МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 6

Калининград
1975

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 6

Калининград
1975

УДК 513

Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.6. Калининград, 1975, 230 с.

Статьи настоящего выпуска относятся к следующим разделам дифференциальной геометрии: многообразие квадрик в многомерных пространствах, теория многомерных сетей, теория гиперполос многомерного проективного пространства, конгруэнции кривых второго порядка, многообразия пар фигур, поверхности и прямолинейные конгруэнции.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области геометрии.

Содержание

Стр.

Б.А. А н д р е е в

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И ПРОСТРАНСТВОМ ПАРЫ (p,q)

Продолжается изучение локального соответствия f между точечным проективным пространством P_N и пространством $R(F)$ пар фигур $F=(p,q)$,где p -точка n-мерного проективного пространства P_n ,а q -не инцидентная ей гиперквадрика [I],[2] .Различные типы характеристических направлений отображения f связываются,с одной стороны, с отображениями,касательными к данному и ассоциированным с ним отображением,с другой стороны,с некоторыми семействами пар F .

§I.Инфлексионные однопараметрические семейства пар F

Однопараметрические многообразия фигур будем называть I-семействами.Рассмотрим некоторые I-семейства пар $F=(p,q)$, содержащие фиксированную пару $F^\circ=(p^\circ,q^\circ)$,а также I-семейства некоторых индуцируемых парой F фигур.Система дифференциальных уравнений I-семейства $\{F\}$ пар F имеет вид:

$$\omega^i_0 = \Lambda^i \theta, \tag{1.1}$$

$$\omega^0_i = \Lambda_i \theta, \tag{1.2}$$

$$\nabla a_{ij} = \Lambda_{ij} \theta, \tag{1.3}$$

где ω^i, ω^0_i и ∇a_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$-главные формы пары F [I,c.28] ,а θ -параметрическая форма,для которой выполняется $d\theta = 0$.Продолжая систему (I.I)-(I.3) и используя обозначения из [I,c.29] ,получаем:

$$\nabla \Lambda^i = M^i \theta, \quad \nabla \Lambda_i = M_i \theta, \quad \nabla \Lambda_{ij} = M_{ij} \theta, \tag{1.4}$$

$$\mathring{\nabla} M_i = 0, \quad \mathring{\nabla} M_i = 0, \quad \mathring{\nabla} M_{ij} = 0. \tag{1.5}$$

Таким образом,фундаментальные объекты I-семейств $\{F\}$ первого и второго порядков $\{\Lambda^i, \Lambda_i, \Lambda_{ij}\}$ и $\{M^i, M_i, M_{ij}\}$ и их подобъекты: $\{\Lambda^i\}, \{\Lambda_i\}, \{\Lambda_{ij}\}$ и $\{M^i\}, \{M_i\}, \{M_{ij}\}$ являются тензорами.I-семейство (кривая) $\{p\}$ точек p ,порожденное I-семейством $\{F\}$ и определяемое последовательностью геометрических объектов $\{\Lambda^i\}, \{\Lambda^i, M^i\}, \dots$ имеет в окрестности точки p^0 следующее координатное представление:

$$\tilde{x}^i = \Lambda^i u + \frac{1}{2} M^i u^2 + \langle 3 \rangle, \tag{1.6}$$

где $\tilde{x}^i$ —неоднородные координаты точки p, $du = \theta$, $\langle 3 \rangle$ означает совокупность членов 3-го порядка малости относительно u .

Аналогично I-семейство $\{\pi\}$ гиперплоскостей π ,индуцируемых парами F, определяется последовательностью объектов $\{\Lambda_i\}, \{\Lambda_i, M_i\}, \dots$ и имеет в окрестности элемента π^0 ,индуцируемого парой F^0 ,координатное представление

$$\tilde{\xi}_i = -\Lambda_i u - \frac{1}{2} M_i u^2 + \langle 3 \rangle \tag{1.7}$$

в тангенциальных неоднородных координатах $\tilde{\xi}_i$.

Уравнение гиперквадрики q в репере,нулевая вершина которого расположена в точке p^0 ,а остальные-на гиперплоскости π^0 ,имеет в однородных координатах x^0, x^i следующий вид:

$$a_{ij} x^i x^j + 2 a_{0i} x^i x^0 + (x^0)^2 = 0. \tag{1.8}$$

Гиперквадрика (I.8) определяет в P_n преобразование,имеющее следующий вид в неоднородных координатах:

$$\tilde{x}^{i'} = \sqrt{1 - c^i a_{0i}}\ \tilde{x}^i + c^i, \tag{1.9}$$

где c^i и a_{0i} - соответственно неоднородные координаты полюса гиперплоскости π и координаты поляры точки p^0 относительно гиперквадрики q .Прообразом гиперквадрики (I.8) при преобразовании (I.9) является гиперквадрика:

$$a_{ij} x^i x^j + (x^0)^2 = 0 \tag{1.10}$$

Назовем обратное к (I.9) преобразование преобразованием C, а гиперквадрику (I.10)- C образом гиперквадрики (I.8): $Q = C(q)$. Таким образом, $\operatorname{rang} Q = \dim R(Q) = C^2_{n+1}$

[3] Главными формами гиперквадрики q являются формы Пфаффа:

$$\nabla a_{ij}, \quad \nabla a_{0i} = -\omega^0_i - a_{il}\,\omega^l_0$$

Пусть a°_{ij} -координаты гиперквадрики q°. Тогда система дифференциальных уравнений I-семейства гиперквадрик q имеет вид:

$$\nabla a_{ij}=\Lambda_{ij\gamma}\,\theta,\quad \nabla a_{oi}=\Lambda_{oi}\,\theta,\quad \Lambda_{oi}=-\Lambda_i-a_{ij}\Lambda^j. \qquad (1.11)$$

Продолжением геометрического объекта I-го порядка $\{\Lambda_{ij},\Lambda_{oi}\}$ I-семейства $\{q\}$ является объект $\{M_{ij}, M_{oi}\}$, причем

$$M_{oi}=M_i+a_{ij}M^j+\Lambda_{ij}\Lambda^j, \qquad (1.12)$$

и, таким образом, координатное представление I-семейства имеет вид:

$$a_{ij}=a^\circ_{ij}+\Lambda_{ij}u+\frac{1}{2}M_{ij}u^2+\langle 3\rangle, \qquad (1.13)$$

$$a_{oi}=\Lambda_{oi}u+\frac{1}{2}M_{oi}u^2+\langle 3\rangle. \qquad (1.14)$$

Равенства (I.13) дают координатное представление I-семейства $\{Q\}$, $Q=C(q)$, порожденного семейством $\{q\}$, а (I.14) - I-семейства $\{\Pi\}$ гиперплоскостей Π: $a_{oi}x^i+x^\circ=0$, являющихся полярами точки p° относительно гиперквадрики q.

О п р е д е л е н и е I. I-семейство $\{F\}$ называется p-инфлексионным в элементе F°, если кривая $\{p\}$ в точке p° инфлексионна.

Учитывая двойственность пространств точек и гиперплоскостей, дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. I-семейство $\{F\}$ называется π-инфлексионным (Π-инфлексионным) в элементе F°, если I-семейство $\{\pi\}(\{\Pi\})$ инфлексионно в гиперплоскости $\pi^\circ(\Pi^\circ=\pi^\circ)$.

Из определений I, 2 следует, что условием инфлексионности I-семейств $\{p\}$, $\{\pi\}$ и $\{\Pi\}$ в элементах p° и π° будут иметь, соответственно, вид [4]:

$$M^i=s\Lambda^i, \qquad (1.15)$$

$$M_i=t\Lambda_i, \qquad (1.16)$$

$$M_{oi}=\tau\Lambda_{oi} \qquad (1.17)$$

О п р е д е л е н и е 3. I-семейство гиперквадрик называется инфлексионным в фиксированной гиперквадрике, если его характеристические многообразия 2-го и I-го ранга для этой гиперквадрики совпадают [5, с.53].

О п р е д е л е н и е 4. I-семейство $\{F\}$ называется Q инфлексионным (q-инфлексионным) в элементе F°, если I-семейство $\{Q\}$ C-образов гиперквадрик q ($\{q\}$ гиперквадрик q) является инфлексионным в гиперквадрике $Q^\circ=q^\circ$ (в гиперквадрике q°).

Условия Q-инфлексионности и q- инфлексионности I-семейства $\{F\}$ имеют соответственно вид:

$$M_{ij}=t\Lambda_{ij}, \qquad (1.18)$$

$$M_{ij}=\tau\Lambda_{ij},\quad M_{oi}=\tau\Lambda_{oi}. \qquad (1.19)$$

О п р е д е л е н и е 5. I-семейство $\{F\}$ называется слабо p-инфлексионным в элементе $\{F^\circ\}$, если оно является в нем p-инфлексионным и π-инфлексионным.

Условие слабой p,π-инфлексионности имеет вид:

$$M^i=\tau\Lambda^i,\quad M_i=s\Lambda_i. \qquad (1.20)$$

О п р е д е л е н и е 6. Назовем слабо ρ,π-инфлексионное I-семейство $\{F\}$ ρ,π-инфлексионным в элементе F°, если $\tau = s$.

Выясним геометрический смысл ρ,π-инфлексионности. I-семейство $\{\Phi\}$ пар Φ фигур Φ_1 и Φ_2 определяет I-семейства $\{\Phi_1\}$ и $\{\Phi_2\}$ фигур Φ_1 и Φ_2 и соответствие между элементами этих семейств: фигуры $\Phi_1 \in \{\Phi_1\}$ и $\Phi_2 \in \{\Phi_2\}$ соответствуют, если они составляют пару $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ из семейства $\{\Phi\}$.

I-семейство (I.6),(I.7) определяет прямую ℓ и пучок гиперплоскостей λ, задаваемые соответственно тензорами $\{\Lambda^i\}$ и $\{\Lambda_i\}$:

$$\tilde{x}^i = \Lambda^i u, \tag{1.21}$$

$$\tilde{\xi}_i = -\Lambda_i u, \tag{1.22}$$

и проективное соответствие между элементами ℓ и λ. Действительно, (I.21) и (I.22) задают проективные соответствия φ_1 и φ_2 между точками числовой прямой R и элементами ℓ, между точками R и элементами из λ. Тогда отображение $\mathcal{X} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \ell \longrightarrow \lambda$ будет проективным. Пусть сужение корреляции K на ℓ совпадает с $\mathcal{X}$, и, кроме того, $K(\rho)$ принадлежит связке гиперплоскостей $\{\rho^{\circ}\}$, если $\rho \in \pi^{\circ}$.

Т е о р е м а I. Чтобы слабо ρ,π-инфлексионное в элементе F° I-семейство $\{F\}$ было ρ,π-инфлексионным, необходимо и достаточно, чтобы соответствие, порождаемое f I-семейством пар $(\rho, \hat{\rho})$, где $\hat{\rho} = K^{-1}(\pi)$ с точностью до 2-го порядка малости относительно u совпадало с тождественным отображением.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение K^{-1} имеет вид: $\tilde{x}^i = A^{ij} \tilde{\xi}_j$, откуда $\Lambda^i = -A^{ij}\Lambda_j$. В условиях теоремы I-семейство пар (ρ, π) (I.6),(I.7) можно представить в виде

$$\tilde{X}^i = \Lambda^i V + \langle 3 \rangle, \quad \tilde{\xi}_i = -\Lambda^i V - \Lambda^i C V^2 + \langle 3 \rangle, \tag{1.23}$$

где $V = u + \frac{1}{2} \tau u^2$ и $C = 0$, если I-семейство $\{F\}$ ρ,π-инфлексионно, и $C = \frac{1}{2}(S - \tau)$, если не является ρ,π-инфлексионным. Для координат $\tilde{y}^i$ точки $\hat{\rho}$ имеем:

$$\tilde{y}^i = A^{ij}(-\Lambda_j V - \Lambda_j C V^2 + \langle 3 \rangle) = \Lambda^i V + \Lambda^i C V^2 + \langle 3 \rangle,$$

откуда следует утверждение теоремы.

§2. Касательные отображения

Отображение $f : U \to R(F)$, $f(P) = (\rho, q)$, где $P \in U \subset P_N$, порождает отображение $f_\rho : U \to P_n$, $f_\rho(P) = \rho$, уравнения которого в неоднородных координатах в окрестности фиксированной точки P° имеют вид:

$$\tilde{x}^i = \Lambda^i_{\mathcal{J}} \tilde{X}^{\mathcal{J}} + \frac{1}{2} \Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \tilde{X}^{\mathcal{J}} \tilde{X}^{\mathcal{K}} + \langle 3 \rangle, \quad (\mathcal{J}, \mathcal{K} = 1, \dots, N), \tag{2.1}$$

где $\langle 3 \rangle$ означает совокупность членов 3-го порядка малости относительно $\tilde{X}^{\mathcal{J}}$. Уравнения отображения $f_\pi : U \to R(\pi)$ $f_\pi(P) = \pi$ имеют вид:

$$\tilde{\xi}_i = -\Lambda_{i\jmath}\tilde{X}^{\jmath} - \frac{1}{2}\Lambda_{i\jmath\varkappa}\tilde{X}^{\jmath}\tilde{X}^{\varkappa} + \langle 3\rangle \qquad (2.2)$$

Пусть отображение $f_q: U \to R(q)$ определяется условием $f_q(P) = q$ при $f(P) = (p,q)$, а гиперквадрика q из окрестности $f_q(U)$ фиксированного элемента $q^\circ = f_q(P^\circ)$ задается уравнением (I.8). Тогда

$$a_{ij} = a^\circ_{ij} + \Lambda_{ij\jmath}\tilde{X}^{\jmath} + \frac{1}{2}\Lambda_{ij\jmath\varkappa}\tilde{X}^{\jmath}\tilde{X}^{\varkappa} + \langle 3\rangle, \qquad (2.3)$$

$$a_{oi} = -\Lambda_{oi\jmath}\tilde{X}^{\jmath} - \frac{1}{2}\Lambda_{oi\jmath\varkappa}\tilde{X}^{\jmath}\tilde{X}^{\varkappa} + \langle 3\rangle, \qquad (2.4)$$

где a°_{ij} – координаты гиперквадрики q°, а

$$\Lambda_{oi\jmath} = a_{i\ell}\Lambda^{\ell}_{\jmath}, \qquad (2.5)$$

$$\Lambda_{oi\jmath\varkappa} = \Lambda_{i\jmath\varkappa} + a_{i\ell}\Lambda^{\ell}_{\jmath\varkappa} + \Lambda_{i\ell(\jmath}\Lambda^{\ell}_{\varkappa)}. \qquad (2.6)$$

Скобки означают симметрирование.

Уравнения касательных к f_p, f_π и f_q отображений $K_p(S_\jmath)$, $K_\pi(T_\jmath)$ и $K_q(R_\jmath)$ имеют соответственно вид:

$$\tilde{x}^i = \frac{\Lambda^i_\jmath\tilde{X}^\jmath}{1 - S^i_\jmath\tilde{X}^\jmath}, \qquad (2.7)$$

$$\tilde{\xi}_i = \frac{-\Lambda_{i\jmath}\tilde{X}^\jmath}{1 - T_\jmath\tilde{X}^\jmath}, \qquad (2.8)$$

$$a_{ij} = a^\circ_{ij} + \frac{\Lambda_{ij\jmath}\tilde{X}^\jmath}{1 - R_\jmath\tilde{X}^\jmath}, \qquad (2.9)^{(1)}$$

$$a_{oi} = \frac{-(\Lambda_{oi} + \Lambda^j_\jmath a^\circ_{ij})\tilde{X}^\jmath}{1 - R_\jmath\tilde{X}^\jmath}. \qquad (2.9)^{(2)}$$

Системы величин $\{R_\jmath\}$, $\{S_\jmath\}$ и $\{T_\jmath\}$ имеют следующий закон преобразования:

$$\overset{\circ}{\nabla} R_\jmath = \overset{\circ}{\nabla} S_\jmath = \overset{\circ}{\nabla} T_\jmath = -\Pi^\circ_\jmath, \qquad (2.10)$$

т.е. являются квазитензорами. Они определяют гиперплоскости в P_N:

$$R_\jmath X^\jmath - X^\circ = 0, \qquad (2.11)$$

$$S_\jmath X^\jmath - X^\circ = 0, \qquad (2.12)$$

$$T_\jmath X^\jmath - X^\circ = 0 \qquad (2.13)$$

имеющие следующий геометрический смысл. Если точка A не лежит на нулевом направлении соответствующего отображения и принадлежит гиперплоскости (2.II) ((2.I2),(2.I3)), то точка $K_p(S_\jmath)(A)$ лежит в гиперплоскости π (гиперплоскость $K_\pi(T_\jmath)(A)$ инцидентна точке p, гиперквадрика $K_q(R_\jmath)(A)$ инцидентна точке p). Отображения (2.7)-(2.9) обладают следующим свойством.

Т е о р е м а 2. Образами инфлексионной в точке P кривой в P_N при отображениях $K_p(S_\jmath)$, $K_\pi(T_\jmath)$ и $K_q(R_\jmath)$ являются, соответственно, инфлексионная в точке p° кривая $\{p\}$, инфлексионное в элементе π° I-семейство гиперплоскостей $\{\pi\}$, инфлексионное в элементе q° I-семейство гиперквадрик $\{q\}$.

Справедливость этого утверждения из разложений этих отображений в ряд в окрестности точки P°:

$$\tilde{X}^i = \Lambda^i_{\mathcal{J}} \tilde{X}^{\mathcal{J}} + S_{\mathcal{J}} \Lambda^i_{\varkappa} \tilde{X}^{\mathcal{J}} \tilde{X}^{\varkappa} + \langle 3 \rangle, \tag{2.14}$$

$$\tilde{\xi}_i = -\Lambda_{i\mathcal{J}} \tilde{X}^{\mathcal{J}} - T_{\mathcal{J}} \Lambda_{i\varkappa} \tilde{X}^{\mathcal{J}} \tilde{X}^{\varkappa} + \langle 3 \rangle, \tag{2.15}$$

$$a_{ij} = a^\circ_{ij} + \Lambda_{ij\mathcal{J}} \tilde{X}^{\mathcal{J}} + R_{\mathcal{J}} \Lambda_{ij\varkappa} \tilde{X}^{\mathcal{J}} \tilde{X}^{\varkappa} + \langle 3 \rangle, \tag{2.16}$$

$$a_{oi} = -\Lambda_{oi\mathcal{J}} \tilde{X}^{\mathcal{J}} - R_{\mathcal{J}} \Lambda_{oi\varkappa} \tilde{X}^{\mathcal{J}} \tilde{X}^{\varkappa} + \langle 3 \rangle, \tag{2.17}$$

и формул (I.6),(I.7),(I.13),(I.14) и (I.15)-(I.19).

Выделяемую из множества касательных к отображению $f_{p,\pi}: U \to R(p,\pi)$ (2.I),(2.2) отображений $K_{p\pi}(S_{\mathcal{J}}, T_{\mathcal{J}})$ (2.7),(2.8) условием $T_{\mathcal{J}} = S_{\mathcal{J}}$ связку отображений $K_{p\pi}(S_{\mathcal{J}})$ будем называть связкой согласованных касательных к $f_{p,\pi}$ отображений. Условие $T_{\mathcal{J}} = S_{\mathcal{J}}$ означает, что прообраз множества точек гиперплоскости π при $K_p(S_{\mathcal{J}})$ совпадает с прообразом связки гиперплоскостей, инцидентных точке p, при $K_\pi(S_{\mathcal{J}})$.

Т е о р е м а 3. Образами инфлексионной в точке P_o кривой L при отображениях $K_{p,\pi}(S_{\mathcal{J}})$ являются I-семейства пар (p,π), индуцируемые p,π-инфлексионным в элементе F° I-семейством $\{F\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координатное представление кривой L при соответствующей параметризации имеет вид:

$$\tilde{X}^{\mathcal{J}} = \Lambda^{\mathcal{J}} u + \langle 3 \rangle. \tag{2.18}$$

Подставляя (2.I8) в (2.I4),(2.I5), получаем удовлетворяющее теореме I-семейство пар (p,π):

$$\tilde{X}^i = \Lambda^i u + k \Lambda^i u^2 + \langle 3 \rangle, \; \Lambda^i = \Lambda^i_{\mathcal{J}} \Lambda^{\mathcal{J}}, \; k = S_{\mathcal{J}} \Lambda^{\mathcal{J}}, \tag{2.19}$$

$$\tilde{\xi}_i = -\Lambda_i u - k \Lambda_i u^2 + \langle 3 \rangle, \; \Lambda_i = \Lambda_{i\mathcal{J}} \Lambda^{\mathcal{J}}, \; k = S_{\mathcal{J}} \Lambda^{\mathcal{J}}. \tag{2.20}$$

Отметим, что доказанным свойством не обладают отображения (2.7),(2.8) при $T_{\mathcal{J}} \neq S_{\mathcal{J}}$:

Т е о р е м а 4. Образами инфлексионной в точке P° кривой при отображениях $K_{p,\pi}(S_{\mathcal{J}}, T_{\mathcal{J}})$ являются 1-семейства пар (p,π), индуцируемые слабо p,π-инфлексионным в элементе F° I-семейством $\{F\}$.

§ 3. Характеристические направления

Объекты второго порядка: $\{\Lambda^i_{\mathcal{J}}, \Lambda^i_{\mathcal{J}\varkappa}\}$, $\{\Lambda_{i\mathcal{J}}, \Lambda_{i\mathcal{J}\varkappa}\}$, $\{\Lambda_{ij\mathcal{J}}, \Lambda_{ij\mathcal{J}\varkappa}\}$, $\{\Lambda_{oi\mathcal{J}}, \Lambda_{oi\mathcal{J}\varkappa}\}$, определяют в P_N инвариантные многообразия, задаваемые в однородных координатах системой уравнений

$$\Lambda^i_{\mathcal{J}\varkappa} X^{\mathcal{J}} X^{\varkappa} - 2\Lambda^i_{\mathcal{J}} (X^\circ + \sigma) = 0, \tag{3.1}$$

$$\Lambda_{i\gamma\varkappa}X^{\gamma}X^{\varkappa}-2\Lambda_{i\gamma}(X^{\circ}+\tau)=0, \tag{3.2}$$

$$\Lambda_{ij\gamma\varkappa}X^{\gamma}X^{\varkappa}-2\Lambda_{ij\gamma}(X^{\circ}+\rho)=0, \tag{3.3)(1}$$

$$\Lambda_{oi\gamma\varkappa}X^{\gamma}X^{\varkappa}-2\Lambda_{oi\gamma}(X^{\circ}+\rho)=0. \tag{3.3)(2}$$

Многообразия (3.I)- (3.3) представляют собой конуса, образующими которых являются прямые связки $\{P^{\circ}\}$,а направляющими-инвариантные алгебраические многообразия,задаваемые системами (3.I)-(3.3) при $\sigma=\tau=\rho=0$ и имеющие соответственно размерности: $N-n$, $N-n$, n.

Определение 7. Направления,определяемые конусами (3.I),(3.2) и (3.3), называются соответственно ρ -характеристическими, π -характеристическими и q-характеристическими.

Тривиально характеристическими направлениями каждого типа будем называть направления,касающиеся инвариантной направляющей соответствующего конуса (3.I)-(3.3) в точке P° .Они лежат соответственно в подпространствах:

$$\Lambda^{i}_{\gamma}X^{\gamma}=0,\quad \Lambda_{i\gamma}X^{\gamma}=0,\ \Lambda_{ij\gamma}X^{\gamma}=0,\ \Lambda_{oi\gamma}X^{\gamma}=0. \tag{3.5}$$

Такие направления будут исключены из дальнейших рассмотрений.

Теорема 5.Направление,определяемое в точке P° инфлексионной в ней кривой будет $\rho(\pi,q)$ -характеристическим в том и только в том случае,если образ этой кривой при отображении f будет соответственно $\rho(\pi,q)$ -инфлексионным I-семейством $\{F\}$ в элементе F°.

Доказательство следует из формул (2.I8),(2.I)-(2.4), (3.I)-(3.4) и (I.5)-(I.8).

Теорема 6.Отображения f_ρ, f_π и f_q соприкасаются с касательными к ним отображениями $K_\rho(S_\gamma)$, $K_\pi(T_\gamma)$ и $K_\rho(R_\gamma)$ соответственно по ρ-характеристическим, π -характеристическим и q-характеристическим направлениям.

Доказательство следует из теорем 2 и 5.

Определение 8. Слабо ρ,π -характеристическими и ρ,π-характеристическими направлениями называются направления определяемые соответственно конусом (3.I), (3.2) и конусом (3.I),(3.2) при условии $\tau=\sigma$.

Теорема 7. Направление,определяемое в P° инфлексионной в ней кривой,будет слабо ρ,π -характеристическим (ρ,π -характеристическим) в том и только в том случае, если образ этой кривой при отображении f будет слабо ρ,π -инфлексионным (ρ,π -инфлексионным) I-семейством.

Теорема 8.Отображение $f_{\rho,\pi}: U\to R(\rho,\pi)$ соприкасается с касательными к нему отображениями $K_{\rho,\pi}(S_\gamma,T_\gamma)$ и $K_{\rho,\pi}(S_\gamma)$ по соответственно слабо ρ,π -характеристическим и ρ,π -характеристическим направлениям.

Теоремы 7,8 доказываются аналогично теоремам 5 и 6.

Определение 9. Направления,определяемые конусами (3.3)(I) и (3.3)(2),называются соответственно Q-характеристическими и Π -характеристическими.

Эти направления обладают свойствами,аналогичными свойствам ρ,π и q-характеристических направлений,сформулированным в теоремах 5 и 6.

Список литературы

1.А н д р е е в Б.А.О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.2.Калининград,1970,с.28-37.

2.А н д р е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.3.Калининград.1973.с.6-19.

3.М а л а х о в с к и й В.С.Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-"Труды геометрического семинара,1969,т.2.М.,ВИНИТИ, с.179-206.

4.Р ы ж к о в В.В.Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.-"Итоги науки. ВИНИТИ.Геометрия,1963,с.65-107.

5.М а х о р к и н В.В.Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур .Вып.3,Калининград,1973,с.50-59.

В.Т.Б а з ы л е в

МНОГОМЕРНЫЕ СЕТИ ДВОЙНЫХ ЛИНИЙ

С.П.Фиников [1] изучал сети двойных линий на паре поверхностей в трехмерном проективном пространстве.В предлагаемой статье мы исследуем сети двойных линий на паре гиперповерхностей проективного n-пространства.

1.Пусть в проективном n-пространстве P_n заданы две гладкие гиперповерхности V_{n-1} и V'_{n-1} и диффеоморфизм $f: V_{n-1} \to V'_{n-1}$ такой,что $f(A) \neq A$, $\forall A \in V_{n-1}$.

Присоединим к паре этих гиперповерхностей подвижной проективный репер $\mathcal{R}=\{A, A_1, \ldots, A_n\}$,где $A \in V_{n-1}$, $A_n = f(A) \in V'_{n-1}$, $A_i \in P_{n-2}(A)$ $(i,j,k=1,2,\ldots,n-1)$,где $P_{n-2}(A)$-пересечение касательных гиперплоскостей к V_{n-1} и V'_{n-1} ,взятых соответственно в точках A и A_n .Имеем деривационные формулы:

$$dA=\omega_0^0 A_0+\omega^i A_i,$$

$$dA_i=\omega_i^0 A+\omega_i^j A_j+\omega_i^n A_n, \tag{1}$$

$$dA_n=\omega_n^0 A+\omega_n^i A_i+\omega_n^n A_n.$$

Если зафиксировать точку A (положив $\omega^i=0$),то будут фиксированы точка A_n и плоскость $P_{n-2}(A)$. Это приводит к следующей системе дифференциальных уравнений, определяющей нашу пару гиперповерхностей:

$$\omega^n = 0, \quad \omega_n^0 = 0, \tag{2}$$

$$\omega_i^0 = a_{ij}\,\omega^j, \quad \omega_i^n = b_{ij}\,\omega^j, \tag{3}$$

$$\omega_n^i = c_j^i\,\omega^j. \tag{4}$$

Так как точка A_n описывает гиперповерхность, то из последней формулы (I) следует, что I-формы ω_n^i линейно независимы, значит, в формуле (4) имеем: $\det\|c_j^i\| \neq 0$.

Продолжая уравнения (3), находим:

$$d a_{ij} + 2 a_{ij}\,\omega_0^0 - a_{kj}\,\omega_i^k - a_{ik}\,\omega_j^k = a_{ijk}\,\omega^k, \tag{5}$$

$$d b_{ij} + b_{ij}(\omega_0^0 + \omega_n^n) - b_{kj}\,\omega_i^k - b_{ik}\,\omega_j^k = b_{ijk}\,\omega^k, \tag{6}$$

где a_{ijk} и b_{ijk} симметричны по двум последним индексам. Из уравнений (5), (6) следует, что каждая из систем функций $\{a_{ij}\}$ и $\{b_{ij}\}$ образует тензор. Продолжая уравнения (2), получим, что тензор b_{ij} симметричный и

$$a_{ij}\,c_k^i = a_{ik}\,c_j^i. \tag{7}$$

Наконец, продолжая уравнение (4), находим:

$$dc_j^i + c_j^i(\omega_0^0 - \omega_n^n) + c_j^k\,\omega_k^i - c_k^i\,\omega_j^k = c_{jk}^i\,\omega^k, \tag{8}$$

где $c_{jk}^i = c_{kj}^i$.

Как показывает система уравнений (8), система функций $\{c_j^i\}$ образует тензор.

2. Линия $\gamma \subset V_{n-1}$, как и линия $f(\gamma) \subset V'_{n-1}$, называется линией [I] отображения f, если в каждой точке $A \in \gamma$ касательная к линии γ в этой точке пересекает касательную к линии $f(\gamma)$ в точке $f(A)$. Ясно, что точка пересечения этих касательных принадлежит плоскости $P_{n-2}(A)$. Примем эту точку за вершину A_1 репера $\mathcal{R}$ и возьмем точку $M_\lambda = \lambda A + A_n$. Когда точка A описывает линию γ ($\omega^1 \neq 0$, остальные $\omega^i = 0$, $i \neq 1$), точка A_n описывает линию $f(\gamma)$, а точка M_λ – линию, касающуюся прямой (M_λ, dM_λ), где $dM_\lambda = d\lambda \cdot A + \lambda dA + dA_n$. Так как точки dA и dA_n лежат в плоскости $(A\,A_1 A_n)$, которая содержит и точки A, M_λ, то $(M_\lambda, dM_\lambda) \subset (AA_1A_n)$. Следовательно, когда точка A описывает двойную линию γ, прямая (AA_n) описывает линейчатую поверхность, которая во всех точках этой прямой имеет одну и ту же касательную плоскость (AA_1A_n), и, значит, эта линейчатая поверхность – развертывающаяся. Отсюда вытекает:

Т е о р е м а I. Двойные точки отображения f высекаются на гиперповерхностях V_{n-1} и V'_{n-1} развертывающимися поверхностями семейства прямых (AA_n).

Пусть точка $F = \lambda A + A_n$ является фокусом прямой (AA_n), т.е. описывает ребро возврата некоторой развертывающейся поверхности семейства прямых (AA_n). Следовательно, $dF \in (AA_n)$, когда точка A смещается в некотором направлении на поверхности V_{n-1}. Это приводит к следующей системе

уравнений:
$$(c^i_j+\lambda\delta^i_j)\,\omega^j=0. \tag{9}$$

Так как формы ω^j не обращаются в нуль одновременно, то λ является корнем уравнения:
$$\det\|c^i_j+\lambda\delta^i_j\|=0. \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет степень $n-1$ относительно λ. Так как $\det\|c^i_j\|\neq 0$, то уравнение (10) не удовлетворяется значением $\lambda=0$. Следовательно, точка A_n не является фокусом прямой (AA_n).

Допустим, что все корни уравнения (10) различны. Тогда система (9) определяет на поверхности V_{n-1} $n-1$ линейно независимых одномерных распределений, интегральные кривые которых образуют на этой поверхности сеть σ_{n-1} двойных линий отображения f. Сеть $\sigma'_{n-1}=f(\sigma_{n-1})$ является сетью двойных линий на поверхности V'_{n-1}.

Поместим вершины A_i репера $\mathcal{R}$ в точках пересечения касательных к соответствующим линиям сетей σ_{n-1} и σ'_{n-1}. Тогда $c^i_j=0$, $i\neq j$. Обозначим c^i_i через c^i. Так как корни уравнения (10) все различны, то $c^i\neq c^j$, $i\neq j$.

Из уравнения (8) находим:
$$(c^j-c^i)\,\omega^i_j=c^i_{jk}\,\omega^k \quad (i\neq j). \tag{11}$$

Отсюда следует, что формы ω^i_j – главные. Положим:
$$\omega^i_j=a^i_{jk}\,\omega^k. \tag{12}$$

Из уравнений (11), (12) следует:
$$(c^j-c^i)\,a^i_{jk}=c^i_{jk}. \tag{13}$$

Так как c^i_{jk} симметричны по нижним индексам, то
$$(c^j-c^i)\,a^i_{jk}=(c^k-c^i)\,a^i_{kj}. \tag{14}$$

Пусть $n>3$. Условие голономности сети σ_{n-1} (полная интегрируемость каждой из 1-форм ω^i) имеет вид:
$$a^i_{jk}=a^i_{kj} \quad (\text{все } i,j,k \text{ различны}). \tag{15}$$

Из равенств (14), (15) $(c^j-c^k)\,a^i_{jk}=0$.

Отсюда $a^i_{jk}=0$ (так как $c^j\neq c^k$). Поэтому
$$\omega^i_j=a^i_{ji}\,\omega^i+a^i_{jj}\,\omega^j.$$

Следовательно, сеть σ_{n-1} является ∇-сопряженной системой [2] относительно аффинной связности ∇, индуцированной на V_{n-1} нормализацией этой гиперповерхности при помощи поля нормалей I рода (AA_n) и поля нормалей $\overline{\text{II}}$ рода $P_{n-2}(A)$.

Такое же заключение можно сделать и относительно сети σ'_{n-1}. Поэтому справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 2. Если $n>3$ и все фокусы прямой (AA_n) различны, то сеть σ_{n-1} двойных линий голономна тогда и только тогда, когда она является ∇-сопряженной системой относительно указанной выше аффинной связности.

Заметим, что при этом сеть σ'_{n-1} также является ∇'-сопряженной системой относительно аффинной связности ∇', индуцированной на поверхности V'_{n-1} нормализацией при помощи поля нормалей I рода (AA_n) и поля нормалей II рода $P_{n-2}(A)$.

3. Асимптотические формы Φ и Φ' поверхностей V_{n-1} и V'_{n-1} в репере $\mathcal{R}$ имеют вид:

$$\Phi = \omega^n_i \omega^i, \quad \Phi' = \omega^0_i \omega^i_n,$$

т.е.

$$\Phi = b_{ij}\,\omega^i \omega^j, \quad \Phi' = p_{ij}\,\omega^i_n \omega^j_n \quad (p_{ij} = p_{ji}).$$

В общем случае на поверхности V_{n-1} существует единственная сопряженная сеть, которая в отображении f переходит в сопряженную сеть на поверхности V'_{n-1}. Направления касательных к линиям такой сети сопряжены одновременно относительно двух квадратичных форм Φ и Φ'. Рассмотрим случай, когда поверхности V_{n-1} и V'_{n-1} являются $(n-1)$-сопряженными системами относительно своих сетей двойных линий σ_{n-1} и σ'_{n-1} соответственно. Такая пара $\{V_{n-1}, V'_{n-1}\}$ определяется в репере $\mathcal{R}$ следующей системой уравнений Пфаффа:

$$\omega^n = 0, \quad \omega^n_i = b_{ii}\,\omega^i, \quad \omega^i_j = a^i_{ji}\,\omega^i + a^i_{jj}\,\omega^j \quad (i \neq j) \tag{16}$$

$$\omega^0_n = 0, \quad \omega^0_i = p_{ii}\,\omega^i, \quad \omega^i_n = c^i \omega^i. \tag{17}$$

Замыкание системы уравнений (16),(17) имеет вид:

$$\Delta b_{ii} \wedge \omega^i = 0, \quad \Delta a^i_{ji} \wedge \omega^i + \Delta a^i_{jj} \wedge \omega^j = 0, \tag{18}$$

$$\Delta p_{ii} \wedge \omega^i = 0, \quad \Delta c^i \wedge \omega^i = 0, \tag{19}$$

где 1-форма $\Delta\varphi$ представляет дифференциал $d\varphi$ функции φ. Нетрудно убедиться, что система уравнений (16)-(19) находится в инволюции с характерами $s_1 = 3(n-1)$, $s_2 = (n-1)(n-2)$.

Система уравнений (16),(18) находится в инволюции и определяет $(n-1)$-сопряженную систему V_{n-1} с произволом $(n-1)(n-2)$ функций двух переменных. Исследование системы уравнений (17),(19) показывает теперь, что вторая сопряженная система V'_{n-1} присоединяется к первой с произволом $2(n-1)$ функций одной переменной. Резюмируем это в виде следующей теоремы:

Т е о р е м а 3. К заданной $(n-1)$-сопряженной системе $V_{n-1} \subset P_n$ можно присоединить с произволом $2(n-1)$ функций одной переменной другую $(n-1)$-сопряженную систему V'_{n-1} так, что в полученной паре $\{V_{n-1}, V'_{n-1}\}$ поверхностей V_{n-1} и V'_{n-1} являются $(n-1)$-сопряженными системами относительно своих сетей двойных линий.

4. Равенства $a^k_{ii} = 0$ (i фиксировано, $k = 1, 2, \dots, n-1$; $k \neq i$) выражают условие того, что линия ω^i сети $\sigma_{n-1} \subset V_{n-1}$ является геодезической в связности ∇. Но так как $\omega^i_n = c^i \omega^i$ и $c^i \neq 0$, то эти же равенства выражают условие того, что линия ω^i_n сети $\sigma'_{n-1} \subset V'_{n-1}$ является геодезической в связности ∇'. Поэтому справедлива

Т е о р е м а 4. Если на поверхности V_{n-1} сеть двойных линий геодезическая (относительно связности ∇), то и на поверхности V'_{n-1} сеть двойных линий является геодезической (относительно связности ∇').

Список литературы

1. Ф и н и к о в С.П. О сети двойных линий в точечном соответствии двух поверхностей. Мат. сб., 1939, т.6, вып.3, с.475-520.

2. Б а з ы л е в В.Т. О ∇-сопряженных сетях в пространствах аффинной связности.-"Известия вузов. Сер. Математика", 1974, №5, с.25-31.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

О.М. Веселова

ПСЕВДОФОКАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГОЛОНОМНЫХ СЕТЕЙ В E_3

Сетью в некоторой области трехмерного евклидова пространства называется система $\Sigma_3=\{\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3\}$ трех семейств гладких линий, таких, что через каждую точку этой области проходит по одной линии каждого семейства по линейно независимым направлениям. Присоединим к данной сети подвижной репер $(X,\bar e_i)$, где орты $\bar e_i$ расположены на касательной в точке X к линиям сети. Сеть называется голономной, если каждое из двумерных распределений $(X,\bar e_i,\bar e_j)(i\neq j)$, определяемых этой сетью, интегрируемо.

Псевдофокусом касательной к линии ω^k сети называют такую точку $\bar F^i_k=\bar x+\lambda\bar e_k$, дифференциал которой не содержит компонента по вектору $\bar e_i$, когда точка X смещается вдоль линии ω^i.

Новую сеть (F^i_k), описанную точкой F^i_k, будем называть псевдофокальным преобразованием данной сети. Инфинитезимальные перемещения подвижного репера $(x,\bar e_i)$, присоединенного к данной сети, определяются уравнениями

$$d\bar x=\omega^i\bar e_i\,,\quad d\bar e_i=\omega_i^j\bar e_j\quad (i,j,k=1,2,3),$$

где ω^i и ω_i^j удовлетворяют соотношениям, определяющим сеть

$$\omega_i^j=a^j_{ik}\,\omega^k\qquad (i\neq j)\,, \tag{1}$$

и уравнениями структуры евклидова пространства:

$$\mathcal{D}\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i\,,\qquad \mathcal{D}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j.$$

Требование голономности рассматриваемой сети выражается условием

$$a^j_{ik}=a^j_{ki}\,,\qquad i,j,k \text{ -различны.}$$

1. Голономные сети, не имеющие псевдофокусов

На каждой касательной к линии сети в общем случае, когда $a^j_{ij}\neq 0,\ i\neq j$, имеются два псевдофокуса:

$$\bar F^j_i=\bar x-\frac{1}{a^j_{ij}}\bar e_i\,,\qquad i\neq j\,.$$

Выделяется случай, когда псевдофокусов не существует: $a^j_{ij}=0$. В уравнениях системы (1) считаем $a^j_{ij}=0$ и дифференцируем эти уравнения внешним образом. Получаем систему внешних квадратичных дифференциальных уравнений, замыкающих систему (1),

$$\Delta a^k_{ij}\wedge\omega^j=0$$

и три соотношения

$$a^k_{ij}\,a^j_{kk}=a^j_{ii}\,a^i_{jk}\,,\qquad i,j,k \text{ -различны.}$$

Дифференцируем эти соотношения и выражаем формы Δa^2_{11}, Δa^3_{11}, Δa^1_{33} через оставшиеся формы. Получаем систему из внешних дифференциальных уравнений с шестью неизвестными формами $\Delta a^3_{12},\Delta a^1_{23},\Delta a^2_{13},\tilde\Delta a^2_{33},\tilde\Delta^2_{22},\tilde\Delta a^1_{22}$:

$$a^2_{13}\tilde{\Delta} a^2_{33}\wedge\omega^1 + a^2_{33}\Delta a^3_{12}\wedge\omega^1 - a^2_{11}\Delta a^1_{23}\wedge\omega^1 + a^1_{23}\Delta a^2_{13}\wedge\omega^3 = 0,$$

$$\Delta a^2_{13}\wedge\omega^1 + \tilde{\Delta} a^2_{33}\wedge\omega^3 = 0,$$

$$a^3_{22}\Delta a^2_{13}\wedge\omega^1 + a^2_{13}\tilde{\Delta} a^3_{22}\wedge\omega^1 - a^3_{11}\Delta a^1_{23}\wedge\omega^1 + a^1_{23}\Delta a^3_{12}\wedge\omega^2 = 0,$$

$$a^3_{12}\Delta a^1_{23}\wedge\omega^2 + a^1_{22}\Delta a^2_{13}\wedge\omega^3 + a^2_{13}\tilde{\Delta} a^1_{22}\wedge\omega^3 - a^1_{33}\Delta a^3_{12}\wedge\omega^3 = 0,$$

$$\Delta a^3_{12}\wedge\omega^1 + \tilde{\Delta} a^3_{22}\wedge\omega^2 = 0, \quad \tilde{\Delta} a^1_{22}\wedge\omega^2 + \Delta a^1_{23}\wedge\omega^3 = 0.$$

Для полученной системы находим характеры: $s_1=6$, $S_2=0$. Значит, число Картана $Q=6$. Разрешение этой системы по лемме Картана вводит шесть независимых параметров. Следовательно, $Q=N$ – система в инволюции. Доказана теорема.

Т е о р е м а. Голономная сеть евклидова пространства E_3, не имеющая псевдофокусов на каждой касательной к линиям сети, существует с произволом 6 функций одного аргумента.

Легко проверить, что рассматриваемая сеть является чебышевской сетью II рода. Она не является 3-сопряженной системой, поэтому она не чебышевская сеть I рода, но на поверхности $\omega^3=0$ сеть линий $\{\omega^1, \omega^2\}$ является чебышевской относительно связности, индуцированной псевдонормалью к этой поверхности. Действительно, при перемещении точки X по линии ω^2 на этой поверхности имеем:

$$d\bar{e}_1 = \omega^1_1\bar{e}_1 + \omega^2_1\bar{e}_2 + \omega^3_1\bar{e}_3 ; \quad \omega^2_1 = 0, \text{ т.к. } \omega^1=\omega^3=0 ;$$

$$пр_{T_2(x)}(d\bar{e}_1) = \omega^1_1\bar{e}_1 \qquad \text{(проектирование параллельно } \bar{e}_3\text{)}$$

Следовательно, на поверхности $V_2\ (\omega^3=0)$ направление вектора $\bar{e}_1$ переносится параллельно вдоль линии ω^2 в связности, индуцированной псевдонормалью $(X, \bar{e}_3)$ к этой поверхности. Аналогичное заключение верно и для направления вектора $\bar{e}_2$. Значит, на поверхности $\omega^3=0$ сеть линий $\{\omega^1, \omega^2\}$ – чебышевская в индуцированной связности.

Справедливо и обратное. Если для голономной сети потребовать, чтобы на поверхности $\omega^3=0$ сеть $\{\omega^1, \omega^2\}$ была чебышевской в связности, индуцированной псевдонормалью $(X, \bar{e}_3)$, точно так же с сетями $\{\omega^2, \omega^3\}$ на поверхности $\omega^1=0$ и $\{\omega^1, \omega^3\}$ на поверхности $\omega^2=0$, то такая сеть теряет все псевдофокусы на каждой касательной к линиям сети. Следовательно, полученное свойство является характеристическим для рассматриваемой сети.

Условием геодезичности линии ω^1 на поверхности $\omega^3=0$ относительно псевдонормали $(X, \bar{e}_3)$ является $a^2_{11}=0$. Тогда $\omega^2_1\equiv 0$. Продифференцируем это тождество внешним образом и получим $a^3_{12}a^2_{13}=0$. Если $a^3_{12}=0$, то $\bar{e}_1=\mathrm{const}$ при движении по линии ω^2. Значит, линия ω^2 – цилиндрическая. При этом линия ω^1 – не прямая. Если $a^2_{13}=0$, то $\bar{e}_3=\mathrm{const}$ при движении по линии ω^1. Значит, линия ω^1 – линия кривизны относительно псевдонормали $(X, \bar{e}_3)$. Если $a^3_{12}=a^2_{13}=0$, то линия ω^2 – цилиндрическая, линия ω^1 – цилиндрическая линия кривизны.

Условие геодезичности линий ω^1 и ω^2 на поверхности $\omega^3=0$ имеет вид: $a^2_{11}=a^1_{22}=0$. Тогда $\omega^2_1\equiv 0$, $\omega^1_2\equiv 0$ и отсюда имеем $a^3_{12}a^2_{13}=a^3_{12}a^1_{23}=0$.

Если $a^3_{12}=0$, то $\bar{e}_1 = const$ вдоль линии ω^2, $\bar{e}_2 = const$ вдоль линии ω^1. Следовательно, линии ω^1 и ω^2 -цилиндрические.

Если $a^2_{13}=a^1_{23}=0$, $a^3_{12}\neq 0$, то $\bar{e}_3 = const$ при любом перемещении по поверхности $\omega^3=0$. Значит, в точках поверхности $\omega^3=0$ касательные к линиям ω^3 параллельны. Поверхность $\omega^3=0$ не является плоскостью.

Если сеть ортогональная, то из $\gamma_{12}=0$ следует:

$\gamma_{ik}\,\omega^k_j+\gamma_{jk}\,\omega^k_i=0$, где $\gamma_{ij}=\bar{e}_i\,\bar{e}_j$.

Откуда $a^1_{22}\,\omega^2 + a^2_{11}\,\omega^1=0 \Rightarrow a^2_{11}=a^1_{22}=0$.

Значит, линии ω^1 и ω^2 -геодезические на поверхности относительно нормали $(x,\bar{e}_3)$. Аналогично, $\{\omega^1,\omega^3\}$-геодезическая сеть на поверхности $\omega^1=0$ относительно нормали $(x,\bar{e}_2)$ и $\{\omega^2,\omega^3\}$-геодезическая сеть на поверхности относительно нормали $(x,\bar{e}_1)$.

Можно доказать, что трижды сопряженные системы, не имеющие псевдофокусов, существуют с произволом шести функций одного аргумента.

При этом вектор $\bar{e}_1$ переносится параллельно по любому направлению поверхности $\omega^1=0$, аналогично и векторы $\bar{e}_2,\bar{e}_3$. Значит, такая сеть является частным случаем чебышевской сети, причем линии ω^i не прямые.

Т е о р е м а. Голономная сеть в E_3, не имеющая псевдофокусов на каждой касательной к линиям сети, при условии $\gamma_{12} = const$ $(i\neq j)$ вырождается в координатную сеть аффинной системы координат в пространстве.

Имеем: $d\gamma_{ij}=\gamma_{ik}\,\omega^k_j+\gamma_{jk}\,\omega^k_i$, $\gamma_{ij}=const$, $i\neq j$.

