}}_1 \quad \Phi_1 = -2\ln[\exp(x_1 - x_2) - 1] + \Psi_1(u^j, v^k, w^\ell, y^m, x^t),$$

$$\Phi_2 = -2\ln[\exp(x_i - x_1) - 1] + \Psi_i(u^j, v^k, w^\ell, y^m, x^t),$$

$$\Phi_a = \Psi_a(u^j, v^k, w^\ell, y^m, x^t),$$

$$(i = \overline{1,p}\ ;\ a = \overline{p+1,n}),$$

$$u^j = \frac{\exp(x^1 - x^j) - 1}{\exp(x^1 - x^2) - 1},$$

$$v^k = (x^k - a^k x^{p+q+1}) - (b^k - b^{p+q+1})x^{p+q+s+1},$$

$$w^\ell = (x^\ell - x^{p+q+1}) - (b^\ell - b^{p+q+1})x^{p+q+s+1},$$

$$y^m = x^m - x^{p+q+s+1}$$

$$(j = \overline{3,p}\ ;\ k = \overline{p+1,p+q}\ ;\ \ell = \overline{p+q+2,p+q+s}\ ;$$

$$m = \overline{p+q+s+2,\ p+q+s+\tau};\ t = \overline{p+q+s+\tau+1,n}).$$

$$a^k, b^k, b^\ell, b^{p+q+1} = \text{const}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Н.Д.П о л я к о в

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ Γ НА МНОГООБРАЗИИ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ

1.Пусть задано нечетномерное дифференцируемое многообразие M_{n+1} $(n = 2q)$,в котором введена локальная система координат.Рассмотрим некоторую координатную окрестность U и обозначим координаты текущей точки через $y^{\mathcal{J}}$.Введем вполне интегрируемую систему $(n+1)$ -линейно независимых форм Пфаффа $\omega^{\mathcal{J}}$,первыми интегралами которой являются координаты $y^{\mathcal{J}}$

$$(\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Г.Ф.Лаптев показал [2],что над окрестностью U возможно построить бесконечную последовательность линейных линейно независимых форм $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}, \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2}, \ldots$,симметричных по нижним индексам и имеющих расслоенную структуру к базовым формам $\omega^{\mathcal{J}}$ [2].Эти формы подчинены структурным уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}} &= \omega^{\mathcal{K}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}, \\ \mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} &= \omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}} + \omega^{\mathcal{L}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}, \\ \mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2} &= \omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}} + \omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}_1} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}\mathcal{K}_2} + \omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}_2} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}\mathcal{K}_1} + \\ &\quad + \omega^{\mathcal{L}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\mathcal{L}}, \end{aligned} \tag{1}$$

. . . .

В фиксированной точке базы, т.е. при $\omega^{\mathcal{J}}=0$, формы $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$, $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2}, \ldots, \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_p}$ становятся инвариантными формами дифференциальной группы $\mathcal{D}^p_{n+1}$ порядка p ($p=1,2,\ldots$).

Одновременно возникает бесконечная последовательность главных расслоенных многообразий $M^1_{n+1}, M^2_{n+1}, \ldots$, у которых общей базой является исходное многообразие M_{n+1}, а структурными группами - дифференциальные группы $\mathcal{D}^1_{n+1}$, $\mathcal{D}^2_{n+1}$, . . . , соответствующих порядков. Известно [2], что с многообразием M^p_{n+1} ассоциируются различные присоединенные расслоенные пространства, базой которых является M_{n+1}, а слоями - пространства представления группы $\mathcal{D}^p_{n+1}$.

Рассмотрим присоединенное расслоенное пространство A^2_{n+1} с базой M_{n+1}, структурной группой которого является $\mathcal{D}^2_{n+1}$, а слоями N-мерные центроаффинные пространства A_N ($N=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+n+1$). Пусть в слоях введен векторный репер $\vec{e}_{\mathcal{J}}; \vec{e}_{\mathcal{JK}}$ ($\vec{e}_{\mathcal{JK}}=\vec{e}_{\mathcal{KJ}}$), вершина которого помещена в центр M пространства. Уравнения инфинитезимального перемещения такого репера имеют вид:

$$\delta\vec{e}_{\mathcal{J}}=\bar{\omega}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}\vec{e}_{\mathcal{K}},$$
$$\delta\vec{e}_{\mathcal{JK}}=\bar{\omega}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{JK}}\vec{e}_{\mathcal{L}}+\bar{\omega}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{J}}\vec{e}_{\mathcal{KL}}+\bar{\omega}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}}\vec{e}_{\mathcal{JL}}, \tag{2}$$

где символ δ означает дифференцирование по вторичным параметрам.

2. Зададим на многообразии M_{n+1} почти контактную структуру $M_{n+1}(\varphi,\xi,\eta)$ со структурными объектами $\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$, $\xi^{\mathcal{J}}$, $\eta_{\mathcal{K}}$, относительные компоненты которых подчинены конечным соотношениям:

$$\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}\varphi^{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}}=-\delta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}+\xi^{\mathcal{J}}\eta_{\mathcal{L}},$$
$$\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}\xi^{\mathcal{K}}=0,\quad \varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}\eta_{\mathcal{J}}=0,\quad \xi^{\mathcal{J}}\eta_{\mathcal{J}}=1. \tag{3}$$

Дифференциальные уравнения полей структурных объектов имеют вид:

$$d\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}-\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}\omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}}+\varphi^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}=\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{KL}}\omega^{\mathcal{L}}, \tag{4}$$
$$d\xi^{\mathcal{J}}+\xi^{\mathcal{L}}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}=\xi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}\omega^{\mathcal{L}}, \tag{5}$$
$$d\eta_{\mathcal{K}}-\eta_{\mathcal{L}}\omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}}=\eta_{\mathcal{KL}}\omega^{\mathcal{L}}. \tag{6}$$

При продолжении (4)-(6) получаем

$$\nabla\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{KL}}-\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{M}}\omega^{\mathcal{M}}_{\mathcal{KL}}+\varphi^{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{ML}}=\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{KLM}}\omega^{\mathcal{M}}, \tag{7}$$
$$\nabla\xi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}+\xi^{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{LK}}=\xi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{LM}}\omega^{\mathcal{M}}, \tag{8}$$
$$\nabla\eta_{\mathcal{KL}}-\eta_{\mathcal{M}}\omega^{\mathcal{M}}_{\mathcal{KL}}=\eta_{\mathcal{KLM}}\omega^{\mathcal{M}}. \tag{9}$$

Системы величин $\{\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}},\ \varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{KL}}\}$, $\{\xi^{\mathcal{J}}, \xi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}\}$, $\{\eta_{\mathcal{K}}, \eta_{\mathcal{KL}}\}$ образуют геометрические объекты, присоединенные к $\mathcal{D}^2_{n+1}$. Такие объекты мы называем продолженными структурными объектами почти контактной структуры в M_{n+1}. Их компоненты удовлетворяют соотношениям (3) и

$$\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{KM}}\varphi^{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}}+\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}\varphi^{\mathcal{K}}_{\mathcal{LM}}=\xi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{L}}+\xi^{\mathcal{J}}\eta_{\mathcal{LM}},$$
$$\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{KL}}\xi^{\mathcal{K}}+\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}\xi^{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}}=0, \tag{10}$$
$$\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{KL}}\eta_{\mathcal{J}}+\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}\eta_{\mathcal{JL}}=0,\quad \xi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}\eta_{\mathcal{J}}+\xi^{\mathcal{J}}\eta_{\mathcal{JL}}=0.$$

Поле структурного объекта $\eta_{\mathcal{J}}$ определяет на $M_{n+1}(\varphi,\xi,\eta)$ распределение гиперплоскостных элементов η. Произведем следующую канонизацию репера. Первые n векторов $\vec{e}_{\mathcal{J}}$ расположим в плоскости элемента распределения η. Такой репер обозначим R_η. Это означает, что $\eta_i=0$ ($i, j, k, \ldots =1,2,\ldots n$). В репере R_η дифференциальные уравнения распределения η имеют вид

$$\omega^{n+1}_i=\eta^{n+1}_{i\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}},$$

где

$$\eta^{n+1}_{i\mathcal{K}}=-\frac{\eta_{i\mathcal{K}}}{\eta_{n+1}}. \tag{11}$$

Дифференцируя (II), получим уравнения фундаментального объекта I порядка распределения η :

$$\nabla\eta^{n+1}_{ij}+\omega^{n+1}_{ij}=\eta^{n+1}_{ij\varkappa}\,\omega^{\varkappa}, \tag{12}$$

$$\nabla\eta^{n+1}_{i\,n+1}-\eta^{n+1}_{ij}\,\omega^{j}_{n+1}+\omega^{n+1}_{i\,n+1}=\eta^{n+1}_{i\,n+1\,\varkappa}\,\omega^{\varkappa}. \tag{13}$$

Поле структурного объекта Ξ^{σ} определяет инвариантную нормаль распределения η. Объектом этой нормали является объект $\widetilde{\Xi}^{i}_{n+1}=\frac{\Xi^{i}}{\Xi^{n+1}}$, компоненты которого подчинены уравнениям

$$\nabla\widetilde{\Xi}^{i}_{n+1}+\omega^{i}_{n+1}=\widetilde{\Xi}^{i}_{n+1\,\varkappa}\,\omega^{\varkappa}. \tag{14}$$

В репере R_{η} соотношения (3), (10) принимают вид

$$\begin{gathered}\varphi^{i}_{j}\varphi^{j}_{\ell}=-\delta^{i}_{\ell},\quad \varphi^{n+1}_{\varkappa}=0,\quad \varphi^{i}_{n+1}=-\varphi^{i}_{j}\widetilde{\Xi}^{j}_{n+1},\\ \Xi^{n+1}\eta_{n+1}=1,\quad \Xi^{n+1}_{\sigma}=\Xi^{n+1}\big(\widetilde{\Xi}^{i}_{n+1}\eta^{n+1}_{i\sigma}-\Xi^{n+1}\eta_{n+1\,\sigma}\big),\\ \varphi^{n+1}_{\sigma\varkappa}=\varphi^{i}_{\sigma}\eta^{n+1}_{i\varkappa},\quad \varphi^{i}_{n+1\,\sigma}=-\varphi^{i}_{j\sigma}\widetilde{\Xi}^{j}_{n+1}-\varphi^{i}_{j}\Xi^{j}_{\sigma}\eta_{n+1}-\varphi^{i}_{n+1}\Xi^{n+1}_{\sigma}\eta_{n+1},\\ \varphi^{i}_{k\sigma}\varphi^{k}_{j}+\varphi^{i}_{k}\varphi^{k}_{j\sigma}=-\varphi^{i}_{n+1}\varphi^{n+1}_{j\sigma}-\widetilde{\Xi}^{i}_{n+1}\eta^{n+1}_{j\sigma}.\end{gathered} \tag{15}$$

Дифференциальные уравнения компонент структурных и продолженных структурных объектов относительно репера R_{η} получаются из уравнений (4)-(9) с учетом проведенной канонизации и соотношений (15).

4. Многообразие $M_{n+1}(\varphi,\Xi,\eta)$ дополнительно оснастим дифференциально-геометрической структурой второго порядка со структурным объектом A^{n+1}_{ij} $(A^{n+1}_{ij}=A^{n+1}_{ji})$ [3], компоненты которого подчинены уравнениям

$$\nabla A^{n+1}_{ij}+\omega^{n+1}_{ij}=A^{n+1}_{ij\varkappa}\,\omega^{\varkappa}. \tag{16}$$

Геометрически такое оснащение означает выделение в текущей точке многообразия M_{n+1} инвариантной p-мерной плоскости α_p $\left(p=\frac{n(n+1)}{2}+n\right)$, натянутой на векторы $\vec{E}=\vec{e}_i$,

$\vec{E}_{ij}=\vec{e}_{ij}+A^{n+1}_{ij}\vec{e}_{n+1}$. Рассмотрим тензор

$$\Lambda^{n+1}_{ij}=\eta^{n+1}_{ij}-A^{n+1}_{ij}\neq 0, \tag{17}$$

$$\nabla\Lambda^{n+1}_{ij}=\Lambda^{n+1}_{ij\varkappa}\,\omega^{\varkappa}. \tag{18}$$

В общем случае можно предположить $\Lambda=\det\|\Lambda^{n+1}_{ij}\|\neq 0$, что позволяет ввести в рассмотрение тензор Λ^{ij}_{n+1} такой, что

$$\Lambda^{n+1}_{ij}\Lambda^{j\ell}_{n+1}=\delta^{\ell}_{i},\quad \Lambda^{n+1}_{ji}\cdot\Lambda^{\ell j}_{n+1}=\delta^{\ell}_{i}.$$

Продолжая (18), получим систему уравнений для компонент $\Lambda^{n+1}_{ij\varkappa}$:

$$\begin{gathered}\nabla\Lambda^{n+1}_{ij\varkappa}-\big(\Lambda^{n+1}_{\ell j}\eta^{n+1}_{i\varkappa}+\Lambda^{n+1}_{i\ell}\eta^{n+1}_{j\varkappa}+\Lambda^{n+1}_{ij}\eta^{n+1}_{\ell\varkappa}\big)\omega^{\ell}_{n+1}-\\ -\Lambda^{n+1}_{\ell j}\,\omega^{\ell}_{i\varkappa}-\Lambda^{n+1}_{i\ell}\,\omega^{\ell}_{j\varkappa}+\Lambda^{n+1}_{ij}\,\omega^{n+1}_{n+1\,\varkappa}=\Lambda^{n+1}_{ij\varkappa z}\,\omega^{z}.\end{gathered} \tag{19}$$

Объектом Λ^{n+1}_{ij} охватывается симметричный тензор $a^{n+1}_{ij}=\frac{1}{2}(\Lambda^{n+1}_{ij}+\Lambda^{n+1}_{ji})$. В общем случае можно предположить, что $a=\det\|a^{n+1}_{ij}\|\neq 0$. При этом можно рассмотреть обращенный симметричный тензор a^{ij}_{n+1} такой, что $a^{n+1}_{ij}\,a^{j\ell}_{n+1}=\delta^{\ell}_{i}$

5. Рассмотрим следующие системы величин:

$$F_i=\Xi^{n+1}_{i}\eta_{n+1}-\widetilde{\Xi}^{j}_{n+1}\Lambda^{n+1}_{ji}, \tag{20}$$

$$F_{n+1}=\Xi^{n+1}_{n+1}\eta_{n+1}-F_i\widetilde{\Xi}^{i}_{n+1}. \tag{21}$$

Непосредственным дифференцированием устанавливаем, что

$$\nabla F_i-A^{n+1}_{ij}\,\omega^{j}_{n+1}+\omega^{n+1}_{i\,n+1}=F_{i\varkappa}\,\omega^{\varkappa}, \tag{22}$$

$$\nabla F_{n+1}-2F_i\,\omega^{i}_{n+1}+\omega^{n+1}_{n+1\,n+1}=F_{n+1\,\varkappa}\,\omega^{\varkappa}. \tag{23}$$

Следовательно, $\{F_{n+1},F_i,A^{n+1}_{ij}\}$, $\{F_i,A^{n+1}_{ij}\}$ образуют геометрические объекты. Геометрический объект $\{F_i,A^{n+1}_{ij}\}$ определяет инвариантную ($p+n$)-мерную плоскость α_{p+n} в A_N, натянутую на векторы $\vec{E}_i$, $\vec{E}_{ij}$, $\vec{E}_{i\,n+1}=$

$=\vec{e}_{in+1}+F_i\vec{e}_n$. А объект $\{F_{n+1}, F_i, A^{n+1}_{ij}\}$ определяет гиперплоскость в A_N, натянутую на векторы

$$\vec{E}_i,\ \vec{E}_{ij},\ \vec{E}_{in+1},\ \vec{E}_{n+1\,n+1}=\vec{e}_{n+1\,n+1}+F_{n+1}\vec{e}_{n+1}.$$

При помощи продолженных структурных объектов, а также ранее построенных объектов мы последовательно определяем новые величины второго порядка $H^{n+1}_{ij\ell},\ p^i_{j\ell},\ p^i_{jn+1},\ p^i_{n+1\,n+1}$, для которых ниже выписаны определяющие их формулы и дифференциальные уравнения:

$$H^{n+1}_{ij\ell}=\Lambda^{n+1}_{ij\ell}+\tilde{\Xi}^k_{n+1}(\Lambda^{n+1}_{kj}\eta^{n+1}_{i\ell}+\Lambda^{n+1}_{ik}\eta^{n+1}_{j\ell}+\Lambda^{n+1}_{ij}\eta^{n+1}_{k\ell}-$$

$$-\Lambda^{n+1}_{ik}A^{n+1}_{j\ell}-\Lambda^{n+1}_{kj}A^{n+1}_{i\ell}-\Lambda^{n+1}_{ij}A^{n+1}_{\ell k})-\Lambda^{n+1}_{ij}F_\ell, \tag{24}$$

$$\nabla H^{n+1}_{ij\ell}-\Lambda^{n+1}_{ik}\omega^k_{j\ell}-\Lambda^{n+1}_{kj}\omega^k_{i\ell}-(\Lambda^{n+1}_{kj}A^{n+1}_{i\ell}+\Lambda^{n+1}_{j\ell}A^{n+1}_{ik})\omega^k_{n+1}=$$

$$=H^{n+1}_{ij\ell\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \tag{25}$$

$$p^i_{j\ell}=-\frac{1}{2}\left(H^{n+1}_{k(j\ell)}+H^{n+1}_{(\ell|k|j)}-H^{n+1}_{(j\ell)k}\right)a^{ki}_{n+1}, \tag{26}$$

$$\nabla p^i_{j\ell}+A^{n+1}_{j\ell}\omega^i_{n+1}+\omega^i_{j\ell}=p^i_{j\ell\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \tag{27}$$

$$p^i_{jn+1}=\xi^i_j\eta_{n+1}-p^i_{j\ell}\tilde{\Xi}^\ell_{n+1}, \tag{28}$$

$$\nabla p^i_{jn+1}-p^i_{j\ell}\omega^\ell_{n+1}+F_j\omega^i_{n+1}+\omega^i_{jn+1}=p^i_{jn+1\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \tag{29}$$

$$p^i_{n+1\,n+1}=\xi^i_{n+1}\eta_{n+1}-p^i_{jn+1}\tilde{\Xi}^j_{n+1}, \tag{30}$$

$$\nabla p^i_{n+1\,n+1}-2p^i_{jn+1}\omega^j_{n+1}+F_{n+1}\omega^j_{n+1}+\omega^i_{n+1\,n+1}=p^i_{n+1\,n+1\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}. \tag{31}$$

Из уравнений (24)-(31) следует, что величины $\{p^i_{n+1\,n+1}, p^i_{jn+1}, p^i_{j\ell}, F_{n+1}, F_j, A^{n+1}_{ij}\}$, $\{p^i_{jn+1}, p^i_{j\ell}, F_j, A^{n+1}_{j\ell}\}$, $\{p^i_{j\ell}, A^{n+1}_{j\ell}\}$ образуют геометрические объекты второго порядка. Значимость этих объектов будет выяснена ниже в связи с определением аффинной связности Γ на $M_{n+1}(\varphi,\xi,\eta)$.

6. Согласно Г.Ф.Лаптеву [1], в главном расслоении многообразия M^1_{n+1} формы

$$\tilde{\omega}^{\mathcal{J}}=\omega^{\mathcal{J}},\quad \tilde{\omega}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}=\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}-\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\omega^{\mathcal{L}} \tag{32}$$

определяют аффинную связность тогда и только тогда, когда задано поле объекта связности Γ:

$$\nabla\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}+\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}-\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{M}\mathcal{T}}\Gamma^{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\omega^{\mathcal{T}}=\tilde{\Gamma}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}\mathcal{M}}\omega^{\mathcal{M}}. \tag{33}$$

Если рассматривать присоединенное расслоенное многообразие A^1_{n+1} (касательное расслоение), то при выполнении (33) формы $\omega^{\mathcal{J}}=\tilde{\omega}^{\mathcal{J}}$, $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$ определяют в этом многообразии аффинную связность, т.е. инвариантно определяют инфинитезимальные отображения локальных касательных пространств T_y [1]. При этом структурные уравнения для форм $\omega^{\mathcal{J}}$, $\tilde{\omega}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$ удовлетворяют условиям теоремы Картана-Лаптева:

$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}}=\omega^{\mathcal{K}}\wedge\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}+\frac{1}{2}R^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\omega^{\mathcal{K}}\wedge\omega^{\mathcal{L}},$$

$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}=\omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}}\wedge\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}+\frac{1}{2}R^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}\mathcal{M}}\omega^{\mathcal{L}}\wedge\omega^{\mathcal{M}},$$

где $R^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ – тензор кручения, а $R^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}\mathcal{M}}$ – тензор кривизны связности Γ.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением симметричной связности Γ, т.е. связности с нулевым тензором кручения. Связность Γ внутренне определяется на дифференцируемом многообразии M_{n+1}, если компоненты объекта связности $\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ охвачены структурными объектами и их продолжениями. Таким образом, для определения связности, внутренним образом связанной с M_{n+1}, достаточно построить охват объекта $\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$, присоединенного к $\mathcal{D}^2_{n+1}$, компоненты которого в репере R_η удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\nabla\Gamma^{n+1}_{ij} + \omega^{n+1}_{ij} = \Gamma^{n+1}_{ij\varkappa}\,\omega^{\varkappa}, \tag{35}$$

$$\nabla\Gamma^{n+1}_{i\,n+1} - \Gamma^{n+1}_{ij}\,\omega^{j}_{n+1} + \omega^{n+1}_{i\,n+1} = \Gamma^{n+1}_{i\,n+1\,\varkappa}\,\omega^{\varkappa}, \tag{36}$$

$$\nabla\Gamma^{n+1}_{n+1\,n+1} - 2\Gamma^{n+1}_{i\,n+1}\,\omega^{i}_{n+1} + \omega^{n+1}_{n+1\,n+1} = \Gamma^{n+1}_{n+1\,n+1\,\varkappa}\,\omega^{\varkappa}, \tag{37}$$

$$\nabla\Gamma^{i}_{je} + \Gamma^{n+1}_{je}\,\omega^{i}_{n+1} + \omega^{i}_{je} = \Gamma^{i}_{je\varkappa}\,\omega^{\varkappa}, \tag{38}$$

$$\nabla\Gamma^{i}_{j\,n+1} + \Gamma^{n+1}_{j\,n+1}\,\omega^{i}_{n+1} - \Gamma^{i}_{je}\,\omega^{e}_{n+1} + \omega^{i}_{j\,n+1} = \Gamma^{i}_{j\,n+1\,\varkappa}\,\omega^{\varkappa}, \tag{39}$$

$$\nabla\Gamma^{i}_{n+1\,n+1} - 2\Gamma^{i}_{j\,n+1}\,\omega^{j}_{n+1} + \Gamma^{n+1}_{n+1\,n+1}\,\omega^{i}_{n+1} + \omega^{i}_{n+1\,n+1} = \Gamma^{i}_{n+1\,n+1\,\varkappa}\,\omega^{\varkappa}. \tag{40}$$

Следовательно, для построения объекта связности необходимо построить охват шести систем величин Γ^{n+1}_{ij}, $\Gamma^{n+1}_{i\,n+1}$, $\Gamma^{n+1}_{n+1\,n+1}$, Γ^{i}_{je}, $\Gamma^{i}_{j\,n+1}$, $\Gamma^{i}_{n+1\,n+1}$, симметричных по нижним индексам, которые удовлетворяют соответственно уравнениям (35)-(40). Приступим к построению охвата этих величин структурными объектами и их продолженными объектами многообразия $M_{n+1}(\varphi,\xi,\eta)$, оснащенного объектом $\{A^{n+1}_{ij}\}$.

Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют компоненты подобъекта $\{\Gamma^{n+1}_{ij}\}$ по виду совпадают с уравнениями (I6) для компонент объекта $\{A^{n+1}_{ij}\}$. Следовательно, в качестве $\{\Gamma^{n+1}_{ij}\}$ можем принять объект $\{A^{n+1}_{ij}\}$. Сопоставляя уравнения (I6), (22), (23), (27), (29), (31) с уравнениями (35)-(40) устанавливаем, что в качестве объекта связности можно принять построенные ранее охваченные объекты. А именно,

$$\begin{gathered}\Gamma^{n+1}_{ij} = A^{n+1}_{ij}, \quad \Gamma^{n+1}_{i\,n+1} = \Gamma^{n+1}_{i\,n+1} = \Gamma^{n+1}_{n+1\,i} = F_i, \quad \Gamma^{n+1}_{n+1\,n+1} = F_{n+1}, \\ \Gamma^{i}_{je} = p^{i}_{je}, \quad \Gamma^{i}_{j\,n+1} = \Gamma^{i}_{n+1\,j} = p^{i}_{j\,n+1}, \quad \Gamma^{i}_{n+1\,n+1} = p^{i}_{n+1\,n+1}.\end{gathered} \tag{41}$$

Итак, мы показали, что на многообразии M_{n+1} почти контактной структуры, оснащенном дифференциально-геометрической структурой второго порядка со структурным объектом $\{A^{n+1}_{ij}\}$, во второй дифференциальной окрестности возникает аффинная связность Γ с нулевым тензором кручения, внутренне связанная с этим многообразием.

Со связностью Γ ассоциируется пространство аффинной связности $\overset{\circ}{L}_{n+1}$ с нулевым тензором кручения. Пространство $\overset{\circ}{L}_{n+1}$ является присоединенным расслоенным пространством, его базой является многообразие M_{n+1}, а слоями - касательные плоскости T_y.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.- Тр.Моск.матем.о -ва, 1953, №2, с.275-382.

2. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии.- Тр.геометр. семинара ВИНИТИ, 1966, I, I39-189.

3. О с т и а н у Н.М. Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемом многообразии.-В кн.: Проблемы геометрии (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР), т.8, М., 1976.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. IO 1979

УДК 513.73

Ю.И. Попов

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТАХ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА.

В настоящей работе инвариантным методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [1] строятся поля геометрических объектов в дифференциальных окрестностях 2-го и 3-го порядков элемента m-мерной регулярной гиперполосы H_m аффинного пространства $\mathcal{A}_{n+1}$. Используя построенные поля геометрических объектов, в окрестности 2-го порядка элемента гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ внутренним инвариантным образом присоединяется поле однопараметрического пучка соприкасающихся гиперквадрик. Построен канонический пучок проективных нормалей (в окрестности 3-го порядка), который является обобщением на случай регулярных гиперполос канонического пучка проективных нормалей, рассмотренного в работах [1],[2], для гиперповерхностей проективного и аффинного пространств.

Обозначения и замечания:

1. Во всей работе мы придерживаемся следующей схемы использования индексов:

$$i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, m; \quad a, b, c, \ldots = m+1, m+2, \ldots, n;$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1.$$

2. Оператор ∇_d дифференцирования действует по закону:

$$\nabla_d T^{\alpha i a}_{\beta j b} = d T^{\alpha i a}_{\beta j b} - T^{\alpha i a}_{\gamma j b}\,\omega^{\gamma}_{\beta} - T^{\alpha i a}_{\beta k b}\,\omega^{k}_{j} - T^{\alpha i a}_{\beta j c}\,\omega^{c}_{b} +$$
$$+ T^{\gamma i a}_{\beta j b}\,\omega^{\alpha}_{\gamma} + T^{\alpha k a}_{\beta j b}\,\omega^{i}_{k} + T^{\alpha i c}_{\beta j b}\,\omega^{a}_{c}.$$

3. Символом δ обозначаем дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм ω^{α}_{β} при фиксированных главных параметрах через π^{α}_{β}. В этом случае оператор обозначается символом ∇_δ.

I. В ($n+1$)-мерном аффинном пространстве $\mathcal{A}_{n+1}$ рассмотрим m-мерную гиперполосу H_m ($2 \le m \le n$) [3], т.е. m-параметрическое семейство гиперплоскостных элементов (A, τ), таких, что точка A описывает базисную поверхность V_m гиперполосы, а каждая гиперплоскость $\tau(A)$ касается поверхности V_m в соответствующей точке $A \in V_m$. Гиперплоскости $\tau(A)$ называются главными касательными гиперплоскостями. Семейство главных касательных гиперплоскостей $\tau(A)$ огибает тангенциально вырожденную гиперповерхность V^m_n, плоские ($n-m$)-мерные образующие E_{n-m} которой являются характеристиками гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ [3].

Отнесем ($n+1$)-мерное аффинное пространство $\mathcal{A}_{n+1}$ к подвижному реперу $R_o = \{M, \vec{e}_\alpha\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид:

$$d\vec{M} = \omega^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, \quad d\vec{e}_{\alpha} = \omega^{\beta}_{\alpha} \vec{e}_{\beta}, \qquad (1)$$

где формы ω^α, ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства:

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \quad d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \tag{2}$$

Совместим вершину M подвижного репера R_0 с текущей точкой $A \in V_m$ и расположим векторы $\{\vec{e}_i\}$ в касательной плоскости T_m базисной поверхности $V_m \subset H_m$, векторы $\{\vec{e}_a\}$ в характеристической плоскости $E_{n-m} \subset H_m$, а вектор $\vec{e}_{n+1}$ пусть занимает произвольное положение, образуя с векторами $\{\vec{e}_i, \vec{e}_a\}$ репер $\{\vec{e}_\alpha\}$ пространства A_{n+1}. В выбранном репере R_1 первого порядка дифференциальные уравнения гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ записываются в следующем виде:

$$\omega^{n+1} = 0, \tag{3}$$

$$\omega^a = 0, \tag{4}$$

$$\omega_i^{n+1} = b_{ij}\,\omega^j, \quad b_{ij} = b_{ji}; \tag{5}$$

$$\omega_i^a = \lambda_{ij}^a\,\omega^j, \quad \lambda_{ij}^a = \lambda_{ji}^a; \tag{6}$$

$$\omega_a^{n+1} = \Lambda_{ai}\,\omega^i, \tag{7}$$

$$\omega_a^j = \lambda_{ai}^j\,\omega^i, \tag{8}$$

$$\nabla_d b_{ij} = -b_{ij}\,\omega_{n+1}^{n+1} + b_{ijk}\,\omega^k, \tag{9}$$

$$\nabla_d \lambda_{ij}^a = -b_{ij}\,\omega_{n+1}^a + \lambda_{ijk}^a\,\omega^k, \tag{10}$$

$$\nabla_d \Lambda_{ai} = -\Lambda_{ai}\,\omega_{n+1}^{n+1} + \Lambda_{aik}\,\omega^k, \tag{11}$$

$$\nabla_d \lambda_{ai}^j = -\Lambda_{ai}\,\omega_{n+1}^j + \Lambda_{aik}^j\,\omega^k, \tag{12}$$

где b_{ijk}, λ_{ijk}^a симметричны по любой паре индексов, $\Lambda_{a[ik]} = 0$, $\lambda_{a[ik]}^j = 0$.

В настоящей работе изучаются регулярные гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ [3], которые характеризуются невырожденностью основного фундаментального тензора b_{ij} первого порядка:

$$b = \det\|b_{ij}\| \neq 0. \tag{13}$$

В силу (13) введем обратный фундаментальный тензор 1-го порядка b^{ij}:

$$b_{ik}b^{kj} = \delta_i^j; \quad \nabla_d b^{ij} = b^{ij}\omega_{n+1}^{n+1} - b^{ik}b^{jt}\,b_{ktp}\,\omega^p. \tag{14}$$

Системы величин $\Gamma_2 = \{b_{ij}, \lambda_{ij}^a, \Lambda_{ai}, \lambda_{ai}^j\}$ и $\Gamma_3 = \{\Gamma_2, b_{ijk}, \lambda_{ijk}^a, \Lambda_{aik}, \Lambda_{aik}^j\}$ образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Дальнейшее продолжение системы уравнений (9)-(12) вводит геометрические объекты четвертого и более высоких порядков, определяемые гиперполосой $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Таким образом строится последовательность фундаментальных геометрических объектов регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

2. Построим ряд геометрических объектов во второй диф-

ференциальной окрестности образующего элемента регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

Используя компоненты фундаментального объекта Γ_2 второго порядка регулярной гиперполосы H_m, последовательно находим:

$$\Lambda^a = \frac{1}{m} b^{ij} \lambda^a_{ij}, \quad \nabla_\delta \Lambda^a = \Lambda^a \pi^{n+1}_{n+1} - \pi^{\dot a}_{n+1}; \tag{15}$$

$$\Lambda^k_a = b^{ki} \Lambda_{ai}, \quad \nabla_\delta \Lambda^k_a = 0; \tag{16}$$

$$C^a_{ij} = \lambda^a_{ij} - \Lambda^a b_{ij}, \quad \nabla_\delta C^a_{ij} = 0; \tag{17}$$

$$\ell^{ak}_i = C^a_{ij} b^{jk}, \quad \nabla_\delta \ell^{ak}_i = \ell^{ak}_i \pi^{n+1}_{n+1}; \tag{18}$$

$$L_{ab} = \Lambda_{ak} \Lambda^k_b, \quad \nabla_\delta L_{ab} = -L_{ab} \pi^{n+1}_{n+1}. \tag{19}$$

Из уравнений (15)-(19) следует, что Λ^a -квазитензор, Λ^k_a, C^a_{ij} -абсолютные тензоры; ℓ^{ak}_i, L_{ab}-тензоры второго порядка регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

С помощью геометрического объекта 2-го порядка

$$\lambda_{ijk} = b_{ijk} - \lambda^a_{ij} \Lambda_{ak}, \quad \nabla_\delta \lambda_{ijk} = -\lambda_{ijk} \pi^{n+1}_{n+1} + b_{(ij} b_{p)k} \pi^p_{n+1} \tag{20}$$

вводим в рассмотрение квазитензор

$$b^i = b^{ik} b^{ps} \lambda_{psk}, \quad \nabla_\delta b^i = b^i \pi^{n+1}_{n+1} + (m+2) \pi^i_{n+1}, \tag{21}$$

который является обобщением чебышевского вектора [4] на случай регулярных гиперполос аффинного пространства.

Каждая из следующих систем величин

$$\Lambda_k = \Lambda_{ak} \Lambda^a + \frac{1}{m} b^{ij} (b_{ijk} - \lambda_{ijk}), \quad \Lambda^i = b^{ik} \Lambda_k,$$
$$\Lambda^{bk} = \frac{1}{2} \ell^{bk}_i \Lambda^i, \quad \Lambda_{ak} \Lambda^{bk} = \Lambda^b_a \tag{22}$$

образует тензор 2-го порядка:

$$\nabla_\delta \Lambda_k = 0; \nabla_\delta \Lambda^i = \Lambda^i \pi^{n+1}_{n+1}; \nabla_\delta \Lambda^{bk} = \Lambda^{bk} \pi^{n+1}_{n+1}; \nabla_\delta \Lambda^b_a = 0 \tag{23}$$

причем Λ_k, Λ^b_a - абсолютные тензоры 2-го порядка. Комбинируя ранее введенные геометрические объекты, построим следующие геометрические объекты 2-го порядка:

$$B_k = \frac{1}{m} b^{ij} \left(b_{ijk} - \frac{2}{m+2} \lambda_{ijk}\right), \quad \nabla_\delta B_k = b_{ks} \pi^s_{n+1} + \Lambda_{ak} \pi^a_{n+1}; \tag{24}$$

$$B^k = b^{ks} B_s, \quad \nabla_\delta B^k = B^k \pi^{n+1}_{n+1} + \Lambda^i_a \pi^a_{n+1} + \pi^i_{n+1}; \tag{25}$$

$$L_a = B^k \Lambda_{ak}, \quad \nabla_\delta L_a = \Lambda_{ak} \pi^k_{n+1} + L_{ab} \pi^b_{n+1}; \tag{26}$$

$$\widetilde{B} = B_k B^k, \quad \nabla_\delta \widetilde{B} = \widetilde{B} \pi^{n+1}_{n+1} + 2 B_k \pi^k_{n+1} + 2 L_a \pi^a_{n+1}. \tag{27}$$

В дифференциальной окрестности 2-го порядка элемента гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ определяется симметрический по любой паре индексов тензор

$$\ell_{ijk} = (m+2) \lambda_{ijk} - b_{(ij} b_{k)}, \quad \nabla_\delta \ell_{ijk} = -\ell_{ijk} \pi^{n+1}_{n+1}, \tag{28}$$

6 Зак. 3728

который является аналогом обобщенного тензора Дарбу [1] для регулярных гиперполос аффинного пространства. Тензор Дарбу ℓ_{ijk} позволяет построить абсолютный тензор

$$\ell_{ij} = b^{ks} b^{pt} \ell_{kpi} \ell_{stj}\,, \quad \nabla_\delta \ell_{ij} = 0. \tag{29}$$

В общем случае тензор ℓ_{ij} невырожденный ($\ell = \det\|\ell_{ij}\| \neq 0$); следовательно, можно построить обратный ему абсолютный тензор ℓ^{ij}.

Кроме того, с помощью тензора Дарбу ℓ_{ijk} найдем относительный инвариант

$$\ell_o = \ell^{ijk} \ell_{ijk} = b^{ij} \ell_{ij}, \quad \nabla_d \ln \ell_o = \omega^{n+1}_{n+1} + \tilde{c}_k \omega^k. \tag{30}$$

Относительный инвариант ℓ_o является аналогом инварианта Пика [1], [2] для регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

3. Рассмотрим вектор, который проходит через точку базисной поверхности $V_m \subset H_m$ и не лежит в касательной гиперплоскости $\tau(A)$ гиперполосы H_m, т.е. вектор вида

$$\vec{p} = x^i \vec{e}_i + x^a \vec{e}_a + \vec{e}_{n+1}. \tag{31}$$

Дифференциальные уравнения инвариантности вектора $\vec{p}$ (инвариантности прямой $B_1 = \{A, \vec{p}\}$) относительно группы стационарности образующего элемента гиперполосы H_m имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta x^i &= -x^k \pi^i_k + x^i \pi^{n+1}_{n+1} - \pi^i_{n+1}, \\ \delta x^a &= -x^b \pi^a_b + x^a \pi^{n+1}_{n+1} - \pi^a_{n+1}. \end{aligned} \tag{32}$$

В силу соотношений (21), (15) системе уравнений (32) удовлетворяют величины:

$$x^i = -\frac{1}{m+2} b^i; \quad x^a = \Lambda^a. \tag{33}$$

Следовательно, поле вектора $\vec{p}$ (поле прямых B_1)

$$\vec{p} = -\frac{1}{m+2} b^i \vec{e}_i + \Lambda^a \vec{e}_a + \vec{e}_{n+1} \tag{34}$$

внутренним инвариантным образом присоединено к регулярной гиперполосе $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ в дифференциальной окрестности второго порядка ее образующего элемента. Аналогично находим, что поле векторов

$$\vec{p}_a = \Lambda^b_a \vec{e}_b \tag{35}$$

внутренним инвариантным образом присоединено к регулярной гиперполосе $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка её образующего элемента.

Прямая $B_1 = \{A, \vec{p}\}$ для регулярных гиперполос аффинного пространства названа П.М. Олоничевым [5] аффинной нормалью Бляшке. Плоскость $N_{n-m+1} = \{A, \vec{p}, \vec{p}_a\}$, натянутая на аффинную нормаль Бляшке B_1 и характеристику $E_{n-m} = \{A, \vec{p}_a\}$, является внутренней инвариантной нормалью (1-го рода) гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Таким образом, в дифференциальной окрестности 2-го порядка элемента гиперполосы внутренним инвариантным образом присоединено к гиперполосе H_m поле нормалей N_{n-m+1} (1-го рода).

По аналогии с работой [5] гиперквадрику Q_n, касающуюся гиперплоскости $\tau(A)$ в точке $A \in V_m$, назовем соприкасающейся гиперквадрикой гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$, если она имеет касание 2-го порядка с базисной поверхностью $V_m \subset H_m$. В силу (9),(11),(19),(24),(26),(27),(30) в дифференциальной окрестности 2-го порядка элемента гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ найден однопараметрический пучок инвариантно (внутренним образом) присоединенных к гиперполосе полей соприкасающихся гиперквадрик, уравнения которых в репере R_1 первого порядка записываются в виде:

$$b_{ij} x^i x^j + L_{ab} x^a x^b + 2 L_a x^a x^{n+1} + 2\Lambda_{ai} x^a x^i +$$
$$+ 2B_i x^i x^{n+1} + (\tilde{B} + \sigma \ell_0) x^{n+1} x^{n+1} = 2x^{n+1}, \qquad (36)$$

где σ –инвариант.

