МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 8

Калининград
1977

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Калининградский государственный университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 8

Калининград 1977

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Калининградского государственного университета

УДК 513.73

Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.8 Калининград, 1977 г.

Статьи настоящего выпуска относятся к следующим разделам дифференциальной геометрии: многообразия квадрик в многомерных и трехмерных пространствах; теория сетей, теория гиперполос, связности, ассоциированные с многообразиями фигур; многообразия пар фигур.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области геометрии.

Содержание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

В.Н. В е л и ч к и н

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ТРИ-ТКАНЯХ НА V_2 в E_3

1. В работе [4] указан способ получения на поверхности V_2 в евклидовом пространстве E_3 связности Вейля с помощью задания 3-ткани векторными полями

$$\underset{\alpha}{X} = \xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (\alpha = 1,2,3;\ i = 1,2), \tag{1}$$

направленными вдоль семейств ее линий. При этом всюду используется нормировка

$$\sum_\alpha \underset{\alpha}{X} = 0. \tag{2}$$

Отсюда проследует,что

$$\sum_\alpha \xi^i_\alpha = 0. \tag{3}$$

Основной тензор g_{ij} указанной связности Вейля определяется так:

$$g_{ij} = \sum_\alpha \tilde{\xi}^\alpha_i \tilde{\xi}^\alpha_j, \tag{4}$$

где каждая пара форм

$$\omega^\alpha = \tilde{\xi}^\alpha_i du^i \tag{5}$$

образует корепер,взаимный реперу из пары векторных полей (1).

Из (2) и (3) получим

$$\sum_\alpha \omega^\alpha = 0 \Longrightarrow \sum_\alpha \tilde{\xi}^\alpha_i = 0. \tag{6}$$

Координаты дополнительного ковектора

$$\Theta = v_i\, du^i \tag{7}$$

вычисляются по формуле

$$v_i = \frac{1}{2} g^{ks} \sum_\alpha (\partial_i \tilde{\xi}^\alpha_s - \partial_s \tilde{\xi}^\alpha_i) \tilde{\xi}^\alpha_k \tag{8}$$

(суммирование по всем k и s).

2. Будем требовать,чтобы связность Вейля с основным тензором (4) и дополнительным ковектором (7) совпадала с римановой связностью,индуцируемой на поверхности V_2 метрической

нормалью. При этом будем требовать, чтобы тензор (4) удовлетворял условию

$$g_{ij} = \delta_{ij}\,, \tag{9}$$

которое означает совпадение его с метрическим тензором поверхности V_2, отнесенной к сети линий кривизны.

Можно показать, что условие (9) само по себе еще не дает требуемого совпадения связностей.

Т е о р е м а . Связность Вейля, удовлетворяющая условию (9), индуцируемая на поверхности $V_2 \subset E_3$ 3-тканью, тогда и только тогда совпадает с римановой связностью, индуцируемой на поверхности метрической нормалью, когда заданная 3-ткань шестиугольна.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть связность Вейля совпадает с римановой связностью. Тогда из условия

$$\theta = d\varphi \tag{10}$$

в силу (7),(8),(9) получим следующую систему уравнений, соответствующую дифференциальному уравнению (10) в полных дифференциалах:

$$\partial_1 \tilde{\xi}^1_2 - \partial_2 \tilde{\xi}^1_1 = 0; \quad \partial_1 \tilde{\xi}^2_2 - \partial_2 \tilde{\xi}^2_1 = 0. \tag{11}$$

Дифференцируя внешним образом (5), приведем систему (11) к виду:

$$\mathcal{D}\omega^1 = 0\,, \quad \mathcal{D}\omega^2 = 0\,. \tag{12}$$

Учитывая (6), замечаем, что у 3-ткани, соответствующей рассматриваемому совпадению связностей, все формы Пфаффа замкнуты.

Форма связности γ 3-ткани, [1]

$$\gamma = h_2\omega^1 - h_2\omega^2,$$

где скалярные множители h_1, h_2 определяются из уравнений

$$\mathcal{D}\omega^1 = h_1\Omega\,, \quad \mathcal{D}\omega^2 = h_2\Omega\,,$$

обратится в нуль, а потому и кривизна ткани k [1], определяемая из условия

$$d\gamma = k\Omega\,,$$

($\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2$ — поверхностный элемент 3-ткани) будет нулем, и заданная 3-ткань шестиугольна.