Дифференцирование γ_{12} приводит к системе

$$a^2_{11}\left[1-(\gamma_{12})^2\right]+a^3_{12}(\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23})+a^3_{11}(\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13})=0, \quad (1)$$

$$a^1_{22}\left[1-(\gamma_{12})^2\right]+a^3_{22}(\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23})+a^3_{12}(\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13})=0, \quad (2)$$

$$a^2_{13}\left[1-(\gamma_{12})^2\right]+a^1_{23}\left[1-(\gamma_{12})^2\right]=0. \quad (3)$$

Из (3) $\Rightarrow$ $a^2_{13}+a^1_{23}=0$. (4)

Дифференцируя γ_{13} и γ_{23}, получим еще системы:

$$a^3_{11}\left[1-(\gamma_{13})^2\right]+a^2_{11}(\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13})+a^2_{13}(\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23})=0, \quad (5)$$

$$a^1_{33}\left[1-(\gamma_{13})^2\right]+a^2_{13}(\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13})+a^2_{33}(\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23})=0, \quad (6)$$

$$a^1_{23}\left[1-(\gamma_{13})^2\right]+a^3_{12}\left[1-(\gamma_{13})^2\right]=0, \quad (7)$$

$$a^3_{22}\left[1-(\gamma_{23})^2\right]+a^1_{22}(\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23})+a^1_{23}(\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23})=0, \quad (8)$$

$$a^2_{33}\left[1-(\gamma_{23})^2\right]+a^1_{23}(\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23})+a^1_{33}(\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23})=0, \quad (9)$$

$$a^2_{13}\left[1-(\gamma_{23})^2\right]+a^3_{12}\left[1-(\gamma_{23})^2\right]=0. \quad (10)$$

Из (7) и (10) $\Rightarrow$ $a^1_{23}+a^3_{12}=0$ (11)

и

$a^2_{13}+a^3_{12}=0$.

Сравнивая (4),(11),(12), имеем $a^3_{12}=a^2_{13}=a^1_{23}=0$.

Рассмотрим систему уравнений (1) и (5). Вычисления показывают, что определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1-(\gamma_{12})^2 & \gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13} \\ \gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13} & 1-(\gamma_{12})^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно $a^2_{11}=a^3_{11}=0$. Аналогично, рассматривая систему уравнений (2) и (8), получаем $a^1_{22}=a^3_{22}=0$ и из (6) и (9) $\Rightarrow$

$a^1_{33}=a^2_{33}=0$. Имеем $\omega^j_i=0 \ (i\neq j) \Rightarrow \omega^i_i=0$

$$d\bar{e}_i=\omega^k_i\bar{e}_k=0 \Rightarrow \bar{e}_k=Const.$$

Все линии сети-прямые, параллельные в каждом семействе.

Следовательно, это просто координатная сеть аффинной системы координат в пространстве.

2. Голономные сети с одним псевдофокусом на каждой касательной к линиям сети

Потребуем, чтобы на каждой касательной к линиям сети отсутствовало по одному псевдофокусу. Например, F^3_1, F^2_3, F^1_2.

Это значит, что $a^3_{13}=a^2_{32}=a^1_{21}=0$. (1)

Уравнения $\omega^j_i=a^j_{ik}\omega^k$ и соотношения (1) составляют уравнения задачи. Внешнее дифференцирование такой системы дает шесть внешних дифференциальных уравнений, связывающих 12 неизвестных форм. $S_1=S_2=6$ -характеры системы. Число Картана $Q=6+2\cdot6=18$. Разрешение уравнений системы по лемме Картана вводит 18 независимых параметров. Получаем $Q=N$, система-в инволюции. Таким образом, голономные сети с одним псевдофокусом на каждой касательной к линиям сети в E_3 существуют с произволом шести функций двух аргументов.

Введем обозначения :

P^i_j-точки пересечения касательных к линиям ω^i в точке F^k_j с плоскостью $x^j=0$ (i,j,k -различны), L^i_j -точки пересечения касательных к линиям ω^i в точках F^i_k с осью $(0x^j)$ (i,j,k-различны).

Тогда
$$L^2_3=F^1_3 \Longleftrightarrow \alpha=a^3_{12}a^1_{31},$$
$$L^3_1=F^2_1 \Longleftrightarrow \rho=a^1_{23}a^2_{12},$$
$$L^1_2=F^3_2 \Longleftrightarrow z=a^2_{13}a^3_{23},$$

где α, ρ, z -коэффициенты разложения форм Δa^j_{ij} по лемме Картана.

С л е д с т в и е. Для трижды сопряженной системы с одним псевдофокусом на каждой касательной к линиям сети

$$L^2_3=F^1_3,\ L^3_1=F^2_1,\ L^1_2=F^3_2 \Longleftrightarrow \alpha=\rho=z=0,$$

$$(x,P^1_1)\perp(x,P^3_1)\Leftrightarrow a^2_{11}(a^2_{12}\gamma_{23}-a^2_{13})=a^3_{11}(a^2_{13}\gamma_{23}-a^2_{12}), \quad (1)$$
$$(x,P^2_2)\perp(x,P^1_2)\Leftrightarrow a^3_{22}(a^3_{23}\gamma_{13}-a^3_{12})=a^1_{22}(a^3_{12}\gamma_{13}-a^3_{23}), \quad (2)$$
$$(x,P^3_3)\perp(x,P^2_3)\Leftrightarrow a^1_{33}(a^1_{31}\gamma_{12}-a^1_{23})=a^2_{33}(a^1_{23}\gamma_{12}-a^1_{31}), \quad (3)$$
$$((x,P^1_1),(x,P^3_1),(x,\bar{e}_2),(x,\bar{e}_3))=-1 \Leftrightarrow a^2_{11}a^2_{12}=a^3_{11}a^2_{13}, \quad (4)$$
$$((x,P^2_2),(x,P^1_2),(x,\bar{e}_1),(x,\bar{e}_3))=-1 \Leftrightarrow a^3_{22}a^3_{23}=a^1_{22}a^3_{12}, \quad (5)$$
$$((x,P^3_3),(x,P^2_3),(x,\bar{e}_1),(x,\bar{e}_2))=-1 \Leftrightarrow a^1_{33}a^1_{31}=a^2_{33}a^1_{23}. \quad (6)$$

$$(1),(4)\Rightarrow \frac{a^2_{13}}{a^2_{12}}=\frac{a^2_{13}\gamma_{23}-a^2_{12}}{a^2_{12}\gamma_{23}-a^2_{13}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2_{13}a^2_{12}\gamma_{23}-(a^2_{13})^2=a^2_{12}a^2_{13}\gamma_{23}-(a^2_{12})^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2_{13})^2=(a^2_{12})^2\Rightarrow a^2_{13}=\pm a^2_{12}\Rightarrow a^2_{11}=\pm a^3_{11}.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. Каждая пара условий $\begin{cases} a^2_{13}=a^2_{12} \\ a^2_{11}=a^3_{11} \end{cases}$ и $\begin{cases} a^2_{13}=-a^2_{12} \\ a^2_{11}=-a^3_{11} \end{cases}$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы прямые (X, P^1_1) и (X, P^3_1) являлись биссектрисами координатных углов, образованных прямыми $(X,\bar{e}_2)$ и $(X,\bar{e}_3)$.

Аналогичные условия можно сформулировать для прямых (X,P^2_2), (X,P^1_2) и (X,P^3_3), (X,P^2_3).

З а м е ч а н и е. Для сети, имеющей оба псевдофокуса на каждой касательной к линиям сети, имеем

$$(X,P^1_1)\perp(X,P^3_1)\Leftrightarrow \frac{a^2_{11}}{a^3_{11}}=\frac{a^2_{13}\gamma^3_{23}-(a^2_{12}-a^3_{13})}{(a^2_{12}-a^3_{13})\gamma^3_{13}-a^2_{13}},$$

$$\big((X,P^1_1),(X,P^3_1),(X,\bar{e}_2),(X,\bar{e}_3)\big)=-1\Leftrightarrow a^3_{11}a^2_{13}=a^2_{11}(a^2_{12}-a^3_{13}).$$

Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы (X,P^1_1) и (X,P^3_1) были биссектрисами координатных углов $(X,\bar{e}_2)$ и $(X,\bar{e}_3)$, будет каждое из двух условий

$$\begin{cases} a^2_{13}=a^2_{12}-a^3_{13}, \\ a^2_{11}=a^3_{11} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a^2_{13}=a^3_{13}-a^2_{12}, \\ a^2_{11}=-a^3_{11}. \end{cases}$$

Рассмотрим условия

$$P^3_1\in(F^1_3,F^3_2)\Longleftrightarrow a^1_{23}a^2_{11}=a^3_{12}a^2_{33}, \qquad (\mathrm{I})$$

$$P^1_2\in(F^2_1,F^1_3)\Longleftrightarrow a^2_{13}a^3_{22}=a^1_{23}a^3_{11}, \qquad (\mathrm{II})$$

$$P^2_3\in(F^3_2,F^2_1)\Longleftrightarrow a^2_{13}a^1_{22}=a^3_{12}a^1_{33}. \qquad (\mathrm{III})$$

Если к этим условиям присоединить условия предыдущей теоремы, то получаем

$$a^1_{23}a^2_{11}=a^3_{12}a^2_{33}=a^2_{13}a^3_{22}.$$

т.е. из (I) и (II) следует (III).

Оказывается справедливой следующая теорема.

Т е о р е м а. Необходимым и достаточным условием того, чтобы пересекались нормали к поверхностям $\omega^3=0$ в точках X и F^2_1, $\omega^1=0$ в точках X и F^3_2, $\omega^2=0$ в точках X и F^1_3, является выполнение равенств

$$a^3_{12}\left[(a^2_{12})^2+\beta\right]+\alpha a^3_{11}+\gamma_{12}a^2_{11}a^2_{12}a^3_{12}=0,$$

$$a^1_{23}\left[n+(a^3_{23})^2+a^3_{12}a^1_{23}\right]-\rho a^1_{22}-\gamma_{23}a^3_{22}a^3_{23}a^1_{23}=0,$$

$$a^2_{13}(s-a^2_{13}a^1_{23})+z a^2_{33}-\gamma_{13}a^1_{33}a^1_{31}a^2_{13}=0,$$

где $\alpha, \beta, \rho, n, z, s$ -коэффициенты разложения форм Δa^2_{12}, Δa^3_{23}, Δa^1_{31} по формам ω^i.

С л е д с т в и е. Если для трижды сопряженной системы выполняется одно из условий $\alpha=\rho=z=0$ или $a^3_{11}=a^1_{22}=a^2_{33}=0$, то нормали к указанным в теореме поверхностям пересекаются.

Векторы, лежащие на касательных к линиям $\omega^1,\omega^2,\omega^3$ в точке F^2_1, обозначим через $\bar{B}_1,\bar{B}_2,\bar{B}_3$, в точке F^3_2 -через $\bar{C}_1,\bar{C}_2,\bar{C}_3$, в точке F^1_3 -через $\bar{D}_1,\bar{D}_2,\bar{D}_3$.

Условием того, чтобы

$$\bar{e}_1\perp(F^2_1,\bar{B}_2,\bar{B}_3),\ \bar{e}_2\perp(F^3_2,\bar{C}_1,\bar{C}_3),\ \bar{e}_3\perp(F^1_3,\bar{D}_1,\bar{D}_2), \quad (*)$$

является выполнение равенств

$$\mu a^1_{23}a^3_{23}a^2_{12}a^3_{12}-a^2_{12}a^2_{13}\rho+\alpha(a^2_{12})^2=0,$$

$$\eta a^1_{23}a^3_{23}a^1_{31}a^2_{13}-a^3_{23}a^3_{12}z+\rho(a^3_{23})^2=0,$$

$$\chi a^3_{12}a^2_{12}a^1_{31}a^2_{13}-a^1_{31}a^1_{23}\alpha+z(a^1_{31})^2=0,$$

$$\alpha - a^2_{12}\, a^3_{12}\, \gamma_{13} = 0,$$

$$\rho - a^3_{23}\, a^1_{23}\, \gamma_{12} = 0,$$

$$z - a^1_{31}\, a^2_{13}\, \gamma_{23} = 0,$$

где

$$\mu = a^2_{13} a^3_{23} + a^1_{23} a^2_{11} - a^3_{12} a^2_{33} - a^1_{31} a^2_{12},$$

$$\eta = a^3_{12} a^1_{31} + a^2_{13} a^3_{22} - a^1_{23} a^3_{11} - a^2_{12} a^3_{23},$$

$$\chi = a^1_{23} a^2_{12} + a^3_{12} a^1_{33} - a^2_{13} a^1_{22} - a^3_{23} a^1_{31}.$$

С л е д с т в и е 1. Для 3-сопряженной системы соотношения (*) выполняются тогда и только тогда, когда $\alpha = \rho = z = 0$.

С л е д с т в и е 2. Если для 3-сопряженной системы выполняются равенства $\alpha = \rho = z = 0$, то выполняются соотношения (*) и пересекаются нормали к указанным в предыдущей теореме поверхностям.

Рассмотрим случаи специального расположения касательных к линиям $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ в точке F^2_1. Находим

$$\overline{B}_1 = [(a^2_{12})^2 + \beta]\,\overline{e}_1 - a^2_{11} \cdot a^2_{12}\,\overline{e}_2 - a^3_{11} a^2_{12}\,\overline{e}_3,$$

$$\overline{B}_2 = \alpha\,\overline{e}_1 - a^3_{12}\, a^2_{12}\,\overline{e}_3,$$

$$\overline{B}_3 = \mu\,\overline{e}_1 - a^2_{13}\, a^2_{12}\,\overline{e}_2 - (a^2_{12})^2\,\overline{e}_3.$$

I. Потребуем, чтобы векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_3$ были коллинеарны. Тогда $(a^2_{12})^2 + \beta = 0$ и $a^2_{11} = 0$. Имеем $d\overline{B}_1 = \Omega^i_1 \overline{B}_i$, причем

$$\Omega^3_1 = A^3_{11}\,\omega^1 + A^3_{12}\,\omega^2 + A^3_{13}\,\omega^3.$$

Можно подсчитать, что

$$A^3_{13} = \frac{\begin{vmatrix} [(a^2_{12})^2+\beta]\,a^2_{12} & \alpha a^2_{12} & \xi_3 - [(a^2_{12})^2+\beta](a^2_{12})^2 \cdot a^2_{13}\gamma_{12} - a^2_{11}(a^2_{12})^3 a^1_{23} - a^3_{11}(a^2_{12})^3 a^1_{33} \\ a^2_{11} & 0 & \sigma_3 - a^2_{11} a^2_{12}(\gamma_{12} a^1_{23} + \gamma_{23} a^3_{23}) + a^3_{11} a^2_{12} a^2_{33} - a^2_{13}[(a^2_{12})^2+\beta] \\ a^3_{11} & a^3_{12} & \tau_3 - a^3_{11} a^2_{12}(\gamma_{13} a^1_{33} + \gamma_{23} a^2_{33}) + a^2_{11} a^2_{12} a^3_{23} \end{vmatrix}}{(a^2_{12})^2 \begin{vmatrix} (a^2_{12})^2+\beta & \alpha & \mu \\ a^2_{11} & 0 & a^2_{13} \\ a^3_{11} & a^3_{12} & -a^2_{12} \end{vmatrix}},$$

где

$$d\beta\,(a^2_{12})^2 - 2\,a^2_{12}\,\beta\, da^2_{12} = \xi_1\omega^1 + \xi_2\omega^2 + \xi_3\omega^3,$$

$$a^2_{12}\, da^2_{11} - a^2_{11}\, da^2_{12} = \sigma_1\omega^1 + \sigma_2\omega^2 + \sigma_3\omega^3, \qquad (a)$$

$$a^2_{12}\, da^3_{11} - a^3_{11}\, da^2_{12} = \tau_1\omega^1 + \tau_2\omega^2 + \tau_3\omega^3.$$

Для нашего случая I определитель, стоящий в знаменателе, равен $a^3_{11}\, a^2_{13}\, \alpha$. Поэтому

$$A^3_{13} = \frac{\sigma_3 + a^3_{11} a^2_{12} a^2_{33}}{a^2_{12}\, a^2_{13}}.$$

Если $\sigma_3 + a^3_{11}\, a^2_{12}\, a^2_{33} = 0$ (**), то псевдофокуса $\widetilde{F}^3_1$ на касательной $(F^2_1, \overline{B}_1)$ не существует. Используя второе из равенств (a), находим, что равенство (**) принимает вид: $a^2_{12}\,c = 0$. Так как $a^2_{12} \neq 0$, то $c = 0$. Здесь c – коэффициент разложения формы Δa^2_{11} по формам ω^i:

$$\Delta a^2_{11} = q_1\omega^1 + \beta\omega^2 + c\,\omega^3.$$

Следовательно, Δa^2_{11} зависит только от ω^1 и ω^2. Это приводит к равенству $a^3_{11} \cdot a^2_{33} = 0$. Так как $a^3_{11} \neq 0$ (в противном случае $\overline{B}_1 = 0$), то $a^2_{33} = 0$.

Мы приходим к такому выводу:

Если векторные поля $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_3$ коллинеарны и сеть линий $\{\omega^1, \omega^3\}$ -асимптотическая на поверхности $\omega^2 = 0$, описанной точкой X, то преобразование $(X) \to (F_1^2)$ будет правильным, т.е. на касательной к линии ω^1 в точке F_1^2 отсутствует псевдофокус $\widetilde{F}_1^3$ (как отсутствует и F_1^3 на касательной к линии ω^1 в точке X).

II. Потребуем, чтобы векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_2$ были коллинеарны. Тогда $(a_{12}^2)^2 + \beta = 0$, $a_{11}^3 = 0$. При этом линия ω^1 -асимптотическая линия на поверхности $\omega^3 = 0$, описанной точкой X. Она преобразуется в геодезическую линию поверхности $\omega^3 = 0$, описанной точкой F_1^2.

III. Потребуем, чтобы векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_1$ были коллинеарны. Тогда $a_{11}^2 = a_{11}^3 = 0$. Значит, линия ω^1 -прямая. Очевидно, что она преобразуется в ту же самую прямую. Следовательно, данная сеть и ее преобразование имеют одно общее семейство линий, состоящее из прямых.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Е.В.Завьялова

ТРИ-СИСТЕМЫ КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется двупараметрическое семейство K фигур F, образованных тройкой попарно касающихся невырожденных коник C_1, C_2, C_3, лежащих в различных плоскостях. Такое семейство названо три-системой коник.

Построен каноничнский репер три-системы K, различные, ассоциированные с ней геометрические образы и рассмотрена три-система K, все коники которой инцидентны одной квадрике.

§I. Теорема существования

Отнесем три-систему K к каноническому реперу $\{A_J\}$ $(J, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 1,2,3,4)$, поместив вершины A_α в точке пересечения коник C_β, C_γ $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3)$, вершину A_4 -в общую точку плоскостей коник C_α, пронормировав вершины репера так, чтобы уравнения коник C_α имели вид:

$$(x^4)^2 - 2x^\beta x^\gamma = 0, \quad x^\alpha = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем индексы α, β, γ считаются попарно различными и по ним суммирование не производится.

Деривационные формулы репера $\{A_\gamma\}$ записываются в виде

$$dA_\gamma = \omega_\gamma^\varkappa A_\varkappa , \tag{1.2}$$

причем формы Пфаффа $\omega_\gamma^\varkappa$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\gamma^\varkappa = \omega_\gamma^\jmath \wedge \omega_\jmath^\varkappa \tag{1.3}$$

и условию

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0 . \tag{1.4}$$

Мы будем рассматривать общий случай, когда плоскости $(A_1 A_2 A_3)$ образуют двупараметрическое семейство. Принимая формы

$$\omega_1 = \omega_1^4 , \quad \omega_2 = \omega_2^4 \tag{1.5}$$

за независимые первичные, запишем пфаффову систему уравнений три-системы K в виде

$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k , \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k , \quad \omega_\alpha^\beta = \Gamma_\alpha^{\beta k}\omega_k ,$$
$$\omega_\alpha^\alpha + \omega_\beta^\beta - 2\omega_4^4 = 2p_\gamma^k\omega_k , \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k . \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем индексы $\ell, i, k, j = 1, 2; \ i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Т е о р е м а 1.1. Три-системы K существуют и определяются с произволом 13 функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замыкая систему (1.6), получим

$$\Delta\Gamma_3^{4k}\wedge\omega_k = 0, \quad \Delta\Gamma_4^{3k}\wedge\omega_k = 0, \quad \Delta\Gamma_\alpha^{\beta k}\wedge\omega_k = 0,$$
$$\Delta\Gamma_4^{ik}\wedge\omega_k = 0, \quad \Delta p_\gamma^k\wedge\omega_k = 0, \tag{1.7}$$

где

$$\Delta\Gamma_3^{4k} = d\Gamma_3^{4k} + \Gamma_3^{4\ell}(\omega_\ell^k + \Gamma_3^{4k}\omega_\ell^3) - \omega_3^k - \Gamma_3^{4k}\omega_3^3 ,$$

$$\Delta\Gamma_4^{3k} = d\Gamma_4^{3k} + \Gamma_4^{3k}(\omega_3^3 - 2\omega_4^4) + \Gamma_4^{3\ell}(\omega_\ell^k + \Gamma_3^{4k}\omega_\ell^3) - \Gamma_\ell^{3k}\omega_4^\ell ,$$

$$\Delta\Gamma_i^{jk} = d\Gamma_i^{jk} + \Gamma_i^{jk}(\omega_j^j - \omega_i^i - \omega_4^4) + \Gamma_i^{3k}\omega_3^j - \Gamma_k^{j4}\omega_i + \Gamma_i^{jt}(\omega_t^k + \Gamma_3^{4k}\omega_t^3),$$

$$\Delta\Gamma_i^{3k} = d\Gamma_i^{3k} + \Gamma_i^{3k}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \Gamma_i^{3t}(\omega_t^k + \Gamma_3^{4k}\omega_t^3) - \Gamma_t^{3k}\omega_i^t - \Gamma_4^{3k}\omega_i ,$$

$$\Delta\Gamma_3^{ik} = d\Gamma_3^{ik} - \Gamma_3^{ik}(\omega_3^3 + \omega_4^4) + \Gamma_3^{tk}\omega_t^i + \Gamma_3^{4k}\omega_4^i + \Gamma_3^{it}(\omega_t^k + \Gamma_3^{4k}\omega_t^3),$$

$$\Delta\Gamma_4^{ik} = d\Gamma_4^{ik} - 2\Gamma_4^{ik}\omega_4^4 + \Gamma_4^{tk}\omega_t^i + \Gamma_4^{3k}\omega_3^i + \Gamma_4^{it}(\omega_t^k + \Gamma_3^{4k}\omega_t^3),$$

$$\begin{aligned} \Delta p_3^k = {} & dp_3^k - p_3^k\omega_4^4 + \Gamma_1^{3k}\omega_3^1 + \Gamma_2^{3k}\omega_3^2 + 2\Gamma_3^{4k}\omega_4^3 + \\ & + p_3^t(\omega_t^k + \Gamma_3^{4k}\omega_t^3) - 3\Gamma_4^{jk}\omega_j , \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} \Delta p_1^k = {} & dp_1^k - p_1^k\omega_4^4 + \Gamma_2^{1k}\omega_1^2 + \Gamma_3^{1k}\omega_1^3 + 3\Gamma_3^{4k}\omega_4^3 + \\ & + p_1^t(\omega_t^k + \Gamma_3^{4k}\omega_t^3) - 2\Gamma_4^{1k}\omega_1 - 3\Gamma_4^{2k}\omega_2 , \end{aligned}$$

$$\Delta p_2^k = dp_2^k - p_2^k\omega_4^4 + \Gamma_1^{2k}\omega_2^1 + \Gamma_3^{2k}\omega_2^3 + 3\Gamma_3^{4k}\omega_4^3 + p_2^t(\omega_t^k + \Gamma_3^{4k}\omega_t^3) - 3\Gamma_4^{1k}\omega_1 - 2\Gamma_4^{2k}\omega_2 .$$

Анализируя замкнутую систему (1.6), (1.7), находим

$$s_1 = 13 , \quad q = 26 , \quad s_2 = 13 , \quad Q = N = 39 . \tag{1.9}$$

Следовательно, система (1.6), (1.7) - в инволюции и определяет три-системы K с произволом 13 функций двух аргументов [1]. Геометрически этот произвол интерпретируется следующим образом. Чтобы задать три-систему $K \subset P_3$, надо прежде всего задать поверхность (A_4), на что потребуется одна функция двух аргументов. Затем в точках поверхности (A_4) надо задать одномерные направления $[A_4 A_\alpha]$ $(\alpha=1,2,3)$, т. е. в точках этой поверхности определить три поля направлений $[A_4 A_\alpha]$. Каждое такое поле определяется заданием двух функций двух аргументов, а всего при этом израсходуем шесть функций двух аргументов. На каждой прямой $[A_4 A_\alpha]$ надо задать точку A_α. Так как $\alpha=1,2,3$, то понадобится еще три функции двух аргументов. Теперь остается в каждой грани $[A_4 A_\alpha A_\beta]$ задать конику C_γ, которая касалась бы ребер $[A_4 A_\alpha]$, $[A_4 A_\beta]$ соответственно в точках A_α, A_β. Уравнение такой коники имеет вид:

$$C_\gamma: \quad (x^4)^2 - 2p_\gamma x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^\gamma = 0$$

(α, β, γ различны и принимают значения 1,2,3).

Значит, чтобы определить нужное нам семейство коник C_γ, надо задать p_γ как дифференцируемую функцию двух аргументов (координат точки A_4 на поверхности (A_4)). Так как $\gamma=1,2,3$, то потребуется еще три функции двух аргументов. Теперь три-система $K \subset P_3$ полностью определена. Для её определения нам потребовалось задать 1+6+3+3=13 функций двух аргументов, что в точности совпадает с произволом существования три-системы K, который был получен выше при доказательстве теоремы существования.

§2. Основные ассоциированные геометрические образы

1. Фокальные поверхности и торсы прямолинейных конгруэнций ребер канонического репера.

С три-системой K ассоциируются шесть прямолинейных конгруэнций $(A_\alpha A_\beta)$ и $(A_4 A_\alpha)$, описанных ребрами канонического репера. Уравнения для определения фокусов

$$F = \lambda A_\alpha + \mu A_\beta \tag{2.1}$$

луча $[A_\alpha A_\beta]$ и торсов прямолинейной конгруэнции $(A_\alpha A_\beta)$ имеют вид (соответственно):

$$(\lambda\Gamma_\alpha^{\gamma 1}+\mu\Gamma_\beta^{\gamma 1})(\lambda\Gamma_\alpha^{42}+\mu\Gamma_\beta^{42})-(\lambda\Gamma_\alpha^{\gamma 2}+\mu\Gamma_\beta^{\gamma 2})(\lambda\Gamma_\alpha^{41}+\mu\Gamma_\beta^{41})=0, \tag{2.2}$$

$$(\Gamma_\alpha^{\gamma k}\Gamma_\beta^{4\ell}-\Gamma_\alpha^{4k}\Gamma_\beta^{\gamma\ell})\,\omega_k\,\omega_\ell=0. \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем

$$\Gamma_i^{4k}=\delta_i^k. \tag{2.4}$$

Фокусы

$$\widetilde{F}=\widetilde{\lambda}A_4+\widetilde{\mu}A_\alpha \tag{2.5}$$

луча $[A_4 A_\alpha]$ и торсы прямолинейной конгруэнции $(A_4 A_\alpha)$ определяются соответственно уравнениями

$$(\widetilde{\lambda}\Gamma_4^{\beta 1}+\widetilde{\mu}\Gamma_\alpha^{\beta 1})(\widetilde{\lambda}\Gamma_4^{\gamma 2}+\widetilde{\mu}\Gamma_\alpha^{\gamma 2})-(\widetilde{\lambda}\Gamma_4^{\beta 2}+\widetilde{\mu}\Gamma_\alpha^{\beta 2})(\widetilde{\lambda}\Gamma_4^{\gamma 1}+\widetilde{\mu}\Gamma_\alpha^{\gamma 1})=0, \tag{2.6}$$

$$(\Gamma_4^{\beta k}\Gamma_\alpha^{\gamma\ell}-\Gamma_4^{\gamma k}\Gamma_\alpha^{\beta\ell})\,\omega_k\,\omega_\ell=0. \tag{2.7}$$

2. Характеристические точки граней канонического репера.

Обозначим буквой M характеристическую точку плоскости $[A_1 A_2 A_3]$, буквами M_γ -характеристические точки плоскостей $[A_4 A_\alpha A_\beta]$. Используя уравнения (1.6), из уравнений

$$(dM, A_1 A_2 A_3) = 0\,, \qquad (dM_\gamma A_4 A_\alpha A_\beta) = 0 \tag{2.8}$$

находим

$$M = A_3 - \Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa, \tag{2.9}$$

$$M_\gamma = (\Gamma_\alpha^{\gamma 1}\Gamma_\beta^{\gamma 2} - \Gamma_\alpha^{\gamma 2}\Gamma_\beta^{\gamma 1})A_4 + (\Gamma_\beta^{\gamma 1}\Gamma_4^{\gamma 2} - \Gamma_\beta^{\gamma 2}\Gamma_4^{\gamma 1})A_\alpha + $$
$$+ (\Gamma_4^{\gamma 1}\Gamma_\alpha^{\gamma 2} - \Gamma_4^{\gamma 2}\Gamma_\alpha^{\gamma 1})A_\beta\,. \tag{2.10}$$

3.Касательные плоскости поверхностей,описанных вершинами канонического репера.

Касательные плоскости поверхности (A_4) и поверхностей (A_α) определяются соответственно формулами

$$[A_4, \Gamma_4^{\kappa 1}A_\kappa + \Gamma_4^{31}A_3,\ \Gamma_4^{\kappa 2}A_\kappa + \Gamma_4^{32}A_3], \tag{2.11}$$

$$[A_\alpha, \Gamma_\alpha^{\beta 1}A_\beta + \Gamma_\alpha^{\gamma 1}A_\gamma,\ \Gamma_\alpha^{\beta 2}A_\beta + \Gamma_\alpha^{\gamma 2}A_\gamma]. \tag{2.12}$$

4.Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции коник C_α [2].

Уравнения для определения фокальных семейств и фокальных поверхностей конгруэнции (C_α) имеют вид :

$$(x^4)^2 - 2x^\beta x^\gamma = 0,\ x^\alpha = 0\,,\ (\Gamma_\beta^{\alpha\kappa}x^\beta + \Gamma_\gamma^{\alpha\kappa}x^\gamma + \Gamma_4^{\alpha\kappa}x^4)\omega_\kappa = 0,$$
$$\{x^\beta[x^\alpha\Gamma_\alpha^{\gamma\kappa} + x^\beta\Gamma_\beta^{\gamma\kappa} + x^4(\Gamma_4^{\gamma\kappa} - \Gamma_\beta^{4\kappa})] + x^\gamma[x^\alpha\Gamma_\alpha^{\beta\kappa} + x^\gamma\Gamma_\gamma^{\beta\kappa} +$$
$$+ x^4(\Gamma_4^{\beta\kappa} - \Gamma_\gamma^{4\kappa})] + x^\beta x^\gamma p_\alpha^\kappa - x^\alpha x^4\Gamma_\alpha^{4\kappa}\}\omega_\kappa = 0\,. \tag{2.13}$$

5.Ассоциированная конгруэнция квадрик.

Три коники C_1, C_2, C_3 принадлежат единственной квадрике Q:

$$F \equiv (x^4)^2 - 2x^1x^2 - 2x^2x^3 - 2x^3x^1 = 0\,. \tag{2.14}$$

Имеем

$$dF = 2(\theta - \omega_4^4)F - 2x^1x^4(\omega_1 - \omega_4^2 - \omega_4^3) - 2x^2x^4(\omega_2 - \omega_4^1 - \omega_4^3) -$$
$$-2x^3x^4(\omega_3^4 - \omega_4^2 - \omega_4^1) + 2(x^1)^2(\omega_1^2 + \omega_1^3) + 2(x^2)^2(\omega_2^1 + \omega_2^3) +$$
$$+2(x^3)^2(\omega_3^2 + \omega_3^1) + 2x^1x^2(\omega_1^3 + \omega_2^3 + \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) + 2x^1x^3(\omega_1^2 +$$
$$+\omega_3^2 + \omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4) + 2x^2x^3(\omega_3^1 + \omega_2^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4). \tag{2.15}$$

Используя уравнения (1.6), получим

$$\tfrac{1}{2}dF = F^1\omega_1 + F^2\omega_2 + (\theta - \omega_4^4)F, \tag{2.16}$$

где

$$F^1 = (\Gamma_1^{21} + \Gamma_1^{31})(x^1)^2 + (\Gamma_2^{11} + \Gamma_2^{31})(x^2)^2 + (\Gamma_3^{21} + \Gamma_3^{11})(x^3)^2 +$$
$$+(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{31} + p_3^1)x^1x^2 + (\Gamma_1^{21} + \Gamma_3^{21} + p_2^1)x^1x^3 + (\Gamma_4^{21} + \Gamma_4^{31} - 1)x^1x^4 +$$
$$+(\Gamma_3^{11} + \Gamma_2^{11} + p_1^1)x^2x^3 + (\Gamma_4^{11} + \Gamma_4^{31} - 1)x^2x^4 + (\Gamma_4^{11} + \Gamma_4^{21} - \Gamma_3^{41})x^3x^4,$$

$$F^2 = (\Gamma_1^{22} + \Gamma_1^{32})(x^1)^2 + (\Gamma_2^{12} + \Gamma_2^{32})(x^2)^2 + (\Gamma_3^{22} + \Gamma_3^{12})(x^3)^2 +$$
$$+(\Gamma_1^{32} + \Gamma_2^{32} + p_3^2)x^1x^2 + (\Gamma_1^{22} + \Gamma_3^{22} + p_2^2)x^1x^3 + (\Gamma_4^{21} + \Gamma_4^{31} - 1)x^1x^4 +$$
$$+(\Gamma_3^{12} + \Gamma_2^{12} + p_1^2)x^2x^3 + (\Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{32} - 1)x^2x^4 + (\Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{22} - \Gamma_3^{42})x^3x^4.$$

Система уравнений для определения фокальных точек квадрики Q[3] конгруэнции (Q) имеет вид :

$$F=0,\quad F^1=0,\quad F^2=0. \tag{2.17}$$

Отсюда следует, что равенства

$$\Gamma_1^{21}+\Gamma_1^{31}=0,\quad \Gamma_1^{22}+\Gamma_1^{32}=0 \tag{2.18}$$

выражают условия того, что точка A_1 является фокальной точкой квадрики Q. Точно так же условия

$$\Gamma_2^{11}+\Gamma_2^{31}=0,\quad \Gamma_2^{12}+\Gamma_2^{32}=0 \tag{2.19}$$

означают, что A_2 является фокальной точкой квадрики Q. Наконец, условия

$$\Gamma_3^{11}+\Gamma_3^{21}=0,\quad \Gamma_3^{12}+\Gamma_3^{22}=0 \tag{2.20}$$

означают, что точка A_3 является фокальной точкой квадрики Q.

§3. Три-система коник, инцидентных одной квадрике

О п р е д е л е н и е. Три-системой K^* называется три-система K, все коники которой инцидентны одной квадрике.

Т е о р е м а 3.1. Три-системы K^* существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Три-системы K^* характеризуются инвариантностью ассоциированной квадрики Q :

$$F+dF=(\lambda_0+\lambda_1)F, \tag{3.1}$$

где λ_0 -некоторая функция, а λ_1 -некоторая форма Пфаффа. Используя формулы (2.14), (2.15) и (3.1), приходим к следующей системе уравнений Пфаффа:

$$\omega_1^3=-\omega_1^2,\quad \omega_2^1=-\omega_2^3,\quad \omega_3^2=-\omega_3^1,$$

$$\begin{gathered}\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4=\omega_1^2-\omega_2^3,\quad \omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_4^4=\omega_2^3-\omega_3^1,\\ \omega_1^1+\omega_3^3-2\omega_4^4=\omega_3^2-\omega_1^2,\quad \omega_4^3=\omega_1+\omega_2-\omega_3^4,\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\omega_4^1=\omega_3^4-\omega_1,\quad \omega_4^2=\omega_3^4-\omega_2.$$

Три-система K^* определяется уравнениями (3.2) и уравнениями

$$\omega_1^2=\Gamma_1^{2k}\omega_k,\quad \omega_2^3=\Gamma_2^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^1=\Gamma_3^{1k}\omega_k,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k. \tag{3.3}$$

Система уравнений (3.2) вполне интегрируемая, так как она совпадает с системой уравнений стационарности квадрики Q. Замыкание уравнений (3.3) имеет вид :

$$\Delta\Gamma_1^{2k}\wedge\omega_k=0,\quad \Delta\Gamma_2^{3k}\wedge\omega_k=0,\quad \Delta\Gamma_3^{1k}\wedge\omega_k=0,\quad \Delta\Gamma_3^{4k}\wedge\omega_k=0, \tag{3.4}$$

где

$$\Delta\Gamma_1^{2k}=d\Gamma_1^{2k}-\Gamma_1^{2k}(\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_4^4+\omega_3^2)+\delta_1^k\omega_4^2+\Gamma_1^{2i}(\omega_i^k+\Gamma_3^{4k}\omega_i^3),$$

$$\Delta\Gamma_2^{3k}=d\Gamma_2^{3k}-\Gamma_2^{3k}(\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4)+\Gamma_1^{2k}\omega_2^1+\delta_2^k\omega_4^3+\Gamma_2^{3i}(\omega_i^k+\Gamma_3^{4k}\omega_i^3),$$

$$\Delta\Gamma_3^{1k}=d\Gamma_3^{1k}-\Gamma_3^{1k}(\omega_3^3-\omega_1^1+\omega_4^4+\omega_2^1)+\delta_1^k\omega_4^1+\Gamma_3^{1i}(\omega_i^k+\Gamma_3^{4k}\omega_i^3),$$

$$\Delta\Gamma_3^{4k}=d\Gamma_3^{4k}-\Gamma_3^{4k}\omega_3^3-\delta_1^k\omega_3^1+\delta_2^k\omega_3^2+\Gamma_3^{4i}(\omega_i^k+\Gamma_3^{4k}\omega_i^3).$$

Имеем $S_1=4,\quad q=8,\quad S_2=q-S_1=4,\quad Q=N=12.$

Система (3.2), (3.3), (3.4)- в инволюции и определяет три-системы K^* с произволом четырех функций двух аргументов.

С п и с о к   л и т е р а т у р ы

1.Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана.М.-Л. ГИТТЛ,1948,с.432.

2.М а л а х о в с к и й В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.-"Труды Томск.ун-та",1963,№168,с.43-53.

3.М а л а х о в с к и й В.С.,Махоркин В.В. Конгруэнции поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве.-Вкн .:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.4,Калининград,1974,с.86-106.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Т.Н. К о п ы т и н а

К ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ СЕТЕЙ С НЕПОДВИЖНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

В статье рассматривается пара голономных сетей в проективном пространстве P_3 ,между которыми устанавливается дифференцируемое взаимно однозначное отображение,причем одна из сетей имеет неподвижную гармоническую плоскость [1].Изучаются особенности сетей в зависимости от взаимного расположения треугольников,возникающих в гармонической плоскости.Рассмотрен случай,когда линии сети являются характеристическими [2].

1.Пусть $\sum_3$ —сеть с неподвижной гармонической плоскостью,описываемая точкой A, и $\{AA_i\}$ $(i=1,2,3)$-проективный репер,присоединенный к ней, AA_i-касательная к линии ω^i сети $\sum_3$,а в качестве A_i берем гармонический полюс соответствующей линии сети [1].

Инфинитезимальные перемещения репера определяются системой уравнений

$$dA=\omega^\circ_\circ A+\omega^i A_i\,,\qquad (1)$$
$$dA_i=\omega_i^j A_j\,,\quad (i,j=1,2,3)\,,$$

тогда, как известно [1], сеть Σ_3 будет определяться системой дифференциальных уравнений

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k \qquad (i \neq j), \tag{2}$$

где

$$\sum_{i \neq j} a_{ij}^j = 0, \quad a_{ik}^j = a_{ki}^j, \quad (i, j, k \text{ - различны}).$$

Со второй сетью $\overline{\Sigma}_3$, описываемой точкой B, связываем репер $\{BB_i\}$ ($i=1,2,3$), где B_i есть точка пересечения касательной к линии θ^i сети $\overline{\Sigma}_3$ с неподвижной гармонической плоскостью $\pi(A)$. Отсюда

$$B = \alpha_o^o A + \alpha_o^i A_i, \qquad B_i = \alpha_i^j A_j. \tag{3}$$

инфинитезимальные перемещения второго репера определяются системой уравнений

$$dB = \theta_o^o B + \theta^i B_i, \qquad dB_i = \theta_i^o B + \theta_i^j B_j. \tag{4}$$

Из (3) с учетом (1) и (4) следует:

$$\begin{aligned} d\alpha_o^o &= \alpha_o^o(\theta_o^o - \omega_o^o), \\ d\alpha_o^k &= \alpha_o^k \theta_o^o + \omega^i \alpha_i^k - \alpha_o^o \omega^k - \alpha_o^i \omega_i^k, \\ d\alpha_i^k &= \theta_i^j \alpha_j^k - \alpha_i^j \omega_j^k, \\ \theta_i^o &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Сеть $\overline{\Sigma}_3$ в P_3, согласно [1], будет определяться

$$\theta_i^j = b_{ik}^j \theta^k \quad (i \neq j), \tag{6}$$

где

$$b_{ik}^j = b_{ki}^j \qquad (i, j, k \text{ -различны}).$$

Дифференцируемое взаимно однозначное отображение сетей зададим так: когда точка B описывает линию θ^i сети $\overline{\Sigma}_3$, точка A описывает соответствующую линию ω^i сети Σ_3, т.е. $\omega^i = \rho^i \theta^i$. Нормированием вершин репера $\{AA_i\}$ приведем множители ρ^i к единице, тогда

$$\omega^i = \theta^i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{7}$$

При этом нормировка вершин второго репера остается произвольной.

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (2), (6), (7) и используя уравнения структуры проективного пространства [3], получим

$$\begin{aligned} &\Delta a_{ii}^{i+1} \wedge \omega^i - \Delta a_{i,i+1}^{i+1} \wedge \omega^{i+1} + \Delta a_{i+2,i}^{i+1} \wedge \omega^{i+2} = 0, \\ &\Delta a_{ii}^{i+2} \wedge \omega^i + \Delta a_{i,i+1}^{i+2} \wedge \omega^{i+1} + \Delta a_{i,i+1}^{i+1} \wedge \omega^{i+2} = 0, \\ &\Delta b_{ii}^{i+1} \wedge \omega^i + \Delta b_{i,i+1}^{i+1} \wedge \omega^{i+1} + \Delta b_{i+2,i}^{i+1} \wedge \omega^{i+2} = 0, \\ &\Delta b_{ii}^{i+2} \wedge \omega^i + \Delta b_{i,i+1}^{i+2} \wedge \omega^{i+1} + \Delta b_{i,i+2}^{i+2} \wedge \omega^{i+2} = 0, \\ &\Omega_i^i \wedge \omega^i = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\Omega_i^i = \omega_o^o - \theta_o^o + \theta_i^i - \omega_i^i + (a_{ki}^i - b_{ki}^i)\omega^k, \qquad (k \neq i),$$

$$\Delta a_{ii}^{i+1} = a_{ii}^{i+1}(-\omega_o^o + 2\omega_i^i - \omega_{i+1}^{i+1}) - da_{ii}^{i+1} + a_{i,i+1}^{i+1}\omega_i^{i+1} + \ldots$$

и т.д.

(если индекс $i+1>3$.то заменяем его на $i+1-3$, аналогично и для $i+2$).Замкнутая система уравнений (2),(6),(7),(8) находится в инволюции с характерами $S_1=15, S_2=12, S_3=3$, т. е. указанная выше пара определяется с произволом трех функций трех аргументов.

Пронормируем второй репер так,чтобы вершины обоих реперов были согласованы,т. е.

$$B=A+\alpha^i_\circ A_i\,,$$
$$B_i=A_i+\alpha^j_i A_j+\alpha^k_i A_k \quad (i,j,k \text{ -различны, суммирования нет!}). \tag{9}$$

Тогда $\theta^\circ_\circ=\omega^\circ_\circ$,а формы $\theta^i_i-\omega^i_i$ станут главными:

$$\theta^1_1-\omega^1_1=\alpha^2_1\omega^1_2+\alpha^3_1\omega^1_3-\alpha^1_2\theta^2_1-\alpha^1_3\theta^3_1\,,$$

$$\theta^2_2-\omega^2_2=\alpha^1_2\omega^2_1+\alpha^3_2\omega^2_3-\alpha^2_1\theta^1_2-\alpha^2_3\theta^3_2\,, \tag{10}$$

$$\theta^3_3-\omega^3_3=\alpha^1_3\omega^3_1+\alpha^2_3\omega^3_2-\alpha^3_1\theta^1_3-\alpha^3_2\theta^2_3\,.$$

2.Пусть $[AB]\cap\pi(A)=C$,где $C=\alpha^i_\circ A_i$, и точка $\mathcal{D}$ такая,что $(AB;C\mathcal{D})=-1$.

Если $dA=\omega^\circ_\circ A+\omega^i A_i$,то

$$dC=\theta^\circ_\circ C+(\omega^i\alpha^j_i-\omega^j)A_j \tag{11}$$

Обозначим d_i -символ дифференцирования в направлении линии ω^i сети $\sum_3$,тогда из (11) следует:

$$d_iC=\theta^\circ_\circ C+(\alpha^j_iA_j+\alpha^k_iA_k)\omega^i=\theta^\circ_\circ C+(B_i-A_i)\omega^i, \tag{12}$$

(i,j,k -различны,суммирования нет!).

Отсюда

$$[C,d_iC]\cap[A_iB_i]=B_i-A_i=C_i\,.$$

Аналогично

$$[\mathcal{D},d_i\mathcal{D}]\cap[A_iB_i]=B_i+A_i=\mathcal{D}_i\,.$$

Т е о р е м а.Если $(AB;C\mathcal{D})=-1$,то $(A_iB_i;C_i\mathcal{D}_i)=-1$.

В плоскости $\pi(A)$ имеем два основных треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$.Рассмотрим случай,когда $A_i=B_i$ (i-фиксировано). Это приводит к уравнениям

$$\alpha^j_i=0\,,\quad \alpha^k_i=0 \quad (i,j,k\text{-различны}), \tag{13}$$

и (12) дает

$$d_iC=\theta^\circ_\circ C\,. \tag{14}$$

Обратно,если выполняется (14),то из (12),(13) и (9) следует $A_i=B_i$.

Т е о р е м а.Треугольники $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ имеют одну общую вершину $A_i=B_i$ (i -фиксировано) тогда и только тогда, когда соответствующие линии ω^i сетей $\sum_3$ и $\sum_3$ лежат на конусе с вершиной в точке C .

Возьмем случай,когда

$$A_i=B_i\,,\quad A_j=B_j\,,\ i\neq j \quad (i,j\text{ -фиксированы}). \tag{15}$$

Аналитически это характеризуется уравнениями (13) и

$$\alpha^k_j=0\,,\quad \alpha^i_j=0\,, \qquad (k\neq i,j)\,. \tag{16}$$

Из (11) следует,что для

$$\omega^k=0\,,\qquad dC=\theta^\circ_\circ C\,. \tag{17}$$

Обратно,если верно (17),то из (11) имеем (13),(16) и (9) дают (15).

Т е о р е м а. Треугольники $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ имеют две общие соответствующие вершины $A_i=B_i, A_j=B_j$ (i,j -фиксированы) тогда и только тогда, когда соответствующие линии на поверхности $\omega^\kappa=0\ (\kappa\neq i,j)$, принадлежащие сетям Σ_3 и $\overline{\Sigma}_3$, лежат на одном конусе с вершиной в точке C.

Дифференцируя (15) с учетом (1),(4),(5), получим

$$\omega^\kappa_i=\theta^\kappa_i,\quad \omega^\kappa_j=\theta^\kappa_j \quad (\ i,j,\kappa \text{ -различны}).$$

Откуда, используя (2),(6),(7), имеем

$$a^\kappa_{ii}=b^\kappa_{ii},\quad a^\kappa_{ij}=b^\kappa_{ij};\quad a^\kappa_{jj}=b^\kappa_{jj}.$$

С л е д с т в и е. Если $A_i=B_i, A_j=B_j$ (i,j -фиксированы), то для $\omega^\kappa=0\ (\kappa\neq i,j)$ на поверхности (A) и на поверхности (B) асимптотические соответствуют.

Рассмотрим случай, когда $A_i=B_i$ ($i=1,2,3$). Из (9) и (11) следует: $dC=\theta^\circ_\circ C$ при любом перемещении точки A в пространстве. Справедливо и обратное. Доказана теорема.

Т е о р е м а. Треугольники $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ имеют одинаковые соответствующие вершины тогда и только тогда, когда точка C неподвижна при любых смещениях точки A.

Дифференцирование $A_i=B_i$ ($i=1,2,3$) с учетом (1),(4),(5) приводит к уравнениям

$$\omega^j_i=\theta^j_i. \tag{18}$$

Из (18),(7),(5) имеем:

С л е д с т в и е. Если $A_i=B_i$ ($i=1,2,3$), то сети Σ_3 и $\overline{\Sigma}_3$ проективно эквивалентны.