4. Далее проведем построения геометрических объектов в 3-й дифференциальной окрестности образующего элемента гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$, следуя построениям Г.Ф.Лаптева [1] для гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ и построениям Э.Д.Алшибая [2] для гиперповерхности $V_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

Продолжая уравнения (21) для квазитензора ℓ^i, вводим систему величин p^i_k 3-го порядка, при помощи которых и ранее построенных величин 2-го порядка построим последовательно следующие тензоры и квазитензоры 3-го порядка регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$:

$$\tilde{A}_{jk} = b_{ij} p^i_k + \frac{b^j b^k}{m+2} - (b_j \Lambda_{ak} + (m+2) b_{ij} \lambda^i_{ak}) \Lambda^a, \quad \nabla_\delta \tilde{A}_{ij} = 0; \qquad (37)$$

$$A = b^{ij} \tilde{A}_{ij}, \quad \nabla_\delta A = A \pi^{n+1}_{n+1}; \qquad (38)$$

$$A_{ij} = \tilde{A}_{ij} - \frac{1}{m} b_{ij} A, \quad \nabla_\delta A_{ij} = 0; \quad b^{ij} A_{ij} = 0; \qquad (39)$$

$$\tilde{\tau}_k = b^{it} b^{js} b_{tsk} \tilde{A}_{ij}, \quad \nabla_\delta \tilde{\tau}_k = \tilde{\tau}_k \pi^{n+1}_{n+1}; \qquad (40)$$

$$\tau^p = \frac{1}{2} b^{pk} \tilde{\tau}_k, \quad \nabla_\delta \tau^p = \tau^p \pi^{n+1}_{n+1}; \qquad (41)$$

$$\tau_i = b_{is} \tau^s, \quad \nabla_\delta \tau_i = 0; \qquad (42)$$

$$W^i = \frac{1}{m+2} b^i + \tau^i, \quad \nabla_\delta W^i = W^i \pi^{n+1}_{n+1} + \pi^i_{n+1}; \qquad (43)$$

$$W_i = b_{ik} W^k, \quad \nabla_\delta W_i = b_{ik} \pi^k_{n+1}; \quad W_i = \frac{b_i}{m+2} + \tau_i. \qquad (44)$$

При условии $m = n$, когда базисная поверхность V_m гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ является гиперповерхностью, квазитензор W^i определяет директрису Вильчинского [1],[2]. В силу этого прямую $W_1(A) = \{A, \vec{n} = W^i \vec{e}_i + \Lambda^a \vec{e}_a + \vec{e}_{n+1}\}$ назовем нормалью Вильчинского регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

Аналогично, продолжая уравнения (30), вводим систему величин $\tilde{c}_k$ 3-го порядка и затем последовательно находим новые геометрические объекты 3-го порядка гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$:

$$c_k = \tilde{c}_k - \Lambda_{ak} \Lambda^a; \quad c^i = b^{ik} c_k, \quad \nabla_\delta c^i = c^i \pi^{n+1}_{n+1} - \pi^i_{n+1}, \qquad (45)$$

$$h_\kappa = \frac{1}{2}\left(c_\kappa + \frac{b_\kappa}{m+2}\right), \quad \nabla_\delta h_\kappa = 0; \tag{46}$$

$$h^i = b^{ik} h_\kappa, \quad \nabla_\delta h^i = h^i \pi^{n+1}_{n+1}; \tag{47}$$

$$\mathcal{J}_\kappa = \frac{1}{2}\left(c_\kappa - \frac{1}{m+2} b_\kappa\right), \quad \nabla_\delta \mathcal{J}_\kappa = -b_{\kappa t} \pi^t_{n+1}; \tag{48}$$

$$\mathcal{J}^i = b^{ik} \mathcal{J}_\kappa, \quad \nabla_\delta \mathcal{J}^i = \mathcal{J}^i \pi^{n+1}_{n+1} - \pi^i_{n+1}; \tag{49}$$

$$\hat{c}_i = b_i + \tau_i, \quad \nabla_\delta \hat{c}_i = 0. \tag{50}$$

Квазитензор c^i при $m = n$ определяет аффинную нормаль 4-го порядка гиперповерхности $V_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ [2]. Поэтому по аналогии прямую $\mathfrak{A}_1 = \{A, \vec{n} = c^i \vec{e}_i + \Lambda^a \vec{e}_a + \vec{e}_{n+1}\}$, определяемую квазитензором c^i (45), назовем аффинной нормалью 3-го порядка гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Так как при $m = n$ квазитензор $\mathcal{J}^i$ определяет проективную нормаль 4-го порядка гиперповерхности $V_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ [2], то аналогично будем говорить, что квазитензор $\mathcal{J}^i$ (49) 3-го порядка определяет проективную нормаль $\Pi_1 = \{A, \vec{n} = \mathcal{J}^i \vec{e}_i + \Lambda^a \vec{e}_a + \vec{e}_{n+1}\}$ гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

Следуя работам [1], [2], можно построить канонический пучок одномерных проективных нормалей, определяемый в каждой точке A базисной поверхности V_m регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ инвариантным вектором $\vec{n}(\sigma)$:

$$\vec{n} = [(\sigma - 1) \ell^i + \sigma \mathcal{J}^i] \vec{e}_i + \Lambda^a \vec{e}_a + \vec{e}_{n+1}, \tag{51}$$

где σ -инвариант.

В частности, отсюда выделяется при $\sigma = 0$ нормаль Вильчинского W_1, а при $\sigma = 1$ -проективная нормаль Π_1. Аффинная нормаль B_1 Бляшке, определяемая вектором $\vec{P}$ (34), вообще говоря, не входит в пучок (51). Для регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ имеет место предложение: для того, чтобы нормаль Вильчинского W_1 совпадала с нормалью Бляшке B_1, необходимо и достаточно, чтобы $\tau^i = 0$, а для совпадения проективной нормали Π_1 с нормалью Бляшке B_1 необходимо и достаточно, чтобы $h^i = 0$.

Если одновременно $\tau^i = 0$ и $h^i = 0$, то все прямые канонического пучка (51) регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ совпадают с нормалью Бляшке B_1.

При $m = n$ выводы данной работы согласуются с результатами работы [2]. Отметим, что инвариантный пучок (51) одномерных нормалей 3-го порядка в каждой точке $A \in V_m$ порождает инвариантный пучок $(n-m+1)$-мерных нормалей N_{n-m+1} 3-го порядка данной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем.о-ва, 1953, т.2, с.275-382.

2. А л ш и б а я Э.Д. Дифференциальная геометрия гиперповерхности в многомерном аффинном пространстве.-Тр. Тбилисского гос.ун-та, 1968, т.129, с.319-341.

3. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос.- В кн.: Тр.семин.по векторн. и тензорн.анализу, вып.8, 1950, с.97-272.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

5. О л о н и ч е в П.М. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос. ДАН СССР, т. 80, №2, 1951, с. 165-168.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 10 1979

УДК 513.73

Л.В. С б и т н е в а

СОВЕРШЕННЫЕ S - СТРУКТУРЫ

Цель настоящей работы - найти необходимые и достаточные условия на структуру геодуля канонической редуктивной связности касательно-регулярной S - структуры /в частности, симметрического пространства/.

1. Левая квазигруппа это алгебра $\langle M,\cdot,\backslash\rangle$ с двумя бинарными операциями - умножением $\cdot$ и левым делением $\backslash$ - и тождествами $x\backslash(x\cdot y)=y,\ x\cdot(x\backslash y)=y.$ /1/

Если ещё имеется бинарная операция правого деления $/$ и выполняются тождества $(x\cdot y)/y=x,\ (x/y)\cdot y=x,$ /2/

то алгебра $\langle M,\cdot,\backslash,/\rangle$ называется квазигруппой /см. 10 /. Левая квазигруппа $(\mathcal{L}.Q.)$ /квазигруппа $(Q.)$/ называется леводистрибутивной $(\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D},\mathcal{L},Q.)$, если имеет место тождество

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot(x\cdot z). \qquad /3/$$

Левая квазигруппа /квазигруппа/ идемпотентна $(\mathcal{J}d,\mathcal{L},Q.)$, если

$$x\cdot x=x. \qquad /4/$$

Введём левые и правые сдвиги в квазигруппе / $\mathcal{L}.Q.$ /

$$s_x y\overset{def}{=}x\cdot y,\quad r_y x\overset{def}{=}x\cdot y. \qquad /5/$$

<u>Определение 1.</u> Гладкая $\mathcal{J}d.\mathcal{L}.Q.\langle M,\cdot,\backslash\rangle$ называется гладкой S - структурой многообразия M, если $\forall x\in M\ \exists$ её окрестность U_x такая, что $x\cdot y=y\Rightarrow y=x$ для $\forall y\in U_x$.

M при этом называют S - многообразием.

Замечание. Под гладкостью понимаем C^∞ /или C^ω / гладкость; операции в гладкой квазигруппе считаются C^∞ / C^ω / гладкими. Последнее требование означает, что в достаточно малой окрестности любой точки x S_x имеет единственную неподвижную точку x .

Определение 1 /в других терминах/ см. в [1],[2] .

Определение 2. S - структура $\langle M,\cdot,\backslash\rangle$ - регулярна, если $\langle M,\cdot\rangle$ леводистрибутивна. M при этом называют регулярным S - многообразием.

Замечание. Это понятие введено в [3],[4] в других терминах, а в [5] изучено понятие касательно-регулярной S-структуры.

Определение 3. Касательно-регулярной S - структурой многообразия M называется идемпотентная леводистрибутивная гладкая левая лупа $\langle M,\cdot,\backslash\rangle$ такая, что $(S_x)_{*x}$ не имеет неподвижных векторов, кроме нуля /т.е. $(S_x)_{*x}-(id)_{*x}$ - невырожденное отображение $T_x(M)\longrightarrow T_x(M)$.

2. Определение 4. Гладкая S - структура $\langle M,\cdot,\backslash\rangle$ называется: 1/ локально правильной, если для $\forall a\in M$ $\exists$ окрестность $U_a\ni a$ такая, что τ_a есть диффеоморфизм U_a и $\tau_a(U_a)$, /т.е. τ_a - локальный диффеоморфизм, или - локально обратим вблизи a /.

2/ глобально-правильной, если τ_a - диффеоморфизм для $\forall a\in M$ $(\tau_a x = x\cdot a)$.

Предложение I. Гладкая S - структура касательно-регулярна, если и только если она регулярна и локально правильна.

3. Введем теперь понятие локальной S- структуры многообразия.

Определение 5. Будем говорить, что на гладком многообразии M определена гладкая локальная левая квазигруппа $\langle U_\varepsilon,\cdot,\backslash\rangle$ /соотв. квазигруппа $\langle U_\varepsilon,\cdot,\backslash,/\rangle$ с центром в точке ε, если U_ε - открытая окрестность точки ε и определены гладкие отображения $U_\varepsilon\times U_\varepsilon\ni(x,y)\xrightarrow{\varphi} x\cdot y\in M$, $U_\varepsilon\times U_\varepsilon\ni(x,y)\xrightarrow{\psi} x\backslash y\in M$ /а в случае квазигруппы еще и $U_\varepsilon\times U_\varepsilon\ni(x,y)\xrightarrow{\chi} x/y\in M$ / такие, что выполняются всюду, где левые и правые части имеют смысл, тождества $x\backslash(x\cdot y)=y$, $x\cdot(x\backslash y)=y$ /дополнительно $(x\cdot y)/y=x$, $(x/y)\cdot y=x$ в случае квазигруппы/.

Определение 6. Покрытие $\{\langle U,\overset{(U)}{\cdot},\overset{(U)}{\backslash}\rangle\}$ многообразия M гладкими локальными $\mathcal{L}.Q.$ /или $Q.$ / назовем согласованным, если для $\forall U',U''\in\{U\}$ операции умножения и деления относительно U' и U'' соответственно совпадают на $U'\cap U''$, т.е. $x,y\in U'\cap U''\Rightarrow x\overset{(U')}{\cdot}y=x\overset{(U'')}{\cdot}y$, $x\overset{(U')}{\backslash}y=x\overset{(U'')}{\backslash}y$ /и в случае квазигрупп еще $x\overset{(U')}{/}y=x\overset{(U'')}{/}y$/. Согласованное гладкое левоквазигрупповое /квазигрупповое/ покрытие будем называть левоквазигрупповым /квазигрупповым/ атласом /или $\mathcal{L}.Q.$ - атласом / Q - атласом// на многообразии M . Очевидным образом вводится понятие эквивалентных квазигрупповых атласов и максимального $Q.$ атласа.

Определение 7. Многообразие вместе с максимальным $\mathcal{L}.Q.$ - атласом / $Q.$ атласом/ назовем $\mathcal{L}.Q.$ - структурой /соотв. $Q.$ - структурой/.

Определение 8. Если все квазигруппы $Q.$ - атласа идемпотентны и леводистрибутивны, то будем говорить об идемпотентном леводистрибутивном $Q.$ - атласе /$\mathcal{J}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ - атлас/. Многообразие M с полным $\mathcal{J}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ атласом назовем $\mathcal{J}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ структурой.

Замечание 1. Очевидно, локально-правильная регулярная - структура есть $\mathcal{J}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q$ - структура /но не наоборот/, откуда, в силу предложения 1, следует что касательно-регулярная S - структура есть $\mathcal{J}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$- структура.

Замечание 2. Понятие $\mathcal{J}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$- структуры есть локальная версия понятия регулярной локально-правильной S-структуры.

4. Будем рассматривать теперь $\mathcal{J}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$- структуры. Фиксируя /призвольно/ $\varepsilon\in M$ и вводя $S_\varepsilon=S$, $\tau_\varepsilon=\tau$, можно рассмотреть главный изотоп [10] локальной квазигруппы $\langle U_\varepsilon,\cdot,\backslash,/\rangle$ $\mathcal{J}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ атласа /локально, в окрестности

точки ε / $x\circ y \overset{def}{=} r^{-1}x\cdot s^{-1}y$. /6/

Это – локальная лупа с нейтральным элементом ε.

Введём еще левые и правые сдвиги

$$L_x y \overset{def}{=} x\circ y, \quad R_y x \overset{def}{=} x\circ y. \qquad /7/$$

Семейство локальных луп вида /6/ $\{\langle U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\circ}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/\!/}, \varepsilon\rangle\}$ образует открытое покрытие многообразия M. Это – частный случай одулярной структуры на многообразии M /см. [9] /.

<u>Определение 9.</u> Назовем такую одулярную структуру главноизотопной для $\mathcal{Jd}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.\mathcal{Q}$ – структуры.

<u>Предложение 2.</u> Лупа $\langle U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\circ}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/\!/}, \varepsilon\rangle$ /см. /6// главноизотопная локальной $\mathcal{Jd}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.$ квазигруппе $\langle U_\varepsilon, \cdot, \backslash, /\rangle$ – специальная, т.е. $L^{-1}_{x\circ y}L_x L_y$ – автоморфизмы.

<u>Предложение 3.</u> Одулярная структура $\{\langle U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\circ}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/\!/}, \varepsilon\rangle\}$ главноизотопна $\mathcal{Jd}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.\mathcal{Q}.$ структуре $\{\langle U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\cdot}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/}, \rangle\}$, если и только если

/I/ $z \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} (u \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} (s_\varepsilon z \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash} w)) = (z \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} (u \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} s_\varepsilon \overset{(U_\varepsilon)}{z^{-1}})) \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} w,$

где $s_\varepsilon \in Aut\langle U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\circ}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/\!/}, \varepsilon\rangle$ такой, что $s_\varepsilon x = x \Rightarrow x = \varepsilon$;

/2/ $L^{(U_\varepsilon)}_a : z \to a \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} z$ есть локальный изоморфизм $\langle U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\circ}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/\!/}, \varepsilon\rangle$ и $\langle U_a, \overset{(U_a)}{\circ}, \overset{(U_a)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_a)}{/\!/}, a\rangle$ такой, что $L^{(\varepsilon)}_a s_\varepsilon = s_a L^{(\varepsilon)}_a$. При этом $r_\varepsilon x = z \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} s_\varepsilon \overset{(U_\varepsilon)}{z^{-1}}$.

5. <u>Определение 10.</u> $\mathcal{Jd}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.\mathcal{Q}$ структуру назовем совершенной, если локальные лупы ее главноизотопной одулярной структуры обладают левым свойством степенной альтернативности / $\mathcal{L}.\mathcal{P}.al.$ – свойство/, т.е. $\forall n,m \in \mathbb{Z}$ $x^n\circ(x^m\circ y) = x^{n+m}\circ y$. Тождество /1/ предложения 3 принимает для совершенной структуры вид:

$$z\circ(u\circ(sz^{-1}\circ w)) = (z\circ(u\circ sz^{-1}))\circ w. \qquad /8/$$

Будем называть такое тождество <u>особым полуболовым тождеством</u> / $\mathcal{S}.\mathcal{H}\text{-}\mathcal{B}.$ тождество/, если s – автоморфизм.

<u>Замечание.</u> Полуболовым тождеством / $\mathcal{H}.\text{-}\mathcal{B}.$ тождеством/ называют $z\circ(u\circ(\mu z\circ w)) = (z\circ(u\circ\mu z))\circ w,$ где μ – сюръекция. /9/

<u>Предложение 4.</u> Полуболова лупа имеет левое свойство обратимости.

Введем теперь инвариантную аффинную связность в гладкой $\mathcal{Jd}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.\mathcal{Q}.$ структуре.

<u>Теорема I.</u> Пусть $\{\langle U, \backslash, /\rangle\}$ – гладкая $\mathcal{Jd}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.\mathcal{Q}.$ – структура на многообразии M, а s_x $(x\in M)$ – ее локальные симметрии. Обозначим через s тензорное поле типа / I,I /, задаваемое как $S_x = (s_x)_{*x}$. Тогда

/A/ Существует единственная связность ∇ на M /называемая канонической /или связностью Рашевского/ такая, что инвариантна при действии s_x $(\forall x)$, $\nabla S = 0$ и ∇ имеет параллельные кривизну и кручение

/B/ Локальные автоморфизмы $\mathcal{Jd}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.\mathcal{Q}.$ структуры есть локальные аффинные автоморфизмы относительно связности ∇.

<u>Следствие.</u> Каноническая связность ∇ инвариантна при действии s_x, $x\in M$

6. Рассмотрим теперь геодулярное покрытие $\mathcal{Jd}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.\mathcal{Q}.$ многообразия, порожденное канонической связностью ∇ /см 9 /. Тогда с каждой точкой ε будет, в частности, связана локальная геодезическая лупа

$$\langle U_\varepsilon, \circledcirc, \backslash\!\backslash, /\!/, \varepsilon\rangle \quad \overset{(\varepsilon)}{\mathcal{L}}_x y \overset{def}{=} x \overset{(\varepsilon)}{\circledcirc} y. \qquad /10/$$

Лупа / 10 / – специальная и имеет левое свойство степенной альтернативности / $\mathcal{L}.\mathcal{P}.al.$ свойство/

$$\mathcal{L}_{x^n}\mathcal{L}_{x^m} = \mathcal{L}_{x^{n+m}}, \quad (n,m\in\mathbb{Z}), \qquad /11/$$

что легко следует из того факта, что $\mathcal{L}_x$ – локальные автоморфизмы канонической геодулярной структуры /см. [12],[9]/.

<u>Теорема 2.</u> Гладкая геодулярная структура тогда и только тогда порождает редуктивную связность, когда она $\mathcal{L}.\mathcal{P}.al.$ структура и левые сдвиги ее локальных луп – автоморфизмы. Отметим теперь, что так как s_x – локальные автоморфизмы

связности ∇ , то и $L_x^{(\varepsilon)} = S_{\tau^{-1}x} S^{-1}$ тоже.
Нетрудно теперь показать, что $\mathcal{L}_x S \mathcal{L}_x^{-1} = S_x$, /12/

$$S\mathcal{L}_x S^{-1} = \mathcal{L}_{Sx}, \quad \mathcal{L}_x \mathcal{L}_{Sx^{-1}} = S_x S^{-1}. \qquad /13/, /14/$$

Откуда после некоторых преобразований имеем

$$x \nabla (Sx^{-1} \nabla (u \nabla (Su^{-1} \nabla z))) =$$

$$= [x \nabla (Sx^{-1} \nabla u)] \nabla ([Sx \nabla (S^2 x^{-1} \nabla Su)]^{-1} \nabla [Sx \nabla (S^2 x^{-1} \nabla z)]). \qquad /15/$$

Замечание. Легко убедиться, что /13/, /15/ и $\mathcal{L}.\mathcal{P}.al.$ свойство /11/ дают необходимые и достаточные условия того, что лупа /10/ есть геодезическая лупа канонической связности ∇ $\mathcal{I}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ – структуры.

7. Обратимся к рассмотрению совершенной $\mathcal{I}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ структуры /определение 10/. В этом случае ее главноизотопная одулярная структура в силу предложения 3 и теоремы 2 есть геодулярная структура редуктивной связности, удовлетворяющей условиям теоремы 1 и в силу единственности такой связности, имеем $L_x = \mathcal{L}_x$. /16/

Таким образом, получаем:

Предложение 5. $\mathcal{I}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ структура совершенна, если и только если ее главноизотопная структура совпадает с геодулярной структурой канонической связности ∇ .

В случае совершенной $\mathcal{I}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ – структуры, в силу /16/, /14/ и /8/, $S_x S_\varepsilon^{-1} = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_{Sx^{-1}} = \mathcal{L}_{x \circ Sx^{-1}} = \mathcal{L}_{\tau x}$. /17/

Отсюда следует геометрическая характеристика совершенных структур.

Предложение 6. $\mathcal{I}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ – структура совершенна, если и только если ее элементарные трансвекции $S_x S_\varepsilon^{-1}$ индуцируют /локально/ параллельный перенос вдоль геодезической, соединяющей ε с τx /по отношению к канонической связности ∇ /. Из /17/ следует, что для совершенной $\mathcal{I}d.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ структуры /15/ эквивалентно /8/.

Список литературы

[1]. Ledger A.J. Espaces de Riemann symétriques généralisés. C. r. Acad. Sci. 1967, 264, N22, A947-948.

[2] Ledger A.J. Obata M. Affine and Riemannian s-manifolds. J. Different. Geom. 1968, 2, N4, 451-459.

[3] Graham P.J. Ledger A.J. Sur un classe de s-variétés riemanniennes ou affines. C.r. Acad. Sci. 1968, 267, N2, A105-A107.

[4] Graham P.J. s-regular manifolds. Differential geometry-in honour of Kentaro Yano. Tokyo. 1972, 133-144.

[5] Kowalsky O. Smooth and Affine s-manifolds. Periodica Math. Hungarica. vol 8 (3-4), (1977), 299-311.

6 Рашевский П.К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением. Труды семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ, 1950, вып. 8, 82-92.

7 Рашевский П.К. О геометрии однородных пространств. ДАН СССР, 1951, 80, № 2, 169-171.

8 Nomizu K. Invariant affine connection on homogeneous spaces. Amer. J. Math. 1954, 76, N1, 33-65.

9 Сабинин Л.В. Одули как новый подход к геометрии со связностью. ДАН СССР, 1977, т.233, № 5.

10 Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. М., Наука , 1967.

11 Мальцев А.И. Аналитические лупы.- Математический сборник, 1955, т. 36 /78/, № 3.

[12] Kikkawa M. Geometry of Homogeneous Lie Loops. Hiroshima Math. J. 5. (1975), 141-179.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 10 1979

УДК 513.73

Г.Л. Свешникова

КОНГРУЭНЦИИ $\mathcal{J}_2$ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В ЛИНИЮ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В трехмерном проективном пространстве продолжается изучение конгруэнции кривых второго порядка с одной вырождающейся фокальной поверхностью [1]. Получен класс конгруэнций с вырождающейся в линию фокальной поверхностью, который называется конгруэнциями $\mathcal{J}_2$. Рассмотрены геометрические свойства конгруэнции $\mathcal{J}_2$.

§ 1. Конгруэнции $\mathcal{J}$.