Обратно, пусть ткань шестиугольна. Тогда с помощью перенормирования ее форм Пфаффа ω^α форму связности γ можно привести к нулю:

$$h_2\omega^1 = h_1\omega^2\,. \tag{13}$$

Умножая внешне обе части (13) на ω^1 и ω^2, получим систему (12), которая являлась необходимым и достаточным условием совпадения двух связностей при условии (9). Теорема доказана.

Отметим, что эту теорему можно считать обобщением теоремы, указанной в [3].

3. Возьмем первых два векторных поля (1) ортонормированными, направленными по линиям кривизны поверхности V_2. Тогда, учитывая требование (3), будем иметь следующие координаты векторных полей (1):

$$\xi^1_1 = 1,\ \xi^2_1 = 0;\ \xi^1_2 = 0,\ \xi^2_2 = 1;\ \xi^1_3 = -1,\ \xi^2_3 = -1,$$

то есть третье семейство будет биссекторным.

Легко проверить, что тогда вейлева связность, индуцируемая на поверхности 3-тканью, в силу доказанной теоремы будет совпадать с римановой связностью, индуцируемой на поверхности метрической нормалью (ср. [3]).

4. Выберем теперь в качестве направляющих векторов двух семейств 3-ткани единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, направленные вдоль линий кривизны поверхности V_2. Третье семейство определим вектором

$$\vec{e} = \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2\,, \tag{14}$$

где λ дифференцируемая функция двух аргументов.

Подберем векторы $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ так, чтобы выполнялась нормировка (1). Нетрудно видеть, что

$$\vec{e}\,'_1 = -\vec{e}_1\,,\ \vec{e}\,'_2 = -\lambda\vec{e}_2\,.$$

С помощью вектора $\vec{e}_3$ (метрической нормали) построим риманову связность $\overset{\circ}{\nabla}$ с метрическим тензором

Имеем:

$$\gamma_{11} = 1\,,\ \gamma_{12} = 0\,,\ \gamma_{22} = \lambda^2. \tag{15}$$

Коэффициенты $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ этой связности вычисляются по формуле

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{jt} = \frac{1}{2}\gamma^{ki}\left(\partial_t\gamma_{ij} + \partial_j\gamma_{it} - \partial_i\gamma_{jt}\right)$$

(см. [2]) и имеют вид:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{11} = 0,\ \ \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{12} = 0,\ \ \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{22} = -\lambda\partial_1\lambda\,; \\ &\overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{11} = 0,\ \ \overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{12} = \frac{\partial_1\lambda}{\lambda},\ \ \overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{22} = \frac{\partial_2\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \tag{16}$$

Ткань, семейства которой направлены вдоль векторных полей $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}'$, имеет формы Пфаффа

$$\omega^1=\{-1,0\},\ \omega^2=\{0,-\frac{1}{\lambda}\},\ \omega^3=\{1,\frac{1}{\lambda}\}. \quad (17)$$

По формуле (4) находим координаты основного тензора связности Вейля ∇, порожденной этой 3-тканью:

$$g_{11}=2;\ g_{12}=\frac{1}{\lambda},\ g_{22}=\frac{2}{\lambda^2}. \quad (18)$$

Подставляя (17), (18) в (8), находим:

$$v_1=0,\ v_2=0,$$

то есть связность ∇ оказывается римановой.

Коэффициенты Γ_{ij}^k этой связности вычисляются по формуле

$$\Gamma_{jt}^h=\frac{1}{2}g^{hi}(\partial_t g_{ij}+\partial_j g_{it}-\partial_i g_{jt})$$

(см. [2]) и имеют вид:

$$\Gamma_{11}^1=\frac{\partial_1\lambda}{3\lambda},\ \Gamma_{12}^1=\frac{2\partial_1\lambda}{3\lambda^2},\ \Gamma_{22}^1=\frac{4\partial_1\lambda}{3\lambda^3};$$

$$\Gamma_{11}^2=-\frac{\partial_1\lambda}{6},\ \Gamma_{12}^2=-\frac{\partial_1\lambda}{3\lambda},\ \Gamma_{22}^2=-\frac{2\partial_1\lambda}{3\lambda^2}. \quad (19)$$

5. Рассмотрим тензор T_{jk}^i аффинной деформации [2] связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$:

$$T_{jk}^i=\Gamma_{jk}^i-\overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}^i. \quad (20)$$

а) Можно показать, что римановы связности ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$ совпадают лишь при условии $\lambda=Const$.