3. Рассмотрим случай, когда у сети $\overline{\Sigma}_3$ псевдофокусы $\overline{F}^{i+1}_i$ ($i=1,2,3$) совпадают с B_i, а прямые

$$[F^{i+1}_i\ \overline{F}^{i+1}_i]\begin{cases} \dfrac{x^{i+1}}{\alpha^{i+1}_i}=\dfrac{x^{i+2}}{\alpha^{i+2}_i} \\ x^\circ=\dfrac{a^{i+1}_{i,i+1}}{\alpha^{i+2}_i}(x^{i+2}-\alpha^{i+2}_i x^i) \end{cases} \tag{19}$$

пересекаются в одной точке. Это приводит к условиям:

$$\begin{gathered} \alpha^2_1\alpha^3_2\alpha^1_3-\alpha^1_2\alpha^3_1\alpha^2_3=0, \\ a^2_{12}(\alpha^2_3-\alpha^2_1\alpha^1_3)=a^1_{31}(\alpha^2_1-\alpha^2_3\alpha^3_1), \\ a^2_{12}(\alpha^3_2-\alpha^1_2\alpha^3_1)=a^3_{23}(\alpha^3_1-\alpha^2_1\alpha^3_2), \end{gathered} \tag{20}$$

где $\alpha^3_1\neq 0,\ \alpha^3_2\neq 0$.

Обозначая через $H=\alpha^2_1\alpha^3_2\alpha^1_3-\alpha^1_2\alpha^3_1\alpha^2_3$ и дифференцируя с учетом (5) получим

$$dH=(\theta^1_1+\theta^2_2+\theta^3_3-\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3)H+K_i\omega^i. \tag{21}$$

Если δ -символ дифференцирования по вторичным параметрам, то из уравнений (10) и (21) следует, что

$$\delta H=0,$$

т. е. H является инвариантом. Обращение H в нуль означает перспективность треугольников $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$. В зависимости от того, при каких условиях выполняются оставшиеся соотношения (20), можно выделить следующие основные случаи.

С л у ч а й 1. Пусть все множители отличны от нуля. Это приводит к выражениям :

$$F^3_2=\frac{\alpha^3_2-\alpha^3_1\alpha^1_2}{\alpha^3_1-\alpha^2_1\alpha^3_2}F^2_1+\frac{1}{\alpha^3_1-\alpha^2_1\alpha^3_2}(\alpha^3_1B_2-\alpha^3_2B_1),$$

$$F^1_3=\frac{\alpha^2_1\alpha^1_3-\alpha^2_3}{\alpha^3_1\alpha^2_3-\alpha^2_1}F^2_1+\frac{1}{\alpha^3_1\alpha^2_3-\alpha^2_1}(\alpha^2_3B_1-\alpha^2_1B_3),$$

и значит

$$[F^2_1F^3_2]\cap[\overline{F}^2_1\overline{F}^3_2]=\alpha^3_1B_2-\alpha^3_2B_1,$$

$$[F^2_1F^1_3]\cap[\overline{F}^2_1\overline{F}^1_3]=\alpha^2_3B_1-\alpha^2_1B_3.$$

С другой стороны, находим

$$\alpha^3_1B_2-\alpha^3_2B_1=[A_1A_2]\cap[B_1B_2],$$

$$\alpha^2_3B_1-\alpha^2_1B_3=[A_1A_3]\cap[B_1B_3].$$

Поэтому справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а. Если для сети Σ_3 $\overline{F}^{i+1}_i=B_i$ $(i=1,2,3)$ и прямые $[F^{i+1}_i\overline{F}^{i+1}_i]$ пересекаются в одной точке, то в общем случае треугольники $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ перспективны и

$$[F^2_1F^3_2]\cap[\overline{F}^2_1\overline{F}^3_2]=[A_1A_2]\cap[B_1B_2],$$

$$[F^2_1F^1_3]\cap[\overline{F}^2_1\overline{F}^1_3]=[A_1A_3]\cap[B_1B_3].$$

С л у ч а й 2. Пусть

$$a^{i+1}_{i,i+1}=0,\quad a^{i+2}_{i+1,i+2}=0, \tag{22}$$

$$\alpha^{i+1}_i-\alpha^{i+1}_{i+2}\alpha^{i+2}_i=0,\ \alpha^i_{i+1}-\alpha^{i+2}_{i+1}\alpha^i_{i+2}=0\ (i\text{-фиксировано}). \tag{23}$$

Тогда первое из уравнений (20) в силу (23) обращается в тождество. Здесь треугольники $\{A_i\}$, $\{B_i\}$ по-прежнему перспективны, хотя точки B_i и B_{i+1} имеют специальное расположение, а именно

$$C_i\in[A_{i+1}A_{i+2}],\quad C_{i+2}\in[A_iA_{i+1}]. \tag{24}$$

В силу (22), сеть Σ_3 имеет два совпавших псевдофокуса, которые совпадают с соответствующими гармоническими полюсами:

$$F^{i+1}_{i,i+1}=F^{i+2}_{i,i+2}=A_i;\quad F^{i+2}_{i+1,i+2}=F^i_{i+1,i}=A_{i+1}, \tag{25}$$

(i -фиксировано).

Если же $a^{i+1}_{i,i+1}=0$ $(i=1,2,3)$, т. е. сеть Σ_3 является сетью с совпавшими псевдофокусами [4], то наше первоначальное требование о пересечении прямых $[F^{i+1}_i\overline{F}^{i+1}_i]$ в одной точке сводится к перспективности основных треугольников.

Если рассматривать случай, когда у сети Σ_3 псевдофокусы $\overline{F}^{i+1}_i$, $\overline{F}^{i+2}_i$ совпадают с точкой B_i $(i=1,2,3)$, а прямые $[F^{i+1}_i\overline{F}^{i+1}_i]$ и $[F^{i+2}_i\overline{F}^{i+2}_i]$ пересекаются в одной точке, то придем к условиям (20) и

$$a^2_{12}(\alpha^3_1\alpha^1_2-\alpha^3_2)=0,$$
$$a^2_{12}(\alpha^3_2-\alpha^1_2\alpha^3_1)=a^3_{23}(\alpha^3_2\alpha^2_1-\alpha^3_1), \tag{26}$$
$$a^2_{12}(\alpha^2_3-\alpha^2_1\alpha^1_3)=a^1_{31}(\alpha^2_3\alpha^3_1-\alpha^2_1).$$

Из уравнений (20) и (26) следует:

$$\alpha^2_1\alpha^3_2\alpha^1_3-\alpha^1_2\alpha^3_1\alpha^2_3=0,\quad a^1_{31}(\alpha^2_1-\alpha^2_3\alpha^3_1)=0,$$
$$a^3_{23}(\alpha^3_1-\alpha^3_2\alpha^2_1)=0,\quad a^2_{12}(\alpha^3_1\alpha^1_2-\alpha^3_2)=0, \tag{27}$$
$$a^2_{12}(\alpha^2_3-\alpha^2_1\alpha^1_3)=0.$$

Условия (27) будут выполняться, если имеют место соотношения (22),(23) а, следовательно, остаются в силе и (24),(25). Кроме этого, дифференцируя (9) с учетом (23),(10),(1),(4),(5), например для $i=2$, получим

$$(\alpha_1^3\alpha_3^1-1)\theta_2^3+\alpha_1^3(\alpha_1^2\alpha_2^1-1)\omega_2^1+\alpha_2^1(1-\alpha_1^3\alpha_3^1)\theta_1^3+(1-\alpha_2^1\alpha_1^2)\omega_2^3=0. \quad (28)$$

Откуда, согласно (2),(6),(22) и $b_{i,i+1}^{i+1}=0,\ b_{i,i+2}^{i+2}=0$ $(i=1,2,3)$ (что вытекает из того, что сеть $\overline{\Sigma}_3$ имеет неподвижную гармоническую плоскость $\pi(A)$), следует

$$\alpha_1^3(\alpha_1^2\alpha_2^1-1)\,a_{23}^1=0.$$

Отсюда $a_{23}^1=0$, так как если $\alpha_1^2\alpha_2^1-1=0$ и (23) выполняются одновременно, то $B_2=\frac{1}{\alpha_1^2}B_1$ и, следовательно, вторая сеть вырождается. Напомним, кроме того, что условия (20) получены в предположении $\alpha_1^3\neq 0$.

Т е о р е м а. Если сети Σ_3 и $\overline{\Sigma}_3$ имеют общую неподвижную гармоническую плоскость, $b_{i,i+1}^{i+1}=b_{i,i+2}^{i+2}=0$ $(i=1,2,3)$ и прямые, проходящие через соответствующие псевдофокусы сетей, пересекаются в одной точке, то треугольники $\{A_i\}$, $\{B_i\}$ перспективны,

$$F_{i,i+1}^{i+1}=F_{i,i+2}^{i+2}=A_i;\quad F_{i+1,i+2}^{i+2}=F_{i+1,i}^{i}=A_{i+1}$$

(i – фиксировано)

и линии ω^i, ω^{i+1} сопряжены на поверхности $\omega^{i+2}=0$, описанной точкой A.

Случай $a_{i,i+1}^{i+1}=0$ приводит просто к перспективности основных треугольников.

Для пары сетей (2),(6),(7), где

$$b_{i,i+1}^{i+1}=b_{i,i+2}^{i+2}=0 \quad (i=1,2,3),$$

мы получаем конечные соотношения

$$\begin{aligned} &b_{12}^3 b_{33}^2-b_{32}^1 b_{11}^2=0,\\ &b_{23}^1 b_{11}^3-b_{13}^2 b_{22}^3=0, \qquad (29)\\ &b_{31}^2 b_{22}^1-b_{21}^3 b_{33}^1=0, \end{aligned}$$

которые приводят к следующему:

$$b_{22}^1 b_{33}^2 b_{11}^3-b_{33}^1 b_{11}^2 b_{22}^3=0. \qquad (30)$$

Левая часть уравнения (30) является инвариантом, и обращение её в нуль означает, что соприкасающиеся плоскости к линиям сети $\overline{\Sigma}_3$ проходят через одну прямую в каждой точке $B\in\overline{\Sigma}_3$.

Можно доказать, что чебышевская сеть с неподвижной гармонической плоскостью, для которой соприкасающиеся плоскости к линии сети пересекаются по одной прямой, существует с произволом трех функций одного аргумента.

4. Пусть дано отображение (7) одной сети на другую. Рассмотрим характеристические направления $\{\omega^i\}$ этого отображения. Они, как известно, находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} &(b_{22}^1-a_{22}^1)(\omega^2)^2+2(b_{23}^1-a_{23}^1)\omega^2\omega^3+(b_{33}^1-a_{33}^1)(\omega^3)^2=h\omega^1,\\ &(b_{11}^2-a_{11}^2)(\omega^1)^2+2(b_{13}^2-a_{13}^2)\omega^1\omega^3+(b_{33}^2-a_{33}^2)(\omega^3)^2=h\omega^2, \qquad (31) \end{aligned}$$

$$(b_{11}^3-a_{11}^3)(\omega^1)^2+2(b_{12}^3-a_{12}^3)\omega^1\omega^2+(b_{22}^3-a_{22}^3)(\omega^2)^2=h\omega^3, \qquad (31)$$

где h -линейная дифференциальная форма.Поставим вопрос , при каком условии линия ω^i (i-фиксировано) сети Σ_3 является характеристической? Рассмотрим случай $i=1$ ($i=2,3$ по аналогии)

$$\omega^1: \quad \omega^2=\omega^3=0.$$

Из (31) следует $h=0$ и

$$b_{11}^2=a_{11}^2; \quad b_{11}^3=a_{11}^3. \qquad (32)$$

Соприкасающаяся плоскость к линии ω^1 в точке A

$$\pi_2(\omega^1)=[A, A_1, a_{11}^2A_2+a_{11}^3A_3].$$

Отсюда

$$\pi_2(\omega^1)\cap[A_2A_3]=a_{11}^2A_2+a_{11}^3A_3.$$

Аналогично

$$\pi_2(\theta^1)\cap[B_2B_3]=b_{11}^2B_2+b_{11}^3B_3.$$

Т е о р е м а .Для того чтобы линия ω^i сети Σ_3 была характеристической,необходимо,чтобы точка $M_i=\pi_2(\omega^i)\cap[A_{i+1}A_{i+2}]$ имела в репере $\{A_i\}$ те же координаты,что и точка $N_i=\pi_2(\theta^i)\cap[B_{i+1}\ B_{i+2}]$ в репере $\{B_i\}$.

Возьмем случай,когда линии ω^1 и ω^2 сети Σ_3 одновременно являются характеристическими.Тогда необходимо выполняются соотношения (32) и

$$b_{22}^1=a_{22}^1; \quad b_{22}^3=a_{22}^3. \qquad (33)$$

Если направление

$$\omega^3=0, \quad \omega^1=\alpha\omega^2 \qquad (34)$$

также является характеристическим,то внося (32),(33),(34) в (31) получим $h=0$ и

$$\alpha(b_{12}^3-a_{12}^3)(\omega^2)^2=0. \qquad (35)$$

При $\alpha=0$ имеем:

Т е о р е м а.Если в плоскости $[AA_iA_j]$ направления $[AA_i],[AA_j]$ сети Σ_3 являются характеристическими, причем таких направлений только три,то третье характеристическое направление совпадает либо с ω^i,либо с ω^j .

Когда $\alpha\neq 0$,то так как $\omega^2\neq 0$, получим из (35) $b_{12}^3=a_{12}^3$ и любое направление плоскости $[AA_1A_2]$ является характеристическим.Справедливо и обратное.

Т е о р е м а.Любое направление плоскости $[AA_iA_j]$ $\forall A\in\Sigma_3$ является характеристическим тогда и только тогда, когда линии ω^i, ω^j сети Σ_3 являются характеристическими и $b_{ij}^k=a_{ij}^k$ (i,j,k -различны).

С л е д с т в и е.Если любое направление плоскости $[AA_iA_j]$, $\forall A\in\Sigma_3$ является характеристическим,то асимптотические на поверхности (A) и поверхности (B) соответствуют.

Это вытекает из (32),(33) и $b_{ij}^k=a_{ij}^k$.

Список литературы

1.Б а з ы л е в В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей.-"Уч.зап.Моск.гос.пед.ин-та им.В.И.Ленина,"1965, №243,с.29-37.

2.Р ы ж к о в В.В.Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.-"Итоги науки.Сер.Геометрия,1963."(ВИНИТИ АН СССР),М.,1965,с.65-100.

3.Ф и н и к о в С.П.Метод внешних форм Картана.М.-Л., ГИТТЛ,1948,с.432.

4.С т о л я р о в А.В.О некоторых свойствах плоских сетей с совпадающими псевдофокусами.-"Уч.зап.Моск.гос.пед. ин-та им.В.И.Ленина,1967,№271,с.167-180.

Л.Г.К о р с а к о в а

О ПАРЕ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК В P_3 ,КАСАЮЩИХСЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СВОИХ ПЛОСКОСТЕЙ В ОДНОЙ ТОЧКЕ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется пара (C_1,C_2) конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник,касающихся линии пересечения своих плоскостей в одной точке.Построен геометрически фиксированный репер пары (C_1,C_2),рассматриваются ассоциированные конгруэнции квадрик.Найдены условия инцидентности всех коник семейств (C_1) и (C_2) инвариантной квадрике.

§1. Пары $\mathcal{L}$.

Рассмотрим в пространстве P_3 пару (C_1,C_2) конгруэнций коник C_1,C_2 не лежащих в одной плоскости и касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей α_1 и α_2 в одной точке A_1 .

Пара (C_1,C_2) называется парой $\mathcal{L}$,если плоскости α_1 и α_2 описывают двупараметрические семейства.

Отнесем пару $\mathcal{L}$ к реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$,где A_2-точка,инцидентная прямой ℓ ,точки A_3 и A_4 выбираются таким образом, что треугольники $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$ являются автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно коник C_1 и C_2.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4) \qquad (1.1)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0 \qquad (1.3)$$

Коники C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) в построенном репере R определяются соответственно уравнениями

$$(x^2)^2 - 2p x^1 x^4 = 0, \quad x^3 = 0 \qquad (1.4)$$

$$(x^2)^2 - 2q x^1 x^3 = 0, \quad x^4 = 0. \qquad (1.5)$$

Так как плоскости коник C_1 и C_2 образуют двупараметрические семейства, то ранг каждой из систем форм $\{\omega_1^4, \omega_2^4, \omega_3^4\}$, $\{\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_4^3\}$ должен равняться двум. Выберем формы ω_1^4, ω_2^4 за независимые первичные. Обозначим

$$\omega_i^4 = \omega_i \quad (i, j, \kappa = 1,2) \qquad (1.6)$$

Система пфаффовых уравнений пары $\mathcal{L}$ запишется в виде:

$$\begin{gathered}\omega_1^2 = \Gamma_1^{2\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa, \\ \omega_4^3 = \Gamma_4^{3\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_4^2 - p\omega_2^1 = \lambda^\kappa\omega_\kappa, \quad \omega_3^2 - q\omega_2^1 = \mu^\kappa\omega_\kappa, \\ \omega_4^1 = \Gamma_4^{1\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{1\kappa}\omega_\kappa, \\ \omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2 - d\ln p = a^\kappa\omega_\kappa, \quad \omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_2^2 - d\ln q = b^\kappa\omega_\kappa.\end{gathered} \qquad (1.7)$$

Анализируя систему уравнений (I.7), убеждаемся, что пары $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом одиннадцати функций двух аргументов.

Обозначая буквой δ дифференцирование по вторичным параметрам и буквами π_α^β значения форм ω_α^β при фиксированных первичных параметрах, из замыканий уравнений (I.7) находим:

$$\delta\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{41}(\pi_3^3 - \pi_1^1) - \Gamma_3^{42}\pi_2^1, \qquad (1.8)$$

$$\delta\Gamma_3^{42} = \Gamma_3^{42}(\pi_3^3 - \pi_2^2) + \pi_3^2. \qquad (1.9)$$

Исключая случай совпадения поверхности (A_3) с огибающей поверхностью плоскостей коник C_2, можно осуществить следующую фиксацию репера R:

$$\Gamma_3^{42} = 0, \quad \Gamma_3^{41} \neq 0, \qquad (1.10)$$

$$\Gamma_3^{41} = 1, \quad p = q = 1, \qquad (1.11)$$

Тогда

$$\pi_3^2 = 0, \quad \pi_3^3 - \pi_1^1 = 0. \qquad (1.12)$$

Условие (I.10) геометрически характеризуется тем, что прямая A_1A_3 содержит характеристическую точку плоскости коники C_2. Система пфаффовых уравнений пары $\mathcal{L}$ в построенном каноническом репере приводится к виду:

$$\begin{gathered}\omega_i^j = \Gamma_{i.}^{j\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_3^4 = \omega_1, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3\kappa}\omega_\kappa, \\ \omega_4^i = \Gamma_4^{i\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{i\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2 = a^\kappa\omega_\kappa, \\ \omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_2^2 = b^\kappa\omega_\kappa, \quad \omega_3^3 - \omega_1^1 = c^\kappa\omega_\kappa,\end{gathered} \qquad (1.13)$$

причем

$$c^2 + \Gamma_3^{12} - \Gamma_3^{21} + \Gamma_1^{21} - \Gamma_1^{32} = 0. \qquad (1.14)$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. С парой $\mathcal{L}$ ассоциируются следующие основные геометрические образы.

I. Прямолинейные конгруэнции $(A_1A_2), (A_2A_3), (A_2A_4)$.

1/ Конгруэнция (A_1A_2).

Фокусы $F = sA_1 + tA_2$ луча A_1A_2 и торсы конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнениями:

$$t^2\Gamma_2^{31} + st(\Gamma_1^{31} - \Gamma_2^{32}) - s^2\Gamma_1^{32} = 0, \tag{1.15}$$

$$\omega_1^3\omega_2 - \omega_2^3\omega_1 = 0. \tag{1.16}$$

2/ Конгруэнция (A_2A_3).

Фокусы $F' = \rho A_2 + \tau A_3$ луча A_2A_3 и торсы этой конгруэнции определяются уравнениями:

$$\rho^2\Gamma_2^{11} + \rho\tau(\Gamma_3^{11} - \Gamma_2^{12}) - \tau^2\Gamma_3^{12} = 0, \tag{1.17}$$

$$\omega_2\omega_3^1 - \omega_2^1\omega_1 = 0. \tag{1.18}$$

3/ Конгруэнция (A_2A_4).

Для определения фокусов $F'' = \nu A_2 + \varrho A_4$ луча A_2A_4 и торсов конгруэнции (A_2A_4) имеем уравнения:

$$\nu^2(\Gamma_2^{11}\Gamma_2^{32} - \Gamma_2^{31}\Gamma_2^{12}) + \nu\varrho(\Gamma_2^{11}\Gamma_4^{32} + \Gamma_4^{11}\Gamma_2^{32} - \Gamma_2^{31}\Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{31}\Gamma_2^{12}) + \varrho^2(\Gamma_4^{11}\Gamma_4^{32} - \Gamma_4^{31}\Gamma_4^{12}) = 0, \tag{1.19}$$

$$\omega_2^1\omega_4^3 - \omega_4^1\omega_2^3 = 0. \tag{1.20}$$

II. Ассоциированные конгруэнции квадрик.

Рассмотрим пучок квадрик, которым принадлежат все коники C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2). Уравнение этого пучка можно записать в следующем виде:

$$Q_\lambda \equiv (x^2)^2 - 2x^1x^4 - 2x^1x^3 + 2\lambda x^3x^4 = 0, \tag{1.21}$$

где λ - параметр пучка.

Из пучка квадрик Q_λ выделим одну квадрику, описывающую конгруэнцию, такую, что касательная плоскость к ней в точке A_4 проходит через характеристическую точку $M_0 = A_3 - A_1$ плоскости коники C_2. При этом $\lambda = -1$. Будем рассматривать одновременно с квадрикой Q_{-1} квадрику Q_1, у которой касательная плоскость в точке A_4 проходит через четвертую гармоническую к точке M_0 относительно точек A_3 и A_1.

Уравнение квадрики Q_ε $(\varepsilon^2 = 1)$ в репере R будет иметь вид:

$$Q_\varepsilon \equiv (x^2)^2 - 2x^1x^3 - 2x^1x^4 + 2\varepsilon x^3x^4 = 0. \tag{1.22}$$

Дифференцируя уравнение (1.22) с помощью уравнений стационарности

$$dx^\alpha = -x^\beta\omega_\beta^\alpha + \theta x^\alpha \quad (\mathcal{D}\theta = 0) \; [1], \tag{1.23}$$

получим:

$$dQ_\varepsilon = 2(\theta - \omega_2^2)Q_\varepsilon + F_1\omega_1 + F_2\omega_2,$$

Фокальные точки квадрики Q_ε определяются из системы уравнений

$$Q_\varepsilon = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0 \tag{1.24}$$

где

$$\frac{1}{2}F_1 = x^1x^3(b^1 + 1 - \varepsilon) + x^1x^4(a^1 - \varepsilon\Gamma_1^{31} + \Gamma_4^{31}) + x^3x^4[\Gamma_4^{11} + \Gamma_3^{11} - \varepsilon(a^1 + c^1)] + x^1x^2(\Gamma_2^{31} - \Gamma_1^{21}) +$$

$$+x^2x^3(\Gamma^{11}_2-\Gamma^{21}_3)+x^2x^4(\Gamma^{11}_2-\varepsilon\Gamma^{31}_2-\Gamma^{21}_4)+ \tag{1.25}$$

$$+(x^3)^2(\Gamma^{11}_3-\varepsilon)+(x^4)^2(\Gamma^{11}_4-\varepsilon\Gamma^{31}_4)+(x^1)^2(\Gamma^{31}_1+1);$$

$$\frac{1}{2}F_2=x^1x^3b^2+x^1x^4(a^2-\varepsilon\Gamma^{32}_1+\Gamma^{32}_4)+x^3x^4[\Gamma^{12}_4+\Gamma^{12}_3-$$

$$-\varepsilon(a^2+c^2)]+x^1x^2(\Gamma^{32}_2-\Gamma^{22}_1+1)+x^2x^3(\Gamma^{12}_2-\Gamma^{22}_3-\varepsilon)+$$

$$+x^2x^4(\Gamma^{12}_2-\varepsilon\Gamma^{32}_2-\Gamma^{22}_4)+(x^3)^2\Gamma^{12}_3+(x^4)^2(\Gamma^{12}_4-\varepsilon\Gamma^{32}_4)+$$

$$+(x^1)^2\Gamma^{32}_1 \tag{1.26}$$

При пересечении квадрики Q_ε координатными плоскостями $x^1=0$, $x^2=0$ возникают ассоциированные конгруэнции коник:

$$\Phi_\varepsilon:\quad (x^2)^2+2\varepsilon x^3x^4=0,\quad x^1=0, \tag{1.27}$$

$$\Psi_\varepsilon:\quad x^1x^3+x^1x^4-\varepsilon x^3x^4=0,\quad x^2=0 \tag{1.28}$$

Точка A_2 является полюсом прямой A_3A_4 относительно коники Φ_ε, точки A_1, A_3, A_4 инцидентны конике Ψ_ε.

Т е о р е м а. Если точки A_1, A_3 и A_4 -фокальные точки квадрики Q_ε, то: I/поверхность (A_1) является фокальной поверхностью конгруэнций коник C_1, C_2 и Ψ_ε, 2/точка A_3 будет фокальной точкой коник $C_2, \Phi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon$, 3/геометрическое место точек A_4 является фокальной поверхностью конгруэнций коник C_1, Φ_ε и Ψ_ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Из (I.24) следует, что точка A_1 будет фокальной точкой квадрики Q_ε, если выполняются условия

$$\Gamma^{31}_1+1=0,\quad \Gamma^{32}_1=0 \tag{1.29}$$

Поверхность (A_1) является фокальной поверхностью конгруэнций коник C_1 и C_2, если

$$\Gamma^{32}_1=0. \tag{1.30}$$

Для того, чтобы точка A_1 была фокальной точкой коники Ψ_ε, должно выполняться равенство:

$$\Gamma^{21}_1\Gamma^{32}_1-\Gamma^{22}_1(\Gamma^{31}_1+1)=0. \tag{1.31}$$

При условиях (I.29) равенства (I.30) и (I.31) тождественно удовлетворяются, откуда непосредственно следует первое утверждение теоремы.

Справедливость утверждений 2/ и 3/ устанавливается аналогично.

III. Ассоциированная конгруэнция конусов.

Для того, чтобы выделить из пучка Q_λ еще одну квадрику, которая описывает конгруэнцию, потребуем, чтобы точки A_3 и A_4 были полярно сопряжены относительно этой квадрики. Тогда $\lambda=0$. Уравнение квадрики Q_0 запишется в виде:

$$Q_0\equiv(x^2)^2-2x^1x^4-2x^1x^3=0 \tag{1.32}$$

Квадрика Q_0 является конусом с вершиной в точке $E^*=A_3-A_4$. Фокальные поверхности конгруэнции конусов Q_0 определяются системой уравнений

$$Q_0=0,\quad f_1=0,\quad f_2=0, \tag{1.33}$$

где

$$f_1=x^2x^3(\Gamma^{11}_2-\Gamma^{21}_3)+x^2x^4(\Gamma^{11}_2-\Gamma^{21}_4)+(x^1)^2(\Gamma^{31}_1+1)+$$

$$+x^1x^3(1+b^1)+x^1x^4(\Gamma^{31}_4+a^1)+x^3x^4(\Gamma^{11}_3+\Gamma^{11}_4)+$$

$$+(x^3)^2\Gamma^{11}_3+(x^4)^2\Gamma^{11}_4+x^1x^2(\Gamma^{31}_2-\Gamma^{21}_1),$$

$$f_2=x^2x^3(\Gamma^{12}_2-\Gamma^{22}_3)+x^2x^4(\Gamma^{12}_2-\Gamma^{22}_4)+(x^1)^2\Gamma^{32}_1+$$

$$+x^1x^3b^2+x^1x^4(\Gamma^{32}_4+a^2)+x^3x^4(\Gamma^{12}_3+\Gamma^{12}_4)+$$

$$+(x^3)^2\Gamma^{12}_3+(x^4)^2\Gamma^{12}_4+x^1x^2(1-\Gamma^{22}_1+\Gamma^{32}_2).$$

§2. Пары $\mathcal{L}^Q$ конгруэнций коник, принадлежащих одной квадрике.

Потребуем, чтобы все коники C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) пары $\mathcal{L}$ принадлежали некоторой инвариантной квадрике Q, уравнение которой в общем случае может быть записано в виде:

$$Q \equiv (x^2)^2 - 2x^1x^3 - 2x^1x^4 + 2a x^3x^4 = 0 \qquad (2.1)$$

Пары $\mathcal{L}$, у которых все коники C_1, C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) инцидентны инвариантной квадрике Q, назовем парами $\mathcal{L}^Q$.

Из условия

$$dQ = 2(\Theta - \omega_2^2)Q \qquad (2.2)$$

инвариантности квадрики Q следует, что на главные формы пары $\mathcal{L}$ и на функцию a накладываются следующие связи:

$$\omega_1^3 + \omega_1 = 0, \quad \omega_3^1 - a\omega_3^4 = 0, \quad \omega_4^1 - a\omega_4^3 = 0,$$
$$\omega_2 + \omega_2^3 - \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 - \omega_3^2 - a\omega_2 = 0, \qquad (2.3)$$
$$2\omega_2^2 - \omega_4^4 - \omega_1^1 + a\omega_1^3 - \omega_4^3 = 0, \quad \omega_2^1 - \omega_4^2 - a\omega_2^3 = 0,$$
$$2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_3^4 + a\omega_1 = 0,$$
$$da + a(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^1 + \omega_3^1 = 0.$$

Таким образом, пары $\mathcal{L}^Q$ будут удовлетворять следующей системе пфаффовых уравнений

$$\omega_1^3 = -\omega_1, \quad \omega_3^1 = a\omega_3^4, \quad \omega_4^1 = a\omega_4^3, \quad \omega_1^2 = \omega_2 + \omega_2^3,$$
$$\omega_3^2 = \omega_2^1 - a\omega_2, \quad \omega_4^2 = \omega_2^1 - a\omega_2^3, \quad \omega_2^1 = \Gamma_2^{1k}\omega_k, \qquad (2.4)$$

$$\omega_2^3 = \Gamma_2^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^4 = \omega_1, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k,$$
$$2\omega_2^2 - \omega_4^4 - \omega_1^1 = \omega_4^3 + a\omega_1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 = \omega_3^4 - a\omega_1,$$
$$\omega_3^3 - \omega_1^1 = c^k\omega_k, \quad da + a(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^1 + \omega_3^1 = 0,$$

причем

$$c^2 + \Gamma_2^{31} - \Gamma_2^{11} = 0 \qquad (2.5)$$

Осуществляя замыкание и продолжение системы уравнений (2.4), (2.5), убеждаемся, что пары $\mathcal{L}^Q$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Отметим, что система уравнений (2.3) - вполне интегрируемая.

Т е о р е м а 2. Пары $\mathcal{L}^Q$ обладают следующими свойствами: I/ плоскость $A_1A_3A_4$ является полярой точки A_2 относительно квадрики Q; 2/ точки A_1, A_3, A_4 являются фокусами лучей A_1A_2, A_2A_3, A_2A_4 прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2), (A_2A_3)$ и (A_2A_4) соответственно; 3/ одно семейство торсов прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2), (A_2A_3)$ соответствует координатным линиям $\omega_1 = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/ Поляра точки A_2 относительно квадрики Q определяется уравнением

$$x^2 = 0.$$

2/ фокусы лучей A_1A_2, A_2A_3 и A_2A_4 прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_2A_3) и (A_2A_4) определяются формулами:

$$t\,[t\,\Gamma_2^{31} - s\,(1 + \Gamma_2^{32})] = 0, \qquad (2.6)$$
$$p\,[p\,\Gamma_2^{11} + r\,(a - \Gamma_2^{12})] = 0. \qquad (2.7)$$

$$\nu\{\gamma(\Gamma_2^{11}\Gamma_2^{32}-\Gamma_2^{31}\Gamma_2^{12})+\varrho[\Gamma_4^{31}(a\Gamma_2^{32}-\Gamma_2^{12})+ + \Gamma_4^{32}(\Gamma_2^{11}-a\Gamma_2^{31})]\}=0. \qquad (2.8)$$

Из (I.I5),(2.6);(I.I7),(2.7);(I.I9) и (2.8) непосредственно следует, что точки A_1, A_3, A_4 являются соответственно фокусами лучей A_1A_2, A_2A_3, A_2A_4 прямолинейных конгруэнций.

3/Из уравнений (I.I6),(I.I8) и (2.4) находим, что торсы указанных конгруэнций определяются формулами:

$$\omega_1\omega_1^2=0,$$

$$\omega_1(a\omega_2-\omega_2^1)=0,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Так как все коники конгруэнций (C_1) и (C_2) принадлежат одной квадрике Q, то любая точка коник C_1 и C_2 является фокальной [2].

Список литературы.

I. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Труды Моск. матем. о-ва", I953, т.2, с.273-383 (М., ГИТТЛ).

2. Малаховский В.С. Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными семействами.-"Труды Томского ун-та," I960, т.I60, с.5-I4.

Ф.А. Липатова

ВЫРОЖДЕННАЯ КОНГРУЭНЦИЯ ПАР ФИГУР, ОБРАЗОВАННЫХ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ, ИНЦИДЕНТНОЙ ЭЛЛИПСУ

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуется класс вырожденных конгруэнций T пар фигур, образованных эллипсом C и точкой M, инцидентной эллипсу C, где точка M описывает линию.

Отнесем конгруэнцию T к реперу $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$, где A – центр эллипса, вектор $\bar e_1=\overline{AM}$, вектор $\bar e_2=\overline{AA_2}$ сопряжен вектору $\bar e_1$ относительно эллипса C, точка A_2 инцидентна этому эллипсу, вектор $\bar e_3$ коллинеарен касательной к линии, описываемой точкой M в точке M.

Из рассмотрения исключается случай, при котором касательная коллинеарна плоскости $(A,\bar e_1,\bar e_2)$.

Эллипс C относительно репера R определяется уравнениями

$$(x^1)^2+(x_2^2)^2=1, \qquad (1.1)$$
$$x^3=0.$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции T имеет вид :

$$\omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \qquad \omega_1^1 = -\omega^1,$$

$$\omega_1^2 = -\omega^2, \qquad \omega_1^3 = n\omega^1 + m\omega^2,$$

$$\omega_2^1 = p\omega^1 + k\omega^2, \qquad \omega_2^2 = s\omega^1 + t\omega^2, \tag{1.2}$$

$$\omega_2^3 = q\omega^1 + r\omega^2, \qquad \omega_3^1 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2,$$

$$\omega_3^2 = n_1\omega^1 + n_2\omega^2,$$

где ω^i, ω_i^j $(i,j,k = 1,2,3)$ компоненты деривационных формул репера R ,удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \tag{1.3}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0.$$

Анализируя систему (1.2), убеждаемся,что вырожденная конгруэнция T существует и определяется с произволом пяти функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е.Конгруэнция T называется конгруэнцией T^1 ,если выполняются условия

$$a = b = m = k = q = r = m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 0. \tag{1.4}$$

Конгруэнция T^1 определяется системой пфаффовых уравнений

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_1^1 = -\omega^1, \quad \omega_1^3 = n\omega^1, \quad \omega_1^2 = -\omega^2,$$

$$\omega_2^1 = p\omega^1, \quad \omega_2^2 = s\omega^1 + t\omega^2, \quad \omega_2^3 = 0, \tag{1.5}$$

$$\omega_3^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0.$$

Анализируя систему (1.5), заключаем,что конгруэнция T^1 существует и определяется с произволом одной функции двух переменных.

Т е о р е м а.Точки пересечения диаметров AM и AA_2 с эллипсом C конгруэнции T^1 являются его фокальными точками,причем точка $M(1,0)$- сдвоенный фокус.Шестой фокус находится в точке

$$F\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, -\frac{2t}{1+t}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции (C) определяются из системы уравнений

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0,$$

$$\omega_1^1(x^1)^2 + \omega_2^2(x^2)^2 + (\omega_2^1 + \omega_1^2)x^1x^2 + x^1\omega^1 + x^2\omega^2 = 0, \tag{1.6}$$

$$x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + \omega^3 = 0.$$

Из системы (I.6),учитывая уравнения (I.5),получаем уравнения для определения фокальных точек эллипса C конгруэнции:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1\,,\quad x^3=0\,,$$
$$x^1_1 x^2\,(t x^2-x^1+1)=0\,. \tag{1.7}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнция T^1 называется конгруэнцией T_1^1, если выполняются условия

$$\rho=t=0\,, \tag{2.1}$$
$$s=1\,. \tag{2.2}$$

Конгруэнция T_1^1 определяется системой уравнений:

$$\begin{gathered}\omega^3=0\,,\quad \omega_1^1=-\omega^1,\quad \omega_1^2=-\omega^2,\\ \omega_1^3=n\omega^1,\quad \omega_2^1=0,\quad \omega_2^2=\omega^1,\\ \omega_2^3=0\,,\ \omega_3^1=0\,,\ \omega_3^2=0\,,\ \omega_3^3=0\end{gathered} \tag{2.3}$$

Анализируя систему уравнений (2.3), убеждаемся, что конгруэнция T_1^1 существует с произволом одной функции одного аргумента.

Т е о р е м а 1. Точки пересечения диаметров AM и AA_2 с эллипсом C конгруэнции T_1^1 являются его фокальными точками, причем точка $M(1,0)$ является строенным фокусом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из системы (1.6), учитывая уравнения (2.3), находим уравнения для определения координат фокальных точек эллипса C конгруэнции T_1^1:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1\,,\quad x^3=0\,,$$
$$x^1x^2\,(x^1-1)=0\,, \tag{2.4}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2. Поверхность (A) конгруэнции T_1^1 является торсом; вдоль направлений $\omega^1=0$ коники конгруэнции (C) инцидентны одной плоскости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий поверхности (A) имеет вид:

$$n(\omega^1)^2=0\,.$$

Так как при $\omega^1=0$, $dx^3\equiv 0$, то теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Вдоль координатной линии $\omega^2=0$ плоскость $x^2=0$ стационарна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$(dx^2)_{\omega^2=0}=-x^2\omega^1.$$

Следовательно, вдоль линии $\omega^2=0$ плоскость $x^2=0$ стационарна.

Т е о р е м а 4. Линия, описываемая точкой M, является прямой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу системы (2.3) имеем, что $d\bar{e}_3=0$, т.е. $\bar{e}_3$ – постоянный вектор.

Т е о р е м а 5. Касательные плоскости к поверхностям (A) и (A_3) соответственно в точках A и A_3 параллельны. Точки A и M являются фокусами прямолинейной конгруэнции $\{A,\bar{e}_1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Касательная плоскость к поверхности (A) в точке A определяется точкой A и векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Касательная плоскость к поверхности

(A_3) в точке A_3 определяется точкой A_3 и векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Фокусами прямолинейной конгруэнции $\{A,\bar{e}_1\}$ являются точки

$$\bar{F}_1=\bar{A}\,,\quad \bar{F}_2=\bar{A}+\bar{e}_1\,.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
1975 вып.6

В.С.М а л а х о в с к и й

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПРИЗНАКАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В работе, носящей методический характер, дано приложение метода внешних форм и подвижного репера к установлению характеристических признаков некоторых известных классов поверхностей.

§I. Цилиндрические поверхности R.

О п р е д е л е н и е I. Поверхностью R называется поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E_3, все нормали которой пересекают прямую $\ell\in E_3$. Прямая ℓ называется осью поверхности R.

Поверхность R называется цилиндрической поверхностью R, если её касательная плоскость в каждой точке параллельна оси ℓ.

Т е о р е м а I.I. Цилиндрические поверхности R являются прямыми круговыми цилиндрами с осью ℓ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем поверхность R к каноническому ортонормированному реперу $\{A,\bar{e}_i\}$, $(i,j,\kappa=1,2,3)$, где A -текущая точка поверхности, орт $\bar{e}_1$ параллелен оси ℓ, а орт $\bar{e}_3$ направлен по нормали n к поверхности в точке A. Обозначим буквой N точку пересечения нормали n с осью ℓ и буквой a -ненулевую координату точки N относительно репера $\{A,\bar{e}_i\}$:

$$\bar{N}=\bar{A}+a\bar{e}_3\,,\qquad a\neq 0\,. \tag{1.1}$$

При перемещении точки A по поверхности орт $\bar{e}_1$ не изменяется, а точка N перемещается по оси ℓ. Имеем

$$\omega^3=0,\quad \omega_1^2=0,\quad \omega_1^3=0,\quad \omega^2=a\omega_2^3,\quad da=0\,, \tag{1.2}$$

где ω^i, ω_i^k -компоненты деривационных формул

$$d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i\,,\qquad d\bar{e}_i=\omega_i^k\bar{e}_k \tag{1.3}$$

репера $\{A,\,\bar{e}_i\}$, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i\,,\qquad \mathcal{D}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j \tag{1.4}$$

и соотношениям

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0\,. \tag{1.5}$$

Система (1.2) вполне интегрируема и определяет цилиндрические поверхности R с произволом пяти постоянных.

Назовем координатные линии $\omega^2=0$ и $\omega^1=0$ соответственно линиями F_1 и F_2. Из определения цилиндрической поверхности R следует, что линии F_1 - прямые, параллельные оси ℓ. Рассмотрим линии F_2.

Обозначим

$$ds=\omega^2\big|_{\omega^1=0}\,. \tag{1.6}$$

Так как вдоль линии F_2

$$|d\bar{A}|=|ds|\,, \tag{1.7}$$

то параметр s – длина дуги линии F_2, отсчитываемой от её некоторой фиксированной точки A_0.

Перемещение репера $\{A,\bar{e}_i\}$ вдоль линий F_2 характеризуется следующими деривационными формулами:

$$\frac{d\bar{A}}{ds}=\bar{e}_2\,,\quad \frac{d\bar{e}_1}{ds}=0,\quad \frac{d\bar{e}_2}{ds}=\frac{1}{a}\bar{e}_3\,,\quad \frac{d\bar{e}_3}{ds}=-\frac{1}{a}\bar{e}_2\,. \tag{1.8}$$

Сравнивая формулы (1.8) с деривационными формулами репера Френе линии F_2

$$\frac{d\bar{A}}{ds}=\bar{t},\quad \frac{d\bar{t}}{ds}=\varrho\bar{n},\quad \frac{d\bar{n}}{ds}=-\varrho\bar{t}+\tau\bar{b},\quad \frac{d\bar{b}}{ds}=-\tau\bar{n}, \tag{1.9}$$

где $\bar{t},\bar{n},\bar{b}$ – орты касательной, главной нормали и бинормали линии F_2, ϱ -кривизна, а τ – кручение линии F_2 в точке A, убеждаемся, что

$$\bar{t}=\bar{e}_2\,,\quad \bar{n}=\bar{e}_3\,,\quad \bar{b}=\bar{e}_1\,, \tag{1.10}$$

$$\varrho=\frac{1}{a}=Const,\quad \tau=0. \tag{1.11}$$

Следовательно, линии F_2 – окружности радиуса a с центрами на оси ℓ и плоскостями, перпендикулярными оси ℓ. Значит, цилиндрические поверхности R являются прямыми круговыми цилиндрами. Теорема доказана.

Произвол решения системы дифференциальных уравнений (1.2) интерпретируется следующим образом: четыре константы определяют положение оси ℓ прямого кругового цилиндра в пространстве E_3, а пятая константа – радиус цилиндра.

§2. Теорема существования нецилиндрических поверхностей R

Т е о р е м а 2.1. Нецилиндрические поверхности R существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента и шести произвольных постоянных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим буквами N и T точки пересечения с осью ℓ соответственно нормали и касательной плоскости нецилиндрической поверхности R в точке A. Отнесем поверхность к каноническому реперу ортонормированному $\{A, \bar{e}_i\}$, где орт $\bar{e}_1$ направлен по прямой AT, а орт $\bar{e}_3$ – по нормали AN. Пусть a и b ненулевые координаты соответственно точек N и T относительно репера $\{A, \bar{e}_i\}$:

$$\bar{N} = \bar{A} + a\bar{e}_3, \qquad \bar{T} = \bar{A} + b\bar{e}_1, \tag{2.1}$$

$$a \neq 0, \quad b \neq 0. \tag{2.2}$$

Направление оси ℓ нецилиндрической поверхности R определяется вектором

$$\overline{TN} = a\bar{e}_3 - b\bar{e}_1. \tag{2.3}$$

Имеем

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \lambda_{11}\omega^1 + \lambda_{12}\omega^2, \quad \omega_2^3 = \lambda_{12}\omega^1 + \lambda_{22}\omega^2, \tag{2.4}$$

$$d\bar{N} = \{(1 - a\lambda_{11})\omega^1 - a\lambda_{12}\omega^2\}\bar{e}_1 + \{(1 - a\lambda_{22})\omega^2 - a\lambda_{12}\omega^1\}\bar{e}_2 + da\,\bar{e}_3,$$
$$d\bar{T} = (\omega^1 + db)\bar{e}_1 + (\omega^2 + b\omega_1^2)\bar{e}_2 + b(\lambda_{11}\omega^1 + \lambda_{12}\omega^2)\bar{e}_3. \tag{2.5}$$

При перемещении точки A по поверхности R точки N и T перемещаются по оси ℓ, следовательно, векторы $d\bar{N}$ и $d\bar{T}$ должны быть коллинеарны вектору (2.3). Обозначим

$$\rho_1 = \lambda_{11}, \quad \rho_2 = \frac{1}{a}, \quad K = \rho_1 \cdot \rho_2. \tag{2.6}$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений нецилиндрической поверхности R приводится к виду

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \rho_1\omega^1, \quad \omega_2^3 = \rho_2\omega^2, \quad b\omega_1^2 + \omega^2 = 0, \tag{2.7}$$

$$b\,d\rho_2 = (\rho_2 - \rho_1)\omega^1, \quad db = -(1 + b^2K)\omega^1, \tag{2.8}$$

$$d\rho_1 \wedge \omega^1 = 0. \tag{2.9}$$

Имеем $s_0 = 6$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $Q = N = 1$. Система в инволюции и определяет нецилиндрические поверхности R с произволом одной функции одного аргумента и шести произвольных постоянных. Теорема доказана.

§3. Геометрические свойства поверхностей R

В дальнейшем мы будем рассматривать нецилиндрические поверхности R, опуская слово "нецилиндрический" в формулировках теорем.

Т е о р е м а 3.1. Координатная сеть линий $\omega^1\omega^2 = 0$ на поверхности R есть сеть линий кривизны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сравнивая уравнения (2.7) с уравнениями Пфаффа поверхности, отнесенной к её реперу Френе (орты $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ такого репера направлены по касательным к линиям кривизны поверхности), убеждаемся, что координатные линии $\omega^2 = 0$ (линии F_1) и $\omega^1 = 0$ (линии F_2) являются линиями кривизны поверхности R, а инварианты

ρ_1, ρ_2 и K – её главными кривизнами и полной кривизной.

Т е о р е м а 3.2. Поверхность R с постоянной главной кривизной ρ_2 (нормальной кривизной направления, ортогонального касательной AT к линии F_1) является сферой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (2.8) следует, что при $d\rho_2=0$ главные кривизны ρ_1 и ρ_2 совпадают.