Конгруэнцией $\mathcal{J}$ в работе [1] называется конгруэнция кривых второго порядка, для которой существуют две невырождающиеся фокальные поверхности S_i ($i,j,\kappa=1,2$), не являющиеся огибающими поверхностями плоскостей коник; существует фокальная поверхность (F), вырождающаяся в линию, касательная ℓ к которой не инцидентна плоскости кривой и фокальные линии на поверхностях S_i не соответствуют друг другу.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{J}$ к каноническому реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, в котором вершины A_i помещены в фокальные точки коники, описывающие поверхности S_i, вершины A_3 - в полюс прямой A_1A_2 относительно коники; вершина A_4 является четвертой гармонической к фокусу F относительно точек пересечения с прямой ℓ касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i.

Осуществим нормировку вершин репера таким образом, чтобы единичная точка $E_{12}=A_1+A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна прямой A_3F, где

$$F = A_1 + A_2 - \sqrt{2} A_3$$

-фокус, описывающий вырождающуюся в линию фокальную поверхность.

Уравнения коники и система уравнений конгруэнции $\mathcal{J}$ при соответствующей нормировке вершин репера приводятся к виду:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0 \tag{1}$$

$$\omega_i^j = (-1)^j \Gamma_1^{21} \omega_i, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3\kappa} \omega_\kappa, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{i\kappa} \omega_\kappa,$$

$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4\kappa} \omega_\kappa, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{i\kappa} \omega_\kappa, \quad \omega_3^4 = \Gamma_4^{3\kappa} \omega_\kappa, \tag{2}$$

$$\omega_i^i - \omega_3^3 + \omega_j^i + \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega_1^3 + \omega_2^3 - 2\omega_3^i) = 0,$$

причем имеют место конечные соотношения:

$$\Gamma_4^{ij} - \Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{3j} + \Gamma_3^{4j}\Gamma_4^{3i} - \sqrt{2}(\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij} - \Gamma_3^{4j}\Gamma_4^{ii}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_4^{3j} - \Gamma_4^{3i}) - \Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij} + \Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii} = 0. \tag{3}$$

Формы Пфаффа

$$\omega_i^4 = \omega_i$$

приняты в качестве базисных линейно независимых форм. По индексам i и j суммирование не производится и $i \neq j$.

§ 2. Конгруэнции $\mathcal{J}_2$

Определение. Конгруэнцией $\mathcal{J}_2$ называется конгруэнция $\mathcal{J}$, для которой выполняются следующие условия: 1/прямые A_iA_3 являются касательными к линиям $\omega_i = 0$ на поверхностях (A_i) и линиям $\omega_j = 0$ на поверхности (A_3), 2/прямые A_iA_4 являются касательными к линиям $\omega_j = 0$ на поверхностях (A_i), 3/ $\Gamma_3^{11} + \Gamma_3^{22} = 0$.

Теорема. Конгруэнции $\mathcal{J}_2$ существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

9 Зак. 3728

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая в системе уравнений (2) и соотношениях (3) условия определения конгруэнции $\mathcal{J}_2$, приведем систему уравнений Пфаффа конгруэнции к виду:

$$\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=\Gamma_i^{3j}\omega_j,\ \omega_3^i=(-1)\Gamma_3^{11}\omega_i,\ \omega_3^4=0, \tag{4}$$
$$\omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\ \omega_i^i-\omega_3^3+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3+\omega_2^3-2\omega_3^i)=0,$$

причем конечные соотношения примут вид:

$$\Gamma_4^{ij}+\frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_4^{3j}-\Gamma_4^{3i})=0. \tag{5}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения $\omega_i^j=0$, получаем $\Gamma_4^{ii}=0$.

Обозначим

$$\Gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_4^{31}-\Gamma_4^{32}). \tag{6}$$

При внешнем дифференцировании уравнений $\omega_4^i=(-1)^j\Gamma\omega_j$ будем иметь уравнение Пфаффа

$$d\Gamma+\Gamma(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)+\Gamma_3^{11}(\Gamma_4^{32}\omega_1+\Gamma_4^{31}\omega_2)=0 \tag{7}$$

и квадратичное уравнение

$$d\Gamma_4^{32}\wedge\omega_3^1-d\Gamma_4^{31}\wedge\omega_3^2+2(\Gamma_4^{31}\omega_3^2-\Gamma_4^{32}\omega_3^1)\wedge(\omega_3^3-\omega_4^4)+$$
$$+\sqrt{2}\Gamma_3^{11}(\Gamma_3^{11}(\Gamma_4^{32}+\Gamma_4^{31})+\Gamma_4^{32}(\Gamma_1^{32}+\tfrac{1}{2}\Gamma_2^{31})-\Gamma_4^{31}(\Gamma_2^{31}+\tfrac{1}{2}\Gamma_1^{32}))\omega_1\wedge\omega_2^2+$$
$$+6\Gamma^2\omega_1\wedge\omega_2=0. \tag{8}$$

После дифференцирования уравнения $\omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k$ получим квадратичное уравнение

$$d\Gamma_4^{31}\wedge\omega_1+d\Gamma_4^{32}\wedge\omega_2+2(\omega_3^3-\omega_4^4)\wedge(\Gamma_4^{31}\omega_1+\Gamma_4^{32}\omega_2)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_4^{31}\Gamma_1^{32}-\Gamma_4^{32}\Gamma_2^{31})\omega_1\wedge\omega_2=0. \tag{9}$$

Из уравнений (8),(9) в силу уравнения (7) следует равенство:

$$\Gamma=0 \tag{10}$$

и уравнения Пфаффа

$$\omega_4^i=0,\ \omega_4^3=0. \tag{11}$$

Осуществляя продолжение системы

$$\omega_3^i=(-1)^j\Gamma_3^{11}\omega_i,$$

получаем уравнение Пфаффа

$$d\ln\Gamma_3^{11}+\omega_3^3-\omega_4^4-\sqrt{2}(\omega_1^3+\omega_2^3)=0 \tag{12}$$

и соотношение

$$\Gamma_1^{32}+\Gamma_2^{31}=0. \tag{13}$$

Внешнее дифференцирование уравнений

$$\omega_i^3=(-1)^j\Gamma_1^{32}\omega_j$$

дает уравнение Пфаффа

$$d\ln\Gamma_1^{32}+\omega_3^3-\omega_4^4-\sqrt{2}(\omega_3^1+\omega_3^2)=0, \tag{14}$$

замыкание которого тождественно удовлетворяется.

После преобразований система уравнений Пфаффа (4) преобразовалась к виду:

$$\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=(-1)^j\Gamma_1^{32}\omega_j,\ \ \omega_3^i=(-1)^j\Gamma_3^{11}\omega_i,$$
$$\omega_3^4=\omega_4^i=\omega_4^3=0,\ \ \omega_i^i-\omega_3^3+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3+\omega_2^3-2\omega_3^i)=0,$$
$$d\ln\Gamma_3^{11}+\omega_3^3-\omega_4^4-\sqrt{2}(\omega_1^3+\omega_2^3)=0,$$
$$d\ln\Gamma_1^{32}+\omega_3^3-\omega_4^4-\sqrt{2}(\omega_3^1+\omega_3^2)=0.$$

Система уравнений Пфаффа (15), определяющая конгруэнции $\mathcal{J}_2$, вполне интегрируема.

Осуществляя последнюю нормировку вершин репера R таким образом, что

$$\Gamma_1^{32} = 1, \tag{16}$$

и вводя обозначение

$$\Gamma_3^{11} = \gamma,$$

получим матрицу компонент деривационных формул подвижного репера R конгруэнции $\mathcal{J}_2$ в следующем виде:

$$\begin{matrix} \sqrt{2}\gamma\omega_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}(\omega_2-\omega_1) & 0 & \omega_2 & \omega_1 \\ 0 & -\sqrt{2}\gamma\omega_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}(\omega_2-\omega_1) & -\omega_1 & \omega_2 \\ \gamma\omega_1 & -\gamma\omega_2 & \frac{\sqrt{2}}{4}(\omega_2-\omega_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}+\gamma\right)(\omega_2-\omega_1) \end{matrix}$$

Используя матрицу компонент, легко проверить справедливость следующих свойств конгруэнции $\mathcal{J}_2$: 1/поверхности являются торсами, 2/координатные линии на поверхности сопряжены, 3/поверхность (A_3) является огибающей поверхностью семейства плоскостей коник, 4/асимптотические линии поверхности (A_3) пересекают прямую AA_2 в точках $E_{12} = A_1 + A_2$ и $E_{12}^* = A_1 - A_2$, гармонически делящих точки и 5/поверхность $(E_{12}^*)^2$ является плоскостью, 6/фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят точки A_1 и A_2, 7/существует расслоение от конгруэнции прямых (A_3A_4) к конгруэнции прямых (A_1A_2) и от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к неподвижной прямой $\mathcal{F}A_4$.

В репере $R_1 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, где $B_1 \equiv A_1 + A_2$, $B_2 \equiv A_1 - A_2$, $B_3 \equiv A_3$, $B_4 \equiv A_4$, для огибающей поверхности (B_3) семейства плоскостей коник получено каноническое представление:

$$\frac{1}{2}\gamma z = xy + \frac{\sqrt{2}(1-2\gamma)}{\gamma}x^2y - \frac{2\sqrt{2}}{\gamma}y^3 + [4],$$

где $\quad x = \frac{y^1}{y^3},\ y = \frac{y^2}{y^3},\ z = \frac{y^4}{y^3},$

[4]-слагаемые, порядок малости которых не ниже 4, трехпараметрическое семейство соприкасающихся квадрик:

$$2y^1y^2 + 2b_{14}y^1y^4 + 2b_{24}y^2y^4 - \gamma y^3y^4 + b_{44}(y^4)^2 = 0$$

и квадрика Ли:

$$2y^1y^2 - \sqrt{2}\gamma y^1y^4 - \gamma y^3y^4 = 0.$$

Семейство квадрик Ли поверхности (B_3) конгруэнции $\mathcal{J}_2$ является однопараметрическим.

Список литературы

1. С в е ш н и к о в а Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с одной вырождающейся фокальной поверхностью.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.113-125.

2. Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР.
Вып.10 1970

УДК 513.73

Е.К. Сельдюков

ГЕОМЕТРИЯ СЕТЕЙ, ИНВАРИАНТНО ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ЗАДАННЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СЕТЯМ НА V_p В E_n.

1. На p-мерной поверхности V_p пространства E_n зададим несколько семейств гладких линий. Эти семейства определяют на V_p систему скалярных функций (например, нормальная $\mathcal{K}_{N(i)}$ или геодезическая $\mathcal{K}_{T(i)}$ кривизна линий семейства) — систему инвариантов. Каждая такая функция f, отличная от постоянной, задает на поверхности семейство подмногообразий $f = const$. p различных семейств таких подмногообразий определяют сеть на поверхности V_p.

2. Если на поверхности задана сеть Σ_p, то можно для k семейств линий сети выбрать инвариант f, а для $p-k=\ell$ семейств линий — другой инвариант φ. В общем случае получаем p семейств подмногообразий, а следовательно, новую сеть на V_p.

Рассмотрим случай ортогональной сети. В качестве инвариантов будем использовать нормальную и геодезическую кривизну линий данной сети. Присоединим к поверхности V_p подвижной ортогональный репер, у которого векторы $\vec{e}_i$ $(i=1,\dots,p)$ взяты на касательных к линиям данной сети в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha=p+1,\dots,n)$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_{n-p}(x)$ касательной плоскости $T_p(x)$, причем векторы $\vec{e}_a$ $(a=p+1,\dots,p+q)$ расположены в главной нормали $N_q(x)$ поверхности. Тогда инфинитезимальные перемещения репера определяются системой уравнений [2]

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i\,, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^a \vec{e}_a\,,$$

$$d\bar{e}_a = \omega_a^i \bar{e}_i + \omega_a^b \bar{e}_b + \omega_a^\sigma \bar{e}_\sigma\,,$$

$$d\bar{e}_\sigma = \omega_\sigma^a \bar{e}_a + \omega_\sigma^s \bar{e}_s \quad (\sigma, s = p+q+1,\dots,n).$$

Здесь $\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j$, где $b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha$, причем $b_{ij}^\sigma = 0$, а так как векторы $\bar{e}_i$ репера взяты на касательных к линиям сети в точке x, то формы ω_i^j $(i \neq j)$ — главные, то есть $\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k$, где a_{ik}^j — инварианты сети. В силу ортонормированности репера имеем

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha + \omega_\alpha^i = 0.$$

Дифференцируя уравнение $\mathcal{K}_{N(i)} = const$, находим дифференциальное уравнение поверхности $\bar{V}_{p-1}^i$, присоединенной к i-й линии сети в точке x:

$$\bar{p}_{ik}\, \omega^k = 0,$$

где $$\bar{p}_{ik} = \sum_a \left[b_{ii}^a \left(b_{iik}^a + 2 b_{ij}^a a_{ik}^j \right) \right].$$

Аналогично, дифференцируя уравнение $\mathcal{K}_{T(i)} = const$, получаем дифференциальное уравнение поверхности $\hat{V}_{p-1}^i$, присоединенной к i-й линии сети в точке x:

$$\hat{p}_{ik}\, x^k = 0,$$

где

$$\hat{p}_{ik} = \sum_j \left[a_{ii}^j \left(a_{iik}^j + a_{il}^j a_{ik}^l + \sum_a b_{ii}^a b_{jk}^a \right) \right].$$

Вектор $\bar{N}_i(\hat{N}_i)$ в пространстве E_p (i — фиксировано) с координатами $\bar{p}_{ik}(\hat{p}_{ik})$ есть вектор нормали поверхности $\bar{V}_{p-1}^i(\hat{V}_{p-1}^i)$. Доказано, что величины $\bar{p}_{ik}$ и $\hat{p}_{ik}$ являются абсолютными инвариантами сети.

Доказано также, что $\bar{p}_{ik} = \bar{b}_{ii} \cdot \bar{b}_{iik}$ $(\hat{p}_{ik} = \bar{a}_{ii} \cdot \bar{a}_{iik})$, где через $\bar{b}_{iik}$ $(\bar{a}_{iik})$ обозначена производная вектора нормальной (геодезической) кривизны в направлении линии ω^k

3. Рассмотрим геометрические свойства поверхностей $\overline{V}^i_{p-1}$ и V^i_{p-1}.

Пусть F^i_k – псевдофокусы касательной $[x, \overline{e}_k]$, а $\widetilde{F}^i_k$ – точки, инверсные к псевдофокусам относительно сферы $S(x,1)$. Справедлива

Т е о р е м а. Для любой точки поверхности $\hat{V}^i_{p-1}$ длина диагонали $(p-1)$-мерного прямоугольного параллелепипеда, построенного на точках x, $\widetilde{F}^i_{j_1}, \widetilde{F}_{j_2}, \dots, \widetilde{F}^i_{j_{p-1}}$ (все значения $i, j_1, \dots, j_{p-1}$ различны), равна $\mathcal{K}_{T(i)}$.

Введем понятие, аналогичное понятию псевдофокуса, но в главной нормали. Для произвольной точки $\overline{y} = \overline{x} + y^\alpha \overline{e}_\alpha$, принадлежащей главной нормали, потребуем, чтобы $d\overline{y} \in [x, \overline{e}_1, \dots \overline{e}_{\ell-1}, \overline{e}_{\ell+1}, \dots, \overline{e}_n]$, когда точка x смещается по линии ω^ℓ. При фиксированном ℓ получаем, что y^a должны удовлетворять уравнению $\sum\limits_a b^a_{\ell\ell} y^a - 1$. Это есть уравнение плоскости размерности $q-1$, расположенной в $N_q(x)$. Для всей сети Σ_p $(\ell = 1, 2, \dots, p)$ в главной нормали получим p таких плоскостей. На прямой $[x, \overline{e}_a]$ рассмотрим p точек $\mathcal{F}^i_a$ пересечения этой прямой с полученными плоскостями. Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}^i_a$ – точки, инверсные к этим точкам относительно сферы $S(x,1)$. Тогда справедлива

Т е о р е м а. Для любой точки поверхности $\overline{V}^i_{p-1}$ длина диагонали q-мерного прямоугольного параллелепипеда, построенного на точках x, $\widetilde{\mathcal{F}}^i_a$ $(a = p+1, \dots, p+q)$, равна $\mathcal{K}_{N(i)}$.

Интересен случай, когда сеть Σ_p есть сеть линий кривизны относительно одномерной нормали [1]. В этом случае справедлива

Т е о р е м а. Для любой точки поверхности $\overline{V}^i_{p-1}$ расстояние от точки x до касательной плоскости к присоединенной поверхности в точке A_i (точка A_i лежит на одномерной нормали и соответствует смещению вдоль i-й линии сети Σ_p) равно $\dfrac{1}{\mathcal{K}_{N(i)}}$.

4. Рассмотрим ортогональную сеть Σ_p и выберем $\overline{p} + \hat{p} = p$ линий этой сети (в частности, $\overline{p}$ или $\hat{p}$ может быть равно нулю). Пусть индекс $\overline{i}$ принимает $\overline{p}$ значений из множества $\{1, 2, \dots, p\}$, а индекс $\hat{i}$ – $\hat{p}$ значений из того же множества. Тогда система уравнений

$$\sum_a [b^a_{\overline{i}\overline{i}} (b^a_{\overline{i}\overline{i}k} + 2 b^a_{\overline{i}j} a^j_{\overline{i}k})] \omega^k = 0,$$

$$\sum_j [a^j_{\hat{i}\hat{i}} (a^j_{\hat{i}\hat{i}k} + a^j_{\hat{i}\ell} a^\ell_{\hat{i}k} + \sum_a b^a_{\hat{i}\hat{i}} b_{jk})] \omega^k = 0$$

задает голономную сеть $\hat{\overline{\Sigma}}_p$ на поверхности V_p. Если $\hat{p} = 0$ $(\overline{p} = 0)$, то будем обозначать новую сеть $\overline{\Sigma}_p$ $(\hat{\Sigma}_p)$. Пусть

$$p_{ik} = \begin{cases} \overline{p}_{\overline{i}k}, & \text{если } i = \overline{i}, \\ \overline{p}_{\hat{i}k}, & \text{если } i = \hat{i}. \end{cases}$$

Обозначим матрицу $\| p_{ik} \|$ через A, а алгебраическое дополнение элемента p_{ik} определителя $|A|$ через β^k_i. Тогда уравнение i-й линии сети можно записать в виде

$$\frac{\omega^1}{\beta^1_i} = \frac{\omega^2}{\beta^2_i} = \dots = \frac{\omega^p}{\beta^p_i}.$$

Сеть $\hat{\overline{\Sigma}}_p$ существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

5. Перейдем к реперу, первые p векторов $\overline{e}'_i$ которого построены на касательных к линиям новой сети, а остальные совпадают с $\overline{e}_\alpha$. Тогда $\overline{e}'_i = \dfrac{\beta^k_i}{|A|} \overline{e}_k$. Вектор $\overline{e}'_i$ (при фиксированном i) можно интерпретировать как векторное произведение $p-1$ векторов $\overline{n}_{i'} = \sum\limits_k p_{i'k} \overline{e}_k$ $(i' = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, p)$ в пространстве E_p, где $\overline{n}_i$ – векторы нормалей поверхностей $\overline{V}^{i'}_{p-1}$, $\hat{V}^{i'}_{p-1}$.

Пусть $d\overline{x} = \theta^i \overline{e}'_i$. Обозначим $\dfrac{\beta^k_i}{|A|}$ через B^k_i. Тогда $\theta^i = p_{ik} \omega^k$, причем $\| \widetilde{B}^i_k \| = \| p_{ik} \|$, где $\| \widetilde{B}^i_k \|$ – матрица, обратная матрице $\| B^k_i \|$.

Имеем

$$d\overline{e}'_i = \theta^j_i \overline{e}'_j + \theta^a_i \overline{e}_a,$$

где $\theta^j_i = \hat{a}^j_{ik} \theta^k$, а $\theta^a_i = b^a_{ij} \theta^j$. Так как $\mathcal{D}\theta^i = 0$, то

$$d\widetilde{B}^i_j \wedge \omega^j - \widetilde{B}^i_k \omega^k_j \wedge \omega^j = 0. \qquad (*)$$

Раскрывая ($*$) по лемме Картана, будем иметь:

$$d\widetilde{B}^i_j - \widetilde{B}^i_k \omega^k_j = t^i_{je}\omega^e, \text{ где } t^i_{je} = t^i_{je}.$$

Доказано, что

$$\hat{\ell}^a_{ij} = B^k_i B^\ell_j \ell^a_{k\ell},$$

$$\hat{a}^j_{ik} = -B^\ell_i B^m_k t^j_{\ell m}.$$

Если обозначим $\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j$ через $\hat{\gamma}_{ij}$, то $\hat{\gamma}_{ij} = \sum_k B^k_i B^k_j$.

6. Рассмотрим случай, когда матрица $\mathcal{A}$ ортогональная. В этом случае V_2 налагается на плоскость, а на p-мерной поверхности новая сеть будет геодезической. Кроме того, на V_p в E_n новая сеть будет чебышевской тогда и только тогда, когда она получебышевская (то есть достаточно, чтобы $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ векторов $\vec{a}_{12}, \ldots, \vec{a}_{1p-1}, \vec{a}_{23}, \ldots, \vec{a}_{2p-1}, \ldots, \vec{a}_{p-2p-1}$ из векторов $\vec{a}_{ij}$ при $i \neq j$ были равны нулю).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а з ы л е в В.Т. Об одном свойстве геодезических линий на многомерных поверхностях.- Уч. записки МГПИ им. В.И.Ленина, 1, № 374, 1970, с.41-52.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.- Лит.матем.сб., 6, № 4, 1966, с.475-491.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.10 1979

УДК 513.73

Е.В.С к р ы д л о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ПРЯМОЙ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрим частный класс вырожденных [1] конгруэнций $(QL)_{1,2}$, порожденных квадрикой Q, описывающей однопараметрическое семейство, и прямой L, описывающей конгруэнцию.