б) Так как необходимым и достаточным условием конформного соответствия связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$ является отличие их основных тензоров (18) и (15) только скалярным множителем [2], то заключаем, что никаким выбором λ нельзя достичь конформного соответствия связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$.

в) Тензор деформации, соответствующий проективному (геодезическому) отображению связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$, имеет вид:

$$T_{jk}^i=\delta_j^i p_k+\delta_k^i p_j,$$

где

$$p_1=\frac{1}{3}(T_{11}^1+T_{21}^2),\ p_2=\frac{1}{3}(T_{12}^1+T_{22}^2)$$

(см. [2]).

Из формул (20), (19), (16) следует, что проективное отображение связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$ возможно лишь при $\lambda=Const$. (см. случай а)).

6. Вопрос о шестиугольности 3-ткани, порожденной векторными полями $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}'$, можно исследовать с помощью выше доказанной теоремы, что приводит к условию $\lambda=\lambda(u^2)$. Это есть необходимое и достаточное условие шестиугольности такой ткани. Ему, в частности, удовлетворяет ткань, отвечающая совпадению связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$.

Список литературы

I. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. М. ГИФМЛ, I959.

2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М-Л, ГИТТЛ, I950.

3. Хачатрян А.Е. Сб. асп. работ. Мат. КГУ, Вып.2, I97I, с.I35-I47.

4. Шуликовский В.И. "Научни трудови на висши педагогический ин-т. Мат". Пловдив"., I966, т.IУ, кн.I, с.I3-22.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Т.А. Дулалаева

О СЕТИ ДВОЙНЫХ ЛИНИЙ НА ПАРЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

С.П.Фиников в работах [1] , [2] изучал сети двойных линий на паре поверхностей в трехмерном проективном пространстве. В предлагаемой статье мы исследуем сети двойных линий на паре гиперповерхностей проективного пространства P_4.

1. Пусть в проективном пространстве P_4 заданы две гладкие гиперповерхности V_3 и $\overline{V}_3$ и диффеоморфизм $f: V_3 \to \overline{V}_3$ такой,что $f(A) \neq A$, $\forall A \in V_3$. Присоединим к паре этих гиперповерхностей подвижной проективный репер $R = \{A, A_1, \ldots, A_4\}$, где $A \in V_3$, $A_4 \in \overline{V}_3$, $A_4 = f(A)$, $A_i \in P_2(A)$ $(i,j,k=1,2,3)$, где $P_2(A)$ – пересечение касательных гиперплоскостей к V_3 и $\overline{V}_3$, взятых соответственно в точках A и A_4 . Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} dA &= \omega_0^0 A + \omega^i A_i, \\ dA_i &= \omega_i^0 A + \omega_i^j A_j + \omega_i^4 A_4, \\ dA_4 &= \qquad\quad \omega_4^i A_i + \omega_4^4 A_4. \end{aligned} \tag{1}$$

Если зафиксировать точку A (положить $\omega^i = 0$),то будут фиксированы точка A_4 и плоскость $P_2(A)$. Следовательно,система дифференциальных уравнений,определяющая нашу пару гиперповерхностей,примет вид:

$$\omega^4 = 0, \quad \omega_4^0 = 0, \tag{2}$$

$$\omega_i^0 = a_{ij}\omega^j, \quad \omega_i^4 = b_{ij}\omega^j, \tag{3}$$

$$\omega_4^i = c_j^i \omega^j. \tag{4}$$

Точка A_4 описывает гиперповерхность $\overline{V}_3$, поэтому из последней формулы (1) следует,что 1- формы ω_4^i линейно независимы и,значит, в формуле (4) имеем $\det \| c_j^i \| \neq 0$.