Рассмотрим линии кривизны F_1 и F_2 поверхности R. Обозначим

$$ds_\alpha = \omega^\alpha \Big|_{\omega^\beta=0}, \quad (\alpha,\beta=1,2;\ \alpha\neq\beta). \tag{3.1}$$

Пусть $\bar{t}_\alpha, \bar{n}_\alpha, \bar{b}_\alpha$ – орты касательной, главной нормали и бинормали линии F_α, $\rho^{(\alpha)}$ – её кривизны, $\tau^{(\alpha)}$ – кручение в точке A $(\alpha=1,2)$. Используя уравнения (2.7), находим, что перемещения репера $\{A, \bar{e}_i\}$ вдоль линий F_1 и F_2 характеризуются соответственно деривационными формулами

$$\frac{d\bar{A}}{ds_1}=\bar{e}_1, \quad \frac{d\bar{e}_1}{ds_1}=\rho_1\bar{e}_3, \quad \frac{d\bar{e}_2}{ds_1}=0, \quad \frac{d\bar{e}_3}{ds_1}=-\rho_1\bar{e}_1, \tag{3.2}$$

$$\frac{d\bar{A}}{ds_2}=\bar{e}_2, \quad \frac{de_1}{ds_2}=-\frac{1}{b}\bar{e}_2, \quad \frac{d\bar{e}_2}{ds_2}=\frac{1}{b}\bar{e}_1+\rho_2\bar{e}_3, \quad \frac{d\bar{e}_3}{ds_2}=-\rho_2\bar{e}_2, \tag{3.3}$$

причем из (2.8) следует:

$$\frac{d\rho_2}{ds_1}=\frac{1}{b}(\rho_2-\rho_1), \quad \frac{db}{ds_1}=-(1+b^2K), \tag{3.4}$$

$$\frac{d\rho_2}{ds_2}=0, \quad \frac{db}{ds_2}=0. \tag{3.5}$$

Деривационные формулы репера Френе кривой F_α $(\alpha=1,2)$ имеют вид

$$\frac{d\bar{A}}{ds_\alpha}=\bar{t}_\alpha, \quad \frac{d\bar{t}_\alpha}{ds_\alpha}=\rho^{(\alpha)}\bar{n}_\alpha, \quad \frac{d\bar{n}_\alpha}{ds_\alpha}=-\rho^{(\alpha)}\bar{t}_\alpha+\tau^{(\alpha)}\bar{b}_\alpha, \quad \frac{d\bar{b}_\alpha}{ds_\alpha}=-\tau^{(\alpha)}\bar{n}_\alpha \tag{3.6}$$

(по α не суммировать!). Сравнивая формулы (3.6) с формулами (3.2), (3.3), находим

$$\rho^{(1)}=\rho_1, \quad \tau^{(1)}=0, \tag{3.7}$$

$$b\,\rho^{(2)}=\sqrt{1+(b\rho_2)^2}, \quad \tau^{(2)}=0, \tag{3.8}$$

$$\bar{t}_1=\bar{e}_1, \quad \bar{n}_1=\bar{e}_3, \quad \bar{b}_1=-\bar{e}_2, \tag{3.9}$$

$$\bar{t}_2=\bar{e}_2, \quad \bar{n}_2=\frac{1}{\rho^{(2)}}(\bar{e}_1+b\rho_2\bar{e}_3), \quad \bar{b}_2=\frac{1}{\rho^{(2)}}(b\rho_2\bar{e}_1-\bar{e}_3). \tag{3.10}$$

Т е о р е м а 3.3. Поверхность R является поверхностью вращения, образованной вращением плоской линии F_1 вокруг оси ℓ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (3.7), (3.8), (2.3) следует, что линии F_α – плоские, причем плоскость линии F_1 содержит ось ℓ поверхности R. Используя (3.8), (3.5), находим

$$\frac{d\rho^{(2)}}{ds^{(2)}}=0. \tag{3.11}$$

Следовательно, линия F_2 – окружность радиуса $\rho^{(2)}$ с центром в точке

$$\bar{C}=\bar{A}+(\bar{e}_1+b\rho_2\bar{e}_3)\frac{1}{\rho^{(2)}}, \tag{3.12}$$

плоскость которой ортогональна вектору

$$b\rho_2\bar{e}_1-\bar{e}_3=\rho^{(2)}\bar{b}_2. \tag{3.13}$$

Точки

$$\bar{N}=\bar{A}+\frac{1}{\rho_2}\bar{e}_3, \quad \bar{T}=\bar{A}+b\bar{e}_1, \quad \bar{C}=\bar{A}+(\bar{e}_1+b\rho_2\bar{e}_3)\frac{1}{\rho^{(2)}} \tag{3.14}$$

принадлежат одной прямой, значит центр C окружности F_2 лежит на оси ℓ поверхности R. Из коллинеарности векторов (2.3) и (3.13) следует, что плоскость окружности F_2 ортогональна оси ℓ. Таким образом, поверхность R с осью ℓ образована вращением плоской линии F_1 вокруг прямой ℓ. Линии F_1 являются меридианами поверхности R, линии F_2 - параллелями.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема позволяет охарактеризовать произвол существования поверхностей R (см. теорему 2.1). Четыре константы определяют положение оси ℓ в пространстве, пятая - положение плоскости α, проходящей через ось ℓ, одна функция одного аргумента задает кривую F_1 в плоскости α, наконец, шестая константа характеризует сдвиг пространства E_3 вдоль оси ℓ.

Т е о р е м а 3.4. Поверхность $S \subset E_3$ тогда и только тогда является поверхностью вращения, когда все её нормали пересекают фиксированную прямую $\ell \in E_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Пусть S - поверхность вращения с осью ℓ. Из дифференциальной геометрии известно [1, с. 43], что все нормали её пересекают прямую ℓ. Следовательно, всякая поверхность вращения является поверхностью R.

2/ Пусть все нормали поверхности S пересекают фиксированную прямую $\ell \in E_3$, т.е. пусть S - поверхность R (цилиндрическая или нецилиндрическая) с осью ℓ. Из теорем 1.1 и 3.3 непосредственно следует, что S - поверхность вращения. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Свойство поверхности быть поверхностью R является характеристическим признаком поверхности вращения.

Рассмотрим случай

$$b = \mathrm{const}. \tag{3.15}$$

Так как

$$\overline{AT} = b\bar{e}_1, \tag{3.16}$$

то линия F_1 при условии (3.15) является трактрисой с осью ℓ ([2], стр. 101), а поверхность R - псевдосферой ([2], стр. 102). Из формул (2.8), (3.15) непосредственно получаем известную формулу полной кривизны псевдосферы:

$$K = -\frac{1}{b^2}.$$

§4. Прямой геликоид

Т е о р е м а 4.1. (Каталана). Единственная минимальная линейчатая поверхность (отличная от плоскости) - прямой геликоид (линейчатая поверхность, горловая линия которой - прямая линия).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем линейчатую поверхность S к каноническому ортонормированному реперу $\{A, \bar{e}_i\}$, где орт $\bar{e}_1$ направлен по прямолинейной образующей, а орт $\bar{e}_3$ - по нормали к поверхности. Имеем:

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \lambda_{12}^3\omega^2, \quad \omega_2^3 = \lambda_{12}^3\omega^1 + \lambda_{22}^3\omega^2, \quad \omega_1^2 = h_2\omega^2 \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &d\lambda^3_{12}\wedge\omega^2 + 2h_2\lambda^3_{12}\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,\\ &d\lambda^3_{12}\wedge\omega^1 + d\lambda^3_{22}\wedge\omega^2 + h_2\lambda^3_{22}\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,\\ &dh_2\wedge\omega^2 + \{(h_2)^2 - (\lambda^3_{12})^2\}\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Так как поверхность S —минимальная,то

$$H = \frac{1}{2}(\lambda^3_{11} + \lambda^3_{22}) = \frac{1}{2}\lambda^3_{22} = 0, \quad \lambda^3_{12} \neq 0. \tag{4.3}$$

Уравнения (4.2) приводятся к виду:

$$d\lambda^3_{12}\wedge\omega^2 + 2h_2\lambda^3_{12}\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \quad d\lambda^3_{12}\wedge\omega^1 = 0, \tag{4.4}$$

$$dh_2\wedge\omega^2 + \{(h_2)^2 - (\lambda^3_{12})^2\}\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0. \tag{4.5}$$

Система (4.I.),(4.2),(4.5) не в инволюции.Осуществляя частичное продолжение,из (4.4) находим:

$$d\lambda^3_{12} = -2h_2\lambda^3_{12}\,\omega^1. \tag{4.6}$$

Замыкая (4.6),получим:

$$dh_2\wedge\omega^1 = 0. \tag{4.7}$$

Продолженная система тоже не в инволюции.Из (4.5),(4.7) находим:

$$dh_2 = \{(\lambda^3_{12})^2 - (h_2)^2\}\,\omega^1.$$

Система

$$\begin{gathered}\omega^3 = 0, \quad \omega^3_1 = \lambda^3_{12}\,\omega^2, \quad \omega^3_2 = \lambda^3_{12}\,\omega^1, \quad \omega^2_1 = h_2\,\omega^2,\\ d\lambda^3_{12} = -2h_2\lambda^3_{12}\,\omega^1, \quad dh_2 = \{(\lambda^3_{12})^2 - (h_2)^2\}\,\omega^1.\end{gathered} \tag{4.8}$$

вполне интегрируема и определяет минимальные линейчатые поверхности с произволом шести постоянных.

Рассмотрим горловую линию (M) минимальной линейчатой поверхности.Имеем:

$$\bar{M} = \bar{A} - \frac{h_2}{(h_2)^2 + (\lambda^3_{12})^2}\,\bar{e}_1 \tag{4.9}$$

Обозначим:

$$\bar{m} = \lambda^3_{12}\,\bar{e}_2 - h_2\,\bar{e}_3 \tag{4.10}$$

Так как

$$d\bar{M} = \frac{\lambda^3_{12}}{(\lambda^3_{12})^2 + (h_2)^2}\,\bar{m}, \qquad d\bar{m} = -h_2\,\bar{m}, \tag{4.11}$$

то горловая линия (4.9) является прямой линией,которую пересекают ортогонально все прямолинейные образующие поверхности S .Следовательно,поверхность S -прямой геликоид.Теорема доказана.

Список литературы

I.Фиников С.П.Теория поверхностей.ОНТИ ГТТИ,М.-Л,I934.

2.Каган В.Ф.Основы теории поверхностей.ч.2,М-Л,ГИТТЛ, ОГИЗ,I948г.

3.Погорелов А.В.Дифференциальная геометрия,I972г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6. 1975

В. В. М а х о р к и н

МНОГООБРАЗИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ СВОЙСТВОМ АССОЦИИРОВАННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В работе рассматриваются „$n-1$"-мерные многообразия гиперквадрик n-мерного проективного пространства, гиперквадрики которых являются соприкасающимися гиперквадриками некоторой гиперповерхности. Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы $(n-1)$"- мерное многообразие гиперквадрик n-мерного проективного пространства обладало этим свойством.

Фокальные точки ранга два

Отнесем проективное пространство P_n к реперу $\{A_\alpha\}$ с деривационными формулами:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, n), \tag{1}$$

где ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям проективной группы

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и условиям эквипроективности

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_n^n = 0. \tag{3}$$

Уравнение гиперквадрики Q_{n-1} имеет в репере $\{A_\alpha\}$ следующий вид:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \tag{4}$$

причем

$$\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0. \tag{5}$$

Система пфаффовых уравнений многообразия $K(n-1, n)$ [2] имеет вид:

$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i} \tau^i \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n-1), \tag{6}$$

где

$$\theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma - a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma, \tag{7}$$

а τ^i инвариантные формы бесконечной параметрической группы [1].

Фокальное многообразие ранга один [2] гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1, n)$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} &a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \\ &\Lambda_{\alpha\beta i} x^\alpha x^\beta = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

и состоит в общем случае из 2^n точек. Фокальное многообразие ранга два гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1, n)$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} &a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \\ &\Lambda_{\alpha\beta i} x^\alpha x^\beta = 0, \\ &\Lambda_{\alpha\beta ij} x^\alpha x^\beta = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$d\Lambda_{\alpha\beta i}-\Lambda_{\gamma\beta i}\,\omega_\alpha^\gamma-\Lambda_{\alpha\gamma i}\,\omega_\beta^\gamma-\Lambda_{\alpha\beta k}\,\tau_i^k=\Lambda_{\alpha\beta ij}\,\tau^j. \quad (10)$$

Фокальное многообразие ранга два гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1,n)$ в общем случае является пустым множеством, так как в системе уравнений (9) больше „n" уравнений.

Для некоторых типов многообразий $K(n-1,n)$ система уравнений (9) может однако определять непустое многообразие. Таковыми, например, как будет показано далее, являются многообразия квадрик Ли некоторой поверхности в P_3.

Рассмотрим случай, когда фокальное многообразие ранга два является подмногообразием фокального многообразия ранга один, состоящего из 2^n точек.

Т е о р е м а. Для того чтобы некоторая фокальная точка ранга один гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1,n)$ описывала гиперповерхность, соприкасающуюся гиперквадрикам многообразия $K(n-1,n)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка принадлежала фокальному многообразию ранга два гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1,n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность.

Осуществим следующую канонизацию репера $\{A_\alpha\}$:

$$a_{on}=-1, \quad a_{oo}=\Lambda_{ooi}=\Lambda_{ooij}=0, \quad (11)$$

$$rang\,(\Lambda_{ooijk})=n-1, \quad rang\,(\Lambda_{oijk})=n-1. \quad (12)$$

Канонизация (11), (12), во-первых, означает [2], что точка A_o репера $\{A_\alpha\}$ помещена в фокальную точку ранга один гиперквадрики Q_{n-1} и описывает гиперповерхность (A_o), а, во-вторых, из системы уравнений (6), (10) следует:

$$\omega_i^n=a_{ij}\,\omega^j, \quad (13)$$

что означает соприкосновение гиперквадрики Q_{n-1} гиперповерхности (A_o).

Необходимость.

Если гиперквадрика Q_{n-1} многообразия $K(n-1,n)$ соприкасается поверхности (A_o), то имеет место

$$\omega_i^n=a_{ij}\,\omega^j,$$

а также соотношения (11), (12), которые означают, что точка A_o принадлежит фокальному многообразию ранга два.

Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Нульмерные компоненты фокального многообразия ранга два гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1,n)$ называются фокальными точками ранга два.

Из определения следует, что фокальная точка ранга два является фокальной точкой ранга один.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия многообразий поверхностей. – В кн.: Итоги науки. Геометрия 1963. 1965, с.5–64. (М. ВИНИТИ АН СССР).

2. М а х о р к и н В.В. Некотрые типы многообразий гиперквадрик. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 3. Калининград, 1973, с.50–59.

В.М.Овчинников

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ ПОЛУКВАДРАТИЧНЫХ ПАР ФИГУР

В статье [1] частично исследовались геометрические образы, ассоциированные с полуквадратичным многообразием $V_{k,n}$ пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 – квадратичный элемент, а F_2 не инцидентная ему точка. В данной работе исследуются дополнительные геометрические образы в полярно канонизированном репере [2].

§1. Система дифференциальных уравнений многообразия полуквадратичных пар фигур

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим k-мерное многообразие $V_{k,n}$ полуквадратичных пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 – квадратичный элемент, а F_2 – не инцидентная ему точка. Расположим $(n-k)$ вершин A_a $(a, b = k+1, \dots, n)$ репера $\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$ в характеристическом [2] подпространстве, а k вершин $A_{\hat a}$ $(\hat a, \hat b = 1, 2, \dots, k)$ в его полярном относительно квадратичного элемента подпространстве. Вершину A_{n+1} совместим с точкой F_2. Формы Пфаффа ω_J^K удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K, \quad (J, K = 1, 2, \dots, n+1).$$

Пространство главных параметров обозначим через $\mathcal{M}_k$ [1]. Вводим на $\mathcal{M}_k$ систему форм $\theta^{\hat a}$, которая является вполне интегрируемой и удовлетворяет структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\theta^{\hat a} = \theta^{\hat b} \wedge \theta^{\hat a}_{\hat b}.$$

Выберем формы $\theta^{\hat a}$ за базисные. Система дифференциальных уравнений k-мерного многообразия полуквадратичных пар фигур $V_{k,n}$ примет вид :

$$\Theta_{\hat a \hat b} = P_{\hat a \hat b, \hat c}\,\theta^{\hat c}, \qquad \Theta_{ab} = P_{ab, \hat c}\,\theta^{\hat c},$$

$$\omega_a^{\hat a} = C^{\hat a}_{a \hat b}\,\theta^{\hat b}, \quad \omega_a = 0, \quad \omega_{\hat a} = C_{\hat a \hat b}\,\theta^{\hat b}, \tag{1.1}$$

$$\omega_{\hat a}^{b} = C^{b}_{\hat a \hat b}\,\theta^{\hat b}, \qquad \omega^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\hat b}\,\theta^{\hat b},$$

где

$$\Theta_{\alpha\beta} \equiv da_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\,\omega^{\gamma}_{\beta} - a_{\gamma\beta}\,\omega^{\gamma}_{\alpha} + \frac{2}{n}\,a_{\alpha\beta}\,\omega^{\gamma}_{\gamma},$$

$$\det\|C_{\hat a \hat b}\| \neq 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n).$$

Имеем тождества

$$a^{\hat a \hat b} P_{\hat a \hat b, \hat c} + a^{ab} P_{ab, \hat c} \equiv 0, \tag{1.2}$$

где

$$a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

Считаем, что характеристическое и полярное подпространства не пересекаются, т.е. ранг матрицы

$$\operatorname{rang} \| a_{ab} \| = n - h. \qquad (1.3)$$

Продолжая систему дифференциальных уравнений (1.1) и тождества (1.2), получим

$$dP_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}} = P_{\hat{a}\hat{b},\hat{d}} \theta^{\hat{d}}_{\hat{c}} + P_{\hat{a}\hat{d},\hat{c}} \omega^{\hat{d}}_{\hat{b}} + P_{\hat{d}\hat{b},\hat{c}} \omega^{\hat{d}}_{\hat{a}} - \frac{2}{n} P_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}} \omega^{\gamma}_{\gamma} + P_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{d}} \theta^{\hat{d}},$$

$$dP_{ab,\hat{c}} = P_{ab,\hat{b}} \theta^{\hat{b}}_{\hat{c}} + P_{ac,\hat{c}} \omega^{c}_{b} + P_{cb,\hat{c}} \omega^{c}_{a} - \frac{2}{n} P_{ab,\hat{c}} \omega^{\gamma}_{\gamma} + P_{ab,\hat{c}\hat{b}} \theta^{\hat{b}},$$

$$dc^{\hat{a}}_{a\hat{b}} = c^{\hat{a}}_{a\hat{b}} \theta^{\hat{b}}_{\hat{b}} + c^{\hat{a}}_{b\hat{b}} \omega^{b}_{a} - c^{\hat{c}}_{a\hat{b}} \omega^{\hat{a}}_{\hat{c}} + c^{\hat{a}}_{a\hat{b},\hat{b}} \theta^{\hat{b}},$$

$$dc_{\hat{a}\hat{b}} = c_{\hat{a}\hat{b}} \theta^{\hat{b}}_{\hat{b}} + c_{\hat{b}\hat{b}} \omega^{\hat{b}}_{\hat{a}} - c_{\hat{a}\hat{b}} \omega^{n+1}_{n+1} + c_{\hat{a}\hat{b},\hat{b}} \theta^{\hat{b}},$$

$$dc^{b}_{\hat{a}\hat{b}} = c^{b}_{\hat{a}\hat{b}} \theta^{\hat{b}}_{\hat{b}} + c^{b}_{\hat{b}\hat{b}} \omega^{\hat{b}}_{\hat{a}} - c^{c}_{\hat{a}\hat{b}} \omega^{b}_{c} + c^{b}_{\hat{a}\hat{b},\hat{b}} \theta^{\hat{b}},$$

$$a^{\hat{a}\hat{b}} P_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{b}} + a^{ab} P_{ab,\hat{c}\hat{b}} - a^{ab}_{\hat{c}} P_{ab,\hat{b}} - a^{\hat{a}\hat{b}}_{\hat{c}} P_{\hat{a}\hat{b},\hat{b}} \equiv 0.$$

§ 2. Геометрические образы многообразия $V_{h,n}$

Зададим однопараметрическое семейство (I-семейство) полуквадратичных пар фигур $V_{h,n}$ системой

$$\theta^{\hat{a}} = x^{\hat{a}} \Omega, \quad \mathcal{D}\Omega = 0, \qquad (2.1)$$

где

$$dx^{\hat{a}} + x^{\hat{b}} \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} = x^{\hat{a}}_{\hat{b}} \theta^{\hat{b}}. \qquad (2.2)$$

Всякому I-семейству (2.1) в пространстве Π_{h-1} соответствует точка

$$X = x^{\hat{a}} M_{\hat{a}} \qquad (2.3)$$

относительно некоторого проективного репера $\{M_1, \dots, M_h\}$.

Рассмотрим в полярном подпространстве точку

$$C = a^{\hat{a}} A_{\hat{a}}. \qquad (2.4)$$

Получим

$$dC = (da^{\hat{a}} + a^{\hat{b}} \omega^{\hat{a}}_{\hat{b}}) A_{\hat{a}} + a^{\hat{a}} \omega^{a}_{\hat{a}} A_{a} + a^{\hat{a}} \omega_{\hat{a}} A_{n+1}.$$

Точка

$$E = a^{\hat{a}} x^{\hat{b}} (c^{a}_{\hat{a}\hat{b}} A_{a} + c_{\hat{a}\hat{b}} A_{n+1}) \qquad (2.5)$$

принадлежит касательной к линии, описываемой точкой C.

Выделим теперь другое I-семейство многообразия $V_{h,n}$:

$$\theta^{\hat{a}} = y^{\hat{a}} \Omega^{*}, \quad \mathcal{D}\Omega^{*} = 0, \qquad (2.6)$$

где

$$dy^{\hat{a}} + y^{\hat{b}} \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} = y^{\hat{a}}_{\hat{b}} \theta^{\hat{b}}.$$

Из уравнения (2.5) получим

$$dE = a^{c} x^{\hat b}(C^{a}_{c\hat b}\omega^{\hat a}_{a} + C_{c\hat b}\omega^{\hat a})A_{\hat a} + [da^{\hat a} x^{\hat b} C^{a}_{\hat a\hat b} +$$

$$+ a^{\hat a} dx^{\hat b} C^{a}_{\hat a\hat b} + a^{\hat a} x^{\hat b}(C^{a}_{\hat a\hat \ell}\theta^{\hat \ell}_{\hat b} + C^{a}_{\hat \ell\hat b}\omega^{\hat \ell}_{\hat a} + C^{a}_{\hat a\hat b,\hat \ell}\theta^{\hat \ell} +$$

$$+ C_{\hat a\hat b}\omega^{a})]A_{a} + [dx^{a} x^{\hat b} C_{\hat a\hat b} + a^{\hat a} dx^{\hat b} C_{\hat a\hat b} +$$

$$+ a^{\hat a} x^{\hat b}(C_{\hat a\hat \ell}\theta^{\hat \ell}_{\hat b} + C_{\hat \ell\hat b}\omega^{\hat \ell}_{\hat a} + C_{\hat a\hat b,\hat \ell}\theta^{\hat \ell})]A_{n+1}. \qquad (2.7)$$

Используя значения (2.6), из уравнения (2.7) находим:

$$E^{*} = u^{*\hat c} A_{\hat c}, \qquad (2.8)$$

где

$$u^{*\hat c} = a^{\hat a}(C^{a}_{\hat a\hat b} C^{\hat c}_{a\hat d} + C_{\hat a\hat b}\Lambda^{\hat c}_{\hat d})y^{\hat d} x^{\hat b}, \qquad (2.9)$$

является пересечением полярного подпространства с касательной, описываемой точкой E. Получили проективное преобразование (2.9) полярного подпространства в себя, которое в общем случае является невырожденным. Если проективное преобразование (2.9) будет преобразованием W [3], то совокупности I-семейств (2.6) в Π_{h-1} соответствует гиперплоскость

$$b_{\hat a\hat b} x^{\hat a} y^{\hat b} = 0. \qquad (2.10)$$

где

$$b_{\hat a\hat b} = C^{a}_{\hat a\hat d} C^{\hat d}_{a\hat b} + C_{\hat a\hat d} C^{\hat d}_{\hat b}. \qquad (2.11)$$

Выделим теперь некоторую точку в характеристическом подпространстве

$$P = a^{a} A_{a}. \qquad (2.12)$$

Тогда

$$dP = a^{a}\omega^{\hat a}_{a} A_{\hat a} + (da^{a} + a^{b}\omega^{a}_{b})A_{a}. \qquad (2.13)$$

Точка

$$P^{*} = a^{a} C^{\hat a}_{ab} x^{b} A_{\hat a}. \qquad (2.14)$$

является пересечением полярного подпространства с касательной к кривой, описанной точкой P.

Из

$$dP^{*} = a^{c} x^{\hat b} C^{\hat a}_{c\hat b}\omega^{a}_{\hat a} A_{a} + (da^{a} C^{\hat a}_{a\hat b} x^{\hat b} + a^{a} dC^{\hat a}_{a\hat b} x^{\hat b} +$$

$$+ a^{a} C^{\hat a}_{a\hat b} dx^{\hat b} + a^{a} C^{\hat c}_{ab} x^{b}\omega^{\hat a}_{\hat c})A_{\hat a} + a^{a} C^{\hat a}_{ab}\omega_{\hat a} A_{n+1} \qquad (2.15)$$

с учетом систем (I.I) и (2.6) получаем, что точка

$$V^{*} = V^{a} A_{a}, \qquad (2.16)$$

где

$$V^{a} = a^{b} C^{\hat a}_{b\hat b} C^{a}_{\hat a\hat c} x^{\hat b} y^{\hat c} \qquad (2.17)$$

будет такой, что V^{*} является пересечением характеристического подпространства с касательной к кривой, описанной точкой P^{*}. Если проективные преобразования (2.17) являются преобразованиями W, то I-семейству (2.6) в проективном пространстве Π_{h-1} соответствует гиперплоскость

$$\tilde{b}_{\hat{a}\hat{e}}\, x^{\hat{a}}\, y^{\hat{e}} = 0, \tag{2.18}$$

где
$$\tilde{b}_{\hat{a}\hat{e}} = c^{\hat{e}}_{a\hat{a}}\, c^{a}_{\hat{e}\hat{e}}.$$

Если гиперплоскости (2.10) и (2.18) совпадают, то в пространстве Π_{k-1} относительно тензора $b_{\hat{a}\hat{e}}$ существует основная гиперквадрика

$$b_{(\hat{a}\hat{e})}\, x^{\hat{a}}\, x^{\hat{e}} = 0. \tag{2.19}$$

Будет определен также и основной линейный гиперкомплекс пространства Π_{k-1}

$$b_{[\hat{a}\hat{e}]}\, x^{\hat{a}}\, y^{\hat{e}} = 0.$$

Главные точки $X_a(x^{\hat{e}}_{\hat{a}})$ [3] проективного пространства Π_{k-1} определяются из системы

$$\left[b_{[\hat{a}\hat{e}]}\, b^{(\hat{e}\hat{c})} + \mu_{\hat{c}}\, \delta^{\hat{c}}_{\hat{a}}\right] x^{\hat{a}}_{\hat{c}} = 0,$$

где $\mu_{\hat{c}}$ – корень уравнения

$$\det \| b_{[\hat{a}\hat{e}]}\, b^{(\hat{e}\hat{c})} + \mu\, \delta^{\hat{c}}_{\hat{a}} \| = 0,$$

причем
$$b^{\hat{a}\hat{e}} \cdot b_{(\hat{e}\hat{c})} = \delta^{\hat{a}}_{\hat{c}} \cdot \det \| b_{(\hat{e}\hat{c})} \|.$$

Список литературы

I. I.О в ч и н н и к о в В.М. Некоторые геометрические образы, ассоциированные с многообразием полуквадратичных пар фигур.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.5. Калининград, 1974, с.97-102.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов.-"Труды Томск. ун-та", вып.4, 1964, т.176, с.II-19.

3. И в л е в Е.Т., Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами.-В кн.:Материалы 3-й научной конференции по математике и механике. Вып.I. Изд.-во Томского ун-та, 1973, с.50-52.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Ю.И. Попов

ВНУТРЕННИЕ ОСНАЩЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ m-МЕРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ H_m^r РАНГА r МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n вырожденные нормально центрированные m-мерные гиперполосы CH_m^r ранга r, вдоль каждой плоской образующей E_s (где $s=m-r$) базисной поверхности V_m^r которых касательная плоскость T_m постоянна [1]. В данной работе исследуются нераспадающиеся гиперполосы CH_m^r, т.е. такие гиперполосы CH_m^r, для которых гиперповерхность V_{n-1}, огибающая главные касательные гиперплоскости τ гиперполосы CH_m^r, не распадается на две тангенциально вырожденные поверхности V_m^r и V_{n-s-1}^r с общей направляющей поверхностью V_r (V_r-множество всех центров плоских образующих E_s поверхности V_m^r)[1]. Другими словами, вырожденная гиперполоса CH_m^r называется нераспадающейся, если характеристика E_{n-r-1} данной гиперполосы не распадается на две плоскости E_s и E_{n-m-1} ($E_s \cap E_{n-m-1}=0$), являющиеся соответственно плоскими образующими тангенциально вырожденных поверхностей V_m^r и V_{n-s-1}^r.

Для вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH_m^r построено внутреннее инвариантное оснащение и дана геометрическая интерпретация некоторых геометрических объектов, характеризующих построенное внутреннее инвариантное оснащение. В общем случае найдено поле двупараметрической связки соприкасающихся гиперквадрик, внутренним инвариантным образом присоединенных к исследуемой гиперполосе CH_m^r. Поле соприкасающихся гиперквадрик записано (в общем случае) и для распадающихся гиперполос CH_m^r. Более подробно рассмотрены построения полей геометрических объектов, в частности квазитензоров, тензоров, относительных инвариантов в окрестностях второго и третьего порядков элемента нераспадающейся гиперполосы CH_m^r.

Работа выполнена теоретико-групповым методом Г.Ф. Лаптева [2].

В данной работе мы пользуемся терминологией и обозначениями, введенными в статье [1].

§ 1. Задание нераспадающейся гиперполосы CH_m^r в n-мерном проективном пространстве P_n

В проективном пространстве P_n наряду с точечным подвижным репером $\{A_\mathcal{J}\}$ рассмотрим двойственный ему репер $\{\tau^\mathcal{K}\}$, элементы которого $\tau^\mathcal{K}$ являются гранями репера $\{A_\mathcal{J}\}$. Тогда

$$(A_\mathcal{J}, \tau^\mathcal{K}) = \delta_\mathcal{J}^\mathcal{K}. \qquad (1.1)$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений данных реперов принимают следующий вид:

$$dA_J = \omega_J^{\varkappa} A_{\varkappa}, \qquad d\tau^J = -\omega_{\varkappa}^J \tau^{\varkappa}, \tag{1.2}$$

где формы $\omega_J^{\varkappa}$ имеют проективную структуру

$$d\omega_J^{\varkappa} = \omega_J^{\mathcal{L}} \wedge \omega_{\mathcal{L}}^{\varkappa}, \tag{1.3}$$

$$\sum_J \omega_J^J = 0. \tag{1.4}$$

Присоединим к изучаемому образу CH_m^{τ} подвижной репер, полагая $A_o = A, \tau^n = \tau$, где A – центр плоской образующей E_s, а τ – главная касательная гиперплоскость гиперполосы CH_m^{τ}.

Для гиперполосы CH_m^{τ} имеем

$$(dA_o, \tau^n) = (A_o, d\tau^n) = 0, \tag{1.5}$$

поэтому в репере нулевого порядка

$$\omega_o^n = 0. \tag{1.6}$$

Элемент (A_o, τ^n) гиперполосы CH_m^{τ} зависит от τ существенных параметров $\{u^p\}$, которые назовем главными. При изменении главных параметров $\{u^p\}$ точка A_o описывает τ-мерную поверхность – поверхность центров плоских образующих E_s базисной поверхности V_m^{τ} гиперполосы, а семейство главных касательных гиперплоскостей τ^n огибает некоторую тангенциально вырожденную гиперповерхность V_{n-1}^{τ}. Плоские $(n-\tau-1)$-мерные образующие $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V_{n-1}^{τ} являются характеристиками вырожденной гиперполосы CH_m^{τ}, причем $E_s \subset E_{n-\tau-1}$.

Специализируем репер, поместив точки $\{A_p\}$ в касательной плоскости T_τ поверхности V_τ, точки $\{A_i\}$ – в плоскости E_s, точки $\{A_\alpha\}$ – в характеристической плоскости $E_{n-\tau-1}$ гиперполосы CH_m^{τ}, а точка A_n пусть занимает произвольное положение, образуя с точками $\{A_o, A_i, A_p, A_\alpha\}$ проективный репер $\{A_J\}$ пространства P_n.

В этом репере, учитывая (1.1) и (1.2), получим

$$\omega_o^i = 0, \qquad (1.7) \qquad\qquad \omega_o^\alpha = 0, \tag{1.8}$$

$$\omega_i^n = 0, \qquad (1.9) \qquad\qquad \omega_\alpha^n = 0. \tag{1.10}$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений плоского элемента (A_o, τ^n) гиперполосы CH_m^{τ} примут вид:

$$\begin{aligned} dA_o &= \omega_o^o A_o + \omega_o^p A_p, \\ d\alpha^n &= -\omega_p^n \tau^p - \omega_n^n \tau^n. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Следовательно, формы $\omega^p \equiv \omega_o^p$ определяют перемещение точки A_o по поверхности V_τ и поэтому являются независимыми линейными комбинациями дифференциалов du^p главных параметров – базисными формами гиперполосы CH_m^{τ}, отнесенной к подвижному точечному реперу $\{A_J\}$. Аналогично формы ω_p^n определяют перемещение гиперплоскости τ^n и, следовательно, являются базисными формами гиперполосы CH_m^{τ}, отнесенной к подвижному тангенциальному реперу $\{\tau^J\}$.

Уравнения (1.9) и уравнения

$$\omega_i^\alpha = 0 \tag{1.12}$$

характеризуют условие постоянства касательной плоскости T_m вдоль плоской образующей E_s базисной поверхности V_m^{τ} гиперполосы CH_m^{τ}.

Продолжая уравнения (1.6)-(1.10), с учетом этих же уравнений и леммы Картана, находим

$$\omega_p^n = a_{pq}\,\omega^q; \quad a_{pq} = a_{qp}, \quad a = \det\|a_{pq}\| \neq 0; \qquad (1.13)$$

$$\omega_i^p = b_i^{pq}\,\omega_q^n = b_i^{pt}\,a_{tq}\,\omega^q = a_{iq}^p\,\omega^q, \qquad (1.14)$$

$$\omega_p^i = b_{pq}^i\,\omega^q = b_{pt}^i\,a^{tq}\,\omega_q^n = a_p^{iq}\,\omega_q^n, \qquad (1.15)$$

$$\omega_\alpha^p = b_\alpha^{pq}\,\omega_q^n = b_\alpha^{pt}\,a_{tq}\,\omega^q = a_{\alpha q}^p\,\omega^q, \qquad (1.16)$$

$$\omega_p^\alpha = b_{pq}^\alpha\,\omega^q = b_{pt}^\alpha\,a^{tq}\,\omega_q^n = a_p^{\alpha q}\,\omega_q^n, \qquad (1.17)$$

где a^{pq} элементы матрицы $\|a^{pq}\|$, обратной матрице $\|a_{pq}\|$:

$$a_{pq}\,a^{qt} = \delta_p^t, \qquad (1.18)$$

а величины b_{pq}^i, b_i^{pq}, b_α^{pq}, b_{pq}^α симметричны по индексам p,q.

Кроме того, дифференцируя внешним образом уравнения (1.12), учитывая (1.14), (1.17) и лемму Картана, убеждаемся, что коэффициенты уравнений (1.14) и (1.17) связаны конечными соотношениями

$$a_{it}^p\,b_{pq}^\alpha = a_{iq}^p\,b_{pt}^\alpha. \qquad (1.19)$$

Пфаффовы уравнения (1.6)-(1.10), (1.12), (1.14)-(1.17) и конечные соотношения (1.19) определяют m-мерную вырожденную нераспадающуюся гиперполосу CH_m^r ранга r проективного пространства P_n. При этом уравнения (1.6)-(1.8) задают поверхность центров V_r плоских образующих E_s базисной поверхности V_m^r гиперполосы CH_m^r (поверхность V_r - "направляющая" поверхности V_m^r), уравнения (1.6), (1.8), (1.9), (1.12), (1.14), (1.17) и соотношения (1.19) характеризуют базисную поверхность V_m^r гиперполосы CH_m^r, а уравнения (1.6), (1.9), (1.10) определяют тангенциально вырожденную гиперповерхность V_{n-1}^r, огибаемую гиперплоскостями τ^n.

Продолжая уравнения (1.13)-(1.18), находим

$$\nabla a_{pq} = -a_{pq}\,(\omega_o^o + \omega_n^n) + a_{pqt}\,\omega^t, \qquad (1.20)$$

$$\nabla b_i^{pq} = b_i^{pq}\,\omega_n^n + a^{pq}\,\omega_i^o - b_i^{pqt}\,\omega_t^n, \qquad (1.21)$$

$$\nabla b_{pq}^i = -b_{pq}^i\,\omega_o^o - a_{pq}\,\omega_n^i - b_{pq}^\alpha\,\omega_\alpha^i + b_{pqt}^i\,\omega^t, \qquad (1.22)$$

$$\nabla b_\alpha^{pq} = b_\alpha^{pq}\,\omega_n^n + a^{pq}\,\omega_\alpha^o + b_i^{pq}\,\omega_\alpha^i - b_\alpha^{pqt}\,\omega_t^n, \qquad (1.23)$$

$$\nabla b_{pq}^\alpha = -b_{pq}^\alpha\,\omega_o^o - a_{pq}\,\omega_n^\alpha + b_{pqt}^\alpha\,\omega^t, \qquad (1.24)$$

$$\nabla a^{pq} = a^{pq}\,(\omega_o^o + \omega_n^n) - a^{pqt}\,\omega_t^n, \qquad (1.25)$$

где величины a_{pqt}, a^{pqt}, b_i^{pqt}, b_{pqt}^i, b_α^{pqt}, b_{pqt}^α симметричны по индексам p,q,t.

Из уравнений (1.20) и (1.25) следует, что величины a_{pq} и

a^{pq} являются относительными тензорами -основные двухвалентные тензоры нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}.

Системы величин $\Gamma_2=\{a_{pq}, b^{pq}_i, b^i_{pq}, b^{pq}_{\alpha}, b^{\alpha}_{pq}\}$ и $\Gamma_3=\{\Gamma_2, a_{pqt}, a^{pqt}, b^{pqt}_i, b^i_{pqt}, b^{pqt}_{\alpha}, b^{\alpha}_{pqt}\}$ образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядка вырожденной нераспадающейся m-мерной гиперполосы CH^{τ}_{m} ранга τ.

Дальнейшее продолжение системы уравнений (1.20)-(1.25) вводит геометрические объекты четвертого и более высоких порядков, определяемые гиперполосой CH^{τ}_{m}.

Таким образом строится последовательность фундаментальных геометрических объектов вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}.

§ 2. Построение внутреннего инвариантного оснащения вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}

1. Предварительно построим геометрические объекты, которые характеризуют инвариантно присоединенный к гиперполосе CH^{τ}_{m} репер и инвариантное оснащение гиперполосы в смысле А.П.Нордена. [4],[9].

Инвариантную нормаль второго рода гиперполосы CH^{τ}_{m} - $(m-1)$-мерную плоскость $E_{m-1}\equiv[A_i, A_p]$ - определим точками

$$M_p=A_p+x_pA_o,\quad M_i=A_i+x_iA_o,$$

где

$$\nabla_\delta x_p=-x_p\pi^o_o-\pi^o_p, \tag{2.1}$$

$$\nabla_\delta x_i=-x_i\pi^o_o-\pi^o_i. \tag{2.2}$$

Точки $\{M_p\}$ определяют инвариантную плоскость $E_{\tau-1}$, лежащую в касательной плоскости T_τ поверхности V_τ (поверхности центров плоских образующих E_s базисной поверхности V^{τ}_{m} гиперполосы CH^{τ}_{m}), а точки $\{M_i\}$ определяют инвариантную плоскость $E_{s-1}\subset E_s$.

Инвариантную нормаль первого рода гиперполосы CH^{τ}_{m} - $(n-m)$-мерную плоскость $E_{n-m}\equiv[A_o, A_\alpha, A_n]$ - зададим как пересечение гиперплоскостей

$$\sigma^p=\tau^p+y^p\tau^n,\quad \sigma^i=\tau^i+y^i\tau^n-\rho^i_\alpha\tau^\alpha,$$

где

$$\nabla_\delta y^p=y^p\pi^n_n+\pi^p_n, \tag{2.3}$$

$$\nabla_\delta\rho^i_\alpha=-\pi^i_\alpha, \tag{2.4}$$

$$\nabla_\delta y^i=y^i\pi^n_n-\rho^i_\alpha\pi^\alpha_n+\pi^i_n. \tag{2.5}$$

Гиперплоскости σ^p определяют инвариантную плоскость $E_{n-\tau}$, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую плоскую образующую $E_{n-\tau-1}\equiv[A_o, A_\alpha, A_i]$ вырожденной гиперповерхности V^{τ}_{n-1} (характеристику гиперполосы CH^{τ}_{m}), огибаемой главными касательными гиперплоскостями τ^n гиперполосы CH^{τ}_{m}. Гиперплоскости σ^i задают инвариантную плоскость E_{n-s}, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую касательную плоскость T_τ поверхности V_τ.

Кроме основных элементов инвариантного оснащения гиперполосы CH^{τ}_{m} - ее нормалей первого и второго рода, определим еще инвариантную плоскость $E_{n-m-2}=[A_\alpha]$ точками

$$M_\alpha = A_\alpha + \rho^i_\alpha A_i + x_\alpha A_o .$$

Инвариантная плоскость E_{n-m-2} есть плоскость пересечения инвариантной нормали первого рода E_{n-m} и характеристики $E_{n-\tau-1}$ гиперполосы CH^τ_m. Из условия инвариантности плоскости E_{n-m-2} следует, что

$$\nabla_\delta x_\alpha = -x_\alpha \pi^o_o - \rho^i_\alpha \pi^o_i - \pi^o_\alpha , \tag{2.6}$$

где величины ρ^i_α удовлетворяют условию (2.5). Далее, выделим инвариантный пучок касательных гиперплоскостей

$$\sigma^\alpha = \tau^\alpha + y^\alpha \tau^n ,$$

где

$$\nabla_\delta y^\alpha = y^\alpha \pi^n_n + \pi^\alpha_n . \tag{2.7}$$

Наконец, рассмотрим точку

$$M_n = A_n - y^\alpha A_\alpha - (y^i + \rho^i_\alpha y^\alpha) A_i - y^p A_p + x A_o$$

и гиперплоскость

$$\sigma^o = \tau^o - x_p \tau^p - x_i \tau^i - (x_\alpha - \rho^i_\alpha x_i)\tau^\alpha + y \tau^n .$$

Точка M_n принадлежит гиперплоскостям $\sigma^p, \sigma^i, \sigma^\alpha$ и определяет вместе с точками $M_o \equiv A_o$ и M_α инвариантную нормаль первого рода гиперполосы CH^τ_m. Гиперплоскость σ^o содержит точки M_p, M_i, M_α и определяет вместе с гиперплоскостями $\tau^n \equiv \sigma^n$ и σ^α нормаль второго рода гиперполосы CH^τ_m.

Условие инцидентности точки M_n и гиперплоскости σ_o задается соотношением

$$(M_n, \sigma^o) = 0,$$

откуда

$$x + y + x_p y^p + x_i y^i + x_\alpha y^\alpha = 0 . \tag{2.8}$$

Условия инвариантности точки M_n и гиперплоскости σ^o имеют соответственно вид:

$$\delta x = x(\pi^n_n - \pi^o_o) + y^p \pi^o_p + (y^i + \rho^i_\alpha y^\alpha)\pi^o_i + y^\alpha \pi^o_\alpha - \pi^o_n , \tag{2.9}$$

$$\delta y = y(\pi^n_n - \pi^o_o) - x_i \pi^i_n - x_p \pi^p_n - (x_\alpha - \rho^i_\alpha x_i)\pi^\alpha_n + \pi^o_n . \tag{2.10}$$

Уравнения (2.1)-(2.7),(2.9),(2.10) показывают, что величины

$$x_p, x_i, y^p, y^\alpha, \rho^i_\alpha, \{y^i, \rho^i_\alpha\}, \{x_\alpha, \rho^i_\alpha\},$$
$$\{x, y^p, y^i, \rho^i_\alpha, y^\alpha\}, \{y, x_i, x_p, x_\alpha, \rho^i_\alpha\} \tag{2.11}$$

образуют геометрические объекты, которые назовем оснащающими объектами вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m.

Эти оснащающие объекты определяют инвариантные реперы $\{M_\gamma\}$ и $\{\sigma^\varkappa\}$ (соответственно точечный и тангенциальный реперы), присоединенные к нераспадающейся гиперполосе CH^τ_m. Элементы этих реперов следующим образом выражаются через элементы исходных реперов:

$$M_o = A_o ,$$
$$M_p = A_p + x_p A_o , \tag{2.12}$$

$$M_i = A_i + x_i A_o,$$

$$M_\alpha = A_\alpha + \rho^i_\alpha A_i + x_\alpha A_o, \qquad (2.12)$$

$$M_n = A_n - y^\alpha A_\alpha - (y^i + \rho^i_\alpha y^\alpha) A_i - y^p A_p - x A_o$$

и

$$\sigma^o = \tau^o - x_p \tau^p - x_i \tau^i - (x_\alpha - \rho^i_\alpha x_i)\tau^\alpha + y \tau^n,$$

$$\sigma^p = \tau^p + y^p \tau^n,$$

$$\sigma^i = \tau^i - \rho^i_\alpha \tau^\alpha + y^i \tau^n, \qquad (2.13)$$

$$\sigma^\alpha = \tau^\alpha + y^\alpha \tau^n,$$

$$\sigma^n = \tau^n.$$

2.Инвариантное оснащение (репер) вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^r_m называется внутренним инвариантным оснащением (репером) к-го порядка, если оснащающие объекты (2.11) гиперполосы CH^r_m являются функциями компонент фундаментального дифференциально-геометрического объекта к-го порядка рассматриваемой гиперполосы CH^r_m. Докажем, что для фундаментального дифференциально геометрического объекта четвертого порядка гиперполосы CH^r_m существуют алгебраические охваты, структура которых такая же, как и структура дифференциально-геометрических оснащающих объектов данной гиперполосы CH^r_m.

В окрестности второго порядка элемента гиперполосы CH^r_m построим величины

$$\Lambda_i = \frac{1}{r} a_{pq} b^{pq}_i, \quad (2.14) \qquad \Lambda^\alpha = \frac{1}{r} a^{pq} b^\alpha_{pq}, \quad (2.15)$$

$$\bar\Lambda^i = \frac{1}{r} a^{pq} b^i_{pq}, \quad (2.16) \qquad \bar\Lambda_\alpha = \frac{1}{r} a_{pq} b^{pq}_\alpha. \quad (2.17)$$

Имеем

$$\nabla_\delta \Lambda_i = -\Lambda_i \pi^o_o + \pi^o_i, \qquad (2.18)$$

$$\nabla_\delta \Lambda^\alpha = \Lambda^\alpha \pi^n_n - \pi^\alpha_n, \qquad (2.19)$$

$$\nabla_\delta \bar\Lambda^i = \bar\Lambda^i \pi^n_n - \pi^i_n - \Lambda^\alpha \pi^i_\alpha, \qquad (2.20)$$

$$\nabla_\delta \bar\Lambda_\alpha = -\bar\Lambda_\alpha \pi^o_o + \pi^o_\alpha + \Lambda_i \pi^i_\alpha. \qquad (2.21)$$

Сравнивая уравнения (2.18),(2.19) соответственно с уравнениями (2.2),(2.7), находим, что в окрестности второго порядка нераспадающейся гиперполосы CH^r_m квазитензоры Λ_i и Λ^α определяют внутренние инвариантные плоскости

$$E_{s-1} \equiv [M_i] = [A_i - \Lambda_i A_o] \text{ и } E_{m+1} \equiv [\sigma^\alpha] = [\tau^\alpha - \Lambda^\alpha \tau^n].$$

Рассмотрим далее систему величин

$$C^{pq}_i = b^{pq}_i - \Lambda_i a^{pq}, \quad (2.22) \qquad C^\alpha_{pq} = b^\alpha_{pq} - \Lambda^\alpha a_{pq}, \quad (2.23)$$

$$C^i_{pq} = b^i_{pq} - \bar\Lambda^i a_{pq}, \quad (2.24) \qquad C^{pq}_\alpha = b^{pq}_\alpha - \bar\Lambda_\alpha a^{pq}, \quad (2.25)$$

где

$$\nabla_\delta C^{pq}_i = C^{pq}_i \pi^n_n, \qquad (2.26)$$

$$\nabla_\delta C^\alpha_{pq} = -C^\alpha_{pq} \pi^o_o, \qquad (2.27)$$

$$\nabla_\delta C^i_{pq} = -C^i_{pq} \pi^o_o - C^\alpha_{pq} \pi^i_\alpha, \qquad (2.28)$$

$$\nabla_\delta C^{pq}_\alpha = C^{pq}_\alpha \pi^n_n + C^{pq}_i \pi^i_\alpha . \qquad (2.29)$$

Из (2.26),(2.27) следует, что величины C^{pq}_i и C^α_{pq} являются относительными тензорами. Кроме того, выполняются следующие соотношения аполярности:

$$C^i_{pq} a^{pq} = 0, \qquad C^\alpha_{pq} a^{pq} = 0, \qquad (2.30)$$

$$C^{pq}_i a_{pq} = 0, \qquad C^{pq}_\alpha a_{pq} = 0. \qquad (2.31)$$

Дальнейшее построение проводим для нераспадающихся гиперполос CH^τ_m, которые допускают отличный от нуля инвариант $\mathcal{J} = \mathcal{J}(C^{pq}_i, C^\alpha_{pq})$. В общем случае, когда соприкасающаяся плоскость второго порядка заполняет все пространство, можно показать [5], что к гиперполосе CH^τ_m присоединяются объекты второго порядка $\tilde{C}^i_{pq}$ и $\tilde{C}^{pq}_\alpha$ — обращенные тензоры соответственно тензорам C^{pq}_i и C^α_{pq} :

$$\tilde{C}^{pq}_\alpha C^\beta_{pq} = \tau\delta^\beta_\alpha , \quad \tilde{C}^{pq}_\alpha C^\alpha_{tq} = (m-\tau-1)\delta^p_t , \quad \tilde{C}^{pq}_\alpha C^\alpha_{pq} = \tau(n-m-1), \qquad (2.32)$$

$$\tilde{C}^i_{pq} C^{pt}_i = (m-\tau)\delta^t_q , \quad \tilde{C}^j_{pq} C^{pq}_i = \tau\delta^j_i . \quad \tilde{C}^i_{pq} C^{pq}_i = \tau(m-\tau). \qquad (2.33)$$

Имеем

$$\nabla \tilde{C}^{pq}_\alpha = \tilde{C}^{pq}_\alpha \omega^o_o - \tilde{C}^{pqt}_\alpha \omega^n_t , \qquad (2.34)$$

$$\nabla \tilde{C}^i_{pq} = -\tilde{C}^i_{pq} \omega^n_n + C^i_{pqt} \omega^t . \qquad (2.35)$$

Теперь последовательно составим величины

$$t^i_\alpha = \frac{1}{\tau} C^i_{pq} \tilde{C}^{pq}_\alpha , \quad (2.36); \qquad t_\alpha = \Lambda_i t^i_\alpha , \qquad (2.36)$$

$$t^i = \Lambda^\alpha t^i_\alpha , \quad (2.38), \qquad \Lambda^i = \bar{\Lambda}^i - t^i , \qquad (2.39)$$

$$\Lambda_\alpha = \bar{\Lambda}_\alpha + t_\alpha . \qquad (2.40)$$

где

$$\nabla_\delta t^i_\alpha = -\pi^i_\alpha , \qquad (2.41)$$

$$\nabla_\delta t_\alpha = -t_\alpha \pi^o_o + t^i_\alpha \pi^o_i - \Lambda_i \pi^i_\alpha , \qquad (2.42)$$

$$\nabla_\delta t^i = t^i \pi^n_n - t^i_\alpha \pi^\alpha_n - \Lambda^\alpha \pi^i_\alpha . \qquad (2.43)$$

$$\nabla_\delta \Lambda^i = \Lambda^i \pi^n_n + t^i_\alpha \pi^\alpha_n - \pi^i_n , \qquad (2.44)$$

$$\nabla_\delta \Lambda_\alpha = -\Lambda_\alpha \pi^o_o + t^i_\alpha \pi^o_i + \pi^o_\alpha . \qquad (2.45)$$

Сравнивая уравнения (2.41),(2.44),(2.45) с уравнениями (2.4)-(2.6), приходим к выводу, что квазитензоры $\{t^i_\alpha, \Lambda^i\}$ и $\{t^i_\alpha, \Lambda_\alpha\}$ определяют в окрестности второго порядка нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m соответственно внутренние инвариантные плоскости $E_{n-m-2} \equiv [M_\alpha] = [A_\alpha - \Lambda_\alpha A_o + t^i_\alpha A_i]$

и $E_{n-s} = [\sigma^i] = [\tau^i - \Lambda^i \tau^n - t^i_\alpha \tau^\alpha]$.