Вырожденные конгруэнции $(QL)_{1,2}$ характеризуются небиективным отображением, ставящим в соответствие каждой прямой L единственную квадрику Q, полным прообразом которой является некоторое однопараметрическое семейство $(L)_Q$ прямых L.

Изучение конгруэнции $(QL)_{1,2}$ проводится в подвижном репере $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, в котором вершины A_3 и A_4 являются точками пересечения прямой L с соответствующей ей квадрикой Q, а вершины A_1 и A_2 полярно сопряжены им и также принадлежат квадрике.

Уравнение квадрики Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции $(QL)_{1,2}$ относительно выбранного репера, с учетом определенной нормировки вершин, могут быть записаны соответственно в виде:

$$x^1 x^2 + x^3 x^4 = 0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \omega^j_i = \Gamma^j_i \omega^3_4, \quad \omega^4_3 = \Gamma^4_3 \omega^3_4, \quad \omega^3_4 = \lambda_k \omega^k, \\ \omega^3_i = \Gamma^3_i \omega^3_4 - \omega^j_4, \quad \omega^4_i = \Gamma^4_i \omega^3_4 - \omega^j, \\ \omega^i_4 = \Gamma^i_{4k}\omega^k, \quad \omega^1_1 + \omega^2_2 - \omega^3_3 - \omega^4_4 = \ell\omega^3_4 \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь предполагается, что $\omega_4^3 \neq 0$, формы $\omega_3^i \overset{def}{=} \omega^i$ приняты в качестве базисных, $i, j, k = 1,2$, причем $i \neq j$.

Нормируя вершины репера R так, чтобы единичная точка $E_{1,2} = A_1 + A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна касательной плоскости к поверхности $(L)_Q$ в точке A_3, получим

$$\omega_4^3 = \lambda(\omega^1 - \omega^2), \quad \lambda \neq 0. \tag{3}$$

Определение. Конгруэнцией K назовем вырожденную конгруэнцию $(QL)_{1,2}$, для которой выполняются следующие условия: I/пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (L) односторонне расслояема в направлении от (L) к (A_1A_2); 2/координатная сеть на поверхности (A_3) является асимптотической; 3/фокальные точки прямой L гармонически разделяют вершины A_3 и A_4 репера R.

Теорема 1. Конгруэнция K существует и определяется с произволом одной функции одного аргумента.

Доказательство. Из условия 2/ определения конгруэнции K следует равенство

$$\omega_3^4 = 0, \tag{4}$$

замыкание которого с учетом системы (2) приводит к уравнениям

$$\omega_1^4 = -\omega^2, \quad \omega_2^4 = -\omega^1. \tag{5}$$

Продолжая систему (5), получим

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 + \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \tag{6}$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^1. \tag{7}$$

Замыкание уравнения (6) приводит к соотношению

$$\omega_1^3 + \omega_2^3 = -\omega_4^1 - \omega_4^2. \tag{8}$$

Дифференцируя уравнения (7), (8) внешним образом, получим

$$[2\Gamma_1^2(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \Gamma_1^3(\omega^1 + \omega^2)] \wedge \omega_4^3 = 0, \tag{9}$$

$$[\Gamma_1^3(\omega_1^1 - \omega_2^2) - 2(\omega^1 + \omega^2)] \wedge \omega_4^3 = 0, \tag{10}$$

откуда будем иметь

$$4\Gamma_1^2 - (\Gamma_1^3)^2 = 0. \tag{11}$$

Последнюю нормировку вершин репера R осуществим так, чтобы $\Gamma_1^3 = 2$ (из уравнения (10) следует, что $\Gamma_1^3 \neq 0$), тогда $\Gamma_1^2 = 1$. В силу нормировки получим

$$\omega_1^2 = \omega_4^3, \tag{12}$$

$$\omega_1^3 = 2\omega_4^3 - \omega_4^2. \tag{13}$$

Из уравнения (10) находим

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = s(\omega^1 - \omega^2) + \omega^1 + \omega^2. \tag{14}$$

Замыкание уравнения (12) приводит к квадратичному равенству

$$[\omega_4^4 - \omega_3^3 + 2(\omega_4^1 - \omega_4^2)] \wedge \omega_4^3 = 0. \tag{15}$$

Условие I/ определения конгруэнции K теперь может быть выражено системой равенств

$$\Gamma_{41}^1 + \Gamma_{42}^1 - \Gamma_{41}^2 - \Gamma_{42}^2 = 0, \quad \Gamma_{41}^1 - \Gamma_{42}^2 = 0, \tag{16}$$

причем в силу условия 3/ того же определения

$$\Gamma_{41}^1 + \Gamma_{42}^2 = 0. \tag{17}$$

Из соотношений (16), (17) будем иметь

$$\Gamma_{41}^1 = \Gamma_{42}^2 = 0, \quad \Gamma_{41}^2 = \Gamma_{42}^1 \overset{def}{=} q. \tag{18}$$

Продолжая систему уравнений

$$\begin{gathered} \omega_4^1 = q\omega^2, \quad \omega_4^2 = q\omega^1, \quad \omega_4^3 = \lambda(\omega^1 - \omega^2), \\ \omega_1^1 - \omega_2^2 = s(\omega^1 - \omega^2) + \omega^1 + \omega^2, \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = t(\omega^1 - \omega^2), \end{gathered} \tag{19}$$

находим, что она непротиворечива лишь при $s = 0$, причем в этом случае

$$t = 1 - 4\lambda, \tag{20}$$

$$dq + (4q-1)\,\omega_4^3 = 0 . \tag{21}$$

Таким образом, окончательно пфаффова система уравнений конгруэнции K приводится к виду

$$\begin{gathered}
\omega_i^j = \omega_4^3, \quad \omega_i^3 = (-1)^j 2\omega_4^3 - \omega_4^j, \quad \omega_i^4 = -\omega^j, \\
\omega_3^4 = 0, \quad \omega_4^i = q\omega^i, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 + \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \\
\omega_4^3 = \lambda(\omega^1 - \omega^2), \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = (1-4\lambda)(\omega^1 - \omega^2), \\
\omega_1^1 - \omega_2^2 = \omega^1 + \omega^2, \quad dq + (4q-1)\,\omega_4^3 = 0.
\end{gathered} \tag{22}$$

Продолжение системы (22) приводит к единственному уравнению

$$d\lambda = \Lambda(\omega^1 - \omega^2), \tag{23}$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2. Конгруэнция K обладает следующими геометрическими свойствами: I/фокальные точки прямой A_1A_2 гармонически разделяют вершины A_1 и A_2; 2/прямолинейные конгруэнции (A_iA_3), (A_iA_4) параболические; 3/касательные плоскости к поверхностям (A_i) пересекают прямую L в одной и той же точке F_1, являющейся двойной точкой гомографии поверхностей (A_1), (A_2) и фокальной точкой прямой L; 4/ фокальная точка F_2 прямой L является точкой пересечения прямых A_1M_2 и A_2M_1, где M_i -характеристическая точка плоскости $(A_jA_3A_4)$; 5/сложные отношения $(A_1, A_3; B_1, C_1)$ и $(A_2, A_3; B_2, C_2)$, где C_i -точки пересечения с прямыми A_iA_3 касательной плоскости к поверхности (A_4), а B_i -точки пересечения с теми же прямыми касательных плоскостей к поверхностям (A_j), одинаковы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/, 2/ Фокальные точки sA_1+tA_2, sA_i+tA_3, sA_i+tA_4 прямых A_1A_2, A_iA_3, A_iA_4 определяются соответственно уравнениями

$$s^2 - t^2 = 0, \quad s^2 = 0, \quad [s + (-1)^j t]^2 = 0.$$

3/Имеем

$$dA_i \Big|_{\omega^1-\omega^2=0} = \omega_i^i A_i - \omega^i (qA_3 + A_4),$$

причем координаты точки $F_1 = qA_3 + A_4$ удовлетворяют уравнению

$$s^2 - q^2 t^2 = 0, \tag{24}$$

определяющему фокальные точки $sA_3 + tA_4$ прямой L.
4/Характеристическая точка M_i плоскости $(A_jA_3A_4)$ определяется формулой

$$M_i = qA_j + (-1)^i \lambda (qA_3 - A_4).$$

Откуда следует, что прямые A_iM_j пересекаются в точке $F_2 = qA_3 - A_4$, которая, в силу уравнения (24), является фокусом прямой L.
5/Касательные плоскости к поверхностям (A_i) и (A_4) определяются соответственно точками

$$\begin{gathered}
A_i,\ F_1,\ B_j = (-1)^j \lambda A_j + (2\lambda - q) A_3; \\
A_4,\ C_1 = qA_1 - \lambda A_3,\ C_2 = qA_2 + \lambda A_3 .
\end{gathered}$$

Находим

$$(A_i, A_3; B_i, C_i) = \frac{q(2\lambda - q)}{\lambda^2},$$

откуда следует справедливость утверждения 5/ теоремы 2.

Рассмотрим конику C, являющуюся сечением квадрики Q плоскостью (E_{12}, A_3, A_4). Эта коника определяется уравнениями

$$x^1x^2 + x^3x^4 = 0, \quad x^1 - x^2 = 0,$$

и описывает конгруэнцию (C), ассоциированную с конгруэнцией K.

Т е о р е м а 3. Конгруэнция (C) имеет две фокальные поверхности (A_3) и (A_4), причем первая из них является пятикратной.

Доказательство теоремы следует из анализа системы урав-

нений
$$x^3(x^4)^5=0, \quad x^1-x^2=0, \; x^1x^2+x^3x^4=0,$$
определяющей фокальные точки коники C.

Т е о р е м а 4. Характеристическое многообразие [2] конгруэнции квадрик Ли поверхности (A_3) состоит из четырех прямых линий.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадрика Ли поверхности (A_3) задается уравнением
$$x^1x^2+x^3x^4-\lambda x^1x^4+\lambda x^2x^4-\frac{\Lambda+3\lambda^2+2\lambda}{2}(x^4)^2=0.$$
Характеристическое многообразие квадрики Ли определяется системой уравнений
$$\begin{aligned}&\lambda(x^1)^2+\lambda(x^2)^2+(2\lambda q+9\lambda\Lambda+\Lambda_1+\Lambda+9\lambda^3+3\lambda^2)(x^4)^2=0,\\&(x^1+x^2)\left[\lambda x^1-\lambda x^2+(\Lambda+3\lambda^2+\lambda)x^4\right]=0.\end{aligned}\qquad(25)$$
Решая систему (25), убеждаемся в справедливости теоремы.

С л е д с т в и е. Так как характеристическое многообразие конгруэнции квадрик Ли поверхности (A_3) представляет собой четверку прямых, то все восемь фокальных [2] точек квадрики Ли могут быть найдены как точки пересечения этой квадрики с прямыми характеристического многообразия.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.41-49.

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-Тр.геом.семинара.Всес. ин-т научн. и технич. информации, 1974, 6, с.113-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 10 1979

УДК 513.73

М.Р. С о к у ш е в а

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ОТОБРАЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Рассмотрим поверхности $V_2 \subset E_3$ и $\overline{V}_2 \subset \overline{E}_3$, где E_3 и $\overline{E}_3$ -вполне ортогональные подпространства собственно евклидова пространства E_6, имеющие общую точку O. Диффеоморфизму T области $\Omega \subset V_2$ на область $\overline{\Omega} \subset \overline{V}_2$ соответствует поверхность
$$V_2^*=\{x \mid \vec{ox}=\vec{ox}_1+\vec{ox}_2, \; x_1\in\Omega, \; x_2=T(x_1)\in\overline{\Omega}\},$$
называемая графиком отображения T. К поверхностям $V_2, \overline{V}_2, V_2^*$ присоединим соответственно реперы $R=\{x_1, \overline{e}_i, \overline{e}_3\}$,
$$\overline{R}=\{x_2, \vec{e}_{i+3}, \vec{e}_6\}, \quad R^*=\{x, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_{i+3}, \varepsilon_6\}, \; (i,\gamma=1,2),$$
причем
$$\overline{e}_i\in T_2(x_1), \; \vec{e}_{i+3}\in T_2(x_2), \; \vec{\varepsilon}_i\in T_2(x)$$
$$\overline{\varepsilon}_i=\vec{e}_i+\vec{e}_{i+3}, \; \vec{\varepsilon}_{i+3}=\overline{e}_i-\gamma_{ik}\overline{\gamma}^{kt}\vec{e}_{t+3}, \; \vec{\varepsilon}_3=\overline{e}_3, \; \vec{\varepsilon}_6=\vec{e}_6, \quad (1)$$
где $T_2(x_1), T_2(x_2), T_2(x)$ -касательные плоскости к поверхностям $V_2, \overline{V}_2, V_2^*$ в соответствующих точках x_1, x_2, x; $\overline{e}_3, \overline{e}_6$ -единичные векторы нормали к поверхностям V_2 и $\overline{V}_2$ $\vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_{i+3}, \varepsilon_6$ лежат в плоскости $T_2^*(x)$ -ортогональном дополнении к касательной плоскости $T_2(x)$ в пространстве E_6.
$$\gamma_{ij}=\vec{e}_i\vec{e}_j, \quad \overline{\gamma}_{ij}=\vec{e}_{i+3}\vec{e}_{j+3}, \quad g_{ij}=\vec{\varepsilon}_i\cdot\vec{\varepsilon}_j=\gamma_{ij}+\overline{\gamma}_{ij} \qquad (2)$$

8 Зак. 3728

-метрические тензоры поверхностей $V_2, \overline{V}_2, V$ соответственно. Поверхности $V_2, \overline{V}_2, V_2^*$ в соответствующих реперах задаются следующими уравнениями Пфаффа:

$$\omega^3=0,\quad \overline{\omega}^3=0,\quad \theta^\alpha=0,\quad \alpha=3,4,5,6, \tag{3}$$

которые при продолжении приводят к уравнениям

$$\omega_i^3=a_{ij}^3\,\omega^j,\quad \overline{\omega}_i^3=b_{ij}^3\,\omega^j,\quad \theta_i^\alpha=t_{ij}^\alpha\,\theta^j.$$

Дифференцируя тождества (1), получим

$$\omega_i^k=\theta_i^k+\theta_i^{3+k}, \tag{4}$$

$$\overline{\omega}_i^k=\theta_i^k-\theta_i^{3+k}\,\gamma_{ls}\,\overline{\gamma}^{3k}, \tag{5}$$

$$\omega_i^3=\theta_i^3, \tag{6}$$

$$\overline{\omega}_i^3=\theta_i^6. \tag{7}$$

2. Пусть главная нормаль $N_q(x)$ к поверхности V_2^* в точке x [2] имеет размерность, равную двум. Тогда среди четырех асимптотических форм Φ^α поверхности V_2^* только две линейно независимы. Если это будут формы Φ^3 и Φ^6, то Φ^4 и Φ^5 можно записать в следующем виде:

$$\Phi^4=\alpha_a\Phi^a,\quad \Phi^5=\beta_a\Phi^a,\quad a=3,6. \tag{8}$$

Следовательно,

$$t_{ij}^4=\alpha_a t_{ij}^a,\qquad t_{ij}^5=\beta_a t_{ij}^a. \tag{9}$$

Предполагаем, что каждая из систем (9) совместна, тогда

$$\operatorname{rang}\|t_{ij}^{\tilde a}\|=2,\quad \operatorname{rang}\|t_{ij}^{\tilde b}\|=2,\quad \tilde a=3,4,6,\ \tilde b=3,5,6. \tag{10}$$

Положим для определенности

$$t_{11}^3t_{22}^6-t_{11}^6t_{22}^3\neq 0. \tag{11}$$

Из соотношений (10), учитывая (11), находим

$$t_{12}^\alpha=A\,t_{11}^\alpha+B\,t_{22}^\alpha. \tag{12}$$

Используя (9) и (12), векторы $\vec{b}_{ij}=t_{ij}^\alpha\,\overline{\varepsilon}_\alpha$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\overline{b}_{ii}&=t_{ii}^a(\overline{\varepsilon}_a+\alpha_a\overline{\varepsilon}_{11}+\beta_a\overline{\varepsilon}_5),\\ b_{12}&=A\vec{b}_{11}+B\vec{b}_{22}.\end{aligned} \tag{13}$$

Линейно независимые векторы $\vec{b}_{11}$ и $\vec{b}_{22}$ вместе с точкой x определяют главную нормаль $N_2(x)\subset N_4(x)$.

Рассматривая вектор средней нормали $M^*=\frac{1}{2}g^{ij}b_{ij}$ к поверхности V_2^* в точке x, получим следующее предложение: график отображения не может быть минимальной поверхностью при условии (11).

Пусть формы $\Phi^{i+3}=0$, тогда из (4) и (5) имеем:

$$\overline{\omega}_i^j=\omega_i^j. \tag{14}$$

После внешнего дифференцирования (14) находим, что отображение T -конформно. Если орты $\vec{e}_i$ расположить на касательных в точке x_1 к линиям некоторой ортогональной сети, то

$$\gamma_{12}=\overline{\gamma}_{12}=g_{12}=0,\quad \gamma_{ii}=1,\quad \overline{\gamma}_{ii}=\alpha,\quad g_{ii}=1+\alpha. \tag{15}$$

Дифференцируя (15), получим:

$$\theta_i^i=0\Rightarrow\alpha=const.$$

Обратное выполняется. Итак, верна

Т е о р е м а 1. Асимптотические формы Φ^4 и Φ^5 обращаются в нуль на поверхности V_2^* с двумерной главной нормалью тогда и только тогда, когда отображение T конформно с коэффициентом $\alpha=const$.

3. Рассмотрим случай, когда поверхность V_2^* с двумерной главной нормалью несет сопряженную сеть. Тогда $b_{12}=0$, что приводит к равенству

$$t_{12}^\alpha=0. \tag{16}$$

Известно [2], что точка

$$\vec{F}^{\ell}_{\kappa}=\vec{x}_1-\frac{1}{a^{\ell}_{\kappa\ell}}\vec{e}_{\kappa}\left(\vec{F}^{1\ell}_{\kappa}=\vec{x}_{\alpha}-\frac{1}{b^{\ell}_{\kappa\ell}}\vec{e}_{\kappa+3}\right),\ \ell\neq\kappa$$

является псевдофокусом касательной $[x,\vec{e}_{\kappa}]([x_2,\vec{e}_{\kappa+3}])$ к линии ω^{κ} $(\bar{\omega}^{\kappa})$. Подставляя в (4) и (5) соотношения (16) при $\alpha=4,5$, получим, что псевдофокусы линии L_i и $\bar{L}_i=T(L_i)$ соответствуют в индуцированном отображении. Через L_i обозначена линия на поверхности V_2, вдоль которой $\omega^i\neq 0$, $\omega^{\kappa}=0$, $i\neq\kappa$. Обратно, если псевдофокусы линий L_i и $\bar{L}_i$ соответствуют, то имеет место следующая система:

$$\begin{cases} t^4_{12}\bar{\gamma}^{12}+t^5_{12}(\bar{\gamma}^{22}+1)=0,\\ t^4_{12}(\bar{\gamma}^{11}+1)+t^5_{12}\bar{\gamma}^{12}=0.\end{cases}$$

Решая ее относительно t^4_{12} и t^5_{12}, будем иметь

$$t^4_{12}=t^5_{12}=0. \qquad (17)$$

Пользуясь равенствами (11),(12),(17), можно доказать, что в общем случае при $\Phi^4\neq\kappa\Phi^5$ $t^{\alpha}_{ij}=0$. Тогда $\bar{b}_{12}=0$. Итак, верна

Т е о р е м а 2. Если $\Phi^4\neq\kappa\Phi^5$, то соответствие псевдофокусов линий $L_i\subset V_2$ и $\bar{L}_i\subset\bar{V}_2$ в индуцированном отображении T_{*x} является необходимым и достаточным условием того, что на графике V^*_2 сеть линий θ^1, θ^2 сопряжена.

4. В плоскости главной нормали $N_2(x)$ существует присоединенная кривая порядка 2, не проходящая через точку x [2]. Для каждой точки y этой кривой найдется такое направление смещения точки x по поверхности V^*_2, для которого $\overrightarrow{dy}\in N_4(x)$. Из определения присоединенной кривой следует, что в репере она имеет следующее уравнение:

$$\det\| g^{i\kappa}t^{\beta}_{\kappa j}(g_{a\beta}+\alpha_a g_{4\beta}+\beta_a g_{5\beta})y^a-\delta^i_j\|=0, \quad (18)$$

где δ^i_j -символ Кронекера, $g_{\alpha\beta}=\vec{\varepsilon}_{\alpha}\vec{\varepsilon}$. Используя уравнение (18), можно доказать, что если график отображения V^*_2 несет одно семейство асимптотических линий, то присоединенная кривая- парабола. Если на поверхности V^*_2 нет асимптотических линий, то присоединенная кривая - гиперболического типа. Так же справедлива

Т е о р е м а 3. Присоединенная кривая к графику распадается на пару прямых тогда и только тогда, когда коэффициенты в разложении вектора $\bar{b}_{12}$ по векторам $\bar{b}_{11}$ и $\bar{b}_{22}$ связаны условием $A+B=0$.