Заметим, что внутренние оснащающие плоскости $E_{s-1} = [M_i]$ и $E_{n-s} = [\sigma^i]$, а также соответственно внутренние оснащающие плоскости $E_{m+1} = [\sigma^\alpha]$ и $E_{n-m-2} = [M_\alpha]$, определяемые в окрестности второго порядка нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m, есть двойственные друг другу образы.

3. Построим с помощью компонент фундаментального геометрического объекта третьего порядка нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m охваты, структура которых такая же, как и структура оснащающих объектов x_p и x^p данной ги-

перполосы CH^{τ}_m.

Составим величины

$$d_p = \frac{1}{\tau+2} a_{pqt} a^{qt}, \quad (2.46) \qquad d^p = \frac{1}{\tau+2} a^{pqt} a_{qt}. \quad (2.47)$$

Они позволяют построить относительные тензоры

$$\ell_{pqt} = a_{pqt} - a_{(pq} d_{t)}, \tag{2.48}$$

$$\ell^{pqt} = a^{pqt} - a^{(pq} d^{t)}, \tag{2.49}$$

связанные равенством

$$\ell^{pqt} = a^{sp} a^{fq} a^{vt} \ell_{sfv} \tag{2.50}$$

и удовлетворяющие условиям аполярности

$$\ell_{pqt} a^{qt} = 0, \quad \ell^{pqt} a_{qt} = 0. \tag{2.51}$$

Тензор ℓ_{pqt} является тензором Дарбу [2] базисной поверхности V^{τ}_m, а тензор ℓ^{pqt} – тензором Дарбу гиперповерхности V^{τ}_{n-1}, огибающей главные касательные гиперплоскости гиперполосы CH^{τ}_m. Компоненты тензора Дарбу ℓ_{pqt} и ℓ^{pqt} удовлетворяют соответственно следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \ell_{pqt} = -\ell_{pqt} (2\omega^o_o + \omega^n_n) + \ell_{pqts} \omega^s, \tag{2.52}$$

$$\nabla \ell^{pqt} = \ell^{pqt} (\omega^o_o + 2\omega^n_n) - \ell^{pqts} \omega^n_s. \tag{2.53}$$

С помощью тензоров Дарбу составим относительный инвариант

$$\ell_o = \ell_{pqt} \ell^{pqt} \tag{2.54}$$

Дальнейшие построение проводится в предположении, что $\ell_o \neq 0$. В общем случае можно считать, что $\ell_o \neq 0$ при $\ell_{pqt} \neq 0$ (см., например, при начальных условиях (4.24)-(4.27).

Имеем

$$d \ln \ell_o = \omega^n_n - \omega^o_o + \ell_p \omega^p \tag{2.55}$$

или

$$d \ln \ell_o = \omega^n_n - \omega^o_o - \ell^p \omega^n_p, \quad \text{где} \quad \ell^p = a^{pq} \ell_q. \tag{2.56}$$

Наконец, определим оснащающие объекты x_p и y^p нужного строения:

$$\Lambda_p = -\frac{1}{2}(d_p + \ell_p), \tag{2.57}$$

$$\Lambda^p = -\frac{1}{2}(d^p + \ell^p), \tag{2.58}$$

где

$$\nabla \Lambda_p = -\Lambda_p \omega^o_o + \omega^o_p + \overline{\Lambda}^q_p \omega^n_q, \tag{2.59}$$

$$\nabla \Lambda^p = \Lambda^p \omega^n_n - \omega^p_n - \widetilde{\Lambda}^p_q. \tag{2.60}$$

Действительно, уравнения (2.1), (2.3) удовлетворяются при $x_p = -\Lambda_p$, $y^p = -\Lambda^p$. Таким образом, приходим к выводу, что квазитензоры Λ_p и Λ^p определяют в окрестности третьего порядка данной гиперполосы CH^{τ}_m внутренние оснащающие двойственные друг другу плоскости

$$E_{\tau-1} = [M_p] = [A_p - \Lambda_p A_o], \quad E_{n-\tau} = [\sigma^p] = [\tau^p - \Lambda^p \tau^n].$$

4. Перейдем к построению геометрических объектов, определяющих инвариантную точку M_n и гиперплоскость, внутренним образом присоединенных к нераспадающейся гиперполосе CH^{τ}_m. Уравнения (2.8)-(2.10), которым удовлетворяют эти объекты, теперь принимают вид:

$$x+y+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\Lambda^i+\Lambda_\alpha\Lambda^\alpha=0, \qquad (2.61)$$

$$\delta x=x(\pi^n_n-\pi^0_0)-\Lambda^p\pi^0_p-(\Lambda^i+t^i_\alpha\Lambda^\alpha)\pi^0_i-\Lambda^\alpha\pi^0_\alpha-\pi^0_n, \qquad (2.62)$$

$$\delta y=y(\pi^n_n-\pi^0_0)+\Lambda_p\pi^p_n+\Lambda_i\pi^i_n+(\Lambda_\alpha-t^i_\alpha\Lambda_i)\pi^\alpha_n+\pi^0_n. \qquad (2.63)$$

Дальнейшее построение в окрестности четвертого порядка данной гиперполосы CH^{τ}_m проводим аналогично работам [6], [1].

Вводим в рассмотрение величины

$$\tilde{x}=\Lambda+\tilde{\Lambda}+\tilde{\tilde{\Lambda}}, \qquad \bar{y}=\Lambda+\bar{\Lambda}+\bar{\bar{\Lambda}}, \qquad (2.64)$$

где

$$\Lambda=-\Lambda_i\Lambda^i-\Lambda_\alpha\Lambda^\alpha, \quad \tilde{\Lambda}=\frac{1}{\tau}\tilde{\Lambda}^p_p, \quad \bar{\Lambda}=\frac{1}{\tau}\bar{\Lambda}^p_p,$$

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}=\frac{1}{\tau}a_{pq}\Lambda^p\Lambda^q, \quad \bar{\bar{\Lambda}}=\frac{1}{\tau}a^{pq}\Lambda_p\Lambda_q.$$

Легко проверить, что величины $\tilde{x}$ и $\bar{y}$ удовлетворяют уравнениям (2.62) и (2.63) и, следовательно, определенные с их помощью точка

$$\tilde{M}_n=A_n+\Lambda^\alpha A_\alpha+(\Lambda^i+t^i_\alpha\Lambda^\alpha)A_i+\Lambda^p A_p+\tilde{x}A_0$$

и гиперплоскость

$$\bar{\sigma}^0=\tau^0+\Lambda_p\tau^p+\Lambda_i\tau^i+(\Lambda_\alpha-t^i_\alpha\Lambda_i)\tau^\alpha+\bar{y}\tau^n$$

внутренним образом присоединены к нераспадающейся гиперполосе CH^{τ}_m в ее окрестности четвертого порядка. При этом оказывается, условие инцидентности (2.61) точки $\tilde{M}_n$ и гиперплоскости $\bar{\sigma}^0$ не выполняется. Однако можно выделить в пучке гиперплоскостей $[\bar{\sigma}^0, \sigma^n]$ внутреннюю инвариантную гиперплоскость

$$\tilde{\sigma}^0=\tau^0+\Lambda_p\tau^p+\Lambda_i\tau^i+(\Lambda_\alpha-t^i_\alpha\Lambda_i)\tau^\alpha-(\tilde{x}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\bar{\Lambda}_\alpha\Lambda^\alpha)\tau^n,$$

инцидентную точке $\tilde{M}_n$, а на прямой $[M_0, \tilde{M}_n]$ — инвариантную точку

$$\bar{M}_n=A_n+\Lambda^p A_p+(\Lambda^i+t^i_\alpha\Lambda^\alpha)A_i+\Lambda^\alpha A_\alpha-(\bar{y}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\Lambda^\alpha\bar{\Lambda}_\alpha)A_0,$$

внутренним образом присоединенную к гиперполосе CH^{τ}_m и инцидентную гиперплоскости $\bar{\sigma}^0$. Более того, нетрудно показать, что величины

$$\bar{\Lambda}^0=\frac{\alpha\tilde{x}+\beta\bar{x}}{\alpha+\beta}; \qquad \bar{\Lambda}_n=\frac{\alpha\tilde{y}+\beta\bar{y}}{\alpha+\beta}, \qquad (2.65)$$

где

$$\bar{x}=-(\bar{y}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\Lambda^\alpha\bar{\Lambda}_\alpha); \quad \tilde{y}=-(\tilde{x}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\bar{\Lambda}_\alpha\Lambda^\alpha),$$

а α и β произвольные действительные числа, удовлетворяют уравнениям (2.62) и (2.63). Следовательно, точка

$$M_n=A_n+\Lambda^p A_p+\bar{\Lambda}^i A_i+\Lambda^\alpha A_\alpha+\bar{\Lambda}^0 A_0 \qquad (2.66)$$

и гиперплоскость

$$\sigma^{\circ}=\tau^{\circ}+\Lambda_{p}\tau^{p}+\Lambda_{i}\tau^{i}+\bar{\Lambda}_{\alpha}\tau^{\alpha}+\bar{\Lambda}_{n}\tau^{n} \qquad (2.67)$$

внутренним инвариантным образом присоединены к нераспадающейся гиперполосе CH_m^{τ} в ее окрестности четвертого порядка, двойственны друг другу и, кроме того, удовлетворяют условию инцидентности (2.61).

Таким образом, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы четвертого порядка, присоединенные внутренним образом к нераспадающейся гиперполосе CH_m^{τ} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &M_{o}=A_{o},\\ &M_{p}=A_{p}-\Lambda_{p}A_{o},\\ &M_{i}=A_{i}-\Lambda_{i}A_{o},\\ &M_{\alpha}=A_{\alpha}+t^{i}_{\alpha}A_{i}-\Lambda_{\alpha}A_{o},\\ &M_{n}=A_{n}+\Lambda^{\alpha}A_{\alpha}+\bar{\Lambda}^{i}A_{i}+\Lambda^{p}A_{p}+\bar{\Lambda}^{o}A_{o}; \end{aligned} \qquad (2.68)$$

$$\begin{aligned} &\sigma^{o}=\tau^{o}+\Lambda_{p}\tau^{p}+\Lambda_{i}\tau^{i}+\bar{\Lambda}_{\alpha}\tau^{\alpha}+\bar{\Lambda}_{n}\tau^{n},\\ &\sigma^{p}=\tau^{p}-\Lambda^{p}\tau^{n},\\ &\sigma^{i}=\tau^{i}-t^{i}_{\alpha}\tau^{\alpha}-\Lambda^{i}\tau^{n},\\ &\sigma^{\alpha}=\tau^{\alpha}-\Lambda^{\alpha}\tau^{n},\\ &\sigma^{n}=\tau^{n}. \end{aligned} \qquad (2.69)$$

§ 3. Фокальные образы, связанные с нераспадающейся гиперполосой CH_m^{τ}

Для того, чтобы выяснить геометрический смысл некоторых элементов внутреннего оснащения, построенного во втором параграфе, рассмотрим фокальные образы, связанные с нераспадающейся гиперполосой CH_m^{τ}.

Выясним геометрический смысл оснащающей плоскости $E_{S-1}=[M_i]$, принадлежащей плоской образующей E_S базисной поверхности V_m^{τ}.

Рассмотрим точку

$$X=x^{i}M_{i}+x^{o}A_{o}, \qquad (3.1)$$

которая принадлежит плоской образующей $E_S=[A_o, A_i]$ базисной поверхности V_m^{τ}.

Определение. Точку X назовем фокальной [7], если она принадлежит, кроме E_S, еще некоторой смежной образующей E'_S. Геометрическое место фокальных точек X назовем фокальной поверхностью $\mathcal{F}_{\tau}$ образующей E_S[7].

Из условия фокальности точки X в силу уравнений (1.2), (1.4) следует, что фокальная поверхность $\mathcal{F}_{\tau}$

$$\det\|x^{o}\delta^{p}_{q}+x^{i}a^{p}_{iq}\|=0 \quad (a); \qquad x^{p}=x^{\alpha}=x^{n}=0 \quad (\delta) \qquad (3.2)$$

является алгебраической поверхность порядка τ [7]. Далее рассуждая так же, как в работе [1], приходим к выводу, что внутренняя оснащающая плоскость $E_{S-1}=[M_i]$ есть гармоническая поляра [10] точки A_o относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_{\tau}$ (3.2).

Чтобы определить геометрическую интерпретацию внутренней оснащающей плоскости $E_{n-S}=[\sigma^i]$-двойственного образа плоскости E_{S-1} —рассмотрим инвариантный пучок гиперплоскостей

$$\eta = y_i(\tau^i - t^i_\alpha \tau^\alpha) + y_n \tau^n, \qquad (3.3)$$

осью которого является касательная плоскость $\overset{*}{E}_{n-s-1} = [\tau^n, \tau^i - t^i_\alpha \tau^\alpha]$ поверхности $\overset{*}{V}{}^{\tau}_{n-s-1}$, ассоциированной с гиперповерхностью V^{τ}_{n-1}, огибающей главные касательные гиперплоскости гиперполосы CH^{τ}_m.

О п р е д е л е н и е 2. Гиперплоскость η называется фокальной гиперплоскостью [7] плоскости $\overset{*}{E}_{n-s-1}$, если, кроме плоскости $\overset{*}{E}_{n-s-1}$, она проходит также через некоторую смежную касательную плоскость $\overset{*}{E}{}'_{n-s-1}$ поверхности $\overset{*}{V}_{n-s-1}$. Геометрическое место фокальных плоскостей η называется фокальным конусом Φ_{τ} касательной плоскости $\overset{*}{E}_{n-s-1}$ поверхности $\overset{*}{V}{}^{\tau}_{n-s-1}$.

Из условия фокальности гиперплоскости в силу уравнений (1.2)(1.15),(1.17) следует, что фокальный конус Φ_{τ} представляет собой алгебраическую поверхность класса τ [7]:

$$\det \| y_n \delta^t_p - y_i (a^{it}_p - t^i_\alpha a^{\alpha t}_p) \| = 0 \ (a); \quad y_p = y_\alpha = y_0 = 0 \ (\delta). \ (3.4)$$

Перепишем уравнение (3.4а) в виде

$$\sum_{S=0}^{\tau} \mathcal{D}_S (y_n)^{\tau - S} = 0, \qquad (3.5)$$

где $\mathcal{D}_S$ -главные миноры порядка S матрицы определителя (3.4а), причем

$$\mathcal{D}_0 = 1, \ \mathcal{D}_1 = \tau y_i \Lambda^i, \ \mathcal{D}_\tau = \det \| y_i (a^{it}_p - t^i_\alpha a^{\alpha t}_p) \|. \ (3.6)$$

Обозначим корни уравнения (3.5) через $y^{(p)}_n$. По обобщенной теореме Виетта имеем

$$-y_i \Lambda^i = \frac{1}{\tau} \sum y^{(p)}_n. \qquad (3.7)$$

Гиперплоскости $\eta^{(p)}$, соответствующие характеристическим корням $y^{(p)}_n$ уравнения (3.5), т.е. гиперплоскости вида

$$\eta^{(p)} = \tilde{y}_i (\tau^i - t^i_\alpha \tau^\alpha) + y^{(p)}_n \tau^n,$$

будем называть характеристическими гиперплоскостями пучка

$$\eta = \tilde{y}_i (\tau^i - t^i_\alpha \tau^\alpha) + y_n \tau^n, \qquad (3.8)$$

где y_n -переменная величина, а $\{\tilde{y}_i\}$ -фиксированные величины.

О п р е д е л е н и е 3. Гармонической полярой [10] гиперплоскости $\tau^n = \sigma^n$ относительно характеристических гиперплоскостей $\eta^{(p)}$ пучка (3.8), осью которого является $(n-s-1)$-мерная плоскость $\overset{*}{E}_{n-s-1}$, или (что то же) гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_τ назовем гиперплоскость

$$\bar{\eta} = \tilde{y}_i (\tau^i - t^i_\alpha \tau^\alpha) + \bar{y}_n \tau^n, \qquad (3.9)$$

где $\bar{y}_n = \frac{1}{\tau} \sum_{p=1}^{\tau} y^{(p)}_n$.

Учитывая (3.7),(3.9), получаем

$$\bar{\eta}=\tilde{y}_i(\tau^i-t^i_\alpha\tau^\alpha-\Lambda^i\tau^n)=\tilde{y}_i\sigma^i, \qquad (3.10)$$

т.е. гиперплоскость $\bar{\eta}$ проходит через инвариантную плоскость $E_{n-s}=[\sigma^i]$.

Если параметры $\{\tilde{y}_i\}$ в уравнении (3.10) меняются произвольным образом, то гиперплоскость $\bar{\eta}$ описывает пучок, осью которого является $(n-s)$-мерная плоскость E_{n-s} – гармоническая поляра гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_τ.

Итак, приходим к следующим результатам.

Т е о р е м а 1. Внутренняя оснащающая плоскость E_{s-1}, принадлежащая плоской образующей E_s поверхности V^τ_m, является гармонической полярой [10] точки A_o относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$, принадлежащей плоской образующей E_s нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m.

Внутренняя оснащающая плоскость $E_{n-s}=[\sigma^i]$, проходящая через касательную плоскость $\overset{*}{E}_{n-s-1}$ поверхности $\overset{*}{V}{}^\tau_{n-s-1}\subset V^\tau_{n-1}$, является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_τ (3.4), вершиной которого является плоскость $\overset{*}{E}_{n-s-1}$.

Аналогично доказывается теорема 2.

Т е о р е м а 2. Инвариантная плоскость $\Pi_{n-\tau-2}=[M_iM_\alpha]$, внутренним образом присоединенная к нераспадающейся гиперполосе CH^τ_m и принадлежащая характеристической плоскости $E_{n-\tau-1}$ данной гиперполосы CH^τ_m, является гармонической полярой точки A_o относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$:

$$\det\|(a^p_{\alpha q}+t^i_\alpha a^p_{iq})x^\alpha+a^p_{iq}x^i+\delta^p_q x^o\|=0;\ x^p=x^n=0, \qquad (3.11)$$

которая принадлежит образующей $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V^τ_{n-1} (характеристике гиперполосы).

Инвариантная плоскость $E_{\tau+1}=[\sigma^i,\sigma^\alpha]$, внутренним образом присоединенная к нераспадающейся гиперполосе CH^τ_m и проходящая через касательную плоскость T_τ поверхности V_τ, является гармонической полярой гиперплоскости относительно фокального конуса $\mathfrak{F}_\tau$:

$$\det\|y_n\delta^q_p+a^{\alpha q}_p y_\alpha+(a^{iq}_p-a^{\alpha q}_p t^i_\alpha)y_i\|=0;\ y_p=y_o=0, \qquad (3.12)$$

вершиной которого является касательная плоскость T_τ поверхности V_τ.

§ 4. О полях геометрических объектов нераспадающихся гиперполос CH^τ_m

1. Окрестность второго порядка.

В §2 построена система величин (2.14)-(2.17),(2.22)-(2.25),(2.32),(2.33),(2.36)-(2.40), охватываемая фундаментальным объектом второго порядка нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m. Продолжим построение полей геометрических объектов, определяемых в окрестности второго порядка исследуемой гиперполосы CH^τ_m. Прежде всего составим с помощью компонент геометрических объектов $\{C^i_{pq},C^\alpha_{pq}\};\{C^{pq}_\alpha,C^{pq}_i\}$ и двухвалентных основных тензоров a_{pq} и a^{pq} следующие величины:

$$\ell^p_{iq} = C^{ps}_i a_{sq}, \quad (4.1) \qquad \ell^{\alpha q}_p = C^{\alpha}_{ps} a^{sq}, \tag{4.2}$$

$$\ell^p_{\alpha q} = C^{ps}_{\alpha} a_{sq}, \quad (4.3) \qquad \ell^{iq}_p = C^i_{ps} a^{sq}, \tag{4.4}$$

$$\ell^j_i = \frac{1}{\tau}\ell^p_{iq}\ell^{iq}_p = \frac{1}{\tau}C^{pq}_i C^j_{pq}, \tag{4.5}$$

$$\ell^{\alpha}_i = \frac{1}{\tau}\ell^p_{iq}\ell^{\alpha q}_p = \frac{1}{\tau}C^{ps}_i C^{\alpha}_{ps}, \tag{4.6}$$

$$\ell^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{\tau}\ell^p_{\alpha q}\ell^{\beta q}_p = \frac{1}{\tau}C^{ps}_{\alpha} C^{\beta}_{ps}, \tag{4.7}$$

$$\ell_{ij} = \ell^p_{iq}\,\ell^q_{jp}, \tag{4.8}$$

$$\ell_{i\alpha} = \ell^p_{iq}\,\ell^q_{\alpha p}, \tag{4.9}$$

$$\ell^{\alpha i} = \ell^{\alpha q}_p\,\ell^{ip}_q, \tag{4.10}$$

$$\ell^{\alpha\beta} = \ell^{\alpha q}_p\,\ell^{\beta p}_q, \tag{4.11}$$

удовлетворяющие соответственно дифференциальным уравнениям

$$\nabla \ell^p_{iq} = -\ell^p_{iq}\omega^0_0 - \ell^{ps}_{iq}\omega^n_s, \tag{4.12}$$

$$\nabla \ell^{\alpha q}_p = \ell^{\alpha q}_p\omega^n_n + \ell^{\alpha q}_{ps}\omega^s, \tag{4.13}$$

$$\nabla \ell^p_{\alpha q} = -\ell^p_{\alpha q}\omega^0_0 + \ell^p_{iq}\omega^i_{\alpha} - \ell^{ps}_{\alpha q}\omega^n_s, \tag{4.14}$$

$$\nabla \ell^{iq}_p = \ell^{iq}_p\omega^n_n - \ell^{\alpha q}_p\omega^i_{\alpha} + \ell^{iq}_{ps}\omega^s, \tag{4.15}$$

$$\nabla \ell^j_i = \ell^j_i(\omega^n_n - \omega^0_0) - \ell^{\alpha}_i\omega^j_{\alpha} + \ell^j_{is}\omega^s, \tag{4.16}$$

$$\nabla \ell^{\alpha}_i = \ell^{\alpha}_i(\omega^n_n - \omega^0_0) + \ell^{\alpha}_{is}\omega^s, \tag{4.17}$$

$$\nabla \ell^{\beta}_{\alpha} = \ell^{\beta}_{\alpha}(\omega^n_n - \omega^0_0) + \ell^{\beta}_i\omega^i_{\alpha} + \ell^{\beta}_{\alpha s}\omega^s, \tag{4.18}$$

$$\nabla \ell_{ij} = -2\ell_{ij}\omega^0_0 + \ell_{ijs}\omega^s, \tag{4.19}$$

$$\nabla \ell_{i\alpha} = -2\ell_{i\alpha}\omega^0_0 + \ell_{ij}\omega^j_{\alpha} + \ell_{i\alpha s}\omega^s, \tag{4.20}$$

$$\nabla \ell^{\alpha i} = 2\ell^{\alpha i}\omega^n_n - \ell^{\alpha\beta}\omega^i_{\beta} + \ell^{\alpha i}_s\omega^s, \tag{4.21*}$$

$$\nabla \ell^{\alpha\beta} = 2\ell^{\alpha\beta}\omega^n_n + \ell^{\alpha\beta}_s\omega^s \tag{4.21}$$

Таким образом, найдены следующие геометрические объекты второго порядка нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_m :

$$\{\ell^p_{iq}, \ell^p_{\alpha q}\}, \quad \{\ell^{iq}_p, \ell^{\alpha q}_p\}, \quad \{\ell^j_i, \ell^{\alpha}_i\},$$
$$\{\ell^{\beta}_{\alpha}, \ell^{\beta}_i\}, \quad \{\ell_{ij}, \ell_{i\alpha}\}, \quad \{\ell^{\alpha i}, \ell^{\alpha\beta}\}. \tag{4.22}$$

Подобъекты $\ell^p_{iq}, \ell^{\alpha q}_p, \ell^{\alpha}_i, \ell_{i\alpha}, \ell^{\alpha\beta}$ соответствующих геометрических объектов (4.22) -относительные тензоры второго порядка данной гиперполосы CH^{τ}_m.

Построим еще один относительный тензор второго порядка Q^i_j :

$$\bar{\ell}^i_j = t^i_{\alpha}\,\ell^{\alpha}_j, \qquad \nabla_\delta \bar{\ell}^i_j = \bar{\ell}^i_j(\pi^n_n - \pi^0_0) - \pi^i_{\alpha}\ell^{\alpha}_j,$$
$$Q^i_j = \bar{\ell}^i_j - \ell^i_j, \qquad \nabla Q^i_j = Q^i_j(\omega^n_n - \omega^0_0) + Q^i_{js}\omega^s. \tag{4.23}$$

Зададим компонентам фундаментального объекта второго порядка Γ_2 нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_m следующие начальные значения [8]:

$$a_{pq} = \begin{cases} 2-\tau, & p=q; \\ 1, & p\neq q. \end{cases} \qquad \text{откуда} \quad a^{pq} = \begin{cases} 0, & i=j; \\ \frac{1}{\tau-1}, & i\neq j; \end{cases} \tag{4.24}$$

$$b_i^{pq}=\begin{cases} i^{p-1}, & p=q;\\ \dfrac{(\tau-2)(i^{\tau}-1)}{\tau(\tau-1)(i-1)}, & p\neq q;\end{cases}\qquad b^i_{pq}=\begin{cases} i^{p-1}+(\tau-2)i, & p=q;\\ -i, & p\neq q\ ;\end{cases}\tag{4.25}$$

$$b_\alpha^{pq}=\begin{cases} \alpha^{p-1}, & p=q;\\ \dfrac{(\tau-2)(\alpha^{\tau}-1)}{\tau(\tau-1)(\alpha-1)}, & p\neq q;\end{cases}\qquad b^\alpha_{pq}=\begin{cases} \alpha^{p-1}+(\tau-2)\alpha, & p=q;\\ -\alpha, & p\neq q,\end{cases}\tag{4.26}$$

где под i^{p-1} (α^{p-1}) понимается степень числа i (α) с показателем $p-1$. Тогда из соотношений (2.14)-(2.17), (2.22)-(2.25) при начальных значениях (4.24)-(4.26) получаем

$$C_i^{pq}=\begin{cases} i^{p-1}, & p=q;\\ \dfrac{(\tau-2)(i^{\tau}-1)}{\tau(\tau-1)(i-1)}, & p\neq q;\end{cases}\qquad C^i_{pq}=\begin{cases} i^{p-1}, & p=q;\\ 0, & p\neq q;\end{cases}\tag{4.27}$$

$$C_\alpha^{pq}=\begin{cases} \alpha^{p-1}, & p=q;\\ \dfrac{(\tau-2)(\alpha^{\tau}-1)}{\tau(\tau-1)(\alpha-1)}, & p\neq q;\end{cases}\qquad C^\alpha_{pq}=\begin{cases} \alpha^{p-1}, & p=q;\\ 0, & p\neq q.\end{cases}\tag{4.28}$$

Далее можно показать аналогично, как это сделано для регулярных гиперполос в работе [8], что для нераспадающихся гиперполос CH^τ_m в общем случае при начальных условиях (4.24)-(4.27) величины ℓ^j_i и относительные тензоры ℓ_{ij}, Q^j_i являются невырожденными. В дальнейшем рассмотрим такие вырожденные нераспадающиеся гиперполосы CH^τ_m, для которых тензоры ℓ_{ij}, Q^j_i невырождены.

Введем предварительно в рассмотрение для тензора Q^j_i взаимный тензор $\widetilde{Q}^j_i$:

$$Q^j_\kappa\widetilde{Q}^\kappa_i=Q^\kappa_i\widetilde{Q}^j_\kappa=\delta^j_i,\quad \nabla_\delta\widetilde{Q}^\kappa_i+\widetilde{Q}^\kappa_i(\pi^n_n-\pi^o_o)=0,\tag{4.29}$$

что позволяет определить с помощью тензора ℓ_{ij} симметрический тензор L_{ij} :

$$L_{ij}=-\frac{1}{2}(\widetilde{Q}^\kappa_i\ell_{\kappa j}+\widetilde{Q}^\kappa_j\ell_{\kappa i}),\quad \nabla_\delta L_{ij}=-L_{ij}(\pi^o_o+\pi^n_n).\tag{4.30}$$

Тензор L_{ij} в общем случае невырожденный (например, это можно показать при начальных условиях (4.24)-(4.27).

Квазитензор t^i_α и тензор L_{ij} дают возможность построить геометрический объект второго порядка $\{L_{ij}, L_{i\alpha}, L_{\alpha\beta}\}$ и геометрический объект второго порядка $\{L_{ij}, L_{i\alpha}\}$-подобъект этого объекта:

$$L_{i\alpha}=-L_{ij}t^j_\alpha,\quad \nabla L_{i\alpha}=-L_{i\alpha}(\omega^n_n-\omega^o_o)+L_{ij}\omega^j_\alpha+L_{i\alpha s}\omega^s,\tag{4.31}$$

$$L_{\alpha\beta}=-L_{i\alpha}t^i_\beta=L_{ij}t^i_\alpha t^j_\beta;\quad \nabla_\delta L_{\alpha\beta}=-L_{\alpha\beta}(\pi^n_n-\pi^o_o)+L_{i\beta}\pi^i_\alpha+L_{i\alpha}\pi^i_\beta.\tag{4.32}$$

5. Зак. 10461.

Комбинируя системы величин Λ_i (2.14), $\overline{\Lambda}_\alpha$ (2.17), Λ^i (2.39), L_{ij} (4.30), введем в рассмотрение еще пару квазитензоров второго порядка

$$\{\ell_i, L_{ij}, L_{i\alpha}\} \quad \text{и} \quad \{\ell_\alpha, \ell_i, L_{i\alpha}, L_{\alpha\beta}, L_{ij}\}. \quad (4.33)$$

Действительно, пользуясь уравнениями (2.18), (2.21), (2.44), (4.30), (4.31), находим, что системы величин

$$\ell_i = -(L_{ij}\Lambda^j + \Lambda_i), \quad (4.34) \qquad \ell_\alpha = -(L_{i\alpha}\Lambda^i + \overline{\Lambda}_\alpha) \quad (4.35)$$

удовлетворяют соответственно следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \ell_i = -\ell_i \omega_0^0 + L_{ij}\omega_n^j + L_{i\alpha}\omega_n^\alpha - \omega_i^0 + \ell_{is}\omega^s, \quad (4.36)$$

$$\nabla \ell_\alpha = -\ell_\alpha \omega_0^0 + \ell_i \omega_\alpha^i + L_{i\alpha}\omega_n^i + L_{\alpha\beta}\omega_n^\beta - \omega_\alpha^0 + \ell_{\alpha s}\omega^s. \quad (4.37)$$

Из уравнений (4.30)-(4.32), (4.36), (4.37) следует, что величины (4.33) - квазитензоры второго порядка.

Положим,

$$\lambda_p = a^{sv} a^{fw} \ell_{vwp} (C^\alpha_{pf} \overline{\Lambda}_\alpha + C^i_{sf}\Lambda_i), \quad (4.38)$$

$$\eta_p = \ell_{vwp} (C^{vw}_i \overline{\Lambda}^i + C^{vw}_\alpha \Lambda^\alpha). \quad (4.39)$$

Величины λ_p и η_p, определяемые в окрестности второго порядка элемента гиперполосы CH^r_m, в силу уравнений (1.25), (2.18)-(2.21), (2.26), (2.52) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla_\delta \lambda_p = -\lambda_p(2\pi_0^0 - \pi_n^n) + a^{sv} a^{fw} \ell_{vwp} C^\alpha_{sf}\pi^0_\alpha + a^{sv} a^{fw} \ell_{vwp} C^i_{sf}\pi^0_i, \quad (4.40)$$

$$\nabla_\delta \eta_p = -\eta_p(2\pi_0^0 - \pi_n^n) - \ell_{vwp} C^{vw}_\alpha \pi^\alpha_n - \ell_{vwp} C^{vw}_i \pi^i_n. \quad (4.41)$$

Используя тензор Дарбу ℓ_{pqt} (2.48), строим симметрический тензор

$$L_{pq} = a^{sv} a^{tw} \ell_{pst} \ell_{qvw}, \quad \nabla L_{pq} + 2L_{pq}\omega_0^0 = L_{pqs}\omega^s, \quad (4.42)$$

который в общем случае является невырожденным (например, при начальных условиях (4.24)-(4.27), т.е. существует взаимный ему тензор L^{pq}:

$$L^{ps} L_{sq} = \delta^p_q; \qquad \nabla L^{pq} - 2L^{pq}\omega_0^0 = L^{pq}_s \omega^s. \quad (4.43)$$

Наконец, можно построить еще один относительный инвариант второго порядка - K_0 (ранее нами построен относительный инвариант ℓ_0 (2.54). Действительно, рассматривая свертки величин ℓ^j_i (4.5) и ℓ^β_α (4.7), имеем

$$\ell^i_i = \widetilde{\ell}_0, \qquad \delta\widetilde{\ell}_0 = \widetilde{\ell}_0(\pi^n_n - \pi^0_0) - \ell_i \pi^i_\alpha, \quad (4.44)$$

$$\ell^\alpha_\alpha = \overline{\ell}_0, \qquad \delta\overline{\ell}_0 = \overline{\ell}_0(\pi^n_n - \pi^0_0) + \ell_i \pi^i_\alpha. \quad (4.45)$$

Откуда окончательно получаем

$$K_0 = \widetilde{\ell}_0 + \ell_0; \qquad dK_0 = K_0(\omega^n_n - \omega^0_0) + K_{0s}\omega^s. \quad (4.46)$$

В общем случае инвариант $K_0 \neq 0$. Например, при начальных условиях (4.24)-(4.27) $K_0 = \sum\limits_{n=r+1}^{n-1} \dfrac{u^{2r}-1}{u^2-1} \neq 0$ см[8].

2. Окрестность третьего порядка

Построим систему величин, связанных с третьей дифференциальной окрестностью элемента вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}, следуя работам [2], [8].

Продолжение уравнений (1.20) и (2.46) приводит соответственно к дифференциальным уравнениям

$$\nabla a_{pqt} + a_{pqt}(2\omega^{0}_{0} + \omega^{n}_{n}) + a_{(pq}\omega^{0}_{t)} - a_{s(p}a_{qt)}\omega^{s}_{n} = a_{pqts}\omega^{s}, \quad (4.47)$$

$$\nabla d_{p} + d_{p}\omega^{0}_{0} - a_{ps}\omega^{s}_{n} + \omega^{0}_{p} = t_{ps}\omega^{s}, \quad (4.48)$$

где, вообще говоря, $t_{ps} \neq t_{sp}$, а величины a_{pqts} симметричны по первым трем индексам p, q, t. Система величин $\{t_{ps}\}$ принадлежит окрестности третьего порядка элемента гиперполосы CH^{τ}_{m} и удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_{\delta} t_{pq} + 2t_{pq}\pi^{0}_{0} + d_{(p}\pi^{0}_{q)} - (a_{pqs} + a_{pq}d_{s})\pi^{s}_{n} + 2a_{pq}\pi^{0}_{n} +$$
$$+ b^{i}_{pq}\pi^{0}_{i} + b^{\alpha}_{pq}\pi^{0}_{\alpha} + a_{ps}a^{s}_{\alpha q}\pi^{\alpha}_{n} + a_{ps}a^{s}_{iq}\pi^{i}_{n} = 0. \quad (4.49)$$

При помощи этих величин t_{pq} третьего порядка и уже построенных ранее величин второго порядка последовательно определяем новые величины тертьего порядка $T, T_{0}, \hat{T}_{pq}, \hat{T}_{p}, T^{p}, K_{p}$:

$$T = \frac{1}{\tau}(t_{pq} - d_{p}d_{q})a^{pq}, \quad (4.50)$$

$$T_{0} = T - \bar{\Lambda}^{i}\ell_{i} - \Lambda^{\alpha}\ell_{\alpha}, \quad (4.51)$$

$$\hat{T}_{pq} = t_{pq} - d_{p}d_{q} - Ta_{pq}, \quad (4.52)$$

$$\hat{T}_{p} = a^{vw}a^{st}\hat{T}_{vs}\ell_{wtp} + (\lambda_{p} - \eta_{p}), \quad (4.53)$$

$$T^{p} = L^{pq}\hat{T}_{q}, \quad (4.54)$$

$$K_{p} = d_{p} - a_{pq}T^{q}, \quad (4.55)$$

уравнения которых в силу (1.20), (1.25), (2.18)-(2.21), (2.48), (4.36), (4.37), (4.40), (4.41), (4.43), (4.48), (4.49) имеют вид

$$\delta T - T(\pi^{n}_{n} - \pi^{0}_{0}) - 2d_{p}\pi^{p}_{n} + 2\pi^{0}_{n} + \bar{\Lambda}^{i}\pi^{0}_{i} + \Lambda^{\alpha}\pi^{n}_{\alpha} + \bar{\Lambda}_{\alpha}\pi^{\alpha}_{n} + \Lambda_{i}\pi^{i}_{n} = 0, \quad (4.56)$$

$$\delta T_{0} - T_{0}(\pi^{n}_{n} - \pi^{0}_{0}) - 2(d_{p}\pi^{s}_{n} - \pi^{0}_{n} + \ell_{i}\pi^{i}_{n} + \ell_{\alpha}\pi^{\alpha}_{n}) = 0, \quad (4.57)$$

$$\nabla_{\delta}\hat{T}_{pq} + 2\hat{T}_{pq}\pi^{0}_{0} - \ell_{pqs}\pi^{s}_{n} + c^{i}_{pq}\pi^{0}_{i} + c^{\alpha}_{pq}\pi^{0}_{\alpha} - \Lambda_{i}a_{pq}\pi^{i}_{n} -$$
$$- \bar{\Lambda}_{\alpha}a_{pq}\pi^{\alpha}_{n} + a_{ps}a^{s}_{qi}\pi^{i}_{n} + a_{ps}a^{s}_{q\alpha}\pi^{\alpha}_{n} = 0, \quad (4.58)$$

$$\nabla_{\delta}\hat{T}_{p} + \hat{T}_{p}(2\pi^{0}_{0} - \pi^{n}_{n}) - L_{pq}\pi^{q}_{n} = 0, \quad (4.59)$$

$$\nabla T^{p} = T^{p}\omega^{n}_{n} + \omega^{p}_{n} + T^{p}_{q}\omega^{q}, \quad (4.60)$$

$$\nabla K_{p} = -K_{p}\omega^{0}_{0} - \omega^{0}_{p} + K_{pq}\omega^{q}. \quad (4.61)$$

Из уравнений (4.60) и (4.61) следует, что каждая из систем величин T^{p} и K_{p} образует квазитензор третьего порядка исследуемой гиперполосы CH^{τ}_{m}. Назовем T^{p} и K_{p} второй парой нормальных квазитензоров третьего порядка данной гиперполосы CH^{τ}_{m} (в отличие от пары квазитензоров третьего порядка Λ^{p} (2.57) и Λ_{p} (2.58). Кроме того, системы величин $T^{p} + K^{p}$ и $K_{p} + \Lambda_{p}$ образуют тензоры третьего порядка

$$\nabla(T^{p} + \Lambda^{p}) = (T^{p} + \Lambda^{p})\omega^{n}_{n} + (\ldots)_{s}\omega^{s}, \quad (4.62)$$

$$\nabla(K_{p} + \Lambda_{p}) = -(K_{p} + \Lambda_{p})\omega^{0}_{0} + (\ldots)_{s}\omega^{s}, \quad (4.63)$$

что непосредственно видно из соотношений (2.58),(4.60) и (2.57),(4.61). Наконец, величина

$$\overline{J} = \ell_{pqt} L^{qt} (T^p + \Lambda^p) \qquad (4.64)$$

представляет собой абсолютный инвариант, так как из (2.52), (4.43),(4,62) получаем

$$\delta \overline{J} = 0.$$

3. Построение внутренних инвариантных реперов $\{M_\mathcal{J}\}$ и $\{\sigma^\mathcal{J}\}$ третьего порядка нераспадающейся гиперполосы CH_m^τ.

Продолжение уравнений (2.47) вводит величины t^{pq}, принадлежащие окрестности третьего порядка элемента гиперполосы CH_m^τ:

$$\nabla d^p = d^p \omega_n^n - a^{ps} \omega_s^0 + \omega_n^p - t^{pq} \omega_q^n, \qquad (4.65)$$

где, вообще говоря, $t^{pq} \neq t^{qp}$. Система величин $\{t^{pq}\}$ удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla_\delta t^{pq} = 2 t^{pq} \pi_n^n + d^{(p} \pi_n^{q)} - (a^{pqs} + a^{pq} d^s) \pi_s^0 + 2 a^{pq} \pi_n^0 +$$

$$+ b_i^{pq} \pi_n^i + b_\alpha^{pq} \pi_n^\alpha + a^{ps} a^{\alpha q} \pi_\alpha^0 + a^{ps} a_s^{iq} \pi_i^0 . \qquad (4.66)$$

Кроме того, рассмотрим еще одну величину $\overline{\overline{T}}$ третьего порядка:

$$\overline{\overline{T}} = \frac{1}{2} (t^{pq} - d^p d^q) a_{pq}, \qquad (4.67)$$

$$\delta \overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}} (\pi_n^n - \pi_0^0) + 2 \pi_n^0 - 2 d^p \pi_p^0 + \Lambda_i \pi_n^i + \overline{\Lambda}_\alpha \pi_n^\alpha + \overline{\Lambda}^i \pi_i^0 + \Lambda^\alpha \pi_\alpha^0 . \qquad (4.68)$$

Величины третьего порядка T (4.50) и $\overline{\overline{T}}$ (4.67) позволяют построить инвариантные реперы $\{M_\mathcal{J}\}$ и $\{\sigma^\mathcal{J}\}$, внутренним образом связанные с окрестностью третьего порядка элемента нераспадающейся гиперполосы CH_m^τ.

Действительно, величины

$$\widetilde{X} = \frac{1}{2} (\Lambda + T + a_{pq} \Lambda^p \Lambda^q) + \Lambda^p d_p \; ; \; \overline{Y} = \frac{1}{2} (\Lambda + \overline{\overline{T}} + a^{pq} \Lambda_p \Lambda_q) + \Lambda_p d^p$$

в силу соотношений (2.18),(2.19),(2.44),(2.45),(4.56), (1.20),(2.60),(4.48),(4.68),(1.25),(2.59),(4.65) удовлетворяют соответственно уравнениям (2.62) и (2.63) и, следовательно, определенные с их помощью точка

$$\widetilde{M}_n^* = A_n + \Lambda^\alpha A_\alpha + \overline{\Lambda}^i A_i + \Lambda^p A_p + \widetilde{X} A_0$$

и гиперплоскость

$$\overline{\overline{\sigma}}{}^0 = \tau^0 + \Lambda_p \tau^p + \Lambda_i \tau^i + \overline{\Lambda}_\alpha \tau^\alpha + \overline{Y} \tau^n$$

внутренним инвариантным образом присоединены в окрестности третьего порядка элемента гиперполосы CH_m^τ. При этом условие инцидентности (2.61) точки $\widetilde{M}_n^*$ и гиперплоскости $\overline{\overline{\sigma}}{}^0$ не выполняется. Однако можно выделить на прямой $[M_0, \widetilde{M}_n^*]$ инвариантную точку

$$\overline{\overline{M}}_n = A_n + \Lambda^p A_p + \Lambda^i A_i + A^\alpha A_\alpha - (\overline{Y} + \Lambda_p \Lambda^p + \Lambda_i \overline{\Lambda}^i + \Lambda^\alpha \overline{\Lambda}_\alpha) A_0 ,$$

внутренним образом присоединенную к гиперполосе CH_m^τ и инцидентную гиперплоскости $\overline{\overline{\sigma}}{}^0$, а в пучке гиперплоскостей $[\overline{\overline{\sigma}}{}^0, \sigma^n]$ — внутреннюю инвариантную гиперплоскость

$$\tilde{\tilde{\sigma}}^o=\tau^o+\Lambda_p\tau^p+\Lambda_i\tau^i+\bar{\Lambda}_\alpha\tau^\alpha-(\tilde{X}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\bar{\Lambda}_\alpha\Lambda^\alpha)\tau^n$$

инцидентную точке $\tilde{M}^*_n$. Более того, нетрудно показать, что величины

$$\Lambda^o=\frac{\alpha\tilde{X}+\beta\bar{X}}{\alpha+\beta}\,,\quad \Lambda_n=\frac{\alpha\tilde{Y}+\beta\bar{Y}}{\alpha+\beta}\,, \tag{4.69}$$

где

$$\bar{X}=-(\bar{Y}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\bar{\Lambda}_\alpha\Lambda^\alpha);\ \tilde{Y}=-(\tilde{X}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\bar{\Lambda}_\alpha\Lambda^\alpha),$$

а α и β произвольные действительные числа, удовлетворяют соответственно уравнениям (2.62) и (2.63). Таким образом, точка

$$M_n=A_n+\Lambda^pA_p+\bar{\Lambda}^iA_i+\Lambda^\alpha A_\alpha+\Lambda^oA_o \tag{4.70}$$

и гиперплоскость

$$\sigma^o=\tau^o+\Lambda_p\tau^p+\Lambda_i\tau^i+\bar{\Lambda}_\alpha\tau^\alpha+\Lambda_n\tau^n \tag{4.71}$$

внутренним инвариантным образом присоединены в окрестности третьего порядка элемента гиперполосы CH^τ_m, двойственны друг другу и, кроме того, удовлетворяют условию инцидентности (2.61). Построение точек $\{M_p, M_i, M_\alpha\}$ и гиперплоскостей $\{\sigma^p, \sigma^i, \sigma^\alpha\}$ соответственно реперов $\{M_\gamma\}$ и $\{\sigma^\gamma\}$ проводится так же, как и в § 2.

Итак, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы, присоединенные внутренним образом в окрестности третьего порядка элемента гиперполосы CH^τ_m, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&M_o=A_o, && \sigma^o=\tau^o+\Lambda_p\tau^p+\Lambda_i\tau^i+\bar{\Lambda}_\alpha\tau^\alpha+\Lambda_n\tau^n,\\
&M_p=A_p-\Lambda_pA_o, && \sigma^p=\tau^p-\Lambda^p\tau^n,\\
&M_i=A_i-\Lambda_iA_o, && \sigma^i=\tau^i-t^i_\alpha\tau^\alpha-\Lambda^i\tau^n,\\
&M_\alpha=A_\alpha+t^i_\alpha A_i-\Lambda_\alpha A_o, && \sigma^\alpha=\tau^\alpha-\Lambda^\alpha\tau^n, \qquad (4.72)\\
&M_n=A_n+\Lambda^\alpha A_\alpha+\bar{\Lambda}^iA_i+\Lambda^pA_p+\Lambda^oA_o, && \sigma^n=\tau^n.
\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Можно показать, что если соприкасающаяся плоскость второго порядка базисной поверхности V^τ_m нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m заполняет все пространство, то объект четвертого порядка гиперполосы CH^τ_m является полным.

§ 5. Пучок соприкасающихся гиперквадрик вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m

О п р е д е л е н и е Соприкасающейся гиперквадрикой гиперполосы $CH^\tau_m\subset P_n$ называется гиперквадрика Q_{n-1}, которая имеет касание второго порядка с данной гиперполосой CH^τ_m, т.е. точечное касание второго порядка с базисной поверхностью V^τ_m гиперполосы CH^τ_m и тангенциальное касание того же порядка с ее тангенциально вырожденной гиперповерхностью V^τ_{n-1} [9], [8].

Пусть уравнения гиперквадрики Q_{n-1} в точечном и тангенциальном реперах заданы в виде

$$g_{\gamma\varkappa}x^\gamma x^\varkappa=0 \quad \text{и} \quad g^{\gamma\varkappa}x_\gamma x_\varkappa=0. \tag{5.1}$$

Тогда требование касания второго порядка гиперквадрики с гиперполосой CH^τ_m с учетом соотношений (I.2), (I.6) – (I.10), (I.12), (I.13) приводит к равенствам

$$g_{oo}=g_{op}=g_{oi}=g_{o\alpha}=g^{nn}=g^{pn}=g^{ni}=g^{n\alpha}=0, \tag{5.2}$$

$$g_{pq}+g_{on}a_{pq}=g^{pq}+g^{on}a^{pq}=0. \qquad (5.2)$$

Кроме того, пронормируем коэффициенты уравнения гиперквадрики Q_{n-1} так, чтобы

$$g_{on}=g^{on}=-1. \qquad (5.3)$$

В силу (5.3) непосредственно получаем из (5.2), что

$$g_{pq}=a_{pq}; \quad g^{pq}=a^{pq}. \qquad (5.4)$$

Рассмотрим далее лишь те гиперквадрики Q_{n-1}, относительно которых касательная плоскость $T_r(A_o)$ поверхности центров V_r и характеристика $E_{n-r-1}(A_o)$ регулярной гиперполосы H_r, ассоциированной естественным образом с данной вырожденной нераспадающейся гиперполосой CH^r_m, полярно сопряжены:

$$g_{pi}=g_{p\alpha}=g^{pi}=g^{p\alpha}=0. \qquad (5.5)$$

Из оставшегося $\frac{(n+r)+(n-r)^2}{2}$ - параметрического семейства соприкасающихся гиперквадрик рассмотрим те, которые инвариантны относительно преобразований стационарной подгруппы элемента гиперполосы CH^r_m:

$$\nabla_\delta g_{\gamma\varkappa}=\theta g_{\gamma\varkappa}, \qquad (5.6)$$

откуда с учетом (5.3), получим

$$\theta(\delta)=-(\pi^o_o+\pi^n_n). \qquad (5.7)$$

В силу соотношений (5.2)-(5.5), (5.7) система (5.6) примет вид:

$$\nabla_\delta g_{ij}=-(\pi^o_o+\pi^n_n)g_{ij}, \qquad (5.8)$$

$$\nabla_\delta g_{i\alpha}=g_{ij}\pi^j_\alpha-(\pi^o_o+\pi^n_n)g_{i\alpha}, \qquad (5.9)$$

$$\nabla_\delta g_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}(\pi^o_o+\pi^n_n)+g_{i\beta}\pi^i_\alpha+g_{i\alpha}\pi^i_\beta, \qquad (5.10)$$

$$\nabla_\delta g_{in}=-g_{in}\pi^o_o+g_{ij}\pi^j_n+g_{i\alpha}\pi^\alpha_n-\pi^o_i, \qquad (5.11)$$

$$\nabla_\delta g_{\alpha n}=-g_{\alpha n}\pi^o_o+g_{in}\pi^i_n+g_{i\alpha}\pi^i_n+g_{\alpha\beta}\pi^\beta_n-\pi^o_\alpha, \qquad (5.12)$$

$$\nabla_\delta g_{pn}=a_{pq}\pi^q_n-g_{pn}\pi^o_o-\pi^o_p, \qquad (5.13)$$

$$\nabla_\delta g_{nn}=g_{nn}(\pi^n_n-\pi^o_o)-2(g_{\alpha n}\pi^\alpha_n+g_{in}\pi^i_n+g_{\alpha n}\pi^\alpha_n-\pi^o_n), \qquad (5.14)$$

$$\nabla_\delta g_{pq}=-g_{pq}(\pi^o_o+\pi^n_n). \qquad (5.15)$$

Уравнения (5.8)-(5.15) удовлетворяются в силу (4.30)-(4.32), (4.36)- (4.37), (4.48), (4.57), (1.20), если положить

$$g_{ij}=L_{ij}, \quad g_{i\alpha}=L_{i\alpha}, \quad g_{\alpha\beta}=L_{\alpha\beta}, \quad g_{in}=\ell_i,$$
$$g_{\alpha n}=\ell_\alpha, \quad g_{pn}=d_p, \quad g_{nn}=T_o+u_1K_o+u_2\ell_o, \qquad (5.16)$$

где u_1 и u_2 -инвариантные параметры.

Таким образом, в дифференциальной окрестности третьего порядка элемента вырожденной нераспадающейся гиперполосы $CH^r_m\subset P_n$ получена двупараметрическая связка внутренне инвариантно присоединенных к гиперполосе CH_m^r соприкасающихся гиперквадрик, уравнение поля которой в точечном репере записываются в виде

$$a_{pq}x^px^q+L_{ij}x^ix^j+L_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+2L_{i\alpha}x^ix^\alpha+2\ell_ix^ix^n+$$

$$+2\ell_\alpha x^\alpha x^n+2d_px^px^n+(T_o+u_1K_o+u_2\ell_o)(x^n)^2=2x^ox^n. \quad (5.17)$$

Уравнение поля соприкасающихся гиперквадрик (5.17) можно записать и в тангенциальном репере, определив необходимые коэффициенты $g^{\mathcal{I}\mathcal{K}}$ через величины (5.16) из условий $g^{\mathcal{I}\mathcal{K}}g_{\mathcal{K}\mathcal{J}}=\delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}}$:

$$g_{ps}g^{sq}=\delta^q_p,\quad g_{ik}g^{kj}=\delta^j_i,\quad g^{op}=g_{nq}a^{pq},$$

$$g^{oi}=g_{nk}g^{ki}+g_{n\beta}g^{\beta i};\ g^{oo}+g_{nn}=g_{np}g^{op}+g_{ni}g^{io}+g_{n\alpha}g^{\alpha o};$$

$$g^{o\alpha}=g_{ni}g^{i\alpha}+g_{n\beta}g^{\beta\alpha}.$$

В частности, если вырожденная гиперполоса CH_m^r является распадающейся [1], т.е. характеристика $E_{n-r-1}=[A_o,A_i,A_\alpha]$ распадается при этом на две плоскости $E_s=[A_o,A_i]$ и $E_{n-m-1}=[A_o,A_\alpha]$,то

$$\pi^i_\alpha=t^i_\alpha=L_{\alpha\beta}=L_{\alpha i}=0;\quad \ell_i=-\Lambda_i,\ \ell_\alpha=-\Lambda_\alpha \quad (5.18)$$

Уравнение поля соприкасающихся гиперквадрик (5.17) для вырожденных распадающихся гиперполос CH_m^r в общем случае, в силу (5.18), имеет вид :

$$a_{pq}x^px^q+L_{ij}x^ix^j-2\Lambda_ix^ix^n-2\Lambda_\alpha x^\alpha x^n+$$

$$+2d_px^px^n+(T_o+u_1K_o+u_2\ell_o)(x^n)^2=2x^ox^n \quad (5.19)$$

Заметим, что исследования §I-§4 для случая распадающихся гиперполос CH_m^r при $m=n-2$ в силу соотношений (5.18), приводят к результатам работы [I].

Рассмотрим регулярную гиперполосу H_r ассоциированную естественным образом с данной гиперполосой CH_m^r. Базисной поверхностью гиперполосы H_r является поверхность центров V_r плоских образующих E_s базисной поверхности V_m^r данной гиперполосы CH_m^r, а огибающей главных касательных гиперплоскостей гиперполосы H_r является тангенциально вырожденная гиперповерхность V_{n-1}^r. Тогда, как легко показать, потсроение поля соприкасающихся гиперквадрик (5.I7) для рассматриваемой регулярной гиперполосы H_r приводит к результатам работы [8].

Список литературы

I. П о п о в Ю.И., М и ш е н и н а Т.И. Инвариантное оснащение распадающейся $(n-2)$-мерной гиперполосы CH_{n-2}^r ранга r многомерного проективного пространства P_n.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.5, Калининград, I974, с.I03-I30.

2. Л а п т е в Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Труды Моск.матем.об-ва, I953, т.2, с. 275-383.

3. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., 1950.

4. Ч и к м а з я н А.В. Двойственная нормализация. - Докл. Арм. ССР, 1959, т.128, №4, с.151-157.

5. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. - Труды геометрич. семинара ВИНИТИ, М., 1966, т.1, с.239-263.

6. В а с и л ь я н М.А. Об инвариантном оснащении гиперполосы. - Докл. АН Арм. ССР, 1970, т.50, №2, с.65-69.

7. А к и в и с М.А. Фокальные образы поверхности ранга r. - Известия вузов. Математика, 1957, №1, с.9-19.

8. С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы. - Известия вузов. Математика, 1975, (в печати).

9. О л о н и ч е в П.М. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос. - Докл. АН СССР, 1951, т.180, №2, с.165-168.

10. Casanova G. „La nation de pôle harmonique". Rev. math. spéc., 1955, t. 65, №6, s. 437-440.

О.С. Р е д о з у б о в а

О МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПАР θ КОНГРУЭНЦИЙ

Проективные свойства пар θ конгруэнций изучены в работах [1], [2]. Цель настоящей работы - изучение метрических свойств пар θ.

§1. Общая характеристика пар θ конгруэнций в E_3

О п р е д е л е н и е 1,1. Пара прямолинейных конгруэнций $\{F_a, F'_a\}=\{\tau_a\}$, где F_a, F'_a -фокусы прямых τ_a этих конгруэнций, называется парой θ, если: 1/касательная плоскость поверхности (F_1) проходит через фокус F_2, касательная плоскость поверхности (F'_1) -через фокус F'_2; 2/касательная плоскость фокальной поверхности (F_2) содержит точку F'_1, а касательная плоскость поверхности (F'_2)-точку F_1. Обе конгруэнции не являются параболическими ($a=1,2$).

С парой конгруэнций $\{\tau_a\}$ связана конгруэнция общих перпендикуляров $\{\tau\}$. Пусть K_a -точки пересечения прямых τ с соответствующими прямыми τ_a. Отнесем конфигурацию к ортонормированному подвижному реперу $\{A,\vec{e}_k\}$ ($k=1,2,3$), вершина A которого принадлежит прямой τ, а вектор $\vec{e}_3$ служит направляющим вектором этой прямой. Деривационные формулы репера $\{A,\vec{e}_k\}$ имеют вид

$$dA=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j \quad (i,j=1,2,3), \qquad (1.1)$$

где формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства E_3

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \qquad (1.2)$$

и тождествам

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0. \qquad (1.3)$$

Обозначим координаты точек K_a относительно репера $\{A, \vec{e}_k\}$ на τ через h_a, углы, которые прямые τ_a образуют с вектором $\vec{e}_1$ - через α_a, абсциссы фокусов F_a, F'_a по отношению к реперу $\{K_a, \vec{\eta}_a\}$ на прямой τ_a - через ρ_a, ρ'_a ; $\vec{\eta}_a = \vec{e}_1\cos\alpha_a + \vec{e}_2\sin\alpha_a$ направляющий вектор прямой τ_a. Имеем

$$\vec{F}_a = \vec{A} + \vec{e}_1\rho_a\cos\alpha_a + \vec{e}_2\rho_a\sin\alpha_a + \vec{e}_3 h_a; \qquad (1.4)$$

$$\begin{aligned} d\vec{F}_a = {} & \vec{e}_1\{\omega^1 - (\omega_1^2 + d\alpha_a)\rho_a\sin\alpha_a - \omega_1^3 h_a + d\rho_a\cos\alpha_a\} + \\ & + \vec{e}_2\{\omega^2 + (\omega_1^2 + d\alpha_a)\rho_a\cos\alpha_a - \omega_2^3 h_a + d\rho_a\sin\alpha_a\} + \\ & + \vec{e}_3\{\omega^3 + dh_a + \omega_1^3\rho_a\cos\alpha_a + \omega_2^3\sin\alpha_a\}. \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Формулы, определяющие $\vec{F}'_a$ и $d\vec{F}'_a$, имеют аналогичный вид (с заменой ρ_a на ρ'_a). Из определения пар Θ следует:

$$\begin{aligned} & (d\vec{F}_1, \vec{\eta}_1, \overrightarrow{F_1F_2}) = 0, \quad (d\vec{F}'_1, \vec{\eta}_1, \overrightarrow{F'_1F'_2}) = 0, \\ & (d\vec{F}_2, \vec{\eta}_2, \overrightarrow{F_2F'_1}) = 0, \quad (d\vec{F}'_2, \vec{\eta}_2, \overrightarrow{F'_2F_1}) = 0. \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Обозначая

$$H_a = \frac{\omega^3 + dh_a}{h_1 - h_2}, \quad A_a = \frac{\omega_1^2 + d\alpha_a}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$\Omega_{a3} = \omega_1^3\cos\alpha_a + \omega_2^3\sin\alpha_a, \quad \Omega^*_{a3} = -\omega_1^3\sin\alpha_a + \omega_2^3\cos\alpha_a,$$

$$\Omega_a = \omega^1\cos\alpha_a + \omega^2\sin\alpha_a, \quad \Omega^*_a = \omega^1\sin\alpha_a - \omega^2\cos\alpha_a, \qquad (1.7)$$

$$\Theta_a = \frac{\Omega^*_a + h_a\Omega^*_{a3}}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

приведем уравнения (1.6) к виду

$$\begin{aligned} & A_1(\rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2) + \Theta_1(\rho'_2 - \rho_2) + \Omega_{13}\frac{\rho_2\rho'_2(\rho_1 - \rho'_1)}{h_1 - h_2} = 0, \\ & H_1(\rho'_1\rho_2 - \rho'_2\rho_1) + \Theta_1(\rho'_1 - \rho_1) + \Omega_{13}\frac{\rho_1\rho'_1(\rho_2 - \rho'_2)}{h_1 - h_2} = 0, \\ & A_2(\rho'_1\rho'_2 - \rho_1\rho_2) + \Theta_2(\rho_1 - \rho'_1) + \Omega_{23}\frac{\rho_1\rho'_1(\rho_2 - \rho'_2)}{h_1 - h_2} = 0, \\ & H_2(\rho_1\rho_2 - \rho'_1\rho'_2) + \Theta_2(\rho_2 - \rho'_2) + \Omega_{23}\frac{\rho_2\rho'_2(\rho_1 - \rho'_1)}{h_1 - h_2} = 0. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Т е о р е м а 1.1. Существует четыре класса пар Θ: пары $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ для которых соответственно

1) $\rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2 \neq 0, \quad \rho_1\rho_2 - \rho'_1\rho'_2 \neq 0;$ (1.9)
2) $\rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2 = 0, \quad \rho_1\rho_2 - \rho'_1\rho'_2 \neq 0:$ (1.10)
3) $\rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2 \neq 0, \quad \rho_1\rho_2 - \rho'_1\rho'_2 = 0;$ (1.11)
4) $\rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2 = 0, \quad \rho_1\rho_2 - \rho'_1\rho'_2 = 0.$ (1.12)

Пары Θ_1 определяются с произволом двух функций двух аргументов, пары Θ_2 и Θ_3 -с произволом одной функции двух аргументов и пары Θ_4 -с произволом четырех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Учитывая (1.9), приводим систему (1.8) к виду

$$A_1 = \Theta_1\frac{\rho_2 - \rho'_2}{\rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2} - \Omega_{13}\frac{\rho_2\rho'_2(\rho_1 - \rho'_1)}{(h_1 - h_2)(\rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2)}, \qquad (1.13)$$

$$A_2=\Theta_2\frac{\rho_1-\rho_1'}{\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2'}+\Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_1'(\rho_2-\rho_2')}{(h_1-h_2)(\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2')},$$

$$H_1=\Theta_1\frac{\rho_1-\rho_2'}{\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2'}-\Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_1'(\rho_2-\rho_2')}{(h_1-h_2)(\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2')}, \qquad (1.13)$$

$$H_2=\Theta_2\frac{\rho_2-\rho_2'}{\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2'}-\Omega_{23}\frac{\rho_2\rho_2'(\rho_1-\rho_1')}{(h_1-h_2)(\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2')}.$$

Замыкая систему (1.13), убеждаемся, что полученная замкнутая система в инволюции и определяет пары Θ_1 с произволом двух функций двух аргументов.

2/Из (1.10) следует, что для пар Θ_2 имеет место прямая пропорциональная зависимость абсцисс фокусов $\rho_1:\rho_2=\rho_1':\rho_2'$. Учитывая (1.10), систему (1.8) приводим к виду

$$\Theta_1=\Omega_{13}\frac{\rho_1'\rho_2}{h_1-h_2},\qquad \Theta_2=A_2\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')}{\rho_1}-\Omega_{23}\frac{\rho_2\rho_1'}{h_1-h_2},$$

$$H_1=A_1\frac{\rho_1}{\rho_2}-\Omega_{13}\frac{\rho_1+\rho_1'}{h_1-h_2},\quad H_2=-A_2\frac{\rho_2}{\rho_1}. \qquad (1.14)$$

Ее замыкание имеет вид:

$$(A_1\wedge\Omega_{13})\left\{\rho_1'(\rho_1-\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2))+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_2)\right\}+$$

$$+(A_1\wedge\Omega_{23})\left\{2\rho_1'\rho_2+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1)\right\}-$$

$$-(A_1\wedge A_2)\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')(h_1-h_2)}{\rho_1}+(A_2\wedge\Omega_{13})\frac{\rho_1'\rho_2(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2))}{\rho_1}+$$

$$+(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\frac{(\rho_1+\rho_1')(h_1-h_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}-(\rho_2\,d\rho_1'+\rho_1'\,d\rho_2)\wedge\Omega_{13}=0,$$

$$(A_1\wedge A_2)(\rho_1-\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2))+(d\rho_2\wedge A_2)-(d\rho_1\wedge A_2)\frac{\rho_2}{\rho_1}+$$

$$+(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\frac{\rho_2-\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}=0,$$

$$-(A_2\wedge\Omega_{13})\left\{\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_1\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)+2\rho_1'\rho_2\right\}+ \qquad (1.15)$$

$$+(A_2\wedge\Omega_{23})\left\{-\frac{\rho_1'\rho_2}{\rho_1}(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2))+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_1\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_1+\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2))\right\}+$$

$$+(A_1\wedge\Omega_{23})\rho_1'(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1)+(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\left\{\frac{\rho_1'\rho_2(\rho_1+\rho_1')}{h_1-h_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')(h_1-h_2)}{\rho_1\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}\right\}-(d\rho_2\wedge A_2)\frac{(\rho_1+\rho_1')(h_1-h_2)}{\rho_1}-(d\rho_1'\wedge A_2)\frac{\rho_2(h_1-h_2)}{\rho_1}-$$

$$-(d\rho_1\wedge A_2)\left\{\frac{\rho_2(h_1-h_2)}{\rho_1}-\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')(h_1-h_2)}{(\rho_1)^2}\right\}+(\rho_1'd\rho_2+\rho_2d\rho_1')\wedge\Omega_{23}=0,$$

$$(A_1\wedge\Omega_{13})\frac{\rho_1+\rho_1'}{\rho_2}(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1)-(A_1\wedge\Omega_{23})(\rho_1+\rho_1')-(A_2\wedge\Omega_{13})\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')}{\rho_1}+$$

$$+(A_1\wedge A_2)\frac{h_1-h_2}{\rho_2}(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2))-(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\frac{h_1-h_2}{\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\rho_1)-$$

$$-(d\rho_1\wedge A_1)\frac{h_1-h_2}{\rho_2}+(d\rho_2\wedge A_1)\frac{\rho_1(h_1-h_2)}{(\rho_2)^2}+(d\rho_1+d\rho_1')\wedge\Omega_{13}=0.$$

Из (1.14),(1.15) следует, что

$$s_1 = 4\,,\quad s_2 = 1\,,\quad Q = N = 6\,.$$

Система (1.14),(1.15)-в инволюции и определяет пары Θ_1 с произволом одной функции двух аргументов.

3/Из (1.11) следует, что для пар Θ_3 абсциссы фокусов обратно пропорциональны: $\rho_1 : \rho_1' = \rho_2' : \rho_2$.

В силу (1.11) система (1.8) приводится к виду

$$H_1 = -A_1 \frac{\rho_1'}{\rho_2}\,,\quad H_2 = A_2 \frac{\rho_2}{\rho_1'} - \Omega_{23} \frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')}{\rho_1'(h_1-h_2)}\,,$$

$$\Theta_1 = A_1(\rho_1+\rho_1') - \Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}\,,\quad \Theta_2 = \Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}\,. \tag{1.16}$$

Замыкая (1.16), убеждаемся, что пары Θ_3 определяются с произволом одной функции двух аргументов.

4/Наконец, для пар Θ_4 соотношения (1.12) приводятся к виду

$$\rho_1' = -\rho_1\,,\quad \rho_2' = -\rho_2\,. \tag{1.17}$$

Здесь прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые пары Θ_4 в их центрах. Замкнутая система уравнений, определяющая пары Θ_4, имеет вид :

$$H_1 = A_1\frac{\rho_1}{\rho_2}\,,\qquad H_2 = -A_2\frac{\rho_2}{\rho_1}\,,$$

$$\Theta_1 = -\Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}\,,\qquad \Theta_2 = \Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}\,. \tag{1.18}$$

$$(d\rho_2\wedge A_1)\frac{\rho_1}{\rho_2} - (d\rho_1\wedge A_1) + (A_1\wedge A_2)(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)) -$$

$$-(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\frac{\rho_1+\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)} = 0\,,$$

$$(d\rho_2\wedge A_2) - (d\rho_1\wedge A_2)\frac{\rho_2}{\rho_1} + (A_1\wedge A_2)(\rho_1-\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)) +$$

$$+(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\frac{\rho_2-\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)} = 0\,,$$

$$(A_1\wedge\Omega_{13})\Big\{\rho_1(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1) + \frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_2)\Big\} - \tag{1.19}$$

$$-(A_2\wedge\Omega_{13})\rho_2(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)) + (A_1\wedge\Omega_{23})\Big\{-2\rho_1\rho_2 +$$

$$+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1) + (\rho_2 d\rho_1 + \rho_1 d\rho_2)\wedge\Omega_{13} = 0\,,$$

$$(A_1\wedge\Omega_{23})\rho_1(\rho_1-\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)) + (A_2\wedge\Omega_{23})\Big\{\rho_2(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)) +$$

$$+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_1\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_1+\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)) - (A_2\wedge\Omega_{13})\Big\{2\rho_1\rho_2 +$$

$$+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_1\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)) - (\rho_1 d\rho_2 + \rho_2 d\rho_1)\wedge\Omega_{23} = 0\,.$$

Имеем $s_1 = 4\,,\ s_2 = 0\,,\quad Q = N = 4\,.$

Система (1.18),(1.19)- в иновлюции и определяет пары Θ_4 с произволом четырех функций одного аргумента. Теорема доказана.

§2. Геометрические свойства пар θ

Для выяснения геометрической характеристики пар θ_2, θ_3 и θ_4 отнесем их к новому каноническому реперу – трехграннику Гишара [3, с.73], вершина которого находится в центре прямой τ конгруэнции общих перпендикуляров, а векторы $\vec{e}_a$ помещены в биссекторных плоскостях фокальных плоскостей конгруэнции $\{\tau\}$. Тогда

$$\omega^1 = -\hat{\rho}\,\mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \omega_2^3, \quad \omega^2 = -\hat{\rho}\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot \omega_1^3, \tag{2.1}$$

где $2\hat{\rho}$ и 2φ соответственно есть фокальное расстояние и угол между фокальными плоскостями конгруэнции $\{\tau\}$. Подставляя (2.1) в первое уравнение системы (1.14) и учитывая независимость форм ω_1^3, ω_2^3, получим систему уравнений

$$\frac{h_1}{\sin 2\alpha_1} = \frac{\hat{\rho}}{\sin 2\varphi}, \quad \frac{\rho_1'\rho_2}{h_1 - h_2} = \frac{8d \sin(\varphi - \alpha_1)\sin(\varphi + \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

где $2d = \dfrac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi}$ – расстояние между граничными точками конгруэнции общих перпендикуляров $\{\tau\}$; $\varphi - \alpha_1, \varphi + \alpha_1$ – углы, которые образует прямая τ_1 с фокальными плоскостями этой конгруэнции $\{\tau\}$. Полученные условия являются необходимыми для пар θ_2. Аналогичным геометрическим свойством обладают и пары θ_3. Из последних двух уравнений системы (1.18), используя трехгранник Гишара, получим уравнения

$$\begin{gathered} h_1 - h_2 = 2d \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\alpha_1 + \alpha_2), \\ h_1 + h_2 = 2d \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2), \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\cdot\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos 2\varphi, \\ \rho_1\rho_2 = 2d \cdot \frac{h_1 - h_2}{2}\cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Анализируя систему уравнений (2.2), (2.3) и учитывая, что $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ есть ассиметрия пары θ_4, а $\dfrac{h_1 + h_2}{2}$ – эксцентриситет, приходим к следующим теоремам:

Т е о р е м а 2.1. Расстояние между соответствующими прямыми пары θ_4 равно произведению синуса угла между этими прямыми, расстояния между граничными точками прямых конгруэнции общих перпендикуляров и косинуса двойной ассиметрии.

Т е о р е м а 2.2. Отношение двойного эксцентриситета пар θ_4 к синусу двойной ассиметрии равно произведению расстояния между граничными точками прямых конгруэнции общих перпендикуляров и косинуса угла между соответствующими прямыми пары.

Т е о р е м а 2.3. Косинус угла между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров пар θ_4 равен произведению косинуса угла между соответствующими прямыми и косинуса двойной ассиметрии.

Т е о р е м а 2.4. Произведение абсцисс фокусов прямых τ_a пары θ_4 равно произведению расстояния между граничными точками конгруэнции общих перпендикуляров, половины расстояния между соответствующими прямыми и синуса двойной ассиметрии.

Т е о р е м а 2.5. Пары θ_4 конгруэнций характеризуются тем свойством, что у них расстояния между соответствующими прямыми пар дополнительных конгруэнций (F_1F_2), $(F_1'F_2')$ и (F_2F_1'), $(F_2'F_1)$ равны между собой.

Доказательство. Для пар Θ_4 и только для них имеем

$$\rho\{(F_1F_2),(F_1'F_2')\} = \rho\{(F_2F_1'),(F_2'F_1)\} =$$

$$\frac{(\rho_1-\rho_1')(\rho_2-\rho_2')\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{(\rho_1-\rho_1')^2+(\rho_2-\rho_2')^2-2(\rho_1-\rho_1')(\rho_2-\rho_2')\cos(\alpha_1-\alpha_2)}}$$

§3. Некоторые классы пар Θ конгруэнций

Определение 3.1. Пара Θ называется ортогональной, если угол между прямыми τ_1 и τ_2 – прямой, т.е.

$$\alpha_1-\alpha_2=\frac{\pi}{2}. \tag{3.1}$$

Из определения ортогональной пары следует, что

$$A_1=A_2. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. Ортогональные пары Θ_1 существуют с произволом одной функции двух аргументов, ортогональные пары Θ_2, Θ_3 – с произволом четырех функций одного аргумента. Не существует ортогональных пар Θ_4.

Докажем, например, последнее утверждение теоремы. Учитывая (1.18), (3.1), (3.2), приводим первое и второе уравнения (1.19) к виду

$$(d\rho_2\wedge A_1)\rho_1-(d\rho_1\wedge A_1)\rho_2=0,\quad (\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\rho_1\rho_2=0,$$

откуда следует, что $\rho_1\rho_2=0$, чего быть не может.

Теорема 3.2. Для того чтобы у ортогональных пар Θ_1 углы между соответствующими прямыми пар дополнительных

конгруэнций были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекали в центрах одну из конгруэнций пары.

Доказательство. Равенство углов между соответствующими прямыми (F_1F_2), $(F_1'F_2')$ и (F_2F_1'), (F_1F_2') дополнительных конгруэнций приводит к уравнению

$$\frac{\rho_1\rho_1'+\rho_2\rho_2'+(h_1-h_2)^2-(\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2')\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{(\rho_1)^2+(\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+(h_1-h_2)^2}\sqrt{(\rho_1')^2+(\rho_2')^2-2\rho_1'\rho_2'\cos(\alpha_1-\alpha_2)+(h_1-h_2)^2}}=$$

$$=\frac{\rho_1\rho_1'+\rho_2\rho_2'+(h_1-h_2)^2-(\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2')\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{(\rho_1)^2+(\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2'\cos(\alpha_1-\alpha_2)+(h_1-h_2)^2}\sqrt{(\rho_1')^2+(\rho_2)^2-2\rho_1'\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+(h_1-h_2)^2}}. \tag{3.3}$$

Используя (3.1), приводим уравнение (3.3) к виду

$$\{(\rho_2)^2-(\rho_2')^2\}\{(\rho_1')^2-(\rho_1)^2\}=0,$$

откуда следует, что либо $\rho_1'=-\rho_1$, либо $\rho_2'=-\rho_2$ (3.4)

Наоборот, если пара Θ_1 ортогональна и имеет место одно из условий (3.4), то равны углы между соответствующими прямыми пар дополнительных конгруэнций.

Легко показать, что ортогональные пары Θ_1 с равными углами между соответствующими прямыми пар дополнительных конгруэнций существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

Определение 3.2. Парой Θ' называется пара Θ_1, у которой постоянен угол между соответствующими прямыми и расстояние между ними.

Т е о р е м а 3.3. Пары θ' определяются с произволом четырех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения (3.2) следует, что для пар θ' справедливы соотношения

$$A_1=A_2\equiv A\,, \qquad H_1=H_2\equiv H\,. \tag{3.5}$$

Уравнения (1.8) в этом случае приводятся к виду

$$H=\frac{-\tau_2 g\Omega_{13}+\rho\tau_1\Omega_{23}}{(h_1-h_2)\delta}\,, \quad A=\frac{\rho\tau_2\Omega_{13}+\tau_1 g\Omega_{23}}{(h_1-h_2)\delta}\,, \tag{3.6}$$

$$\Theta_1=\frac{\Omega_{13}\tau_1\tau_2\mu+\Omega_{23}\rho^2}{(h_1-h_2)\delta}\,, \quad \Theta_2=\frac{\Omega_{13}g^2-\Omega_{23}\tau_1\tau_2\mu}{(h_1-h_2)\delta}\,, \tag{3.7}$$

$$\mu=\rho_1\rho_1'+\rho_2\rho_2',\ \rho=\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2',\ g=\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2',\ \tau_a=\rho_a-\rho_a',\ \delta=(\tau_1)^2+(\tau_2)^2.$$

Замыкая систему (3.6),(3.7) и исследуя полученную замкнутую систему, убеждаемся в справедливости теоремы.

Заметим, что в случае постоянного расстояния между соответствующими прямыми пары Θ эти прямые лежат в касательных плоскостях двух параллельных поверхностей.

Т е о р е м а 3.4. Для того чтобы пара θ' была ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция общих перпендикуляров была либо нормальной, либо изотропной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем пару θ' к трехграннику Гишара (см. §2). Используя уравнения (3.7), получим

$$2d\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos 2\varphi-(h_1-h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)=0. \tag{3.8}$$

Если пара θ' ортогональна, то (3.8) приводится к виду

$$2d\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos 2\varphi=0\,, \tag{3.9}$$

откуда следует, что либо $2d=0$, либо $\cos 2\varphi=0$. Если $2d=0$, то конгруэнция общих перпендикуляров $\{\tau\}$ – изотропная, если $\cos 2\varphi=0$, то конгруэнция $\{\tau\}$ – нормальная. Наоборот, если у пары θ' конгруэнция $\{\tau\}$ изотропная или нормальная, то из (3.8) вытекает ортогональность пары θ'.

Т е о р е м а 3.5. Если пара θ' не ортогональная, то фокальное расстояние конгруэнции общих перпендикуляров так относится к расстоянию между соответствующими прямыми, как котангенсы углов между этими прямыми и между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в уравнение (3.8)

$$2d=\frac{2\hat\rho}{\sin 2\varphi}\,, \tag{3.10}$$

получим

$$\frac{2\hat\rho}{\sin 2\varphi}=\frac{\operatorname{ctg}(\alpha_1-\alpha_2)}{\operatorname{ctg}2\varphi}\,, \tag{3.11}$$

откуда непосредственно следует теорема.

Список литературы

1. К а р а п е т я н С.Е. Конгруэнция Θ Попова – "Сб. науч.тр. Ереванского гос.пед.ин-та", 1955, №5, с.189-214.

2. Ф и н и к о в С.П., Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956, 457с.

3. Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций. М.-Л., ГИТТЛ, 1950, 528 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.6 1975

Г.Л.Свешникова

О КАСАТЕЛЬНО ОСНАЩЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется конгруэнция (двупараметрическое семейство) F кривых второго порядка (коник) с двумя вырождающимися фокальными поверхностями [1], для которой задано касательное распределение. Такая конгруэнция называется касательно оснащенной конгруэнцией коник [2], [3] с вырождающимися фокальными поверхностями, или конгруэнцией F^*. Построен канонический репер конгруэнции F^*, рассмотрены основные геометрические образы. Изучен подкласс с двусторонним расслоением прямолинейных конгруэнций [4], ассоциированных с конгруэнцией F^*.

§1. Построение репера конгруэнции F^*

Определение. Конгруэнцией F называется конгруэнция кривых второго порядка, обладающая следующими свойствами: 1/ существуют две фокальные поверхности (S_i) конгруэнции коник ($i,j,k=1,2;\ i\neq j$), вырождающиеся в линии; 2/ касательные ℓ_i к линиям (S_i) в точках S_i не инцидентны плоскости коники.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_\alpha\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3,4), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0. \tag{1.3}$$

Поместим вершину A_i репера R в фокальную точку S_i коники, описывающую линию (S_i), вершину A_3 – в полюс прямой A_1A_2 относительно коники, а A_4 – на прямую ℓ, проходящую через точку A_3 и пересекающую прямые ℓ_i.

Уравнения коники относительно репера R записываются в виде

$$(x^3)^2-2p\,x^1x^2=0,\quad x^4=0,\quad p\neq 0 \tag{1.4}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции F:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3i}\omega_i,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,$$
$$\omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3-d\ln p=a^k\omega_k, \tag{1.5}$$

причем

$$\Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{jj}+\Gamma_4^{jj}=0. \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем по индексам i и j суммирование не производится, $\omega_i=\omega_i^4$, $\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$.

Зададим величину λ, удовлетворяющую уравнению

$$d\lambda+\lambda(\omega_1^1-\omega_2^2)+(\Gamma_3^{41}-\lambda\Gamma_3^{42})(\lambda\omega_1^3+\omega_2^3)=m^k\omega_k. \tag{1.7}$$

Геометрический объект

$$\Gamma=\{p,\Gamma_i^{3i},\Gamma_3^{ik},\Gamma_3^{4i},\Gamma_4^{ik},a^i,\lambda\} \qquad (1.8)$$

является касательно оснащающим объектом конгруэнции F [1]. Такую конгруэнцию F назовем касательно оснащенной конгруэнцией коник с вырождающимися фокальными поверхностями или конгруэнцией F^*. Относительно инвариантная форма

$$\theta_1\equiv\lambda\omega_1+\omega_2 \qquad (1.9)$$

называется оснащающей формой Пфаффа [1].

Осуществим следующую фиксацию вторичных параметров конгруэнции:

$$\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32}=0,\quad p=1 \qquad (1.10)$$

и приведем величину λ к единице. Тогда вершина A_4 репера R совместится с четвертой гармонической к точке A_3 относительно точек B_i

$$B_i=\Gamma_i^{3i}A_3+A_4, \qquad (1.11)$$

являющихся точками пересечения прямых ℓ_i с прямой ℓ.

Репер геометрически фиксирован.

Обозначим

$$\omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k.$$

Тогда система уравнений Пфаффа для конгруэнции F запишется в виде

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=(-1)^j\Gamma_1^{31}\omega_i,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,$$

$$\omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k, \qquad (1.12)$$

$$\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=a^k\omega_k,\quad \omega_1^1-\omega_2^2+(\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42})(\omega_1^3+\omega_2^3)=m^k\omega_k,$$

где

$$\Gamma_4^{ii}+(-1)^i\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{ii}=0,$$

$$d\Gamma_1^{31}+\Gamma_1^{31}(\omega_3^3-\omega_4^4)+(\Gamma_1^{31})^2(\Gamma_3^{41}\omega_1-\Gamma_3^{42}\omega_2)-\Gamma_4^{31}\omega_1+\Gamma_4^{32}\omega_2=0. \qquad (1.13)$$

§ 2. Геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией F^*

Рассмотрим некоторые ассоциированные с конгруэнцией F^* геометрические образы.

Оснащающая прямая

$$x^1-x^2+\mu x^3=0,\ x^4=0,\quad \mu=\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42} \qquad (2.1)$$

является характеристикой плоскости коники (1.4) вдоль ассоциированного однопараметрического семейства

$$\theta_1=0.$$

Поляра характеристической точки (2.2)

$$M=A_3-\Gamma_3^{41}A_1-\Gamma_3^{42}A_2$$

плоскости коники (1.4)

$$\Gamma_3^{42}x^1+\Gamma_3^{41}x^2+x^3=0,\ x^4=0 \qquad (2.3)$$

относительно коники (1.4).

Оснащающая точка

$$M_1=-(1+\mu\Gamma_3^{41})A_1+(\mu\Gamma_3^{42}-1)A_2+(\Gamma_3^{41}+\Gamma_3^{42})A_3 \qquad (2.4)$$

является точкой пересечения поляры (2.3) с оснащающей прямой (2.1). Сопряженно оснащающая точка

$$M_2=A_1-A_2+\mu A_3 \qquad (2.5)$$

-точка поляры (2.3), полярно сопряженная оснащающей точке M_1 относительно коники (1.4).

Индуцированная прямая

$$c_1x^1+c_2x^2+c_3x^3=0,\quad x^4=0, \tag{2.6}$$

где

$$c_1=\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{21},\quad c_2=\Gamma_3^{11}-\Gamma_3^{12},\quad c_3=c_1\Gamma_3^{41}+c_2\Gamma_3^{42},$$

-касательная на поверхности (M) вдоль ассоциированного однопараметрического семейства $\theta_1=0$.

Индуцированная точка

$$N_1=(c_2-c_3\Gamma_3^{41})A_1+(c_3\Gamma_3^{42}-c_1)A_2+(c_1\Gamma_3^{41}-c_2\Gamma_3^{42})A_3 \tag{2.7}$$

-точка пересечения поляры (2.3) с индуцированной прямой (2.6). Сопряженно индуцированная точка

$$N_2=c_2A_1+c_1A_2-c_3A_3 \tag{2.8}$$

- точка поляры (2.3), полярно сопряженная индуцированной точке N_1 относительно коники (1.4).

Сопряженно оснащающая прямая

$$(1-\mu\Gamma_3^{42})x^1+(1+\mu\Gamma_3^{41})x^2+(\Gamma_3^{41}+\Gamma_3^{42})x^3=0,\quad x^4=0 \tag{2.9}$$

-касательная MM_2 на поверхности (M).

Сопряженно индуцированная прямая

$$(c_1-c_3\Gamma_3^{42})x^1+(c_3\Gamma_3^{41}-c_2)x^2+(c_1\Gamma_3^{41}-c_2\Gamma_3^{42})x^3=0,\quad x^4=0 \tag{2.10}$$

-касательная MN_2 на поверхности (M).

Сопряженно оснащающая форма Пфаффа

$$\theta_2=\omega_1+\lambda^*\omega_2, \tag{2.11}$$

где

$$\lambda^*=\frac{(1-\mu\Gamma_3^{42})\Gamma_3^{12}+(1+\mu\Gamma_3^{41})\Gamma_3^{11}}{(1-\mu\Gamma_3^{42})\Gamma_3^{22}+(1+\mu\Gamma_3^{41})\Gamma_3^{21}}.$$

§3. Конгруэнции F_0^*

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией F_0^* называется конгруэнция F^*, обладающая следующими свойствами: 1/ точка A_3 является характеристической точкой плоскости коники; 2/ касательная плоскость к поверхности (M_1) инцидентна прямой A_3A_4; 3/ существует расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_iA_3) к прямолинейной конгруэнции (A_jA_4).

Т е о р е м а. Конгруэнция F_0^* существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка A_3 будет характеристической точкой плоскости коники, если имеют место соотношения $\Gamma_3^{41}=\Gamma_3^{42}=0$, т.е.

$$\omega_3^4=0. \tag{3.1}$$

Касательная плоскость к поверхности (M_1) инцидентна прямой A_3A_4 при условии

$$\omega_1^1-\omega_2^2=0. \tag{3.2}$$

При внешнем дифференцировании уравнений Пфаффа (3.1), (3.2) получаем конечное соотношение

$$\Gamma_3^{12}-\Gamma_3^{21}=0 \tag{3.3}$$

и квадратичное уравнение

$$\omega_2^3\wedge\omega_3^2+\omega_2\wedge\omega_4^2-\omega_1^3\wedge\omega_3^1-\omega_1\wedge\omega_4^1=0. \tag{3.4}$$

Одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A_i A_3)$ к прямолинейной конгруэнции $(A_j A_4)$ существует, если имеют место квадратичные уравнения

$$\omega_3^j \wedge \omega_j^i + \omega_3^4 \wedge \omega_4^i = 0, \quad \omega_i^j \wedge \omega_j^3 + \omega_i \wedge \omega_4^3 = 0,$$
$$\omega_i^j \wedge \omega_j^i + \omega_i \wedge \omega_4^i - \omega_3^j \wedge \omega_j^3 - \omega_3^4 \wedge \omega_4^3 = 0. \tag{3.5}$$

Эти уравнения в силу пфаффовых уравнений (1.12),(3.1) преобразуются к виду

$$\omega_i \wedge \omega_4^3 = 0, \tag{3.6}$$

$$\omega_i \wedge \omega_4^i - \omega_3^j \wedge \omega_j^3 = 0. \tag{3.7}$$

Из (3.6) получаем уравнение Пфаффа

$$\omega_4^3 = 0, \tag{3.8}$$

замыканием которого является квадратичное уравнение

$$\omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0. \tag{3.9}$$

Квадратичное уравнение (3.4) тождественно удовлетворяется в силу уравнений (3.7),(3.9). Получаем конечные соотношения

$$\Gamma_1^{31}(\Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21}) = 0, \; \Gamma_4^{12} + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{21} = 0, \; \Gamma_4^{21} - \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} = 0. \tag{3.10}$$

Если $\Gamma_1^{31} = 0$, то из уравнений (3.10),(1.6) следует, что

$$\Gamma_4^{11} = \Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21} = \Gamma_4^{22} = 0. \tag{3.11}$$

Прямая $A_2 A_4$ становится неподвижной. Этого быть не может, поскольку по условию многообразие прямых $(A_2 A_4)$ является прямолинейной конгруэнцией.

Значит,

$$\Gamma_1^{31} \neq 0, \tag{3.12}$$

тогда получаем равенство

$$\Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} = 0. \tag{3.13}$$

При внешнем дифференцировании уравнения (1.13) получаем

$$\Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{21} = 0. \tag{3.14}$$

Из соотношений (3.13),(3.14) следует, что

$$\Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21} = 0. \tag{3.15}$$

Тогда из (3.10) получим

$$\Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21} = 0. \tag{3.16}$$

Так как $\Gamma_1^{31} \neq 0$, можно так пронормировать вершины репера, чтобы

$$\Gamma_1^{31} = 1. \tag{3.17}$$

Обозначим

$$\Gamma_3^{11} = b, \; \Gamma_3^{22} = c. \tag{3.18}$$

Система уравнений Пфаффа, определяющая конгруэнцию F_0^*, принимает вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (-1)^j \omega_i, \quad \omega_3^1 = b\omega_1, \quad \omega_3^2 = c\omega_2,$$
$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_4^1 - \omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^2 + \omega_3^2 = 0, \tag{3.19}$$
$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^3 - \omega_4^4 = 0, \quad 2(\omega_1^1 - \omega_3^3) = a^k \omega_k.$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3.19) и анализируя полученную замкнутую систему, убеждаемся, что она в инволюции и имеет решение с произволом одной функции двух аргументов.

Матрица компонент канонического репера конгруэнции F_o^* имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}a^k\omega_k & 0 & \omega_1 & \omega_1 \\ 0 & \frac{1}{4}a^k\omega^k & -\omega_2 & \omega_2 \\ b\omega_1 & c\omega_2 & -\frac{1}{4}a^k\omega_k & 0 \\ b\omega_1 & -c\omega_2 & 0 & -\frac{1}{4}a^k\omega_k \end{bmatrix} \qquad (3.20)$$

Ассоциированные геометрические образы (2.1)-(2.11) для конгруэнции F_o^* имеют следующий вид:

оснащающая прямая

$$x^1 - x^2 = 0, \quad x^4 = 0; \qquad (3.21)$$

оснащающая точка

$$M_1 = A_1 + A_2; \qquad (3.22)$$

сопряженно оснащающая точка

$$M_2 = A_1 - A_2; \qquad (3.23)$$

индуцированная прямая

$$cx^1 + bx^2 = 0, \quad x^4 = 0; \qquad (3.24)$$

индуцированная точка

$$N_1 = bA_1 - cA_2; \qquad (3.25)$$

сопряженно индуцированная точка

$$N_2 = bA_1 + cA_2; \qquad (3.26)$$

сопряженно оснащающая прямая

$$x^1 + x^2 = 0, \quad x^4 = 0; \qquad (3.27)$$

сопряженно индуцированная прямая

$$cx^1 - bx^2 = 0, \quad x^4 = 0; \qquad (3.28)$$

оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_1 = \omega_1 + \omega_2; \qquad (3.29)$$

сопряженно оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_2 = \omega_1 + \frac{b}{c}\omega_2 . \qquad (3.30)$$

Т е о р е м а. Конгруэнции F_o^* обладают следующими геометрическими свойствами: 1/ существует расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A_j A_4)$ к прямолинейной конгруэнции $(A_i A_3)$; 2/ существует двустороннее расслоение прямолинейных конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$; 3/ касательная плоскость к поверхности (A_4) содержит прямую $A_1 A_2$; 4/ фокальные поверхности прямолинейной конгруэнции $(A_3 A_4)$ вырождаются в прямые, инцидентные фокальным точкам коники A_i; 5/ координатные линии на поверхностях $(A_3), (A_4), (M_1), (M_2)$ сопряжены; 6/ плоскость $(A_i A_3 A_4)$ стационарна вдоль направления $\omega_j = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/, 2/ Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции $(A_j A_4)$ к прямолинейной конгруэнции $(A_i A_3)$

$$\omega_4^i \wedge \omega_i^j + \omega_4^3 \wedge \omega_3^j = 0, \quad \omega_j^i \wedge \omega_i + \omega_j^3 \wedge \omega_3^4 = 0,$$

$$\omega_2^1 \wedge \omega_1^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 + \omega_3^4 \wedge \omega_4^3 = 0,$$

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 - \omega_4^2 \wedge \omega_2 - \omega_4^3 \wedge \omega_3^4 = 0$$

и условия двустороннего расслоения прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4)

$$\omega_i^3\wedge\omega_3^j+\omega_i\wedge\omega_4^j=0,\quad \omega_i\wedge\omega_4^i-\omega_j^3\wedge\omega_3=0,$$
$$\omega_4^1\wedge\omega_1^3+\omega_4^2\wedge\omega_2^3=0,\quad \omega_3^1\wedge\omega_1+\omega_3^2\wedge\omega_2=0$$

в силу матрицы (3.20) тождественно удовлетворяются.

3/Из матрицы (3.20) видно,что прямая A_1A_2 инцидентна плоскости,касательной к поверхности (A_4).

4/Фокальными точками луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) являются точки

$$P_1=A_3+A_4,\quad P_1^*=A_3-A_4.$$

Поверхности (P_1) и (P_1^*) вырождаются в прямые A_1P_1, $A_2P_1^*$.