5. Пусть на поверхности V^*_2 существует одна линейно независимая квадратическая форма Φ^3. Тогда $\Phi^4=\Phi^5=\gamma\Phi^3$, $\Phi^6=\alpha\Phi^3$, $\alpha\neq 0$, так как противное приводит к тому, что V_2 -плоскость, а этот случай мы не рассматриваем. Верна следующая

Т е о р е м а 4. График V^*_2, главная нормаль которого I-мерна, является минимальной поверхностью тогда и только тогда, когда средние кривизны поверхностей V_2 и $\bar{V}_2$ связаны условием

$$H=-\frac{1}{\alpha}\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\bar{H},$$

где γ, $\bar{\gamma}$ -дискриминанты метрических тензоров поверхностей V_2 и $\bar{V}_2$.

Пусть поверхность V^*_2 -поверхность класса I[3]. Тогда она лежит в своей соприкасающейся плоскости π_3, которую определяют точка x и векторы $\bar{\varepsilon}_i$, $\bar{b}_{11}$. Плоскость π_3 - неподвижна. Пусть $M=\pi_3\cap E_3$ $(\bar{M}=\pi_3\cap\bar{E}_3)$. Справедлива

Т е о р е м а 5. Поверхность $V_2(\bar{V}_2)$ является конусом с вершиной в точке $M(\bar{M})$ тогда и только тогда, когда поверхность $\bar{V}_2(V_2)$ -конус с вершиной в точке O.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств.-Уч.зап.МГПИ им.Ленина, 1970, № 374, т.I, 41-52.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовых пространствах. Лит. матем. сб. 1966, VI, № 4, 475-492.

3. С х о у т е н И.А., Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии М., ГИИЛ, 1948, т.2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 10 1979

УДК 513.73

Е.П. С о п и н а

О КОНГРУЭНЦИЯХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе построен канонический репер конгруэнции $\mathcal{K}$ эллипсоидов и дана геометрическая характеристика его относительных инвариантов. Определены квадрики, ассоциированные с квадрикой конгруэнции $\mathcal{K}$ и исследован специальный класс конгруэнций $\mathcal{K}$ с распадающимися на плоскости ассоциированными квадриками.

Рассмотрим в трехмерном аффинном пространстве A_3 конгруэнцию $\mathcal{K}$ эллипсоидов Q, центры которых описывают поверхность, не являющуюся торсом. Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}$ к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где A -центр эллипсоида Q, векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ направлены по асимптотическим касательным к поверхности (A), а вектор $\bar{e}_3$ направлен по сопряженному направлению к касательной плоскости к поверхности (A). Концы векторов $\bar{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ расположены на эллипсоиде Q. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha\ ,\quad d\bar{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{e}_\beta\ ,$$

причем формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha\ ,\quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta .$$

Уравнение эллипсоида Q и система дифференциальных уравнений конгруэнции $\mathcal{K}$ запишутся соответственно в виде:

$$F\equiv(x^1)^2+(x^2)^2+2\lambda x^1x^2-1=0\ , \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
&\omega^3=0, \quad \omega_i^3 = m\,\omega^j, \quad \omega_3^3 = c_\kappa \omega^\kappa,\\
&\omega_i^i - \omega_3^3 + \lambda \omega_i^j = a_\kappa^j \omega^\kappa,\\
&\omega_i^3 + \omega_3^i + \lambda \omega_3^j = b_\kappa^i \omega^\kappa, \qquad\qquad (2)\\
&\omega_1^2 + \omega_2^1 + \lambda(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) - d\lambda = \tau_\kappa \omega^\kappa,\\
&\omega_i^j = s_\kappa^i \omega^\kappa,\\
&dm = -m(\omega_3^3 - \omega_2^2 - \omega_1^1 + 2(s_2^1\omega^1 + s_1^2\omega^2)).
\end{aligned}
$$

Здесь и в дальнейшем $i,j,\kappa = 1,2,\ i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Анализируя систему (2), убеждаемся, что конгруэнции $\mathcal{K}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е 1. Инвариантные квадрики Q_i, определяемые уравнениями

$$\mathcal{F}_i = a_i^j (x^i)^2 + a_i^i (x^j)^2 + \tau_i x^i x^j + b_i^i x^i x^3 + b_i^j x^j x^3 + \lambda x^j + x^i + c_i = 0, \quad (3)$$

называются ассоциированными квадриками. Из (2) и (3) непосредственно следует, что прямая $\ell \equiv (Ae_3)$ тогда и только тогда является прямолинейной образующей ассоциированной квадрики $Q_i\ (\mathcal{F}_i = 0)$, когда Q_i проходит через центр квадрики Q. Ассоциированные квадрики позволяют дать характеристику относительных инвариантов конгруэнции эллипсоидов. Условие $c_i = 0$ означает, что квадрика Q_i проходит через центр A квадрики Q; условие $\lambda = 0$ означает, что направления $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно квадрики Q. Условия $b_i^i = 0$, $b_i^j = 0$, $\tau_i = 0$ означают соответственно, что векторы $\bar{e}_i$ и $\bar{e}_3$, $\bar{e}_j$ и $\bar{e}_3$, $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно Q_i. Из того, что $a_j^i = 0$, $a_i^j = 0$, следует, что (Ae_i), (Ae_j) – асимптотические направления квадрики Q_i. Условие $m = 0$ означает, что поверхность (A) вырождается в плоскость. Из (2) получаем, что вектор аффинной нормали [2] поверхности (A) в точке A

имеет вид $\bar{\ell} = m\bar{e}_3 + s_1^2\bar{e}_1 + s_2^1\bar{e}_2$. Следовательно, условие $s_j^i = 0$ означает, что аффинная нормаль поверхности (A) лежит в плоскости $x^j = 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathcal{K}_1$ называется конгруэнция $\mathcal{K}$, обладающая следующими свойствами: каждая из квадрик Q_i распадается на пару плоскостей, параллельных плоскости $(A, \bar{e}_j, \bar{e}_3)$.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $\mathcal{K}_1$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{K}_1$ приводится к виду

$$
\begin{aligned}
&\omega^3=0, \quad \omega_i^3 = m\,\omega^j, \quad \omega_3^3 = c_\kappa \omega^\kappa,\\
&\omega_i^i - \omega_3^3 = 0, \quad \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^i + \omega_i^3 = 0, \qquad (4)\\
&\omega_1^2 = s_\kappa^2 \omega^\kappa, \quad dm = m\omega_1^1 + 2m(s_2^2\omega^1 - s_1^2\omega^2).
\end{aligned}
$$

Замыкая систему (4), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{K}_1$ обладают следующими свойствами: 1/ в расширенном аффинном пространстве ассоциированная квадрика Q_i распадается на несобственную плоскость и плоскость, параллельную $(A, \bar{e}_j, \bar{e}_3)$; 2/ поверхности (M_ε), где

$$M_\varepsilon = A - c_1\bar{e}_1 - c_2\bar{e}_2 + \varepsilon\sqrt{1 - c_1^2 - c_2^2}, \quad (\varepsilon^2 = 1), \quad (5)$$

являются единственными собственными фокальными поверхностями [1]; 3/ центр квадрики $Q \in \mathcal{K}_1$ совпадает с центром луча ℓ прямолинейной конгруэнции (ℓ); 4/ прямолинейная конгруэнция (ℓ) сопряжена поверхности (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ В силу (4) уравнения ассоциированных квадрик в однородных координатах принимают вид $\mathcal{F}_i \equiv x^0(x^j + c_i x^0) = 0$;

2/ Система уравнений $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{F}_1 \equiv x^2 + c_1 = 0$, $\mathcal{F}_2 \equiv x^1 + c_2 = 0$ определяет только две собственные фокальные точки M_ε.

3/ Фокусы луча ℓ прямолинейной конгруэнции (ℓ) определяются формулой

$$B_\varepsilon = A + \frac{\varepsilon}{m}\bar{e}_3. \quad (6)$$

Следовательно, A центр луча ℓ.

4/Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ) имеет вид

$$(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0.$$

Значит они высекают на поверхности (A) сопряженную сеть линий.

Список литературы

1.Малаховский В.С.,Махоркин В.В.Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ,1974, 6,с.113-133.

2.Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., ГИТТЛ,1948

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Т.П.Фунтикова

ОДНОМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ЭЛЛИПСОВ В ТРЕХМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются одномерные многообразия (C)эллипсов с непараллельными плоскостями.Найдены условия,при которых многообразия (C) являются фокальными.Установлен характеристический признак фокальных многообразий (C),а также указаны условия,при которых все эллипсы многообразия (C) инцидентны инвариантной квадрике.

§ I. Система дифференциальных уравнений многообразия (C)

Отнесем одномерное многообразие (C) эллипсов к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, имеющему следующую геометрическую характеристику: вершина A репера помещена в центр эллипса C; вектор $\bar{e}_1$ параллелен характеристике плоскости эллипса C; вектор $\bar{e}_2$ сопряжен по направлению вектору $\bar{e}_1$, причем концы векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ принадлежат эллипсу; вектор $\bar{e}_3$ направлен таким образом, что касательная к индикатрисе вектора $\bar{e}_2$ параллельна плоскости векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_3$.

В построенном репере уравнения эллипса C имеет следующий вид:

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{1}$$

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta - \tag{2}$$

-деривационные формулы репера R, причем формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры аффинного простран-

ства
$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta, \quad \mathcal{D}\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma \tag{3}$$
и условию эквиаффинности
$$\omega^1_1 + \omega^2_2 + \omega^3_3 = 0. \tag{4}$$
Система дифференциальных уравнений многообразия (C) записывается следующим образом:
$$\begin{gathered}\omega^1_1 = a\theta, \ \omega^2_2 = 0, \ \omega^3_2 = \theta, \ \omega^3 = n\theta, \ \omega^1 = b\theta, \\ \omega^2 = \ell\theta, \ \omega^3_1 = 0, \ \omega^2_1 = p\theta, \ \omega^1_2 = (1-p)\theta, \\ \omega^1_3 = m\theta, \ \omega^2_3 = c\theta, \ \theta = \omega^2_1 + \omega^1_2 .\end{gathered} \tag{5}$$
Произвол существования многообразия (C) -семь функций одного аргумента.Характеристика плоскости эллипса C определяется уравнением:
$$x_2 = -n. \tag{6}$$
Обозначим $M_i \ (i=1,2)$ -точки пересечения характеристики (6) с эллипсом,тогда
$$\bar{M}_i = \bar{A} + (-1)^i \cdot \sqrt{1-n^2}\, \bar{e}_1 - n\bar{e}_2 . \tag{7}$$

Касательная к линии (M_i) в точке M_i определяется следующим вектором:
$$d\bar{M}_i = [b - (-1)^i \frac{n\,dn}{\sqrt{1-n^2}} + (-1)^i \sqrt{1-n^2}\, a - n + np]\bar{e}_1 + \\ + [\ell - dn + (-1)^i p\sqrt{1-n^2}\, \bar{e}_2 . \tag{8}$$

§ 2. Фокальные многообразия (C)

О п р е д е л е н и е.Многообразие (C),для которого существует огибающая семейства эллипсов,назовем фокальным и точку соприкосновения эллипса и огибающей - фокальной точкой эллипса.

Огибающая многообразия (C) (если она существует) задается уравнениями:
$$F = 0, \ dF = 0.$$

Решая эту систему,получаем условие фокальности многообразия (C).

$$a(1-n^2) - n\ell + (-1)^i (b-n)\sqrt{1-n^2} = 0 \tag{9}$$
и фокальные точки
$$\bar{N}_i = \bar{A}_i + (-1)^i \sqrt{1-n^2}\, \bar{e}_1 - n\bar{e}_2 \tag{10}$$
Произвол существования фокальных многообразий (C)-шесть функций одного аргумента.Из формул (7) и (10) следует,что при выполнении условия (8) фокальными точками эллипса являются точки пересечения его с характеристикой (6).

Т е о р е м а I. Многообразие эллипсов (C) является фокальным тогда и только тогда,когда (M_i) и эллипсы имеют общую касательную в точке M_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Направляющий вектор касательной к эллипсу в точке M_i имеет следующий вид:
$$\bar{E} = (-1)^i \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \bar{e}_1 + \frac{1}{n} \bar{e}_2 . \tag{11}$$
Векторы $\bar{E}$ и $d\bar{M}_i$ коллинеарны тогда и только тогда,когда выполняется условие (9).

§ 3. Многообразие $(C)_Q$

О п р е д е л е н и е.Многообразие эллипсов (C) будем называть многообразием $(C)_Q$,если для него все эллипсы (C) принадлежат инвариантной квадрике Q .

Пусть уравнение квадрики Q имеет следующий вид:
$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \alpha(x^3)^2 + \beta x^1 x^2 + \gamma x^2 x^3 + \eta x^3 - 1 = 0. \tag{12}$$
В силу инвариантности квадрики (12) имеем:
$$\begin{gathered} 2(\omega^1_2 + \omega^2_1) + \beta\omega^3_2 + \gamma\omega^3_1 = 0, \ d\alpha = 2\alpha\omega^3_3 - \beta\omega^1_3 - \gamma\omega^2_3 - \alpha\eta\omega^3, \\ \beta\omega^3 + \eta\omega^3_1 + 2\omega^1 = 0, \ d\eta - \eta\omega^3_3 - \gamma\omega^2 - \beta\omega^1 - 2\alpha\omega^3 - \eta^2\omega^3 = 0, \\ \gamma\omega^3 + \eta\omega^3_2 + 2\omega^2 = 0, \ d\beta - 2\omega^1_3 - 2\alpha\omega^3_1 + \beta\omega^2_2 - \gamma\omega^2_1 - \beta\eta\omega^3 = 0, \\ 2\omega^1_1 + \beta\omega^3_1 + \eta\omega^3 = 0, \\ 2\omega^2_2 + \gamma\omega^3_2 + \eta\omega^3 = 0, \\ d\gamma - 2\omega^2_3 - 2\alpha\omega^3_2 + \gamma\omega^1_1 - \beta\omega^1_2 - \gamma\eta\omega^3 = 0. \end{gathered} \tag{13}$$
Учитывая уравнения системы (5) в системе (13), полу-

чаем следующие соотношения:

$$\beta=-2,\quad b=n,\quad \ell=\frac{a(1-n^2)}{n},\quad \eta=-\frac{2a}{n},\quad \gamma=2a,$$

$$da=(2ac-2m-4\alpha a)\theta,\quad m+ap+2a=0,\qquad (14)$$

$$adn-nda+(n^3-4a^2n-\alpha n^3+a^2n^3)\theta=0.$$

Анализируя системы уравнений (5) и (14), получаем, что произвол существования конгруэнции $(C)_Q$ – две функции одного аргумента.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.- Труды геом.семинара.ВИНИТИ АН СССР,М.,1969,2,с.179-206.

2. Ф и н и к о в С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л.,ОНТИ,1937.

УДК 513.73

В.Н. Х у д е н к о

О МНОГООБРАЗИЯХ МНОГОМЕРНЫХ КВАДРИК

В работе [1] введено понятие характеристического многообразия квадрики Q_p ($1 \le p \le n-3$),принадлежащей многообразию $(h,h,n)^2_p$).В настоящей работе,являющейся продолжением [1], в проективном пространстве P_n ,рассматриваются многообразия $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p с характеристическими точками.Введено понятие характеристически невырожденного многообразия квадрик Q_p ,доказано существование конечного числа характеристически невырожденных многообразий квадрик Q_p с характеристическими точками.

Напомним,что характеристическим многообразиям квадрики $Q_p \in (h,h,n)^2_p$ названо алгебраическое многообразие пространства P_n ,определяемое системой уравнений:

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\quad \Gamma^{\hat a i}_\alpha x^\alpha=0,\quad \Gamma^i_\xi x^\xi+x^i=0,$$

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\quad x^a=0;$$

$$(\alpha,\beta=1,2,\dots,p+2;\quad i=1,2,\dots,h;\quad \xi=h+1,\dots,p+2;$$

$$a=p+3,p+4,\dots,n+1;\quad \hat a=p+3,p+4,\dots,n).$$

О п р е д е л е н и е. Многообразие $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p, удовлетворяющее соотношениям

$$1)\ \forall i \le h \qquad \Gamma^i_{\alpha\beta} \ne \lambda a_{\alpha\beta},$$

$$2)\ \forall i \le h \qquad \det\left(\Gamma^i_{\alpha\beta}\right) \ne 0,$$

$$3)\ \forall \alpha,\beta \qquad \operatorname{rang}\left(\Gamma^i_{\alpha\beta}\right) = h,$$

$$4)\ \operatorname{rang}\left(\Gamma^i_{\xi}\right) \ne 0,$$

$$5)\ \forall \alpha \quad \operatorname{rang}\left(\Gamma^{\hat{\alpha} i}_{\alpha}\right) = \min\{h, n-p-2\},$$

назовем характеристически невырожденным. В дальнейшем будем рассматривать только такие многообразия.

Согласно [1], соотношение

$$n = \frac{p(h+1)}{h} \qquad (1)$$

является, для характеристически невырожденных многообразий $(h,h,n)^2_p$, необходимым условием существования характеристических точек. Легко заметить, что условие (1) эквивалентно условиям

$$p = hl, \quad n = l(h+1), \qquad (2)$$

где $l = 3, 4, 5, \ldots\ldots$

Т е о р е м а 1. Для любого числа p ($p \geqslant 3$), где p - размерность квадрики Q_p, существует одномерное характеристически невырожденное многообразие квадрик Q_p с характеристическими точками. Каждая квадрика Q_p таких многообразий обладает четырьмя характеристическими точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p -размерность квадрики Q_p, причем выполнены условия (2). Положим

$$h = 1, \quad l = p,$$

получим $n = 2p$.

Следовательно, для числа p нашлось многообразие (1,1,2p) квадрик Q_p с характеристическими точками. Согласно теореме 2 работы [1], число характеристических точек равно 2^{h+1}. Для квадрики $Q_p \in (1,1,2p)^2_p$ получаем $2^{h+1} = 4$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Пусть p ($p \geqslant 3$) размерность многомерной квадрики Q_p. Существует лишь конечное число $\mathcal{T}$ характеристически невырожденных многообразий квадрик Q_p с характеристическими точками, причем

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \tau + 1, & \text{если } p \text{ -нечетное число} \\ \tau, & \text{если } p \text{ -четное число.} \end{cases}$$

Здесь τ число всевозможных различных делителей величины p, отличных от единицы и самого p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим p в виде

$$p = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_g^{\alpha_g}, \qquad (3)$$

где $s_1 > s_2 > \ldots > s_g$ взаимно просты, а натуральные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g$ удовлетворяют условиям:

$$\alpha_1 \geqslant 1, \ \alpha_2 \geqslant 1, \ldots, \ \alpha_g \geqslant 1.$$

Для существования характеристически невырожденного многообразия квадрик Q_p с характеристическими точками необходимо выполнение условий (2). Согласно (3), представим число p в виде:

11 Зак. 3728

$$p = s_1 \cdot (s_1^{\alpha_1 - 1} \; s_2^{\alpha_2} \dots s_g^{\alpha_g}).$$

Можем принять

$$h_1 = s_1, \; \ell_1 = s_1^{\alpha_1-1} s_2^{\alpha_2} \dots s_g^{\alpha_g}, \; n_1 = \ell_1 (h_1 + 1).$$

Заметим, что величины s_1 и $s_1^{\alpha_1-1} s_2^{\alpha_2} \dots s_g^{\alpha_g}$ являются различными делителями числа p. Если $s_1 \neq 2$ (следовательно, p -нечетное число), мы можем положить

$$h_2 = s_1^{\alpha_1-1} s_2^{\alpha_2} \dots s_g^{\alpha_g}, \; \ell_2 = s_1, \; n_2 = \ell_2 (h_2 + 1).$$

В этом случае $s_1 = \ell_2 \geqslant 3$. Если $\alpha_1 \geqslant 2$, то принимаем

$$h_3 = s_1^2, \; \ell_3 = s_1^{\alpha_1-2} s_2^{\alpha_2} \dots s_g^{\alpha_g}, \; n_3 = \ell_3 (h_3 + 1),$$

$$h_4 = s_1^{\alpha_1-2} s_2^{\alpha_2} \dots s_g^{\alpha_g}, \quad \ell_4 = s_1^2, \; n_4 = \ell_4 (h_4 + 1).$$

Если $\alpha_1 < 2$ (а следовательно, $\alpha_1 = 1$), то

$$h_3 = s_2, \; \ell_3 = s_1 s_2^{\alpha_2 - 1} \dots s_g^{\alpha_g}, \; n_3 = \ell_3 (h_3 + 1),$$

$$h_4 = s_1 s_2^{\alpha_2-1} \dots s_g^{\alpha_g}, \; h_4 = s_2, \; n_4 = \ell_4 (h_4 + 1).$$

Данный процесс будем продолжать, пока не переберем всех различных делителей числа p. В результате будут найдены все параметры характеристически невырожденных многообразий квадрик Q_p с характеристическими точками. Легко видеть, что каждому делителю числа p соответствует одно многообразие. Кроме этих многообразий, существует еще многообразие с параметрами $h_{\mathcal{T}} = 1, \; \ell_{\mathcal{T}} = p, \; n_{\mathcal{T}} = 2p.$

Таким образом, если p -нечетное, то

$$\mathcal{T} = \tau + 1.$$

Пусть p -четно. В этом случае $s_1 = 2$ и можно положить

$$h_1 = s_1, \; \ell_1 = s_1^{\alpha_1-1} s_2^{\alpha_2} \dots s_g^{\alpha_g}.$$

Соотношение $\ell_1 = s_1 = 2$ противоречит условию (2) ($\ell \geqslant 3$). Дальнейший процесс выписывания параметров многообразия продолжим так же, как и в случае нечетного p. Следовательно, если p четно, то $\mathcal{T} = \tau$. Таким образом, теорема полностью доказана.