5/Асимптотические линии на поверхностях $(A_3),(A_4),(M_1),(M_2)$ соответствуют,их уравнение

$$b(\omega_1)^2+c(\omega_2)^2=0.$$

§4. Конгруэнции F_1^*

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией F_1^* называется конгруэнция F_c^*, у которой индуцированная точка совпадает с оснащающей.

Индуцированная точка N_1 совместится с оснащающей точкой M_1 при условии

$$b=-c. \qquad (4.1)$$

Учитывая в уравнениях (3.I9) соотношение (4.I),получим следующую систему уравнений,определяющую конгруэнцию F_1^*:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=(-1)^j\omega_i,\quad \omega_3^i=(-1)^j b\,\omega_i,\quad \omega_3^4=\omega_4^3=0,$$
$$\omega_4^i=(-1)^j\omega_3^i,\quad \omega_1^1=\omega_2^2=\frac{1}{4}a^k\omega_k,\quad \omega_3^3-\omega_4^4=0, \qquad (4.2)$$
$$db+b(2\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_4^4)=0,$$

$$da^1\wedge\omega_1+da^2\wedge\omega_2=0. \qquad (4.3)$$

Замкнутая система уравнений (4.2),(4.3) определяет конгруэнции F_1^* с произволом одной функции двух аргументов.

Для огибающей поверхности (A_3) семейства плоскостей коник получено каноническое представление ,соприкасающиеся квадрики (поверхности второго порядка).Уравнение поверхности (A_3) в локальных неоднородных координатах имеет вид:

$$2bz=x^2-y^2+\frac{1}{2b}\,xy\,(a^2x+a^1y)+[4], \qquad (4.4)$$

где $[4]$ означает члены порядка малости не ниже 4.Трехпараметрическое семейство соприкасающихся квадрик поверхности (A_3) в неоднородных координатах записывается в виде:

$$2(a_{14}x+a_{24}y)z+x^2-y^2-2bz+a_{44}z^2=0. \qquad (4.5)$$

Из этого семейства квадрик выделена квадрика Ли.Её уравнение в однородных координатах

$$(x^1)^2-(x^2)^2-2bx^3x^4=0. \qquad (4.6)$$

Дифференцируя уравнение (4.6) с помощью уравнений стационарности точки

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega_\beta^\alpha+\theta x^\alpha,$$

убеждаемся, что квадрика (4.6) инвариантна.

Из уравнения квадрики Ли видно, что точки A_3, A_4 лежат на этой квадрике, точки A_1 и A_2, A_i и A_4, A_i и A_3 сопряжены относительно квадрики. В сечении квадрики Ли (4.6) плоскостями $x^1=0$ и $x^2=0$ получаются коники C_1 и C_2, уравнения которых, соответственно, имеют вид

$$(x^2)^2-2b\,x^3x^4=0, \quad x^1=0, \tag{4.7}$$

$$(x^1)^2-2b\,x^3x^4=0, \quad x^2=0. \tag{4.8}$$

Список литературы

1. Свешникова Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с двумя вырождающимися фокальными поверхностями.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.I Калининград, 1970, с.71-78

2. Малаховский В.С. К геометрии касательно оснащенных многообразий.-"Известия вузов. Сер. Математика", 1972, №9(124), с.54-65.

3. Малаховский В.С. Касательно оснащенные конгруэнции коник.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.4. Калининград, 1974, с.68-86.

4. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956, 457 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
1975 Вып.6

Е.В. Скрыдлова

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР КОНИК

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$ пар коник C_1 и C_2 [1]. I. Каждой конике C_1 конгруэнции (C_1) соответствует единственная коника C_2 однопараметрического семейства (C_2), полным прообразом которой является однопараметрическое семейство $(C_1)_{C_2}$ коник C_1. Найдены условия принадлежности всех коник C_1 семейства $(C_1)_{C_2}$ и всех коник C_2 семейства (C_2) стационарным квадрикам. Исследованы частные классы вырожденных конгруэнций $(C_1C_2)_{2,1}$, в которых все коники C_1 и C_2 принадлежат одной стационарной квадрике Q. Невырожденные конгруэнции пар коник рассматривались В.С. Малаховским [2].

§I. Репер вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$

Отнесем пространство P_3 к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$ деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta. \tag{1.1}$$

Формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0 . \quad (1.3)$$

Пусть ℓ - линия пересечения плоскостей коник C_1 и C_2 и вершина A_i (здесь и далее $i,j,\kappa=1,2; i\neq j$, по индексам i,j не суммировать) репера R - одна из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ. Вершины A_{i+2} являются полюсами прямой ℓ относительно коники C_i соответственно. Уравнения коник C_1 и C_2 и система уравнений Пфаффа вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$ относительно репера R записываются соответственно в виде

$$(x^3)^2-(a_1x^1)^2-2x^1x^2=0 ,\ x^4=0 ; \quad (1.4)$$

$$(x^4)^2-(a_2x^2)^2-2x^1x^2=0,\ x^3=0 ; \quad (1.5)$$

$$\begin{gathered}\omega_1^2=\Gamma_1^2\omega_4^3 ,\quad \omega_2^1=\Gamma_2^{1\kappa}\omega_\kappa ,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^3\omega_4^3 ,\\ \omega_3^i=\Gamma_3^{i\kappa}\omega_\kappa ,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa ,\quad \omega_4^1=\Gamma_4^1\omega_4^3-(a_2)^2\omega_4^2+\omega_2 ,\\ \omega_4^2=\Gamma_4^2\omega_4^3+\omega_1 ,\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3\kappa}\omega_\kappa ,\quad \Omega_1=a^\kappa\omega_\kappa ,\\ \Omega_2=f\omega_4^3 ,\quad \theta_1=A^\kappa\omega_\kappa ,\quad a_2\theta_2-\omega_2^1=A_2\omega_4^3 ,\end{gathered} \quad (1.6)$$

где

$$\Omega_i=-\omega_i^i-\omega_j^j+2\,\omega_{i+2}^{i+2} , \quad (1.7)$$

$$\theta_i=da_i-a_i\,(\omega_i^i-\omega_{i+2}^{i+2}) \quad (1.8)$$

и формы

$$\omega_i^4=\omega_i \quad (1.9)$$

приняты в качестве базисных.

Предполагается, что
$$\omega_4^3\neq 0 , \quad (1.10)$$
тем самым из рассмотрения исключается случай, когда поверхность (A_4) является огибающей однопараметрического семейства плоскостей коник C_2. Анализируя систему уравнений (1.6), убеждаемся, что вырожденная конгруэнция $(C_1C_2)_{2,1}$ существует и определяется с произволом семи функций двух аргументов.

§ 2. Условия принадлежности всех коник C_1 семейства $(C_1)_{C_2}$ некоторой квадрике

Поставим задачу - найти условия, при которых все коники C_1 однопараметрического семейства $(C_1)_{C_2}$ принадлежат некоторой квадрике Q. Уравнение такой квадрики в общем случае может быть записано в виде

$$Q=(x^3)^2-(a_1x^1)^2-2x^1x^2+2a_{\kappa4}x^\kappa x^4+2a_{34}x^3x^4+a_{44}(x^4)^2=0. \quad (2.1)$$

Условие стационарности квадрики Q для семейства $(C_1)_{C_2}$ коник C_1

$$dQ-2\left(\theta-\omega_3^3-a_{34}\,\omega_3^4\right)Q\equiv 0 \quad (mod\ \omega_4^3) \quad (2.2)$$

может быть получено дифференцированием уравнения (2.1) с помощью уравнений стационарности точки

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega_\beta^\alpha+x^\alpha\theta , \quad (\mathcal{D}\theta=0). \quad (2.3)$$

При этом на коэффициенты системы уравнений (1.6) и на функции a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} накладываются следующие связи:

$$\Gamma_4^{31}\left[(a_1)^2\Gamma_3^{12}+\Gamma_3^{22}-a_{14}\Gamma_3^{42}\right]-\Gamma_4^{32}\left[(a_1)^2\Gamma_3^{11}+\Gamma_3^{21}-a_{14}\Gamma_3^{41}-a_{34}\right]=0,$$

$$\Gamma_4^{31}\left(\Gamma_2^{12}-a_{24}\right)-\Gamma_4^{32}\Gamma_2^{11}=0,$$

$$\Gamma_4^{31}\left(\Gamma_3^{12}-a_{24}\Gamma_3^{42}-a_{34}\right)-\Gamma_4^{32}\left(\Gamma_3^{11}-a_{24}\Gamma_3^{41}\right)=0, \qquad (2.4)$$

$$\Gamma_4^{31}\left[a_1A^2+(a_1)^2a_{34}\Gamma_3^{42}\right]-\Gamma_4^{32}\left[a_1A^1+a_{14}+(a_1)^2a_{34}\Gamma_3^{41}\right]=0,$$

$$\Gamma_4^{31}\left[(a_1)^2\Gamma_2^{12}-a^2-2a_{34}\Gamma_3^{42}-a_{14}\right]-\Gamma_4^{32}\left[(a_1)^2\Gamma_2^{11}-a^1-2a_{34}\Gamma_3^{41}-a_{24}\right]=0,$$

$$da_{i4}+a_{i4}\left(2\omega_3^3-\omega_4^4-\omega_i^i\right)+\delta_i^1(a_1)^2\omega_4^1+\omega_4^j-a_{j4}\omega_i^j-a_{44}\omega_i+2a_{i4}a_{34}\omega_3^4=A_{i4}\omega_4^3, \qquad (2.5)$$

$$da_{34}+a_{34}\left(\omega_3^3-\omega_4^4\right)-a_{k4}\omega_3^k-a_{44}\omega_3^4+2(a_{34})^2\omega_3^4=A_{34}\omega_4^3,$$

$$\frac{1}{2}da_{44}+a_{44}\left(\omega_3^3-\omega_4^4\right)-a_{k4}\omega_4^k+a_{34}a_{44}\omega_3^4=A_{44}\omega_4^3.$$

Таким образом, система уравнений Пфаффа вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$, у которой все коники C_1 семейства $(C_1)_{C_2}$ принадлежат стационарной квадрике, состоит из уравнений (1.6) и (2.5), причем выполняются конечные соотношения (2.4). Анализируя эту систему уравнений, находим произвол существования вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$ рассматриваемого типа – две функции двух аргументов.

§ 3. Условия принадлежности всех коник C_2 семейства (C_2) инвариантной квадрике

Уравнение квадрики Q, содержащей все коники C_2 однопараметрического семейства (C_2), в общем случае записывается в виде

$$Q=(x^4)^2-(a_2x^2)^2-2x^1x^2+2b_{k3}x^kx^3+b_{33}(x^3)^2+2b_{34}x^3x^4=0. \qquad (3.1)$$

Условие инвариантности квадрики Q

$$dQ=2\left(\Theta-\omega_4^4-b_{34}\omega_4^3\right)Q \qquad (3.2)$$

получено дифференцированием уравнения (3.1) с помощью уравнений стационарности точки (2.3). Оно приводит к следующим соотношениям:

$$\Gamma_1^2-b_{13}\Gamma_1^3=0,$$

$$(a_2)^2\Gamma_1^2-\phi-b_{13}\Gamma_2^3-b_{23}\Gamma_1^3-2b_{34}=0,$$

$$A_2+b_{23}\Gamma_2^3+(a_2)^2b_{34}=0,$$

$$\Gamma_4^2-b_{13}-b_{34}\Gamma_1^3=0, \qquad (3.3)$$

$$\Gamma_4^1-b_{23}-b_{34}\Gamma_2^3=0,$$

$$db_{i3}+b_{i3}\left(2\omega_4^4-\omega_3^3-\omega_i^i\right)+\omega_3^j+\delta_i^2(a_2)^2\omega_3^i-b_{j3}\omega_i^j\ \ b_{33}\omega_i^3-b_{34}\omega_i+2b_{i3}b_{34}\omega_4^3=0,$$

$$\frac{1}{2}\,d b_{33}+b_{33}\,(\omega_4^4-\omega_3^3)-b_{k3}\,\omega_3^k-b_{34}\,\omega_3^4+b_{33}b_{34}\,\omega_4^3=0\,, \quad (3.4)$$

$$d b_{34}+b_{34}\,(\omega_4^4-\omega_3^3)-\omega_3^4-b_{\alpha 3}\,\omega_4^\alpha+2\,(b_{34})^2\omega_4^3=0\,.$$

Система уравнений Пфаффа вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$, у которой все коники C_2 семейства (C_2) принадлежат инвариантной квадрике Q, состоит из уравнений (1.6),(3.4), причем справедливы конечные соотношения (3.3). Дифференцируя уравнения (3.4) внешним образом, убеждаемся, что их замыкания удовлетворяются тождественно. Учитывая связи (3.3) в системе (1.6), получим следующие уравнения:

$$\omega_1^2=b_{13}\,\omega_1^3\,,$$

$$\Omega_2=(a_2)^2\omega_1^2-b_{13}\,\omega_2^3-b_{23}\,\omega_1^3-2\,b_{34}\,\omega_4^3\,,$$

$$a_2\,\Theta_2-\omega_2^1+b_{23}\,\omega_2^3+(a_2)^2\,b_{34}\,\omega_4^3=0\,, \quad (3.5)$$

$$\omega_4^2=b_{13}\,\omega_4^3+b_{34}\,\omega_1^3+\omega_1\,,$$

$$\omega_4^1=b_{23}\,\omega_4^3+b_{34}\,\omega_2^3-(a_2)^2\,\omega_4^2+\omega_2\,,$$

замыкания которых также удовлетворяются тождественно. Анализируя систему уравнений (1.6),(3.4),(3.5), находим произвол существования вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$ рассматриваемого типа – семь функций двух аргументов.

§ 4. Вырожденная конгруэнция $(C_1C_2)_{2,1}^Q$

О п р е д е л е н и е 1. Вырожденной конгруэнцией

$(C_1C_2)_{2,1}^Q$ называется вырожденная конгруэнция $(C_1C_2)_{2,1}$, для которой: 1/все коники C_1 семейства $(C_1)_{C_2}$ и все коники C_2 семейства (C_2) принадлежат одной и той же инвариантной квадрике Q ; 2/прямая A_3A_4 касается квадрики Q.

З а м е ч а н и е. Для вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}^Q$ квадрике Q будут принадлежать все коники C_1 конгруэнции (C_1), что следует из инвариантности квадрики Q.

Т е о р е м а 1. Вырожденная конгруэнция $(C_1C_2)_{2,1}^Q$ существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению 1 для вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}^Q$ уравнения квадрик (2.1) и (3.1) должны совпадать, т.е.

$$a_1=a_2=0\,, \quad (4.1)$$

$$b_{13}=b_{23}=0\,,\qquad a_{14}=a_{24}=0\,, \quad (4.2)$$

$$b_{33}=a_{44}=1\,,\qquad a_{34}=b_{34}=g\,. \quad (4.3)$$

Уравнения коник C_1 и C_2 и квадрики Q в этом случае записываются в виде

$$(x^3)^2-2\,x^1x^2=0\,,\qquad x^4=0\,; \quad (4.4)$$

$$(x^4)^2-2x^1x^2=0\,,\qquad x^3=0\,; \quad (4.5)$$

$$Q=(x^3)^2+(x^4)^2-2\,x^1x^2+2g\,x^3x^4=0\,. \quad (4.6)$$

Учитывая равенства (4.1) и (4.3) в соотношениях (2.4), (2.5),(3.4),(3.5), получим

$$\omega_i^j = 0\,, \tag{4.7}$$

$$\omega_4^i = g\,\omega_j^3 + \omega_j\,, \tag{4.8}$$

$$\omega_3^i = \omega_j^3 + g\,\omega_j\,, \tag{4.9}$$

$$\Omega_1 = -2g\,\omega_3^4\,, \qquad \Omega_2 = -2g\,\omega_4^3\,, \tag{4.10}$$

$$dg + (g^2-1)(\omega_3^4 + \omega_4^3) = 0\,. \tag{4.11}$$

Замыкание уравнений (4.7)-(4.11) никаких следствий не дает. Требование касания прямой A_3A_4 с квадрикой Q эквивалентно равенству

$$g^2 - 1 = 0\,. \tag{4.12}$$

Точкой касания в этом случае является точка $K = gA_3 - A_4$.

Таким образом, пфаффова система уравнений вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ состоит из уравнений (4.7)-(4.10) и следующих:

$$\omega_i^3 = \Gamma_i^3\,\omega_4^3\,, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\,\omega_k\,, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\,\omega_k\,, \tag{4.13}$$

где g определяется соотношением (4.12).

Анализируя систему (4.7)-(4.10),(4.13), находим

$$S_1 = 4\,, \quad q = 6\,, \quad S_2 = 2\,, \quad Q = N = 8$$

и убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2. Вырожденная конгруэнция $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ обладает следующими свойствами: 1/ коники C_1 и C_2 пересекаются в точках A_1 и A_2; 2/ прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены относительно квадрики Q; 3/ грани $(A_iA_3A_4)$ описывают однопараметрические семейства, их характеристики совпадают с прямолинейными образующими квадрики Q; 4/ одно из семейств торсов прямолинейной конгруэнции (A_iA_4) соответствует координатной линии $\omega_i = 0$, прямолинейные конгруэнции (A_iA_3), (A_iA_4) имеют по одному семейству соответствующих торсов; 5/ прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) представляет собой связку прямых с центром в точке K; 6/ конгруэнция (C_1) коник C_1 расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Справедливость первого утверждения теоремы следует из уравнений (4.4), (4.5) коник C_1 и C_2 соответственно. 2/ Прямая A_1A_2 пересекает квадрику Q в точках A_1 и A_2, причем касательные плоскости к квадрике Q в точках A_i пересекаются по прямой A_3A_4. Следовательно, прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены относительно Q. Заметим, что образ, полярно соответствующий прямой A_3A_4 относительно квадрики Q, не исчерпывается прямой A_1A_2. Так как прямая A_3A_4 касается квадрики Q в точке K, то ей полярно соответствует вся плоскость (A_1A_2K). 3/ Имеем

$$d(A_iA_3A_4) = -\omega_j^j(A_iA_3A_4) - \omega_3^j(A_iA_jK),$$

т. е. грань $(A_iA_3A_4)$ описывает однопараметрическое семейство. Характеристика этого семейства совпадает с прямой A_iK, которая целиком принадлежит квадрике Q и, следовательно, является ее прямолинейной образующей; 4/Торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_3), (A_iA_4) записываются соответственно в виде:

$$\omega_i \omega_3^j = 0,$$

$$\omega_4^3 \omega_4^j = 0.$$

Так как

$$\omega_4^i = g\,\omega_3^i,$$

то утверждение теоремы справедливо.

5/Имеем

$$dK = (\omega_4^4 - g\,\omega_3^4)K,$$

следовательно, прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) является связкой и K - ее центр. 6/Условия расслоения от конгруэнции (C_1) коник C_1 к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) имеют вид:

$$\omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0,$$

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0,$$

$$\omega_3^1 \wedge \Omega_1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 - 2\,\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 = 0,$$

$$2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_3^2 \wedge \Omega_1 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 - 2\,\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 + a_1 \Theta_1 \wedge \omega_3^1 + {}$$

$$+ (a_1)^2 (\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^1) = 0,$$

$$(a_1)^2 \omega_3^2 \wedge \omega_3^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_3^2 \wedge \omega_1^2 + a_1 \Theta_1 \wedge \omega_3^2 + (a_1)^2 \omega_3^4 \wedge \omega_4^2 = 0.$$

В силу системы уравнений (4.1), (4.7)-(4.10), (4.13) они тождественно удовлетворяются, что и доказывает утверждение теоремы.

§5. Характеристическая конгруэнция $(C_1C_2)_{2,1}^Q$

О п р е д е л е н и е 2. Характеристической конгруэнцией $(C_1C_2)_{2,1}^Q$ называется вырожденная конгруэнция $(C_1C_2)_{2,1}$, для которой: 1/ A_3 -является характеристической точкой плоскости коники C_1; 2/характеристика плоскости коники C_2 проходит через точку A_1.

Для характеристической конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}^Q$ будут выполняться равенства

$$\omega_3^4 = 0, \tag{5.1}$$

$$\omega_1^3 = 0. \tag{5.2}$$

Замыкая уравнение (5.2), получим

$$\omega_4^3 = \Gamma_4^3 \omega_1. \tag{5.3}$$

Пфаффова система уравнений характеристической конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}^Q$ с учетом равенств (5.1)-(5.3) записывается в виде

$$\begin{gathered} \omega_i^j = 0,\ \omega_1^3 = 0,\ \omega_2^3 = \Gamma_2^3 \omega_4^3,\ \omega_3^1 = g\,\omega_2 + \omega_2^3, \\ \omega_3^2 = g\,\omega_1,\ \omega_3^4 = 0,\ \omega_4^1 = g\,\omega_3^1,\ \omega_4^2 = \omega_1, \\ \omega_4^3 = \Gamma_4^3 \omega_1,\ \Omega_1 = 0,\ \Omega_2 = -2g\,\omega_4^3, \end{gathered} \tag{5.4}$$

где q определяется соотношением (4.12). Анализируя систему (5.4), находим произвол существования характеристической конгруэнции $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ – две функции одного аргумента.

Теорема 3. Характеристическая конгруэнция $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ обладает следующими геометрическими свойствами: 1/ поверхность (A_1) вырождается в линию, поверхность (A_4) является торсом; 2/ координатная линия $\omega_1=0$ – асимптотическая на поверхности (A_3), поверхность (A_3) является линейчатой; 3/ прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) – параболическая, A_1 – сдвоенный фокус ее луча; 4/ пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) расслояема в направлении от (A_3A_4) к (A_1A_2).

Доказательство. 1/ Имеем

$$dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1A_4,$$

т. е. (A_1) – линия. Так как прямая A_1A_4 является касательной к линии (A_1), то семейство (A_1A_4) и, следовательно, поверхность (A_4) являются торсом. 2/ Асимптотические линии поверхности (A_3) определяются уравнением

$$\omega_1(\omega_2^3+2q\omega_2)=0.$$

Так как

$$dA_3\Big|_{\omega_1=0}=\omega_3^1A_1+\omega_3^3A_3$$

и

$$d(A_1A_3)\Big|_{\omega_1=0}=(\omega_1^1+\omega_3^3)(A_1A_3),$$

то линия $\omega_1=0$ на поверхности (A_3) является прямой, а поверхность (A_3) – линейчатой. 3/ Фокусы sA_1+tA_2 луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнением

$$t^2=0,$$

т. е. A_1 – сдвоенный фокус, что и требовалось доказать. 4/ Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2)

$$\omega_4^k\wedge\omega_k^3=0,\qquad \omega_3^k\wedge\omega_k=0,$$

$$\omega_3^k\wedge\omega_k^3-\omega_4^k\wedge\omega_k=0$$

в силу системы (5.4) удовлетворяются тождественно, откуда и следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Малаховский В. С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.- В кн. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, с.41-49.

2. Малаховский В. С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.-"Труды Геометрического семинара", 1971, Т.3, с. 193-220 (М., ВИНИТИ АН СССР).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Г.П. Т к а ч

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АФФИННО РАССЛОЯЕМЫХ ПАР ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛОЙ И ПРЯМОЙ

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются невырожденные двухпараметрические семейства (конгруэнции) пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 -парабола; $F_2 \equiv \ell$ - прямая, не параллельная плоскости параболы F_1 и не пересекающая F_1. Построен канонический репер, исследованы аффинно расслояемые пары $\mathcal{L}$ и их подклассы.

§I. Канонический репер пары $\mathcal{L}$

Отнесем пару $\mathcal{L}$ к каноническому реперу $R=\{A, \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3\}$. Парой $\mathcal{L}$ назовем невырожденную конгруэнцию пар фигур $\{F_1, \ell\}$ [I]. Пусть M_0 - точка пересечения прямой ℓ с плоскостью параболы. Вершина A канонического репера помещена в точку пересечения с параболой F_1 ее диаметра, проходящего через M_0, конец вектора $\bar{e}_1$ совмещен с точкой M_0, вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной ℓ' к параболе в точке A, вектор $\bar{e}_3$ -параллелен прямой ℓ. Векторы $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$

пронормированы так, что точки

$$\bar{A}^*_1 = \bar{A} + 2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2), \quad \bar{A}^*_{-1} = \bar{A} + 2(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$$

инцидентны параболе F_1.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \qquad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3) \quad (1.1)$$

где формы Пфаффа $\omega^\alpha, \omega_\alpha^\beta$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \quad (1.2)$$

Из условия эквиаффинности

$$(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) = 1$$

имеем

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \quad (1.3)$$

Уравнения параболы F_1 и прямой ℓ в каноническом репере примут соответственно вид:

$$(x^2)^2 - 2x^1 = 0, \quad x^3 = 0; \quad (1.4)$$

$$x^1 = 1, \quad x^2 = 0. \quad (1.5)$$

Принимая формы Пфаффа ω_2^1, ω_3^1 за независимые первичные формы пары $\mathcal{L}$ (при этом исключаем случай, когда в расширенном аффинном пространстве число параметров, от которых зависят несобственные прямые плоскостей $x^1 = 0$, меньше двух), запишем систему дифференциальных уравнений, определяющих пару $\mathcal{L}$:

$$\omega^i = \Gamma^{i1}\omega_2^1 + \Gamma^{i2}\omega_3^1, \quad \omega^3 = \Gamma^{31}\omega_2^1 + \Gamma^{32}\omega_3^1,$$

$$\omega_1^2 = \Gamma_1^{21}\omega_2^1 + \Gamma_1^{22}\omega_3^1, \quad \omega_3^2 = \Gamma_3^{21}\omega_2^1 + \Gamma_3^{22}\omega_3^1, \qquad (1.6)$$

$$\omega_i^i = \Gamma_i^{i1}\omega_2^1 + \Gamma_i^{i2}\omega_3^1, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{31}\omega_2^1 + \Gamma_i^{32}\omega_3^1; \; i,j,k = 1,2.$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i, j суммирование не производится.

Анализируя систему уравнений (I.6) находим, что пара $\mathcal{L}$ существует и определяется с произволом девяти функций двух аргументов.

§ 2. Аффинно расслояемые пары $\mathcal{L}$

Обозначим буквой Π_α координатную плоскость $x^\alpha = 0$.

О п р е д е л е н и е I. Пара $\mathcal{L}$ называется аффинно расслояемой [2], если существует одностороннее аффинное расслоение от конгруэнции (F_1) парабол F_1 к конгруэнции (Π_1) плоскостей Π_1.

Условия одностороннего аффинного расслоения от конгруэнции (F_1) к конгруэнции (Π_1) имеют вид:

$$(2\omega_2^2 - \omega_1^1) \wedge \omega_2^1 + 2\,\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$
$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \qquad (2.1)$$
$$\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$
$$\omega^1 \wedge \omega_2^1 = 0.$$

Система Пфаффа аффинно расслояемой пары $\mathcal{L}$ имеет вид:

$$\omega^1 = a^*\omega_2^1, \quad \omega^2 = a_1^*\omega_2^1 + a\,\omega_3^1, \quad \omega^3 = a\,\omega_2^1 + a_2^*\omega_3^1,$$

$$\omega_1^1 = \Gamma_1^{11}\omega_2^1 + \Gamma_1^{12}\omega_3^1, \quad \omega_1^2 = \Gamma_1^{21}\omega_2^1 + b\,\omega_3^1, \quad \omega_1^3 = b\,\omega_2^1 + \Gamma_1^{32}\omega_3^1, \qquad (2.2)$$

$$2\omega_2^2 - \omega_1^1 = m\,\omega_2^1 + n\,\omega_3^1, \quad \omega_2^3 = \frac{1}{2}n\,\omega_2^1 + \Gamma_2^{32}\omega_3^1, \quad \omega_3^2 = \Gamma_3^{21}\omega_2^1 + \Gamma_3^{22}\omega_3^1.$$

Аффинно расслояемые пары $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Т е о р е м а I. Если существуют односторонние аффинные расслоения [2] от конгруэнции (F_1) и от прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_i)$ к конгруэнции (Π_i) плоскостей Π_i пары $\mathcal{L}$, причем огибающая поверхность (M_i) плоскостей $(A, \bar{e}_j, \bar{e}_3)$ не является торсом, то точка M_i плоскости Π_i лежит на прямой $\bar{A} + \lambda\bar{e}_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий односторонних аффинных расслоений от конгруэнции (F_1) и от прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_i)$ к конгруэнции (Π_i) вытекает, что

$$\omega_j^i = \alpha_i^*\,\omega^i. \qquad (2.3)$$

Учитывая (2.3), приводим систему для определения координат характеристической точки M_i к виду:

$$x^i = 0, \quad \alpha_i^* x^j + 1 = 0, \quad x^3 = 0.$$

Откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2. Для аффинно расслояемых пар $\mathcal{L}$ имеет место одностороннее аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (AM) к конгруэнции (Π_1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия одностороннего аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции (AM_0) к конгруэнции (Π_1) имеют вид:

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$
$$\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0. \qquad (2.4)$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из того, что система уравнений (2.4) является следствием системы уравнений (2.I), определяющих аффинно расслояемую пару $\mathcal{L}$.

О п р е д е л е н и е 2. Аффинно расслояемые пары $\mathcal{L}$, у которых поверхность (A) является огибающей семейства плоскостей Π_1, называется парой $\mathcal{L}_0$.

Для пар $\mathcal{L}_0$ имеет место конечное соотношение

$$a^* = 0. \qquad (2.5)$$

Из системы (2.2), учитывая (2.5), получаем

$$\omega^1 = 0. \qquad (26)$$

Замыкание

$$\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0$$

уравнения (2.6) входит в систему уравнений (2.I). Произвол существования пар $\mathcal{L}_0$ -четыре функции двух аргументов.

§3. Основные геометрические образы, ассоциированные с парй $\mathcal{L}_0$

I. Прямолинейная конгруэнция $(A, \bar{e}_1)$.

Фокусы

$$\bar{F}_1 = \bar{A} + \lambda \bar{e}_1$$

луча прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_1)$ и ее торсы определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda_1^2(\Gamma_{1}^{21}\Gamma_1^{32} + b^2) + \lambda_1(a_1^*\Gamma_1^{32} - 2ab + a_2^*\Gamma_1^{21}) + (a_1^* a_2^* - a^2) = 0, \qquad (3.1)$$

$$\omega^2\omega_1^3 - \omega^3\omega_1^2 = 0. \qquad (3.2)$$

2. Прямолинейная конгруэнция $(A, \bar{e}_2)$.

Фокусы

$$\bar{F}_2 = \bar{A} + \lambda_2 \bar{e}_2$$

луча прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_2)$ и ее торсы определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda_2(\lambda_2\Gamma_2^{32} + a_2^*) = 0, \qquad (3.3)$$

$$\omega^3\omega_2^1 = 0 \qquad (3.4)$$

3. Прямолинейная конгруэнция $(A, \bar{e}_3)$.

Фокусы

$$\bar{F}_3 = \bar{A} + \lambda_3 \bar{e}_3$$

луча прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_3)$ и её торсы определяют соответственно уравнениями:

$$\lambda_3(\lambda_3\Gamma_3^{21} + a_1^*) = 0, \qquad (3.5)$$

$$\omega^2\omega_3^1 = 0. \qquad (3.6)$$

4. Огибающая поверхность (M_2) плоскостей Π_2.

Если поверхность (M_2) не является торсом, то

$$\bar{M}_2 = \bar{A} - \frac{1}{\Delta_2}\left[(a_1^*\Gamma_3^{22} - a\Gamma_3^{21})\bar{e}_1 + (\Gamma_1^{21}a + b a_1^*)\bar{e}_3\right], \qquad (3.7)$$

где

$$\Delta_2 = \Gamma_1^{21}\Gamma_3^{22} - b\Gamma_3^{21} \neq 0. \qquad (3.8)$$

5. Огибающая поверхность (M_3) плоскостей Π_3.

Если поверхность (M_3) не является торсом, то

$$\bar{M}_3 = \bar{A} - \frac{1}{\Delta_3}\left[(a\Gamma_2^{32} - \frac{1}{2}a_2^* n)\bar{e}_1 - (a_2^* b - a\Gamma_1^{32})\bar{e}_2\right], \qquad (3.9)$$

где

$$\Delta_3 = b\Gamma_2^{32} - \frac{1}{2}\Gamma_1^{32} n \neq 0. \qquad (3.10)$$

6. Асимптотические линии поверхности (A).

Уравнение асимптотических линий поверхности (A) имеет вид:

$$(d^2A, \bar{E}_1, \bar{E}_2) = 0, \qquad (3.11)$$

где

$$\bar{E}_1 = a_1^*\bar{e}_2 + a\bar{e}_3, \qquad \bar{E}_2 = a\bar{e}_2 + a_2^*\bar{e}_3 -$$

-векторы, коллинеарные касательной плоскости поверхности (A).

Если

$$\omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0,$$

то уравнение (3.II) с учетом (2.2) примет вид:

$$a_1^*(\omega_2^1)^2 + 2a\omega_2^1\omega_3^1 + a_2^*(\omega_3^1)^2 = 0. \qquad (3.12)$$

§4. Пары $\mathcal{L}^*$

Определение 3. Пара $\mathcal{L}_0$, для которой координатная сеть линий является асимптотической сетью, а прямая AM_0 -аффинной нормалью поверхности (A), называется парой $\mathcal{L}^*$.

Теорема 3. Пары $\mathcal{L}^*$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. Так как для пар $\mathcal{L}^*$ координатная сеть является асимптотической сетью поверхности (A), то из (3.12) имеем:

$$a_i^* = 0. \qquad (4.1)$$

Учитывая второе условие определения 3, имеем:

$$\Gamma_3^{22} = n = 0. \qquad (4.2)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения

$$\omega^2 = a\omega_3^1, \qquad \omega^3 = a\omega_2^1,$$

находим

$$\frac{1}{2}\, d\ln a = \omega_1^1, \qquad (4.3)$$

замыкание которого дает тождественный нуль.

Матрица компонент деривационных формул канонического репера пары $\mathcal{L}^*$ имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & a\omega_3^1 & a\omega_2^1 \\ \Gamma_1^{11}\omega_2^1 + \Gamma_1^{12}\omega_3^1 & \Gamma_1^{21}\omega_2^1 + b\omega_3^1 & b\omega_2^1 + \Gamma_1^{32}\omega_3^1 \\ \omega_2^1 & \frac{1}{2}(m\omega_2^1 + \omega_1^1) & \Gamma_2^{32}\omega_3^1 \\ \omega_3^1 & \Gamma_3^{21}\omega_2^1 & -(\omega_1^1 + \omega_2^2) \end{matrix} \right\| \qquad (4.4)$$

Находим $S_1=6$, $q=8$, $S_2=2$, $Q=N=10$. Теорема докаазана.

Некоторые геометрические образы, ассоциированные с парой $\mathfrak{X}^*$.

I. Каноническое представление поверхности (A).

Относительно репера $\{A, \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3\}$ радиус - вектор близкой к A точке поверхности (A) можно записать в виде:

$$\Delta\bar{A} = d\bar{A} + \frac{1}{2} d^2\bar{A} + \frac{1}{6} d^3\bar{A} + [4].$$

Обозначая локальные координаты вектора $\Delta\bar{A}$ через x^α, найдем каноническое представление поверхности (A):

$$x^1 = \frac{1}{a} x^2 x^3 - \frac{1}{3a^2}\left[\Gamma_2^{32}(x^2)^3 + \Gamma_3^{21}(x^3)^3\right] + [4]. \qquad (4.5)$$

2. Пучок соприкасающихся квадрик Дарбу поверхности (A).

Направления Дарбу определяются векторами

$$\bar{\mathcal{E}}_\alpha = \varepsilon\sqrt[3]{\tau}\,\bar{e}_2 - \bar{e}_3,$$

а соответствующие им линии Дарбу имеют уравнения

$$\omega_3^1 + \varepsilon\sqrt[3]{\tau}\,\omega_2^1 = 0,$$

где

$$\varepsilon^3 = 1, \quad \tau = \frac{\Gamma_3^{21}}{\Gamma_2^{32}}.$$

Уравнение пучка соприкасающихся квадрик Дарбу имеет вид:

$$\sigma(x^1)^2 + 2(x^2x^3 - ax^1) = 0. \qquad (4.6)$$

центр его находится в точке

$$\bar{O} = \bar{A} + \frac{a}{\sigma}\bar{e}_1, \qquad (4.7)$$

где σ - произвольный параметр.

3. Квадрика Ли поверхности (A).

Из пучка соприкасающихся квадрик Дарбу при условии $\sigma = -b$ выделяется единственная квадрика Ли

$$b(x^1)^2 - 2(x^2x^3 - ax^1) = 0 \qquad (4.8)$$

с центром в точке

$$\bar{O}^* = \bar{A} - \frac{a}{b}\bar{e}_1. \qquad (4.9)$$

4. Конгруэнция аффинных нормалей поверхности (A).

Уравнение луча конгруэнции аффинных нормалей поверхности (A) запишется в виде:

$$\bar{F}_1 = \bar{A} + \lambda_1 \bar{e}_1.$$

Учитывая (4.4), уравнения (3.I) и (3.2) примут вид:

$$\lambda_1^2(b^2 - \Gamma_1^{21}\Gamma_1^{32}) + 2\lambda_1 ab + a^2 = 0, \qquad (4.10)$$

$$\Gamma_1^{21}(\omega_2^1)^2 - \Gamma_1^{32}(\omega_3^1)^2 = 0. \qquad (4.11)$$

На поверхности (A) уравнение (4.II) определяет сеть аффинных линий кривизны.

Решая уравнение (4.IO), найдем его корни $R_i = (\lambda_1)_i$ — аффинные радиусы кривизны.

Полные и средние аффинные кривизны поверхности соответственно равны:

$$K = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} = \frac{b^2 - \Gamma_1^{21}\cdot\Gamma_1^{32}}{a^2},$$

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{b}{a}.$$

Геометрические свойства пары $\mathcal{L}^*$.

Обозначим буквой $\Gamma_2\,(\Gamma_3)$ линию на поверхности (A) с касательным вектором $\bar e_2\ (\bar e_3)$, буквой $\gamma_2\,(\gamma_3)$ -линию на поверхности (A) с касательным вектором $\bar e_2-\bar e_3\ (\bar e_2+\bar e_3)$.

Т е о р е м а 4. Пары $\mathcal{L}^*$ обладают следующими геометрическими свойствами: I/Точка $M_2\,(M_3)$ лежит на прямой, проходящей через центр квадрики Ли поверхности параллельно прямой $\ell\,(\ell')$. 2. На индикатрисе вектора $\bar e_2\ (\bar e_3)$ касательная к линии, соответствующей линии Γ_2, параллельна плоскости $\Pi_1\,(\Pi_2)$. 3. На индикатрисе вектора $\bar e_2\,(\bar e_3)$ касательная к линии, соответствующей линии Γ_3, параллельна плоскости $\Pi_3\,(\Pi_1)$. 4. На индикатрисе вектора $\bar e_2+\bar e_3\ (\bar e_2-\bar e_3)$ касательная к линии, соответствующей линии $\gamma_2\,(\gamma_3)$, параллельна плоскости Π_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (4.4) и (4.9), находим:

$$\bar M_2=\bar O^*+\frac{a\Gamma_1^{21}}{b\,\Gamma_3^{21}}\bar e_3,$$

$$\bar M_3=\bar O^*+\frac{a\Gamma_1^{32}}{b\,\Gamma_2^{32}}\bar e_2.$$

Справедливость свойств 2,3 и 4 непосредственно вытекает из следующих формул:

$$(d\bar e_3)_{\omega_2^1=0}=\omega_2^2\bar e_2+\omega_2^3\bar e_3,$$

$$(d\bar e_3)_{\omega_2^1=0}=\omega_3^1\bar e_1+\omega_3^3\bar e_3;$$

$$(d\bar e_2)_{\omega_3^1=0}=\omega_2^1\bar e_1+\omega_2^2\bar e_2,$$

$$(d\bar e_3)_{\omega_3^1=0}=\omega_3^2\bar e_1+\omega_3^3\bar e_2;$$

$$[d(\bar e_2+\bar e_3)]_{\omega_2^1+\omega_3^1=0}=(\omega_2^2+\omega_3^2)\bar e_2+(\omega_2^3+\omega_3^3)\bar e_3.$$

$$[d(\bar e_2-\bar e_3)]_{\omega_2^1-\omega_3^1=0}=(\omega_2^2-\omega_3^2)\bar e_2+(\omega_2^3-\omega_3^3)\bar e_3.$$

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-"Труды геометрического семинара", 1969, №2, с.181-206, ВИНИТИ АН СССР

2. Т к а ч Г.П. Аффинно расслояемые пары многообразий фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.-В кн.: Тезисы докладов 5-й Всесоюзной геометрической конференции. Самарканд, 1972, с.215.

$\frac{1}{2}$. Зак. 10481.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6. 1975

Л.К. Т у т а е в

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ИСТОЛКОВАНИЯ ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ МНОГООБРАЗИЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

После выбора канонического репера многообразия в проективном n-мерном пространстве и геометрического истолкования отношения всех его фундаментальных точек к этому многообразию можно одним определенным способом истолковать геометрически все основные инварианты этого многообразия.

§I.Основные соотношения

Уравнения дифференциальных перемещений вершин репера $(M, M_1, \dots, M_n)$ в проективном n-мерном пространстве:

$$dM_J = \omega_J^K M_K \qquad (J, L, K = 0,1,\dots,n) \tag{1.1}$$

Соответствующие структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K \tag{1.2}$$

При перенормировке координат

$$\hat{M}_J = \mu M_J, \quad \mu \neq 0 \tag{1.3}$$

I-формы ω_J^K преобразуются в I-формы [I]:

$$\hat{\omega}_J^K = \omega_J^K + \delta_J^K \, d\ln\mu . \tag{1.4}$$

Совокупность всех перенормировок однородных координат точек в проективном пространстве образует однопараметрический нормальный делитель всей проективной группы [I].Среди $(n+1)$-форм $\hat{\omega}_0^0, \dots, \hat{\omega}_n^n$ независимых от перенормировок координат точек,только n ,так как из системы (I.4):

$$\hat{\omega}_i^i - \hat{\omega}_0^0 = \omega_i^i - \omega_0^0 . \qquad (i = I,2,\dots.)$$

§2. m-параметрическое семейство (m,F) фигур

В проективном пространстве указана фигура F .Уравнения инвариантности ее относительно преобразований (I.I) порождают стационарную подгруппу G_1 проективной группы G . Базис группы G составлен из форм ω_J^K .Подгруппа G_1 выделена системой p линейно независимых уравнений

$$\vartheta \equiv C_K^{\alpha J} \omega_J^K = 0 \qquad (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots = 1,2,\dots,p) \tag{2.1}$$

вполне интегрируемой с постоянными коэффициентами $C_K^{\alpha J}$ [I] В новом базисе группы G с формами ϑ^α в нем формы ϑ^α будут главными,остальные формы этого нового базиса-вторичными.Обозначим символом (m, F) m-параметрическое семейство фигур F ,где

$$1 \leq m \leq p . \tag{2.2}$$

Для задания исходных уравнений семейства (m, F) выделим m форм среди ϑ^{α} и образуем из них базис этого семейства. Пусть такими формами будут

$$\{\vartheta^1, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^m\} = \{\vartheta^{\beta}\}, \quad (\beta, \beta_1, \ldots = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.3}$$

Исходными уравнениями семейства (m, F) будут:

$$\vartheta^{\gamma} = a^{\gamma}_{\beta} \vartheta^{\beta} \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.4), правильно продолжаемая относительно базиса (2.3) по теореме Г.Ф.Лаптева [I]. Продолжая систему (2.4) получим:

$$\begin{cases} \vartheta^{\gamma} = a^{\gamma}_{\beta} \vartheta^{\beta}, \\ \theta^{\gamma}_{\beta_1} = a^{\gamma}_{\beta_1 \beta} \vartheta^{\beta}, \\ \ldots \ldots \ldots \\ \theta^{\gamma}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{q-1}} = a^{\gamma}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{q-1} \beta} \vartheta^{\beta}, \end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$\theta^{\gamma}_{\beta_1} = d a^{\gamma}_{\beta_1} + \vartheta^{\gamma}_{\gamma_1} - a^{\gamma}_{\beta} \vartheta^{\beta}_{\beta_1} + a^{\gamma_1}_{\beta_1} \vartheta^{\gamma}_{\gamma_1} - a^{\gamma}_{\beta} a^{\gamma_1}_{\beta_1} \vartheta^{\beta}_{\gamma_1} = a^{\gamma}_{\beta \beta_1} \vartheta^{\beta}; \quad a^{\gamma}_{\beta \beta_1} = a^{\gamma}_{\beta_1 \beta}. \tag{2.6}$$

§3. Канонический репер многообразия (m, F)

Фиксация одной компоненты среди a^{γ}_{β} соответствует на стационарной подгруппе фигуры F одно линейное уравнение относительно форм $\vartheta^{\gamma}_{\beta}$ а следовательно, и форм $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$, как следует из системы (2.6). Если последовательной фиксацией компонентов внутреннего геометрического объекта многообразия (m, F) в системе (2.5) получим систему $(n+1)^2 - m+1$ линейно независимых уравнений относительно форм $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$, то все формы $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$ будут разделены на две части: I). m форм из них останутся независимыми и будут образовывать базис форм многообразия (m, F); 2) остальные формы из $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$ будут отнесены к этому базису. При этом условии можно получить канонический репер многообразия (m, F).

Обозначим базисные формы символами $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$. Тогда все формы $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$ могут быть представлены в виде

$$\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}} = a^{\varkappa}_{\mathcal{J}\beta} \varphi^{\beta}. \tag{3.1}$$

§4. Дифференциальные смещения фундаментальных точек канонического репера.

I. Касательные $(M_{\mathcal{J}})_T$ к линиям $(M_{\mathcal{J}})$. После аналитического выбора канонического репера R для геометрического исследования многообразия (m, F) надо знать отношение репера R к многообразию (m, F), т.е. каким точкам текущего локального элемента F и какому локальному инвариантному линейному оснащению многообразия (m, F) принадлежат все фундаментальные точки репера R. У репера $(M, M_1, \ldots, M_n)$ его вершины фундаментальные точки. Базисными формами определены базисные, координатные линии (φ^{β}), и

$$d M_{\mathcal{J}} = \omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}\beta} M_{\varkappa}. \tag{4.1}$$

Для геометрического исследования многообразия (m, F) надо еще знать и геометрическое истолкование всех его дифференциальных инвариантов $a^{\varkappa}_{\mathcal{J}\beta}$. Известно, что инварианту $a^{\varkappa}_{\mathcal{J}\beta}$ можно указать не одно геометрическое истолкование.

Спрашивается, есть ли хотя бы один простой, стандартный и в некотором смысле общий способ геометрического истолкования всех основных дифференциальных инвариантов многообразия (m,F)? Систему всех инвариантов $a^{x}_{\gamma\beta}$ в уравнениях дифференциальных перемещений канонического репера будем называть основной и ее инварианты-основными. Такая система, удовлетворяющая структурным уравнениям многообразия (m,F) определяет это многообразие и только его. В отличие от неё может быть несчетное множество других систем инвариантов того же многообразия-допустимых функций некоторых основных инвариантов, которые не определяют многообразия (m,F).

Уравнения касательной $(M_\gamma)_T$ к линии (M_γ), описываемой вершиной M_γ репера $(M,M_1,\dots,M_n)$

$$P=M_\gamma+\lambda\, dM_\gamma. \tag{4.2}$$

Обозначим

$$P=x^{\gamma}M_\gamma. \tag{4.3}$$

Уравнения прямых $(M_\gamma)_T$ в локальных однородных координатах

$$(M)_T\ \begin{cases} x^0=1+\lambda\varphi^{\beta}a^{0}_{0\beta},\\ x^1=\lambda\varphi^{\beta}a^{1}_{0\beta},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ x^n=\lambda\varphi^{\beta}a^{n}_{0\beta} \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(M_n)_T\ \begin{cases} x^0=\lambda\varphi^{\beta}a^{0}_{n\beta}\\ \dots\dots\dots\\ x^n=1+\lambda\varphi^{\beta}a^{n}_{n\beta}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Обозначим неоднородные координаты точки

$$x^{\gamma}_{x}=\frac{x^{\gamma}}{x^{x}},\quad \frac{x^{x}}{x^{x}}=1\ . \tag{4.5}$$

Из соотношений (4.4.), (4.5) уравнения прямой $(M_x)_T$ в неоднородных координатах (4.5) запишутся в виде

$$x^{\gamma}_{x}=\frac{\lambda\varphi^{\beta}a^{\gamma}_{x\beta}}{1+\lambda\varphi^{\beta}a^{x}_{x\beta}}. \tag{4.6}$$

§5. Факторизация аналитических точек

При перенормировке (I.3) формы ω^{x}_{γ} изменяются по формулам (I.4). Следовательно,

$$\hat\omega^0_0=\omega^0_0+d\ln\mu.$$

Формы $\omega^i_i-\omega^0_0$ инвариантные. Перенормировку координат можно сделать так, что $\hat\omega^0_0=0$.