Следствие. Если p -простое число, то не существует h -мерных ($h \geqslant 2$) характеристически невырожденных многообразий квадрик Q_p с характеристическими точками.

Действительно, согласно теореме 2, число $\mathcal{T}$ таких многообразий для простого p равно единице. Это одномерное многообразие $(1, 1, 2p)_p^2$. Следовательно, h -мерных невырожденных многообразий нет.

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2, можно получить следующую теорему:

Теорема 3. Пусть натуральное число n ($n \geqslant 6$) является размерностью проективного пространства P_n. Тогда в этом пространстве существует лишь конечное число R характеристически невырожденных многообразий квадрик с характеристическими точками, причем

$$R = \begin{cases} \tau - 1, & \text{если } n \text{ - четное число} \\ \tau, & \text{если } n \text{ -нечетное число.} \end{cases}$$

Здесь τ число всевозможных различных делителей числа n, отличных от 1 и самого n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Х у д е н к о В.Н. О многообразиях многомерных квадрик в проективном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8, Калининград, 1977, с.126-134.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 10 1979

УДК 513.73

В.П.Ц а п е н к о

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ $(P,Q)_{2,2}$

В трехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция $(P,Q)_{2,2}$ пар фигур P и Q, где P -точка, Q - невырожденная квадрика. Выделен класс $(P,Q)^*_{2,2}$, характеризующийся свойством ассоциированных с конгруэнцией $(PQ)_{2,2}$ квадрик, рассмотрены некоторые свойства конгруэнции $(P,Q)^*_{2,2}$.

§ 1. КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР КОНГРУЭНЦИИ $(P,Q)_{2,2}$

Отнесем конгруэнцию $(P,Q)_{2,2}$ к реперу $R=\{\bar{A}_0,\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3\}$, в котором вершина A_0 помещена в точку P, вершины A_1 и A_2 принадлежат касательной плоскости к поверхности (A_0) в точке A_0 и являются точками пересечения поляры точки A_0 относительно коники C с этой коникой. (Коникой C названа линия пересечения касательной плоскости к поверхности (A_0) с квадрикой Q). В качестве вершины A_3 выбран полюс плоскости $A_0A_1A_2$ относительно квадрики Q.
Инфинитезимальные перемещения репера R определяются деривационными формулами:

$$d\bar{A}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{A}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3),$$

причем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

и условию эквипроективности

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 .$$

Уравнения квадрики Q и коники C относительно построенного репера с учетом соответствующих нормировок вершин записываются соответственно в виде

$$\mathcal{F} \equiv (x^0)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} (x^0)^2 - 2x^1x^2 = 0, \\ x^3 = 0 . \end{cases} \tag{2}$$

Конгруэнция $(P, Q)_{2,2}$ определяется системой пфаффовых уравнений:

$$\begin{gathered} \omega_0^3 = 0, \ \omega_3^0 = \gamma_{3k}^0 \omega^k, \ \ \omega_i^j = \gamma_{ik}^j \omega^k, \\ \omega_i^0 = \gamma_{ik}^0 \omega^k, \ \omega_3^i = \gamma_{3k}^i \omega^k, \ \omega_i^3 = \gamma_{ii}^3 \omega^i + a\omega^j, \\ \omega_0^0 - \omega_3^3 = \alpha_k \omega^k, \ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = \beta_k \omega^k. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем i, j, $k = 1, 2$; $i \neq j$ суммирование по i и j не производится, а также линейно независимые формы $\omega_0^i \overset{def}{=\!=} \omega^i$ приняты в качестве базисных. Фокальное многообразие конгруэнции (Q) квадрик Q определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \mathcal{F} = 0, \\ \mathcal{F}_i \equiv \gamma_{1i}^2 (x^1)^2 + \gamma_{2i}^1 (x^2)^2 + \alpha_i (x^3)^2 + (1 - \gamma_{ji}^0) x^0 x^j - \end{cases} \tag{4}$$

$$-\gamma_{ii}^0 x^0 x^i - \gamma_{3i}^0 x^0 x^3 + \beta_i x^1 x^2 + (\gamma_{3i}^j - \gamma_{ii}^3) x^i x^3 + (\gamma_{3i}^i - a) x^j x^3 = 0 .$$

Каждое из уравнений $F_i = 0$ задает инвариантную квадрику, ассоциированную с конгруэнцией $(P, Q)_{2,2}$. Обозначим эти квадрики соответственно Q_1 и Q_2.

§ 2. КОНГРУЭНЦИЯ $(P, Q)_{2,2}^*$

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией $(P,Q)_{2,2}^*$ называется конгруэнция $(P,Q)_{2,2}$, квадрики Q_1 и Q_2 которой распадаются на пары плоскостей с общей плоскостью $A_0A_1A_2$, причем поверхность (A_0) не является развертывающейся.

Т е о р е м а 1. Конгруэнция $(P,Q)_{2,2}^*$ существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для конгруэнции $(P,Q)_{2,2}^*$ уравнения $F_i = 0$ принимают соответственно вид:

$$x^3(\alpha_i x^3 - \gamma_{3i}^0 x^0 + (\gamma_{3i}^j - \gamma_{ii}^3) x^i + (\gamma_{3i}^i - a) x^j) = 0, \tag{5}$$

т.е. имеют место равенства

$$\gamma_{jj}^i = \gamma_{ji}^i = \beta_i = \gamma_{ii}^0 = \gamma_{ij}^0 - 1 = 0 . \tag{6}$$

Учитывая условия (6) в уравнениях системы (3), получаем уравнения Пфаффа:

$$\omega_i^j = 0, \ \ \omega_i^0 = \omega^j, \ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = 0,$$

замыканием которых являются следующие квадратичные уравнения:

$$\omega_i^3 \wedge \omega_3^j = 0, \ \omega_i^3 \wedge \omega_3^0 = 0, \ \omega_k^3 \wedge \omega_3^k = 0. \tag{7}$$

В силу второго условия определения конгруэнции $(P,Q)^*_{2,2}$ $\omega^3_1 \wedge \omega^3_2 \neq 0$. Тогда квадратичные уравнения (7) приводят к следствиям:

$$\omega^0_3 = 0\,,$$
$$\omega^i_3 = q\,\omega^3_j\,. \qquad (8)$$

Продолжая (8), получаем:

$$dq + 2q\,(\omega^0_0 - \omega^3_3) = 0\,.$$

Система дифференциальных уравнений конгруэнции $(P,Q)^*_{2,2}$ имеет, таким образом, вид:

$$\omega^3_0 = 0\,, \quad \omega^0_3 = 0\,, \quad \omega^j_i = 0\,, \quad \omega^0_i = \omega^j\,,$$
$$\omega^3_i = \gamma^3_{ii}\,\omega^i + a\,\omega^j\,, \quad \omega^i_3 = q\,\omega^3_j\,, \; dq + 2q\,(\omega^0_0 - \omega^3_3) = 0, \; (9)$$
$$\omega^0_0 - \omega^3_3 = \alpha_\kappa\,\omega^\kappa\,, \quad \omega^1_1 + \omega^2_2 - 2\,\omega^0_0 = 0\,.$$

Анализируя систему (9), находим:

$$S_1 = 3\,, \quad q = 5\,, \quad S_2 = 2\,, \quad Q = N = 7$$

и убеждаемся в справедливости теоремы. Исключая случай, когда поверхность (A_3) вырождается в точку, считаем в дальнейшем $q \neq 0$.

Т е о р е м а 2. Конгруэнция $(P,Q)^*_{2,2}$ обладает следующими свойствами: I/ фокусы луча прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически разделяют точки A_1 и A_2; 2/ линии, высекаемые торсами прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2) на поверхностях (A_0), (A_3) и (A_1), (A_2) соответственно гармонически разделяют координатные линии $\omega^i = 0$; 3/ прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) односторонне расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2); 4/ фокальное многообразие конгруэнции (Q), ассоциированной с $(P,Q)^*_{2,2}$, содержит конику C. (Конгруэнции квадрик, обладающие таким свойством, были рассмотрены в работе [2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/ Фокусы $F^i = \lambda A_1 + \mu A_2$ луча прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнением:

$$\gamma^3_{11}\,\lambda^2 - \gamma^3_{22}\,\mu^2 = 0\,,$$

откуда

$$(A_1A_2\,;\,F^1F^2) = -1\,.$$

2/ Находим уравнения торсов прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2) соответственно

$$q\left(\gamma^3_{11}(\omega^1)^2 - \gamma^3_{22}(\omega^2)^2\right) = 0\,, \; \gamma^3_{11}(\omega^1)^2 - \gamma^3_{22}(\omega^2)^2 = 0$$

и убеждаемся в справедливости второго утверждения теоремы.
3/ Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2)

$$\omega^\kappa_3 \wedge \omega^0_\kappa = 0\,, \quad \omega^\kappa \wedge \omega^0_\kappa + \omega^3_\kappa \wedge \omega^\kappa_3 = 0$$

в силу системы (9) удовлетворяются тождественно.
4/ Система уравнений (4) для конгруэнции $(P,Q)^*_{2,2}$ принимает вид:

$$\mathcal{F} = 0\,,$$
$$x^3\left(\alpha_i\,x^3 + \gamma^3_{ii}\,(q-1)\,x^i + a\,(q-1)\,x^j\right) = 0\,.$$

Сопоставляя эту систему с системой уравнений (2), получаем требуемое.

О п р е д е л е н и е 2. Линиями $\mathcal{L}_{\alpha'}$ (α'=1,2,3,4) на поверхности (A_α) называются линии, которые соответствуют торсам прямолинейных конгруэнций

$$(A_0A_1) \qquad \omega^2=0,\ \gamma^3_{11}\,\omega^1+a\omega^2=0,$$

$$(A_0A_2) \qquad \omega^1=0,\ a\omega^1+\gamma^3_{22}\,\omega^2=0.$$

О п р е д е л е н и е 3. Точки пересечения касательных к линиям $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_3$ на поверхности (A_3) и к линиям $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_4$ на поверхности (A_0) с прямой A_1A_2 называются соответственно точками B_1, B_3, B_2, B_4.

Обозначим B_5 и B_6 -двойные точки гомографии [3] пары поверхностей (A_0) и (A_3).

Т е о р е м а 3. 1/Пары точек B_τ и $B_{\tau+1}$ $(\tau=1,3,5)$ гармонически разделяют точки A_1 и A_2. 2/Прямая A_0B_τ является полярой точки $B_{\tau+1}$ относительно коники C; прямая A_0B_s ($s=2,4,6$) является полярой точки B_{s-1} относительно коники C'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Точки $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ определяются формулами:

$$B_1=aA_1+\gamma^3_{11}A_2, \qquad B_2=-aA_1+\gamma^3_{11}A_2,$$

$$B_3=\gamma^3_{22}A_1+aA_2, \qquad B_4=-\gamma^3_{22}A_1+aA_2,$$

$$B_5=-\sqrt{\gamma^3_{22}}\,A_1+\sqrt{\gamma^3_{11}}\,A_2,\ B_6=\sqrt{\gamma^3_{22}}\,A_1+\sqrt{\gamma^3_{11}}\,A_2,$$

откуда следуют равенства

$$(A_1A_2;\ B_\tau B_{\tau+1})=-1.$$

2/В справедливости второго утверждения теоремы убеждаемся, сравнив уравнения прямых A_0B_τ и A_0B_s с уравнениями поляр соответствующих точек $B_{\tau+1}$ и B_{s-1} относительно коники C.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Конгруэнции поверхностей второго порядка в P_3.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.4, Калининград, 1974, с.86-106.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, 1976, с.54-60.

3. Ф и н и к о в С.П. Асимптотически сопряженные двойные линии Ермолаева.- Уч.записки МГПИ, 1951, № 16, вып.3, с.235-260.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.IO 1979

УДК:5I3.73

Б. Д. Чеботаревский

КАТЕГОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Современное развитие дифференциальной геометрии, по словам М.Кураниши [1], имеет тенденцию к трактовке дифференциальных уравнений в частных производных или дифференциальных операторов как геометрических объектов. Эта тенденция нашла свое отражение в работе [1], где дифференциальное уравнение (система) понимается как открытое множество $\mathcal{U}$ в пространстве струй локальных сечений некоторого расслоенного многообразия ξ вместе с локально конечно порожденным подпучком Φ идеалов пучка гладких функций на $\mathcal{U}$, а решение - как такое сечение в ξ, струя которого в каждой точке обращает все функции пучка Φ в нули. Такая трактовка оказалась плодотворной при изучении проблемы интегрируемости (Х. Гольдшмидт [2], [3]), топологических аспектов (М.Л.Громов [4]), симметрии (А.М.Виноградов [5], [6]) дифференциальных уравнений и ряда других вопросов. Использование струй Эресмана позволило рассматривать инвариантные относительно выбора системы координат понятия и операции, а применение языка теории пучков дало возможность строго разграничивать локальный и глобальный подходы. Следует, однако, отметить, что использование структуры расслоения в определении дифференциального уравнения по Кураниши предопределяет выделение привилегированного

класса адаптированных координат и распределение переменных на "независимые" и "зависимые", а это делает неестественным рассмотрение общих преобразований,которые "смешивают" переменные. Несколько в другом духе строится Т. Клейном [7] дифференциальное уравнение, определенное распределением. Для этого в многообразии $T^1_h M$ $(h,1)$ - скоростей на M выделяется множество $RT^1_h M$ регулярных $(h,1)$ - скоростей, в котором эффективно действует группа $GL(h,R)$. Каждое распределение h-мерных площадок на многообразии M определяет отображение M в пространство орбит $RT^1_h M/GL(h,R)$, и наоборот.

В настоящей работе предлагается новое определение дифференциального уравнения на многообразии, строится категория дифференциальных уравнений и рассматриваются некоторые их общие свойства. Все рассматриваемые многообразия, отображения и функции предполагаются из класса C^∞.

Пусть M - m-мерное многообразие, $T^k_n M = \{ j^k_0 f \mid f: R^n \to M \}$ - многообразие (n, k) - скоростей на M, $\pi^k_\ell : T^k_n M \to T^\ell_n M : j^k_0 f \longmapsto j^\ell_0 f$ - проекция, $\mathcal{D}^k(n)$ - дифференциальная группа, отображением

$$\lambda : T^k_n M \times \mathcal{D}^k(n) \longrightarrow T^k_n M : (j^k_0 f, j^k_0 \varphi) \longmapsto j^k_0 (f \circ \varphi)$$

определяется на $T^k_n M$ структура правого $\mathcal{D}^k(n)$ пространства.

Под дифференциальным уравнением $\Theta = (M, n, k, \mathcal{U}, \Phi)$ будем понимать открытое, инвариантное относительно действия дифференциальной группы $\mathcal{D}^k(n)$, множество $\mathcal{U}$ в $T^k_n M$ вместе с локально конечно порожденным подпучком Φ идеалов функций на $\mathcal{U}$, инвариантным относительно $\mathcal{D}^k(n)$. Точки z из $\mathcal{U}$, в которых все функции из стебля Φ_z обращаются в нуль, называются интегральными струями, а их множество обозначается через $I(\Theta)$.

Будем говорить, что пара (N, τ), где N - n-мерное многообразие, $\tau : N \longrightarrow M$, удовлетворяет уравнению Θ , если для каждой точки $x \in N$ и некоторой карты (V, φ), содержащей точку x , $j_0^k(\tau\circ\varphi^{-1}\circ t_{\varphi(x)}) \in I(\Theta)$. Здесь $t_{\varphi(x)}: R^n \longrightarrow R^n : y \longmapsto y + \varphi(x)$ - сдвиг. Это определение не зависит от выбора карты в окрестности точки x . Легко проверить, что если пара (N, τ) удовлетворяет уравнению Θ и $f : \bar{N} \longrightarrow N$ – диффеоморфизм, то пара $(\bar{N}, \tau\circ f)$ также удовлетворяет Θ . Такие пары будем считать эквивалентными относительно дифференциального уравнения Θ , а класс эквивалентных пар назовем решением Θ .

Модифицируя подход Т.Клейна, нетрудно увидеть, что распределения и системы Пфаффа на многообразиях порождают некоторые дифференциальные уравнения в смысле нашего определения. То же можно сказать и о дифференциальных уравнениях в смысле Кураниши.

Морфизмом дифференциального уравнения $\Theta_1 = (M_1, n, k, U_1, \Phi_1)$ в уравнение $\Theta_2 = (M_2, n, k, U_2, \Phi_2)$ назовем отображение $\nu : M_1 \longrightarrow M_2$ такое, что $(T^k_n\nu)^{-1}(U_2) = U_1$, $(T^k_n\nu)^* \Phi_2 \subset \Phi_1$, где $(T^k_n\nu)^*\Phi_2 = \{F_2\circ T^k_n\nu \mid F_2 \in \Phi_2\}$ – обратный образ пучка Φ_2.

Из этого определения легко следует, что если пара (N, τ) удовлетворяет уравнению Θ_1 и $\nu : \Theta_1 \longrightarrow \Theta_2$ - морфизм, то пара $(N, \nu\circ\tau)$ удовлетворяет Θ_2 [8]. Множество дифференциальных уравнений с определенными выше морфизмами образует категорию.

Пусть F - функция, определенная на открытом множестве $U \subset T^k_n M$. Определим на $(\pi^{k+1}_k)^{-1}(U)$ функцию $\partial_i^\# F$ равенством

$$(\partial_i^\# F)(j_0^{k+1} f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(F(j_0^k(f\cdot t_x))\right)_{x=0} \quad ,(1)$$

где t_x – сдвиг R^n . Пусть в локальных координатах на $T^{k+1}_n M$, ассоциированных с локальной картой (V, φ) на M, точка $j_0^{k+1} f$ определяется набором $(y^\alpha, p^\alpha_i, \dots, p^\alpha_{i_1\dots i_{k+1}})$. Тогда $(\partial_i^\# F)(j_0^{k+1} f) = \sum \partial F/\partial p^\alpha_{I_\ell}\; p^\alpha_{I_\ell i}$, где сумми-

рование ведется по всем мультииндексам $I_\ell = (i_1; \dots, i_\ell)$ и $\ell = 1, \dots, k$. Из (1) следует, что

$$\partial_i^\#(F_1 + F_2) = \partial_i^\# F_1 + \partial_i^\# F_2 \quad , (2)$$

$$\partial_i^\#(F_1 \cdot F_2) = (\partial_i^\# F_1)\cdot F_2 + F_1 \cdot \partial_i^\# F_2 \quad . (3)$$

С помощью этих формальных производных определим продолжения дифференциальных уравнений.

Пусть $\Theta = (M, n, k, U, \Phi)$. Возьмем систему локальных порождающих Ф, скажем $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_a)$, определенных на открытом множестве $U' \subset U$. Обозначим через $\psi(\mathcal{F})$ подпучок идеалов на $(\pi^{k+1}_k)^{-1}(U')$, порожденный функциями $F_\sigma \circ \pi^{k+1}_k$ и $\partial_i^\# F_\sigma$ $(\sigma = 1, \dots, a;\ i = 1, \dots, n)$. В силу (2) и (3) подпучок идеалов $\psi(\mathcal{F})$ не зависит от выбора локальных порождающих F_σ для Ф. Поэтому существует локально конечно порожденный подпучок идеалов, скажем pФ , пучка функций на $(\pi^{k+1}_k)^{-1}(U)$ такой, что при любом выборе локальных порождающих $\mathcal{F}$ для Ф ограничение pФ на $(\pi^{k+1}_k)(U')$ совпадает с $\psi(\mathcal{F})$. Нетрудно проверить, что $(M, n, k+1, (\pi^{k+1}_k)^{-1}(U), p\Phi)$ - дифференциальное уравнение. Его будем называть продолжением уравнения Θ и обозначать $p\Theta$.

Продолжение дифференциальных уравнений - ковариантный функтор из категории DE в себя. Пара (N, τ) удовлетворяет уравнению Θ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет $p\Theta$. Эти утверждения доказываются непосредственной проверкой.

Аналогично Кураниши [1] определим вполне интегрируемые и инволютивные дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение $\Theta = (M, n, k, U, \Phi)$ называется вполне интегрируемым в точке $z_0 \in I(\Theta)$, если $C_{z_0}(\Theta) = \{X \in T_{z_0} T^k_n M \mid XF = 0,\ F \in \Phi \text{ и } d\pi^k_{k-1}(X) = 0\} = \{0\}$; образ $I(p\Theta)$ при отображении π^{k+1}_k - окрестность точки z_0 в $I(\Theta)$ и пучок Ф полон в точке z_0 . Если уравнение Θ вполне интегрируемо в точке z_0 , то существует решение Θ в точке z_0 и при этом росток решений в точке z_0

единственный.

Будем говорить, что дифференциальное уравнение находится в инволюции в точке $z_0 \in I(\theta)$, если выполнены следующие условия:

а) подпространство $C_{z_0}(\theta)$ является инволютивным в
$$\{X \in T_{\pi^k_{k-1}(z_0)} T^{k-1}_n M \mid d\pi^{k-1}_{k-2}(X) = 0\} \otimes T^*_0 R^n \quad ;$$

б) пучок Φ регулярен в точке z_0;

в) существует такая окрестность W точки z_0, что $W \cap I(\theta)$ есть подмногообразие в $T^k_n M$, $((\pi^{k+1}_k)^{-1}(W)) \cap I(p\theta)$ - подмногообразие в $T^{k+1}_n M$, $(((\pi^{k+1})^{-1}(W)) \cap I(p\theta), W \cap I(\theta), \pi^{k+1}_k)$ - расслоенное многообразие.