Отбрасывая символ $\wedge$, можно $\hat\omega^{x}_{\gamma}$ обозначить в виде ω^{x}_{γ}, где

$$\omega^0_0=0.$$

Можно поступить иначе-наложить условие на определитель

$$|M M_1\dots M_n|=\mathrm{const}\neq 0.$$

Тогда

$$\omega^0_0+\omega^1_1+\dots+\omega^n_n=0.$$

Наконец, факторизацию можно осуществить заменой однородных координат неоднородными, например, по формулам (4.5). При этом необходимо учесть, что все точки гиперплоскости $x^{x}=0$ в формулах (4.5) не будут иметь неоднородных координат .Для геометрического истолкования основных инвариантов воспользуемся заменой однородных координат неоднородными по формулам (4.5).

§6. Геометрическое истолкование инвариантов $a^{\gamma}_{\varkappa\beta}$ при $\gamma \neq \varkappa$

При смещении вершины $M_{\varkappa}$ по линии (φ^{β}), т.е. при

$$dM_{\varkappa} = a^{\gamma}_{\varkappa\underline{\beta}}\,\varphi^{\underline{\beta}} M_{\gamma}, \tag{6.1}$$

где символ $\underline{\beta}$ означает индивидуальный индекс, значение индекса β без суммирования по нем. Базисным формам при этом можно придать значения, например, $\varphi^{\beta}=1$, остальные равны нулю. Уравнения касательной $(M_{\varkappa})_{\beta T}$ к линии $(M_{\varkappa})_{\beta}$ теперь, пользуясь соотношениями (4.6), можно написать в виде

$$x^{\gamma}_{\varkappa} = \frac{\lambda\varphi^{\underline{\beta}} a^{\gamma}_{\varkappa\underline{\beta}}}{1+\lambda\varphi^{\underline{\beta}} a^{\varkappa}_{\varkappa\underline{\beta}}}, \tag{6.2}$$

где $\gamma \neq \varkappa$ – одно из чисел 0, 1, ... n; β одно из чисел 1, 2, ..., m. На величины $\lambda, \varphi^{\beta}, a^{\varkappa}_{\varkappa\beta}$ наложим условия:

$$\frac{\lambda\varphi^{\underline{\beta}}}{1+\lambda\varphi^{\underline{\beta}} a^{\varkappa}_{\varkappa\underline{\beta}}} = 1. \tag{6.3}$$

Из соотношений (6.1), (6.2) при $\gamma \neq \varkappa$ получим

$$x^{\gamma}_{\varkappa\beta} = a^{\gamma}_{\varkappa\beta}. \tag{6.4}$$

В формулах (6.4) содержится геометрическое истолкование инвариантов $a^{\gamma}_{\varkappa\beta}$ при $\gamma \neq \varkappa$ в виде: инварианты $a^{\gamma}_{\varkappa\beta}$ при условии (6.3) есть неоднородные координаты некоторой точки на касательной $(M_{\varkappa})_{\beta T}$ к линии, описываемой вершиной $M_{\varkappa}$ канонического репера $(M, M_1, \ldots, M_n)$ при смещении ее по инвариантной линии (φ^{β}), т.е. при дифференциальном смещении (6.1).

§7. Геометрическое истолкование инвариантов $a^{\gamma}_{\varkappa\beta}$ при $\gamma = \varkappa$

Для геометрического истолкования инвариантов $a^{\gamma}_{\varkappa\beta}$ при $\gamma = \varkappa$ рассмотрим условие (6.3), т.е. снова рассмотрим линию, описываемую вершиной $M_{\varkappa}$ и касательную к ней (6.2) при условии (6.3). Обозначим λ^{β} значение λ, соответствующее точке пересечения прямой (6.2) с гиперплоскостью $(M M_1 \ldots M_{\varkappa-1} M_{\gamma+1} \ldots M_n)$, противолежащей вершине $M_{\varkappa}$ в каноническом репере $(M, M_1, \ldots, M_n)$. Это значение удовлетворяет условию

$$1+\lambda^{\underline{\beta}}\varphi^{\underline{\beta}} a^{\varkappa}_{\varkappa\underline{\beta}} = 0$$

или при условии $\varphi^{\underline{\beta}}=1$ и остальным базисным формам со значениями, рвными нулю:

$$a^{\varkappa}_{\varkappa\beta} = -\frac{1}{\lambda^{\beta}} \tag{7.1}$$

Инвариант $a^{\varkappa}_{\varkappa\beta}$ равен взятой со знаком минус обратной величине параметра λ^{β}, которой соответствует на касательной (6.2) к линии $(M_{\varkappa})_{\beta}$ точка пересечения этой касательной с противолежащей гиперплоскостью канонического репера $(M, \ldots, M_n)$.

З а м е ч а н и е. Некоторые из инвариантов $a^{\gamma}_{\varkappa\beta}$ могут быть постоянными, один и тот же инвариант может быть истолкован несколько раз координатами различных инвариантных точек.

П р и м е р I. Уравнения дифференциальных перемещений канонического репера линии (M) на проективной плоскости [2] можно написать в виде $\frac{dM}{ds}=M_1,\ \frac{dM}{ds}=kM+M_2,\ \frac{dM_2}{ds}=M+kM_1$. Локальные уравнения касательной $(M_1)_T$ к линии (M_1), описываемой вершиной M_1 при описании линии (M) точкой M : $x^0=1+\lambda k,\ x^1=0,\ x^2=\lambda$. В пересечении этой касательной со стороной MM_2 канонического репера будет точка $Q_1(1+k,0,1)$ Единичная точка E этого репера определена проективными свойствами линии (M) в окрестности точки M [3]. Поэтому известной будет и координата k по известной $1+k$. Аналогично, на касательной $(M_2)_T$ будет точка $Q_2(2,k,0)$. У кривизны k есть два геометрических истолкования.

П р и м е р 2. Уравнения дифференциальных перемещений линии (M) в проективном трехмерном пространстве можно написать [2] в виде

$$\frac{dM}{ds}=M_1;\ \frac{dM_1}{ds}=k_1M+k_2M_1+M_2;\ \frac{dM_2}{ds}=M+\frac{4}{3}k_1M_1+$$
$$+2k_2M_2+M_3;\ \frac{dM_3}{ds}=\frac{3}{2}M_1+k_1M_2+3k_2M_3.$$

Отсюда следует, что на касаьельных $(M_1)_T,(M_2)_T,(M_3)_T$ будут соответственно точки $Q_1(1+k_1,k_2,1,0)$, $Q_2(2,\frac{4}{3}k_1,2k_2,1)$, $Q_3(1,\frac{3}{2},k_1,k_2)$. Кривизнам (k_1,k_2) получены по три геометрических истолкования

П р и м е р 3. Уравнения дифференциальных перемещений канонического репера поверхности (M) в проективном трехмерном пространстве [4]

$$dM=\left(-\frac{3}{2}\alpha\omega^1-\frac{3}{2}\beta\omega^2\right)M+\omega^1M_1+\omega^2M_2,$$
$$dM_1=(B\omega^1+b\omega^2)M+\left(\frac{1}{2}\alpha\omega^1-\frac{1}{2}\beta\omega^2\right)M_1+\omega^1M_2+\omega^2M_3,$$
$$dM_2=(a\omega^1+A\omega^2)M+\omega^2M_1+\left(-\frac{1}{2}\alpha\omega^1+\frac{1}{2}\beta\omega^2\right)M_2+\omega^1M_3,$$
$$dM_3=(A\omega^1+B\omega^2)M+(a\omega^1+A\omega^2)M_1+(B\omega^1+b\omega^2)M_2+$$
$$+\left(\frac{3}{2}\alpha\omega^1+\frac{3}{2}\beta\omega^2\right)M_3.$$

Здесь шесть инвариантов α,β,A,B,a,b. Следует заметить и здесь, что в каноническом репере $(MM_1M_2M_3)$ единичная точка E наравне с вершинами инвариантно определена проективными свойствами поверхности (M) в окрестности точки M. Координатные линии $(\omega^1),(\omega^2)$ здесь асимптотические. На касательной $(M)_{\omega^1T}$ находится точка $Q_{01}(1-\frac{3}{2}\alpha,1,0,0)$, на касательной $(M)_{\omega^2T}$ – точка $Q_{02}(1-\frac{3}{2}\beta,0,1,0)$. Аналогично получим касательные

$$(M_1)_{\omega^1T},\ (M_1)_{\omega^2T},\ (M_2)_{\omega^1T},\ (M_2)_{\omega^2T},\ (M_3)_{\omega^1T},\ (M_3)_{\omega^2T}$$

и на них соответственно точки

$$Q_{11}(1+B,\ \tfrac{1}{2}\alpha,\ 1,\ 0),\quad Q_{12}(1+b,\ -\tfrac{1}{2}\beta,\ 0,\ 1),$$
$$Q_{21}(1+a,\ 0,\ -\tfrac{1}{2}\alpha,\ 1),\quad Q_{22}(1+A,\ 1,\ \tfrac{1}{2}\beta,\ 0),$$
$$Q_{31}(1+A,\ a,\ B,\ \tfrac{3}{2}\alpha),\quad Q_{32}(1+B,\ A,\ b,\ \tfrac{3}{2}\beta).$$

Инвариантам a, b получено по два истолкования A, B – по три, и α,β – по четыре.

Список литературы

[I] Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. "Труды Моск.мат.о-ва", 1953, т. 2, с. 273–382.

[2] Ф и н и к о в С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л., 1937.

[3] Т у т а е в Л.К. К теории линий на проективной плоскости.-"Учен.зап.Белурусского гос.ун-та.Серия мат.",вып.3(52), Минск,1959.

[4] Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1948. 432 с.

Т.П. Ф у н т и к о в а

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ $(CL)_{1,2}$

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ пар фигур C и L ,где C - эллипс; L -прямая,не инцидентная плоскости эллипса [1]. Найдены условия,при которых все коники C конгруэнции $(CL)_{1,2}$ принадлежат одной квадрике.

§1. Канонический репер конгруэнции $(CL)_{1,2}$

Канонический репер $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ конгруэнции $(CL)_{1,2}$ строится следующим образом: начало A репера R помещается в точку пересечения прямой L с плоскостью соответствующего ей эллипса C, $\bar e_3=AM$,где M -центр эллипса, конец N вектора e_2 выбирается так,что $\overline{AN}=\overline{MP}$, где $\overline{MP}$ -вектор, сопряженный вектору AM ,и точка P инцидентна эллипсу C ,вектор $\bar e_1$ направляется по прямой L . Деривационные формулы репера R имеют вид

$$d\bar A=\omega^{\alpha}\bar e_{\alpha}\ ,\quad d\bar e_{\alpha}=\omega_{\alpha}^{\beta}\bar e_{\beta}\ .\ (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3),\quad (1.1)$$

причем формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha}=\omega^{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta}\;,\quad \mathcal{D}\omega^{\beta}_{\alpha}=\omega^{\gamma}_{\alpha}\wedge\omega^{\beta}_{\gamma} \tag{1.2}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3=0. \tag{1.3}$$

Пусть

$$\omega^1\wedge\omega^2\neq 0. \tag{1.4}$$

Уравнения эллипса C и система дифференциальных уравнений конгруэнции $(CL)_{1,2}$ запишутся в виде

$$b(x^3-1)^2+(x^2)^2-1=0,\quad x^1=0,\quad b>0; \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\omega^3_3=\alpha\omega^1-\omega^3,\quad \omega^1_3=n\omega^1,\quad \omega^3_1=\Gamma^3_{1\nu}\omega^{\nu},\\ \frac{1}{2}d\ln b=\rho\omega^1-\omega^3,\quad \omega^1_2=m\omega^1,\quad \omega^2_1=\Gamma^2_{1\nu}\omega^{\nu},\\ b\omega^3_2=l\omega^1+\omega^2,\quad \omega^2_2=\beta\omega^1,\quad \omega^3=\Gamma^3_{\nu}\omega^{\nu},\\ \omega^2_3=\gamma\omega^1-\omega^2,\quad (i,j,\nu=1,2,\ i\neq j).\end{gathered} \tag{1.6}$$

Конгруэнции $(CL)_{1,2}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

§2. Конгруэнции Q

Возьмем на конике C точку B.

$$\bar{B}=\bar{A}+a\bar{e}_3,\quad \left(a=\sqrt{\tfrac{1}{b}}+1\right). \tag{2.1}$$

При движении точка B описывает некоторую поверхность (B). Координатными линиями на поверхности (B) являются линии

$$\omega^1=0,\quad \omega^2=0.$$

Так как при $\omega^1=0$ точка B описывает конику C, то коники C являются семейством координатных линий на поверхности (B) (линии $\omega^1=0$). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.1. Все коники C конгруэнции $(CL)_{1,2}$ принадлежат одной поверхности и являются на ней семейством координатных линий.

О п р е д е л е н и е 2.1. Конгруэнцией Q называется конгруэнция $(CL)_{1,2}$, у которой поверхность, несущая коники C, является квадрикой.

Общее уравнение квадрики, содержащей эллипс C, записывается в виде

$$q\equiv b(x^3-1)^2+(x^2)^2+\zeta(x^1)^2+2\lambda x^1x^3+2\mu x^1x^2+2\eta x^1-1=0. \tag{2.2}$$

Из требования инвариантности квадрики q получаем условия, при которых все эллипсы C принадлежат одной квадрике. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}&1)\quad \lambda n-\mu m-\eta-\beta+b\alpha=0;\\ &2)\quad b\rho-\eta+(\mu m+\beta)(b-1)=0;\\ &3)\quad \lambda m+\mu n+l+\gamma=0;\\ &4)\quad \lambda(2n+1)+\eta n+b\alpha=0;\\ &5)\quad l-\mu-\eta m=0;\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$
\begin{aligned}
&6)\ d\zeta = k\zeta\omega^1 + 2\lambda\omega_1^3 + 2\mu\omega_1^2 + 2\zeta\omega_1^1;\\
&7)\ d\mu = k\mu\omega^1 - \mu\omega_3^3 + \lambda\omega_2^3 + \zeta\omega_2^1 + \omega_1^2;\\
&8)\ d\lambda = k\lambda\omega^1 - \lambda\omega_2^2 + \mu\omega_3^2 + \zeta\omega_3^1 + b\omega_1^3,\\
&9)\ d\eta = k\eta\omega^1 + \eta\omega_1^1 + \zeta\omega^1 + \mu\omega^2 + \lambda\omega^3 - b\omega_1^3,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где

$$k = -2(\beta + \mu m).$$

Дифференцируя систему уравнений (2.3) с учетом уравнений (2.4), получаем

$$
\begin{aligned}
&1)\ dl = d\mu + d\eta\cdot m + \eta\cdot dm;\\
&2)\ d\alpha = \frac{1}{b}\left[-n(d\lambda + d\eta) - (n+1)d\lambda - \alpha\cdot db - (2\lambda+\eta)dn\right];\\
&3)\ d\gamma = -m(d\lambda + d\eta) - (n+1)d\mu - \mu\cdot dn - (\lambda+\eta)dm;\\
&4)\ d\rho = \frac{1}{b}\left[d\eta + (b-1)(n+1)(d\lambda+d\eta) + (n+1)(\lambda+\eta)db + (b-1)(\lambda+\eta)dn\right];\\
&5)\ d\beta = -(n+1)(d\lambda+d\eta) - m\cdot d\mu - (\lambda+\eta)dn - \mu\cdot dm.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Конгруэнции Q определяются замкнутой системой дифференциальных уравнений (1.6), конечными соотношениями (2.3) и уравнениями (2.4), (2.5).

Замыкая систему дифференциальных уравнений (1.6) с учетом уравнений (2.5), получаем

$$S_1 = 5,\quad q = 8,\quad S_2 = 3,\quad N = Q = 11.$$

Т е о р е м а 2.2. Конгруэнции Q существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Пусть точка A является характеристической точкой координатной плоскости $\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, т.е. выполняется

$$\Gamma_1^3 = \Gamma_2^3 = 0. \tag{2.6}$$

Торсовые конгруэнции Q [2], т.е. такие конгруэнции Q, у которых линейчатая поверхность $(L)_c$ – торс, выделяются из конгруэнций Q условиями

$$\Gamma_{12}^3 = 0,\quad l = 0. \tag{2.7}$$

Рассмотрим случай, когда торс $(L)_c$ является цилиндрической поверхностью. Торс $(L)_c$ – цилиндрическая поверхность, если

$$\Gamma_{12}^2 = 0. \tag{2.8}$$

Из условий (2.6) – (2.8) следует:

$$\gamma = 0,\quad \alpha = 0,\quad \rho + \beta = 0. \tag{2.9}$$

В силу условий (2.6)-(2.9) уравнения системы (2.3) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \lambda n-\mu m-\eta-\beta=0;\\
&2)\quad \mu m(b-1)-\eta-\beta=0;\\
&3)\quad \lambda m+\mu n=0;\\
&4)\quad \lambda(2n+1)+\eta n=0;\\
&5)\quad \mu+\eta m=0.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Дифференцируя систему (2.10) с учетом уравнений системы (2.4), исключая при этом случай, когда плоскости коник взаимно параллельны,

т.е. считая

$$m\neq 0, \tag{2.11}$$

приходим к следующим соотношениям:

$$\beta=0,\ \rho=0,\ \mu=0,\ \lambda=0,\ \eta=0. \tag{2.12}$$

Подставляем (2.12) в уравнения системы (2.4):

$$d\zeta=0,\quad \zeta m+\Gamma^2_{11}=0,\ \zeta n+b\Gamma^3_{11}=0,\ \zeta-b\Gamma^3_{11}=0,$$

откуда следует

$$n+1=0. \tag{2.13}$$

Полагая

$$\Gamma^3_{11}=-\frac{1}{b}, \tag{2.14}$$

получаем

$$\zeta=-1,\ \Gamma^2_{11}=m. \tag{2.15}$$

Таким образом, торсовые конгруэнции Q, у которых точка A является характеристической точкой координатной плоскости $\{A,\bar e_1,\bar e_2\}$ и торс $(L)_c$ — цилиндрическая поверхность, при условии (2.14) определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\omega^3=0,\quad \omega^{i+1}_{i+1}=0,\quad \frac{1}{2}d\ln b=0,\quad \omega^i_3=-\omega^i,\\
&b\,\omega^3_i=(-1)^i\omega^i,\quad \omega^j_i=m\,\omega^1.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Все эллипсы C принадлежат квадрике

$$q=b(x^3-1)^2+(x^2)^2-(x^1)^2-1=0. \tag{2.17}$$

Из уравнений (2.16),(2.17) следует, что полученные конгруэнции являются центрально-симметричными торсовыми конгруэнциями [2, с. 114-115].

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.3. Калининград, 1973, с.41-48.

2. Новожилова Т.П. Вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$.-В кн.: "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".Вып.4.Калининград, 1974, с.107-116.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Е.А.Хляпова

О ПАРАХ КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ КОНИКОЙ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются пары, образованные конгруэнцией (F_1) центральных коник F_1 и поверхностью (F_2), описанной точкой F_2, не инцидентной плоскости коники F_1, причем касательная плоскость поверхности (F_2) не параллельна плоскости коники F_1. В работе исследуются пары P поверхность (F_2) которых является квадрикой и все коники F_1 конгруэнции (F_1) принадлежат этой квадрике. Выделены ассоциированные коники $C_{n,m,k}$ и доказано, что коника $C_{n,m,k}$ (n,m,k -фиксированы) конгруэнции $(C_{n,m,k})$ может иметь либо все свои точки фокальными, либо не более четырех фокальных точек. Подробно исследован подкласс пар P.

§ I. Система уравнений Пфаффа пары P

Канонический репер $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ пары P как и в[I] строим следующим образом: вершину A репера совмещаем с точкой F_2, концы E_α векторов $\bar{e}_\alpha$ (α,β,γ =I,2,3) располагаем на конике F_1 таким образом, что прямые E_1E_2, CE_3, где C -центр коники F_1, являются сопряженными диаметрами коники F_1, а прямая E_1E_2 параллельна линии пересечения касательной плоскости поверхности(A) и плоскости коники F_1.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha, \qquad d\bar{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{e}_\beta, \tag{1}$$

где формы Пфаффа $\omega^\alpha, \omega_\alpha^\beta$ удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha, \qquad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

Относительно построенного репера уравнения коники F_1 имеют вид:

$$2\left(x^1-\tfrac{1}{2}\right)^2+2\left(x^2-\tfrac{1}{2}\right)^2=1, \qquad x^1+x^2+x^3=1. \tag{3}$$

Так как точка A описывает квадрику, которой принадлежат все коники F_1 конгруэнции (F_1), то уравнение квадрики запишется в виде:

$$a(x^1)^2+a(x^2)^2-2(1+b)x^1x^2-bx^1x^2-bx^2x^3+(x^3)^2-a(x^1+x^2)-x^3=0. \tag{4}$$

Причем имеют место соотношения:

$$\omega^3=-a(\omega^1+\omega^2),$$

$$da-2a\omega_1^1+2(1+b)\omega_1^2+b\omega_1^3-a(b\omega_3^1+b\omega_3^2-2\omega_3^3)=0,$$

$$db-b(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3)+2\omega_1^3+(2a-b^2)\omega_3^1-(2+2b+b^2)\omega_3^2=0,$$

$$b(\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_1^2-\omega_2^1)-2(\omega_1^3-\omega_2^3)-2(a+b+1)(\omega_3^1-\omega_3^2)=0,$$

$$2a(\omega_1^1-\omega_2^2)+2(1+b)(\omega_2^1-\omega_1^2)-b(\omega_1^3-\omega_2^3)=0,$$

$$(a+b)(\omega_3^1+\omega_3^2)+(2a+b)(\omega^1+\omega^2)-\omega_3^3=0,$$

$$a(\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_1^2-\omega_2^1)+\omega_1^3-\omega_2^3-2(a+b+1)(\omega^1-\omega^2)=0,$$

$$a\omega_1^1-(a+2b+2)\omega_1^2-(b+1)\omega_1^3+a(b+2)\omega^1-(2b-ab+2)\omega^2=0,$$

$$2\omega_1^1-2(a+b)\omega_1^2-2a\omega_2^1+2(b+1)\omega_2^2+(b+4)\omega_1^3+b\omega_2^3+$$

$$+2(2a+b)\omega_3^1-2(2+b)(\omega_3^2+\omega_3^3)=0.$$

Исключая из рассмотрения случай параллельности касательной плоскости поверхности (A) в точке A вектору $\bar{e}_3$, примем главные формы $\omega^i (i=1,2)$ за независимые.

Система уравнений Пфаффа пары P состоит из уравнений (5) и следующих уравнений

$$\omega_1^1=\mu_i\omega^i, \quad \omega_2^2=\eta_i\omega^i, \quad \omega_3^3=\nu_i\omega^i. \qquad (6)$$

Анализируя эту систему, убеждаемся, что пары P существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Через $C_{n,m,k}$ (n,m,k -фиксированные числа) обозначим конику с центром в точке

$$\bar{M}_{n,m,k}=\bar{A}+n\bar{e}_1+m\bar{e}_2+(k-n-m)\bar{e}_3,$$

полученную из коники F_1 сдвигом пространства A_n определяемым вектором $\overline{CM}_{n,m,k}$ и через α_k плоскость, которой принадлежит коника $C_{n,m,k}$.

Уравнения коники $C_{n,m,k}$ запишутся в виде:

$$2(x^1-n)^2+2(x^2-m)^2=1, \quad x^1+x^2+x^3=k \qquad (7)$$

Так как для каждой коники (3) однозначно определяется плоскость α_k и коника $C_{n,m,k}$, то и плоскости α_k и коники $C_{n,m,k}$ (n,m,k -фиксированные числа) образуют двупараметрические семейства.

Т е о р е м а I. Если конгруэнция $(C_{n,m,k})$ коник $C_{n,m,k}$ не является конгруэнцией с неопределенными фокальными поверхностями и неопределенными фокальными семействами, то коника $C_{n,m,k}$ конгруэнции $(C_{n,m,k})$ имеет не более четырех фокальных точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальные точки коники $C_{n,m,k}$ определяются из системы уравнений (7) и уравнений:

$$(x^1)^2(\omega_1^1-\omega_3^1)+(x^2)^2(\omega_2^2-\omega_3^2)+x^1x^2(\omega_2^1-\omega_3^1+\omega_1^2-\omega_3^2)+$$

$$x^1[\omega^1+k\omega_3^1-n(\omega_1^1-\omega_3^1)-m(\omega_1^2-\omega_3^2)]+x^2[\omega^2+k\omega_3^2-$$

$$-n(\omega_2^1-\omega_3^1)-m(\omega_2^2-\omega_3^2)]-n\omega^1-m\omega^2=0,$$

$$x^i(\omega_i^1+\omega_i^2+\omega_i^3)-(x^1+x^2)\Omega+\omega^1+\omega^2+\omega^3+k\Omega=0,$$

где

$$\Omega=\omega_3^1+\omega_3^2+\omega_3^3.$$

Коника $C_{n,m,k}$ при $n=m=\frac{1}{2}, k=1$ есть коника F_1, любая точка которой является фокальной, т.к. все коники F_1 конгруэнции (F_1) принадлежат квадрике (A) [2].

Раскладывая все формы Пфаффа по независимым и исключая

ω^1 и ω^2 из уравнений системы (8), получим уравнение третьей степени относительно x^1, x^2, при $n=m=\frac{1}{2}$, $\kappa=1$ коэффициенты этого уравнения будут пропорциональны соответствующим коэффициентам первого уравнения системы (7), поэтому коэффициенты при $(x^1)^3, (x^2)^3, (x^1)^2x^2, x^1(x^2)^2$ обращаются в ноль, а они как видно из (8) не будут зависеть от n, m, κ т.е. обращаются в ноль при любых n, m, κ

Следовательно, фокальные точки коники $C_{n,m,\kappa}$ будут определяться системой уравнений (7) и уравнением второй степени относительно x^1, x^2 полученным из (8) исключением ω^1 и ω^2.

§ 2. Пары P_1

О п р е д е л е н и е. Пара P называется парой P_1, если центр квадрики (A) совпадает с центром C коники F_1 и точка E_3 делит пополам отрезок, заключенный между точкой C и точкой пересечения диаметра CE_3 коники F_1 с касательной плоскостью поверхности (A) в точке A.

Аналитически условия, выделяющие пары P_1 из пар P, выражаются следующим образом:

$$a=2, \quad b=-1.$$

Учитывая их в (5) и (6), запишем систему уравнений Пфаффа пары P_1 в виде:

$$\omega^3=-2(\omega^1+\omega^2), \quad \omega_1^1=\mu_i\omega^i, \quad \omega_1^2=\omega^1-\omega^2+\omega_1^1,$$
$$\omega_1^3=-4\omega_1^1, \quad \omega_2^1=-2\omega^1-\omega_1^1, \quad \omega_2^2=-\omega^1-\omega^2-\omega_1^1,$$
$$\omega_2^3=4(\omega^1+\omega^2+\omega_1^1), \quad 2\omega_3^1=-\omega^1+3\omega_1^1, \tag{9}$$

$$2\omega_3^2=-3\omega^1-4\omega^2-3\omega_1^1, \quad \omega_3^3=\omega^1+\omega^2.$$

Анализируя систему уравнений (9), убеждаемся, что пары P_1 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Обозначим через M_κ характеристическую точку плоскости α_κ, а конику $C_{n,m,\kappa}$, имеющую центр в точке M_κ, назовем характеристической коникой плоскости α_κ.

Т е о р е м а 2. При любом κ прямая, соединяющая характеристическую точку M_κ плоскости α_κ с цетром C квадрики (A), параллельна вектору

$$\bar{E}=\bar{e}_1+\bar{e}_2+2\bar{e}_3.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы, определяющие точки M_κ, C и вектор $\overline{CM_\kappa}$ имеют соответственно вид:

$$\bar{M}_\kappa=\bar{A}+\frac{\kappa+1}{4}(\bar{e}_1+\bar{e}_2)+\frac{\kappa-1}{2}\bar{e}_3,$$

$$\bar{C}=\bar{A}+\frac{1}{2}(\bar{e}_1+\bar{e}_2),$$

$$\overline{CM_\kappa}=\frac{\kappa-1}{4}(\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3)$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Коника $C_{n,m,\kappa}$ конгруэнции $(C_{n,m,\kappa})$ имеет неопределенные фокальные точки тогда и только тогда, когда она является характеристической коникой плоскости α_κ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальные точки коники $C_{\kappa,m,\kappa}$ определяются из уравнений (7) и уравнения

$$(x^1)^2(1-4m+\kappa)(\mu_1-5\mu_2-1)+(x^2)^2(1-4n+\kappa)(-5\mu+\mu_2-3)+$$

$$+x^1x^2\left[4(1+\kappa)(\mu_1+\mu_2+1)+4n(\mu_1-5\mu_2-1)+4m(-5\mu_1+\mu_2-3)\right]+$$

$$+x^1\{\mu_1[-n+m+\kappa(-3-n+13m-3\kappa)]+\mu_2[5n-5m+\kappa(3+5n-17m+3\kappa)]-$$

$$-2+n+7m+\kappa(-1+n-5m+\kappa)\}+x^2\{\mu_1[-5n+5m+\kappa(3-17n+5m+3\kappa)]+$$

$$+\mu_2[n-m+\kappa(-3+13n-m-3\kappa)]+2-11n+3m+\kappa(1+n+3m-\kappa)\}+$$

$$+(n-m)\left[2+\kappa-\kappa^2+3\kappa(1+\kappa)(\mu_1-\mu_2)\right]=0. \qquad (11)$$

Если фокальные точки коники $C_{n,m,\kappa}$ неопределенны, то коэффициенты уравнения (II) должны быть пропорциональны соответствующим коэффициентам первого уравнения системы (7). А это будет только в случае, если

$$n=m=\frac{1+\kappa}{4}, \qquad (12)$$

т.е. если коника $C_{n,m,\kappa}$ является характеристической коникой плоскости α_κ. Наоборот, при выполнении условий (I2), уравнение (II) обращается в тождество. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. Точки $K'_{n,\kappa}$ и $K''_{n,\kappa}$ пересечения коники $C_{n,n,\kappa}$ конгруэнции $(C_{n,n,\kappa})$ с диаметром, параллельным $\overline{CE_3}$ являются её фокальными точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы, определяющие точки $K'_{n,\kappa}$ и $K''_{n,\kappa}$ записываются в виде:

$$\overline{K}'_{n,\kappa}=\overline{A}+\frac{2n+1}{2}(\overline{e}_1+\overline{e}_2)+(\kappa-1-2n)\overline{e}_3,$$

$$\overline{K}''_{n,\kappa}=\overline{A}+\frac{2n-1}{2}(\overline{e}_1+\overline{e}_2)+(\kappa-2n+1)\overline{e}_3.$$

Подставляя координаты этих точек в уравнение (II) при $n=m$, убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно.

Т е о р е м а 5. Пары P_1 обладают следующими свойствами: I/ прямая, соединяющая характеристические точки граней $(A\overline{e}_i\overline{e}_3)$ параллельна диаметру E_1E_2 коники F_1, 2/ середины отрезков AE_α являются фокусами ребер AE_α конгруэнций (AE_α), а плоскость, проходящая через оставшиеся фокусы ребер AE_α, инцидентна центру C коники F_1, 3/ прямолинейные конгруэнции (AE_i) имеют по одному семейству соответствующих торсов, 4/ точка E_i описывает линию тогда и только тогда, когда прямолинейная конгруэнция (AE_3) и конгруэнция координатных плоскостей $(A\overline{e}_1\overline{e}_2)$ односторонне аффинно расслояемы [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/ Характеристические точки граней $(A\overline{e}_1\overline{e}_3)$, $(A\overline{e}_2\overline{e}_3)$ определяются формулами

$$\overline{M}_1=\overline{A}+\frac{3}{7}\overline{e}_1+\frac{2}{7}\overline{e}_3, \quad \overline{M}_2=\overline{A}+\frac{3}{7}\overline{e}_2+\frac{2}{7}\overline{e}_3.$$

Следовательно, вектор $\overline{M_1M_2}\left(-\frac{3}{7},\frac{3}{7},0\right)$ параллелен диаметру E_1E_2.

2/ Фокусы F'_α, F''_α ребер AE_α конгруэнций (AE_α) задаются формулами:

$$\overline{F}'_1=\overline{A}+\frac{1}{2}\overline{e}_1, \quad \overline{F}''_1=\overline{A}-\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\overline{e}_1;$$

$$\overline{F}'_2=\overline{A}+\frac{1}{2}\overline{e}_2, \quad \overline{F}''_2=\overline{A}+\frac{1}{2+\mu_1+\mu_2}\overline{e}_2;$$

$$\overline{F}_3' = \overline{A} + \frac{1}{2}\overline{e}_3 , \quad \overline{F}'' = \overline{A} + \frac{2}{1-3\mu_1+3\mu_2}\,\overline{e}_3 .$$

Легко убедиться, что векторы $\overline{CF}_1'', \overline{CF}_2'', \overline{CF}_3''$ компланарны.

3/ Уравнения торсов прямолинейных конгруэнций $(AE_1), (AE_2)$ имеют вид:

$$(\omega^1-\omega^2)\,\omega_2^2 = 0 , \quad (\omega^1-\omega^2)\,\omega_1^1 = 0 .$$

4/ Касательная плоскость поверхности (E_i) определяется точкой E_i и векторами

$$\overline{E}_i' = (1+\mu)(\overline{e}_1+\overline{e}_2) - 2(1+2\mu_1)\,\overline{e}_3 ,$$

$$\overline{E}_i'' = \mu_2(\overline{e}_1+\overline{e}_2) - (1+2\mu_2)\,\overline{e}_3$$

Если точка E_i описывает линию, то векторы $\overline{E}_i'$ и $\overline{E}_i''$ коллинеарны, т.е.

$$\mu_1 + \mu_2 + 1 = 0. \qquad (13)$$

Условие (13) является в то же время условием одностороннего аффинного расслоения прямолинейной конгруэнции (AE_3) и конгуэнции плоскостей $(A\overline{e}_1\overline{e}_2)$. Теорема доказана.

Список литературы.

1. Х л я п о в а Е.А. Об одном классе конгруэнций пар фигур, порожденных центральной коникой и точкой.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 4. Калининград 1974, с. 186-192.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия семейств линий и поверхностей.-В кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1972, т. 10, с. 113-157. (М., ВИНИТИ АН СССР)

3. Т к а ч Г.П. О некоторых классах аффинно-расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 3. Калининград, 1973, с. 143-152.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

В.Н.Худенко

ОБ ОСНОВНОМ ОБЪЕКТЕ $(n-1)$-МЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ СУБКВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В n-мерном проективном пространстве рассматриваются $(n-1)$-мерные многообразия V_{n-1} $(n-3)$-мерных квадрик (субквадратичных элементов), $(n-2)$-мерные плоскости которых образуют $(n-1)$ параметрическое семейство. Получена система дифференциальных уравнений многообразия V_{n-1}. Найден его основной объект [I].

Отнесем пространство P_n к подвижному реперу $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$. Инфинитезимальные перемещения репера определяются уравнениями

$$dA_J = \omega_J^{L} A_L \quad (J, L, K = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{1}$$

причем формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_J^{L} = \omega_J^{K} \wedge \omega_K^{L}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_{n+1}^{n+1} = 0. \tag{2}$$

Если вершины A_α $(\alpha, \beta, \gamma, \eta = 1, 2, \ldots, n-1)$ поместить в $(n-2)$-мерной плоскости субквадратичного элемента, то уравнения субквадратичного элемента и замкнутая система уравнений многообразия V_{n-1} запишутся соответственно в виде

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^n = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad \det(a_{\alpha\beta}) = 1; \tag{3}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma, \quad \omega^n_\alpha = \Gamma^{n\gamma}_{\alpha}\omega_\gamma,$$
$$\Delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\wedge\omega_\gamma = 0, \quad \Delta\Gamma^{n\gamma}_{\alpha}\wedge\omega_\gamma = 0, \tag{4}$$

где

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha^{n+1},$$

$$\Delta\Gamma^{n\gamma}_{\alpha} = \nabla\Gamma^{n\gamma}_{\alpha} - \Gamma^{n\beta}_{\alpha}\Gamma^{n\gamma}_{\beta}\omega^{n+1}_n + \Gamma^{n\gamma}_{\alpha}(\omega^n_n - \omega^{n+1}_{n+1}) + \delta^\gamma_\alpha\omega^n_{n+1},$$

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma^\eta_{\alpha\beta} = {} & \nabla\Gamma^\eta_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma^{n\eta}_{\gamma}\omega^{n+1}_n + \\ & + \Gamma^\eta_{\alpha\beta}\left(\tfrac{2}{n-1}\omega^\gamma_\gamma - \omega^{n+1}_{n+1}\right) + \\ & + \tfrac{2}{n-1}a_{\alpha\beta}\Gamma^{n\eta}_{\gamma}\omega^\gamma_n - 2a_{\gamma(\alpha}\Gamma^{n\eta}_{\beta)}\omega^\gamma_n + \\ & + \tfrac{2}{n-1}a_{\alpha\beta}\omega^\eta_{n+1} - 2a_{\gamma(\alpha}\delta^\eta_{\beta)}\omega^\gamma_{n+1}.\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь ∇ - символ ковариантного дифференцирования.

Обозначим

$$\pi^{L}_{J} = (\omega^{L}_{J})_{\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_{n-1}=0}. \tag{6}$$

В системы (5) имеем:

$$\overset{\circ}{\nabla} a_{\alpha\beta} + \frac{2}{n-1}\Pi^{\gamma}_{\gamma} = 0,$$

$$\overset{\circ}{\nabla}\Gamma^{n\gamma}_{\alpha} - \Gamma^{n\beta}_{\alpha}\Gamma^{n\gamma}_{\beta}\Pi^{n+1}_{n} + \Gamma^{n\gamma}_{\alpha}(\Pi^{n}_{n} - \Pi^{n+1}_{n+1}) + \delta^{\gamma}_{\alpha}\Pi^{n}_{n+1} = 0, \qquad (7)$$

$$\overset{\circ}{\nabla}\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{n\eta}_{\gamma}\Pi^{n+1}_{n} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Big(\frac{2}{n-1}\Pi^{\gamma}_{\gamma} - \Pi^{n+1}_{n+1}\Big) + \frac{2}{n-1}a_{\alpha\beta}\Gamma^{n\eta}_{\gamma}\Pi^{\gamma}_{n} - 2a_{\gamma(\alpha}\Gamma^{n\eta}_{\beta)}\Pi^{\gamma}_{n} + \frac{2}{n-1}a_{\alpha\beta}\Pi^{\eta}_{n+1} - 2a_{\gamma(\beta}\delta^{\eta}_{\alpha)}\Pi^{\gamma}_{n+1} = 0,$$

где нолик над символом ∇ означает фиксацию первичных параметров в соответствующем выражении.

Зададим компонентам фундаментального объекта $\Gamma = \{a_{\alpha\beta}, \Gamma^{n\gamma}_{\alpha}, \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\}$ следующие постоянные значения:

$$\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta},\quad \Gamma^{n\hat{\imath}}_{\hat{\imath}} = \hat{\imath},\quad \Gamma^{1}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}} = \hat{\alpha}, \qquad (8)$$

где

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \pm 1;\ \prod_{\alpha=1}^{n-1}\varepsilon_{\alpha\alpha} = 1;\ \hat{\alpha},\hat{\beta} = 4,5,\dots,n-1;\ \hat{\imath},\hat{\jmath} = 1,2,3$$

и по $\hat{\imath}$ суммирование не производится.

Все остальные компоненты фундаментального объекта Γ положим равными нулю. К системе (5) присоединим формальную алгебраическую систему

$$X_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{a}_{\gamma\beta}Y^{\gamma}_{\alpha} - \overset{\circ}{a}_{\alpha\gamma}Y^{\gamma}_{\beta} + \frac{2}{n-1}\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}Y^{\gamma}_{\gamma} = 0$$

$$X^{\gamma}_{\alpha} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{n\gamma}_{\beta}Y^{\beta}_{\gamma} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{n\beta}_{\alpha}Y^{\gamma}_{\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{n\beta}_{\alpha}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{n\gamma}_{\beta}Y^{n+1}_{n} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{n\gamma}_{\alpha}(Y^{n}_{n} - Y^{n+1}_{n+1}) + \delta^{\gamma}_{\alpha}Y^{n}_{n+1} = 0 \qquad (9)$$

$$X^{\eta}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\eta}_{\alpha\beta}Y^{\gamma}_{\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\eta}_{\gamma\beta}Y^{\gamma}_{\alpha} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}Y^{\eta}_{\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{n\eta}_{\gamma}Y^{n+1}_{n} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\eta}_{\alpha\beta}\Big(\frac{2}{n-1}Y^{\gamma}_{\gamma} - Y^{n+1}_{n+1}\Big) + \frac{2}{n-1}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{n\eta}_{\gamma}\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}Y^{\gamma}_{n} - 2\overset{\circ}{a}_{\gamma(\alpha}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{n\eta}_{\beta)}Y^{\gamma}_{n} + \frac{2}{n-1}\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}Y^{\eta}_{n+1} - 2\overset{\circ}{a}_{\gamma(\alpha}\delta^{\eta}_{\beta)}Y^{\gamma}_{n+1} = 0.$$

Из системы (9) находим

$$Y^{\hat{\jmath}}_{\hat{\imath}} = \frac{X^{\hat{\jmath}}_{\hat{\imath}}}{(\hat{\jmath} - \hat{\imath})},\quad \hat{\imath} \neq \hat{\jmath}$$

$$Y^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} = \frac{X_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - \hat{\alpha}\varepsilon_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}X_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}}{\hat{\beta} - \hat{\alpha}\varepsilon_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}\varepsilon_{\hat{\beta}\hat{\beta}}},\quad \hat{\alpha} \neq \hat{\beta},$$

$$Y^{\beta}_{n} = \varepsilon_{\beta\beta}(X^{2}_{2\beta} - X^{1}_{1\beta}),$$

$$Y^{\beta}_{n+1} = \varepsilon_{\beta\beta}(2X^{1}_{1\beta} - X^{2}_{2\beta}),$$

$$Y^{\alpha}_{\alpha} = \frac{\Delta_{\alpha}(n-1)}{2(n-3)^{n-1}(2n-3)},$$ (по α не суммировать!)

$$Y^{n+1}_{n+1} = \frac{5}{4}X^1_1 - 2X^2_2 + \frac{3}{4}X^3_3 - \frac{1}{2}A,$$

$$Y^{n}_{n} = -\frac{5}{4}X^1_1 + 2X^2_2 - \frac{3}{4}X^3_3 - \frac{1}{2}A,$$

$$Y^{n}_{n+1} = -\frac{6}{4}X^1_1 - 3X^2_2 + 2X^3_3,$$

$$Y^{n+1}_{n} = -\frac{1}{2}X^1_1 + X^2_2 - \frac{1}{2}X^3_3,$$

где

$$A = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\Delta_\alpha (n-1)}{2(n-3)^{n-1}(2n-3)}$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} n-2 & 1 & \ldots X_{11}\varepsilon_{11} & \ldots & 1 \\ 1 & n-2 & \ldots X_{22}\varepsilon_{22} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots X_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots X_{n-1,n-1}\varepsilon_{n-1,n-1} & \ldots & n-2 \end{vmatrix}$$

Из того, что формальная система (9) алгебраически разрешима относительно величин $Y^{\alpha}_{\varkappa}$ следует, что система дифференциальных уравнений (7) разрешима в окрестности точки $(\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}, \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\eta}_{\alpha\beta}, \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha\beta}_{\alpha})$ относительно всех вторичных форм. Доказана следующая теорема:

Т е о р е м а I. Фундаментальный объект первого порядка Γ является основным объектом многообразия V_{n-1} субквадратичных элементов [I].

Список литературы

I. Л а п т е в Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Труды Моск.матем.об-ва", I953, №2, с.275-382 (М., ГИТТЛ).

С е м и н а р

го дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском государственном университете.

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 29 июня 1974 года.

Ниже приводится перечень докладов обсужденных с 16 октября 1974 года по 28 мая 1975 года.

16.10.1974г. Ю.И.П о п о в. Внутренние оснащения вырожденной m-мерной гиперполосы H_m^r ранга r многомерного проективного пространства.

23.10.1974г. В.В.М а х о р к и н. Многообразия квадратичных гиперповерхностей со специальным свойством ассоциированных многообразий.

30.10.1974г. Е.В.С к р ы д л о в а. Вырожденные конгруэнции пар фигур, порожденные коникой и прямой.

13.11.1974г. Г.П.Т к а ч. Об одном классе аффинно-расслояемых пар фигур, порожденных параболой и прямой.

20.11.1974г. Г.Л.С в е ш н и к о в а. О касательно оснащенных конгруэнциях кривых второго порядка с вырождающимися фокальными поверхностями.

27.11.1974г. Е.А.Х л я п о в а. О парах конгруэнций фигур, порожденных центральной коникой и точкой.

11.12.1974г. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Классы многообразий плоскостей в аффинном пространстве.

18.12.1974г. В.С.М а л а х о в с к и й. О характеристических признаках некоторых классов поверхностей.

25.12.1974г. Л.Г.К о р с а к о в а. О паре конгруэнций коник в P_3, касающихся линии пересечения своих плоскостей в одной точке.

8.1.1975г. Т.П.Ф у н т и к о в а. Вырожденные конгруэнции линейных и полуквадратичных пар фигур.

15.1.1975г. В.Н.Х у д е н к о. Об основном объекте $(n-1)$-мерного многообразия субквадратичных элементов.

12.2.1975г. В.М.О в ч и н н и к о в. Некоторые геометрические образы полуквадратичных пар фигур.

19.2.1975г. Н.М.К а щ е н к о. Многообразия пар фигур, порожденных квадратичным элементом и прямой в P_n.

19.2.1975г. И.М.К а з а н ц е в а. Конгруэнция пар фигур, образованная коникой и её касательной.

26.2.1975г. В.А.О р л ю к. К теории вырожденных гиперполос ранга r многомерного проективного пространства.

26.2.1975г. Г.А.А л а б у ж е в а. Инвариантное оснащение специального класса распадающихся гиперполос проективного пространства.

5.3.1975г. Е.В.С к р ы д л о в а. Вырожденные конгруэнции полуквадратичных пар в P_3.

12.3.1975г. Л.А.З а й ц е в а. Невырожденная конгруэнция пар фигур, образованных параболой и точкой.

12.3.1975г. Т.С.Б е р е з и н а. Конгруэнция пар фигур, образованных параболой и прямой.

17.3.1975г. А.А.Л у ч и н и н. (Томск) Поверхности размерности n и m в $(n+m)$-мерном проективном пространстве.

17.3.1975г. Г.Г.П у с т ы н н и к о в (Томск). О частично нормализованных поверхностях в многомерном проективном пространстве.

26.3.1975г. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Связность в расслоении аффинных реперов, ассоциированном с конгруэнцией плоскостей.

2.4.1975г. Н.Н.Р ы л о в а. Гиперквадрика и прямая в четырехмерном проективном пространстве P_4.

2.4.1975г.Л.И.Заякина.Многообразие квадратичных элементов в аффинном пространстве.

9.4.1975г.Б.А.А н д р е е в.Дифференциальная геометрия соответствий между точечным пространством и пространством пары (p,q).

16.4.1975г.С.П е т р о в а.Конгруэнция кривых второго порядка с вырождающейся характеристической поверхностью.

16.4.1975г.В.Х о м и ч.Конгруэнция квадрик в P_3 с двумя вырождающимися фокальными поверхностями.

23.4.1975г.А.С.Ф е д е н к о (г.Минск). Φ-пространства.

30.4.1975г.Е.М и т р о ф а н о в а.Конгруэнции парабол, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство.

6.5.1975г.А.А.Ю д о в (г.Минск).О классификации подмногообразий в однородном пространстве.

21.5.1975г.В.О с т р о в с к а я.Конгруэнция эллипсов с неподвижным центром.

6.5.1975г.Р.П.Л е в и н а (г.Москва).Тангенциально-вырожденные поверхности.

21.5.1975г.Е.С о п и н а.Конгруэнция эллипсов, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство.

28.5.1975г.Н.П о л и щ у к.Конгруэнции коник с одной вырождающейся фокальной поверхностью.

28.5.1975г.Е.Е р м а к о в а.Конгруэнции коник с вырождающейся в точку фокальной поверхностью.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 6

Редактор В.И. ВАСИЛЬЕВА. Техн. редактор Н.ШИШКОВА

Сдано в набор 11.07.1975 г. Подписано к печати 11.07.1975 г.

Формат бумаги 60x90 1/16 Сорт бумаги офсетн. № 1 80 г/м²

Печ. л. 14,5 Уч.-изд. л. 14,3.

КУ 02798. Заказ 10461. Тираж 500 экз. Цена 1 р. 30 к.

Калининградский государственный университет,
ул. Университетская, 2.

Типография издательства "Калининградская правда",
Калининград обл., ул. Карла Маркса, 18.

1 р. 30 к.