Используя связь между дифференциальными уравнениями в смысле Кураниши и уравнениями в смысле нашего определения, нетрудно доказать аналог теоремы Картана-Келера-Лаптева-Кураниши о продолжении.

Пусть $\theta_k = (M, n, k, U_k, \Phi_k)$ $(k \geqslant k_1)$ - дифференциальные уравнения, $z_k \in I(\theta_k)$, $\pi^{k+1}_k(z_{k+1}) = z_k$, для некоторой окрестности V_{k+1} точки z_{k+1}
$$id|V_{k+1} : \theta_{k+1}|V_{k+1} \longrightarrow p\theta_k|V_{k+1}$$ — морфизм, подпучок Φ регулярен в точке z_k.

Если существует окрестность W_k точки z_k такая, что $W_k \cap I(\theta_k)$ — подмногообразие в $T^k_n M$, $((\pi^{k+1}_k)^{-1}(W_k)) \cap I(\theta_{k+1})$ - подмногообразие в $T^{k+1}_n M$ и $(((\pi^{k+1}_k)^{-1}(W_k)) \cap I(\theta_{k+1}), W_k \cap I(\theta_k), \pi^{k+1}_k)$ - расслоенное многообразие, то существует k_2 такое, что для всех $k > k_2$ уравнение θ_k инволютивно в точке z_k и $\theta_{k+1} = p\,\theta_k$.

Список литературы

1. Kuranishi M. Lectures on involutive systems of partial differential equations. São-Paulo, 1967.

2. Goldschmidt H. Existence Theorems for analytic linear partial differential Equations. Ann. Math., Ser. 2, 1967, 86,No.2, 246-270.

3. Goldschmidt H. Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations. J. Different. Geom., 1967, 1, No. 3, 269-307.

4. Громов М.Л. Выпуклое интегрирование дифференциальных соотношений 1.- Изв. АН СССР, Сер. мат., 1973, № 2 (37), 329-343.

5. Виноградов А.М. Многозначные решения и принцип классификации нелинейных дифференциальных уравнений.- ДАН СССР 210:1 (1973), 11-14.

6. Виноградов А.М. Теория симметрий нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Московский ун-т, 1974 (Рукопись депонирована в ВИНИТИ, от 14 ноября 1974 г.)

7. Klein T. Certain relation between vector filds and distributions on a differentiable manifold. "Cas. pestor. mat.", 1976, 101, No. 4, 370-374.

8. Чеботаревский Б.Д. Построение категории дифференциальных уравнений. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 658-76 Деп.

10 Зак. 3728

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Ю.И.Шевченко

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ

Нормализация А.П.Нордена поверхности проективного пространства позволяет определить параллельные перенесения касательной и нормальной прямой. Если соприкасающаяся плоскость не заполняет всего пространства, то дополнительное оснащение поверхности дает возможность уточнить параллельное перенесение А.В.Чакмазяна в случае, когда нормальная прямая принадлежит соприкасающейся плоскости.

Проективное пространство P_n размерности n относится к подвижному реперу $\{A_0, A_\mathcal{I}\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA_0 = \theta A_0 + \omega^\mathcal{I} A_\mathcal{I} \quad (\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = \overline{1,n}),$$
$$dA_\mathcal{I} = \theta A_\mathcal{I} + \omega_\mathcal{I}^\mathcal{K} A_\mathcal{K} + \omega_\mathcal{I} A_0,$$

где инвариантные формы проективной группы $\omega^\mathcal{I}, \omega_\mathcal{I}^\mathcal{K}, \omega_\mathcal{I}$ удовлетворяют структурным уравнениям (см., например, [1]):

$$\mathcal{D}\omega^\mathcal{I} = \omega^\mathcal{K} \wedge \omega_\mathcal{K}^\mathcal{I}, \quad \mathcal{D}\omega_\mathcal{I} = \omega_\mathcal{I}^\mathcal{K} \wedge \omega_\mathcal{K},$$
$$\mathcal{D}\omega_\mathcal{I}^\mathcal{K} = \omega_\mathcal{I}^\mathcal{J} \wedge \omega_\mathcal{J}^\mathcal{K} + (\delta_\mathcal{I}^\mathcal{K} \omega_\mathcal{J} + \delta_\mathcal{J}^\mathcal{K} \omega_\mathcal{I}) \wedge \omega^\mathcal{J}.$$

§ 1. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ А.П.НОРДЕНА И А.В.ЧАКМАЗЯНА

В пространстве P_n рассмотрим m-мерную поверхность X_m как многообразие касательных плоскостей [2],

что отразим соответствующей специализацией репера

$$R_1 = \{A_0, A_i, A_a\}; \; i, j, k = \overline{1,m}; \; a, b = \overline{m+1,n},$$

где вершины A_0, A_i помещены на касательную плоскость T_m, причем вершина A_0 -в её центр.

Произведем нормализацию поверхности X_m в смысле А.П.Нордена [3]. Нормаль I рода P_{n-m}, пересекающую касательную плоскость T_m лишь в её центре, зададим системой уравнений

$$x^i - \lambda_a^i x^a = 0,$$

где функции λ_a^i удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \lambda_a^i + \omega_a^i = \lambda_{aj}^i \omega^j,$$

а дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla \lambda_a^i = d\lambda_a^i - \lambda_b^i \omega_a^b + \lambda_a^j \omega_j^i.$$

Нормаль II рода P_{m-1}, принадлежащую касательной плоскости T_m и не проходящую через её центр, зададим совокупностью точек

$$B_i = A_i + \lambda_i A_0 \quad (\nabla \lambda_i + \omega_i = \lambda_{ij} \omega^j).$$

Н.М.Остиану [4] показала, что поле нормалей I рода порождает оснащение Картана [7] поверхности X_m. Плоскость Картана определяется совокупностью точек

$$B_a = A_a + \lambda_a^i A_i + \lambda_a A_0,$$

где функции λ_a охватываются по формулам, приведенным в работе [5].

Прямая, принадлежащая касательной плоскости T_m и проходящая через ее центр, определяется точкой $B = \xi^i B_i$ на нормали II рода. Дифференциал точки B можно представить в виде

$$dB=\theta B+(\ldots)A_0+(\ldots)^a B_a+(\nabla\xi^i-\Gamma^i_{jk}\xi^j\omega^k-\xi^i\lambda_j\omega^j)A_i,$$

где Γ^i_{jk} -объект касательной линейной связности, охват которого приведен в статье [5]. Касательная прямая переносится параллельно [3] в линейной связности, определяемой объектом Γ^i_{jk}, когда смещение точки B лежит в плоскости, натянутой на эту точку и нормаль I рода. Из предыдущей формулы получаем условия параллельного перенесения

$$\nabla\xi^i-\Gamma^i_{jk}\xi^j\omega^k=(\vartheta+\lambda_j\omega^j)\xi^i,$$

где линейная форма ϑ играет роль множителя пропорциональности.

З а м е ч а н и е I. В связи с тем, что нашему объекту Γ^i_{jk} дана та же геометрическая характеристика, что у А.П. Нордена для аналогичного объекта другой природы, можно говорить о различных аналитических описаниях одной и той же связности.

Прямая, принадлежащая нормали I рода и проходящая через центр касательной плоскости, задается точкой $C=\xi^a B_a$ на плоскости Картана. Дифференциал точки C можно представить в виде

$$dC=\theta C+(\ldots)A_0+(\ldots)^i A_i+(\nabla\xi^a-\Gamma^a_{bi}\xi^b\omega^i-\xi^a\lambda_i\omega^i)A_a,$$

где Γ^a_{bi} -объект нормальной линейной связности, охват которого приведен в работе [5]. Нормальная прямая переносится параллельно [6] в линейной связности, определяемой объектом Γ^a_{bi}, когда смещение точки C лежит в плоскости, натянутой на эту точку и касательную плоскость. Условия параллельного переноса имеют вид

$$\nabla\xi^a-\Gamma^a_{bi}\xi^b\omega^i=(\vartheta+\lambda_i\omega^i)\xi^a.$$

З а м е ч а н и е 2. Конструкция параллельного перенесения А.В.Чакмазяна изложена здесь с некоторой модификацией в менее канонизированном репере.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ.

В случае выполнения неравенства $n>\frac{1}{2}m(m+3)$ поверхность X_m пространства можно рассматривать как многообразие пар касательной и соприкасающейся плоскости. Отразим это дальнейшей специализацией подвижного репера

$$R_2=\{A_0,A_i,A_\alpha,A_u\};\ \alpha,\beta=\overline{m+1,\tfrac{1}{2}m(m+3)};\ u=\overline{\tfrac{1}{2}m(m+3)+1,n};$$

а именно, поместим вершины A_α на соприкасающуюся плоскость $T_{\frac{1}{2}m(m+3)}$.

Произведем обобщенную нормализацию поверхности X_m [5], т.е. зададим дополнительно нормаль III рода $P_{n-\frac{1}{2}m(m+1)}$, пересекающую соприкасающуюся плоскость по касательной плоскости. Известно, что обобщенная нормализация позволяет выделить плоскость $P_{\frac{1}{2}(m^2+m-2)}$, принадлежащую соприкасающейся плоскости и не имеющую общих точек с касательной, и плоскость $P_{n-\frac{1}{2}m(m+3)-1}$, не имеющую общих точек с соприкасающейся плоскостью. Эти плоскости определяются совокупностями точек B_α и B_u (см. [5, с.145]).

Прямая, принадлежащая соприкасающейся плоскости, проходящая через центр касательной плоскости, но не лежащая в ней, задается точкой $B=\xi^\alpha B_\alpha$ на плоскости $P_{\frac{1}{2}(m^2+m-2)}$. Дифференциал точки B можно представить в виде

$$dB=\theta B+(\ldots)A_0+(\ldots)^i A_i+(\ldots)^u B_u+(\nabla\xi^\alpha-\Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta\omega^i-\xi^\alpha\lambda_i\omega^i)A_\alpha,$$

где $\Gamma^\alpha_{\beta i}$ -объект линейной связности, охват которого приведен в статье [5]. Заметив, что нормаль III рода задается точками A_0, A_i, B_u, дадим

О п р е д е л е н и е. Нормальная прямая, принадлежащая соприкасающейся плоскости, переносится параллельно в линейной связности, определяемой объектом $\Gamma^{\alpha}_{\beta i}$, когда ее точка пересечения с плоскостью $P_{\frac{1}{2}(m^2+m-2)}$ смещается в плоскости, натянутой на эту точку и нормаль III рода. Условия параллельного перенесения имеют вид

$$\nabla\xi^{\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\beta i}\xi^{\beta}\omega^{i}=(\vartheta+\lambda_i\omega^i)\xi^{\alpha}.$$

Этим, в частности, обосновывается необходимость введения нормали III рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л у м и с т е Ю.Г. Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей.- Матем.сб., 1973, т.91, № 2, с.211-233.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.- Тр.Московск.матем.о-ва, т.2, 1953, с.275-382.

3. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М., Наука, 1976

4. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства.- Тр.геометр.семинара, т.1, М., 1966, с.239-263.

5. Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8, Калининград, 1977, с.135-150.

6. Ч а к м а з я н А.В. Нормализованное по Нордену многообразие с параллельным полем нормальных направлений в P_n.- Докл. АН СССР, 1977, т.236, № 4, с.816-819.

7. Cartan E. Les espaces a connexien projective. - Тр.Семинара по векторному и тензорному анализу, 1937, вып. 4, с.147-159.

С Е М И Н А Р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском государственном университете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 25 мая 1978 года.

Ниже приводится план работы семинара с 18 октября 1978 года по 23 мая 1979 года.

18.10.1978г. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Об относительности понятия оснащения эквипараметрического многообразия.

25.10.1978г. Б.А.А н д р е е в. О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n (m>n)$.

1.11.1978г. Ю.И.П о п о в. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы аффинного пространства.

15.11.1978г. В.С.М а л а х о в с к и й. Некоторые классы конгруэнций квадрик в P_3.

22.11.1978г. В.И.М я г к о в (г.Хмельницкий). О расслоении комплексов в нормальные конгруэнции.

29.11.1978г. В.В.М а х о р к и н. Пучки топологических пространств и когомологии.

13.12.1978г. Л.Е.Е в т у ш и к (г.Москва). О геометрии дифференциальных уравнений в частных производных.

20.12.1978г. Л.Е.Е в т у ш и к (г.Москва). О геометрии дифференциальных уравнений в частных производных.

14.2.1979г. Л.Г.К о р с а к о в а. Об одном классе расслояемых пар конгруэнций кривых второго порядка в P_3.

21.2.1979г. В.П.Ц а п е н к о. Об одном классе конгруэнций $(P, Q)_{2,2}$.

28.2.1979г. М.В.К р е т о в. Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве.

14.3.1979г. А.В.М а х о р к и н. Система дифференциальных уравнений Пфаффа одного класса комплексов квадрик в P_3.

21.3.1979г. Е.В.Скрыдлова. Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных квадрикой и прямой.

28.3.1979г. В.Н.Х у д е н к о. О многообразиях многомерных квадрик.

4.4.1979г. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Параллельные перенесения на поверхности.

11.4.1979г. Г.Л.С в е ш н и к о в а. Об одном однопараметрическом семействе квадрик Ли.

18.4.Ж.Г.Г о в о р к о в а. Вырожденные конгруэнции, порожденные квадрикой и прямой.

25.4.1979г. С.В.К и ш т а н о в а. Конгруэнции линейчатых квадрик в P_3 с вырождающимися фокальными поверхностями.

16.5.1979г. О.П.К о н о в а. Конгруэнции параболических цилиндров.

23.5.1979г. М.Н.Г е р а щ е н к о в а. Конгруэнции нецентральных квадратичных элементов.

УДК 513.73

О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n$ $(m > n)$. А н д р е е в Б.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 5-9.

Изучается распределение линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n (m > n)$. Введены новые понятия: главных точек и индикатрисы.

Библиография: 7 названий.

УДК 513.73

О четыре-ткани, порожденной асимптотическими распределениями на трехмерной поверхности в P_5. Б а у м а р а т о в Х.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 10-15.

Изучаются поверхности V_3 пятимерного проективного пространства, у которых четыре семейства асимптотических распределений оказываются голономными.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Пространство псевдореперов. В е д е р н и к о в В.И. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 16-21.

Определено пространство псевдореперов, изучаются его полиномиальные морфизмы, устанавливается редуктивность.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

Геометрия основного пространства. В е д е р н и к о в С.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 22- 29.

Изучается орбита G -пространства M $(n+1)$ множества квадратных матриц $(n+1)$-го порядка. Вводится понятие поля основных элементов.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

Взаимно-полярные три-ткани Боля гиперболического типа. И в а н о в Л.Д. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 30 - 35.

Изучаются многомерные три-ткани, установлено существование три-тканей, полярно-сопряженных с четырехмерными три-тканями Боля гиперболического типа.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Об одном классе расслояемых пар конгруэнций кривых второго порядка в P_3. К о р с а к о в а Л.Г. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 36-40. Рассматривается класс расслояемых пар $(C_1 C_2)$ конгруэнций

коник (пара B).
Библиография: 2 названия.

УДК 513.73
Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве. Кретов М.В."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10,Калининград,1979,с. 41-47.
В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются комплексы эллипсоидов.Найден основной геометрический объект комплекса.
Библиография: 4 названия.

УДК 513.73
О частично-параллельных поверхностях в E_n.Лазарев А.С. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10, Калининград,1979,с.48-53.
Изучаются частично параллельные поверхности $V_p(y)$ в евклидовом пространстве E_n.
Библиография: 2 названия.

УДК 513.73
Три ткани на двумерных поверхностях в три-аксиальном пространстве.Лазарева В.Б."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10,Калининград,1979,с. 54-59.
Изучаются три ткань в пространстве P_3 с тремя фиксированными прямыми.
Библиография: 2 названия.

УДК 513.73
Об одном классе конгруэнций квадрик.Малаховский В.С."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10 , Калининград,1979,с. 60-62.
Исследованы конгруэнции линейчатых квадрик со специальными свойствами фокальных поверхностей,описанных вершинами автополярного тетраэдра 3-го рода.
Библиография: 3 названия.

УДК 513.73
Система дифференциальных уравнений Пфаффа одного класса комплексов в P_3.Махоркин А.В."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10.Калининград,1979,с. 63-66.
Рассматривается такой комплекс невырожденных квадрик трехмерного проективного пространства,что фокальное многообразие квадрики комплекса содержит конику.
Библиография: 2 названия.

УДК 513.73
Об одном классе конгруэнций гиперболических параболоидов в A_3.Митрофанова Е.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10,Калининград,1979,с.67-69.
Введены понятия ассоциированных квадрик,позволяющие охарактеризовать относительные инварианты конгруэнции.
Библиография : 2 названия.

УДК 513.73
Группы движений n-ортогональной системы пространства в себя. Нечитайлова Л.С. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10,Калининград,1979,с.70-74.
Дается классификация n-ортогональных систем в римановом пространстве произвольной сигнатуры.

УДК 513.73
Аффинная связность Γ на многообразии почти контактной структуры.Поляков Н.Д."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10,Калининград,1979,с.75-83.
Изучается почти контактная структура со структурными объектами φ_x, ξ, η_k.
Библиография: 3 названия.

УДК 513.73
О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы аффинного пространства.Попов Ю.И."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10,Калининград,1979,с. 84-103.
Инвариантным методом Г.Ф.Лаптева строятся поля геометрических объектов в дифференциальных окрестностях 2-го и 3-го порядков элемента m -мерной регулярной гиперполосы H_m аффинного пространства
Библиография:5 названий.

УДК 513.73
Совершенные 3-структуры.Сбитнева Л.В."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10,Калининград, 1979,с. 97-103.
Дана характеристика геодезических луп Δ -пространств и введен специальный класс Δ -пространств.
Библиография:12 названий.

УДК 513.73
Конгруэнции J_2 с вырождающейся в линию фокальной поверхностью.Свешникова Г.Л."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10,Калининград,1979,с. 104-114.
Изучаются конгруэнции кривых второго порядка с одной вырождающейся фокальной поверхностью.
Библиография:2 названия.

УДК 513.73
О конгруэнциях центральных квадрик в аффинном пространстве.Сопина Е.П."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10,Калининград,1979,с. 127-130.
Введены понятия ассоциированных квадрик,позволяющие дать характеристики инвариантам конгруэнции эллипсоидов.
Библиография : 2 названия.

УДК 513.73
Геометрия сетей,инвариантно присоединенных к заданным ортогональным сетям на V_p в E_n.Сельдюков Е.К. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.10, Калининград,1979,с.110-114.

Изучаются геометрические свойства поверхности присоединенной к j- линии сети Σ_p.
Библиография: 2 названия.

УДК 513.73
Об одном классе вырожденных конгруэнций,порожденных квадрикой и прямой.С к р ы д л о в а Е.В."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.IO,Калининград,1979, с.II5-I20.
В трехмерном проективном пространстве рассмотрен частный класс вырожденных конгруэнций $(QL)_{1,2}$.
Библиография: 2 названия.

УДК 513.73
Некоторые случаи отображения двумерных поверхностей. С о к у ш е в а Н.Р."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.IO,Калининград,1979,с.I2I-I26.
Рассматривается дифференцируемое отображение T области $\Omega \subset V_2 \subset E_3$ на область $\bar{\Omega} \subset \bar{V}_2 \subset \bar{E}_3$ (E_3 и $\bar{E}_3$ -вполне ортогональные подпространства евклидова пространства E_6).
Библиография: 3 названия.

УДК 513.73
Одномерное распределение эллипсов в трехмерном эквиаффинном пространстве.Ф у н т и к о в а Т.П."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.IO,Калининград,1979, с.I3I-I34.
В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются одномерные многообразия эллипсов с непараллельными плоскостями.
Библиография: 2 названия.

УДК 513.73
О многообразиях многомерных квадрик.Х у д е н к о В.Н. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.IO,Калининград,1979,с.I35-I40.
В проективном пространстве P_n рассматриваются многообразия $(h,h,m)^2_p$ квадрик Q_p с характеристическими точками.
Библиография: I название.

УДК 513.73
Об одном классе конгруэнций.Ц а п е н к о В.П."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.IO,Калининград,1979,с.I4I-I47.
В трехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция $(P,Q)_{2,2}$ пар фигур,где P -точка, Q -невырожденная квадрика.
Библиография: 3 названия.

УДК 513.73
Категория дифференциальных уравнений на многообразиях. Ч е б о т а р е в с к и й В.Д."Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.IO,Калининград,1979,с.I48-I53.
Построена категория дифференциальных уравнений на многообразиях и рассмотрены основные свойства объектов этой категории.
Библиография: 8 названий.

УДК 513.73
Параллельные перенесения на поверхности.Ш е в ч е н к о Ю.И. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.IO, Калининград,1979,с. I54-I58.
Изучаются нормализации А.П.Нордена и поверхности проективного пространства.
Библиография: 7 названий.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 10

Редактор В. И. Васильева. Техн. редактор Н. Д. Шишкова.
Корректор Н. Ю. Губанова.
Подписано к печати 6.04 1979 г. Формат бумаги $60\times90^1/_{16}$. Сорт бумаги офсетная № 1, 80 г/м². Усл. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 10,43. КУ 01222. Заказ 3728. Тираж 500 экз. Цена 1 р.

Калининградский государственный университет,
г. Калининград обл., ул. Университетская, 2.

Типография издательства «Калининградская правда»,
г. Калининград обл., ул. Карла Маркса, 18.

1 руб.