Продолжая уравнения (3), находим

$$d a_{ij} + 2 a_{ij}\omega_0^0 - a_{kj}\omega_i^k - a_{ik}\omega_j^k = a_{ijk}\omega^k, \tag{5}$$

$$d b_{ij} + b_{ij}(\omega_0^0 + \omega_4^4) - b_{kj}\omega_i^k - b_{ik}\omega_j^k = b_{ijk}\omega^k, \tag{6}$$

где a_{ijk} и b_{ijk} симметричны по двум последним индексам. Из уравнений (5),(6) следует,что каждая из систем функций $\{a_{ij}\}$ и $\{b_{ij}\}$ образует тензор. Продолжая уравнения (2), получим , что тензор b_{ij} симметричный и

$$a_{ij} c_k^i = a_{ik} c_j^i. \tag{7}$$

Продолжая уравнения (4), находим

$$dc_j^i + c_j^i(\omega_0^0 - \omega_4^4) + c_j^k \omega_k^i - c_k^i \omega_j^k = c_{jk}^i \omega^k, \tag{8}$$

где $c_{jk}^i = c_{kj}^i$.

Как показывают уравнения (8), система функций $\{c_j^i\}$ образует тензор.

2. Линия $\gamma \subset V_3$, как и линия $f(\gamma) \subset \overline{V}_3$, называется двойной линией [1] отображения f ,если в каждой точке $A \in \gamma$ касательная к линии γ в этой точке пересекает касательную к линии $f(\gamma)$ в точке $f(A)$. Ясно,что точка пересечения этих касательных принадлежит плоскости.

В.Т.Базылев в работе [3] показал,что двойные линии отображения f высекаются на гиперповерхностях V_3 и $\overline{V}_3$ развертывающимися поверхностями семейства прямых (AA_4).

Пусть точка $F = \lambda A + A_4$ является фокусом [3] прямой (AA_4), т.е. описывает ребро возврата некоторой развертывающейся поверхности семейства прямых (AA_4) . Следовательно, $dF \in (AA_4)$, когда точка A смещается в некотором направлении на поверхности V_3 . Имеем следующую систему уравнений:

$$(c_j^i + \lambda \delta_j^i)\omega^j = 0, \tag{9}$$

где формы ω^j не обращаются в нуль одновременно.

Поэтому λ является корнем уравнения

$$\det \| c_j^i + \lambda \delta_j^i \| = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет степень 3 относительно λ. Точка A_4 не является фокусом прямой (AA_4), так как $\det\|c^i_j\|\neq 0$. Допустим, что все корни уравнения (10) различны. Тогда система (9) определяет на поверхности V_3 3 линейно независимых одномерных распределения, интегральные кривые которых образуют на этой поверхности сеть σ_3 двойных линий отображения f. Сеть $\bar\sigma_3 = f(\sigma_3)$ является сетью двойных линий на поверхности

Поместим вершины A_i репера R в точках пересечения касательных к соответствующим линиям сетей σ_3 и $\bar\sigma_3$. Тогда $c^i_j = 0,\ (i\neq j)$. Обозначим $c^i_i = c^i$, уравнение (4) принимает вид:

$$\omega^i_4 = c^i\omega^i. \qquad (4')$$

Из уравнений (8) находим

$$(c^j - c^i)\,\omega^i_j = c^i_{jk}\,\omega^k,\ (i\neq j). \qquad (11)$$

Следовательно, формы ω^i_j — главные. Пусть

$$\omega^i_j = a^i_{jk}\,\omega^k,\ (i\neq j). \qquad (12)$$

Используя симметричность c^i_{jk} по нижним индексам, из уравнений (11), (12) получим:

$$(c^j - c^i)\,a^i_{jk} = (c^k - c^i)\,a^i_{kj}. \qquad (13)$$

Объект неголономности сети:

$$\nu^i_{jk} = a^i_{jk} - a^i_{kj},\quad (k\neq i,j)$$

принимает вид:

$$\nu^i_{jk} = \frac{c^k - c^j}{c^k - c^i}\,a^i_{jk}. \qquad (14)$$

Отсюда $\nu^i_{jk} = 0 \Leftrightarrow a^i_{jk} = 0$, (i, j, k — различны)

Значит справедлива следующая теорема.

Если фокусы прямой (AA_4) различны, то сеть σ_3 двойных линий голономна тогда и только тогда, когда она является ∇-сопряженной системой [4] относительно аффинной связности ∇, индуцированной на V_3 нормализацией [5] этой гиперповерхности при помощи поля нормалей 1 рода (AA_4) и поля нормалей II рода $P_2(A)$.

При этом сеть $\bar\sigma_3$ также является $\bar\nabla$ — сопряженной системой

относительно аффинной связности $\bar\nabla$, индуцированной на поверхности $\bar V_3$ нормализацией при помощи поля нормалей 1 рода (A_4A) и поля нормалей II рода $P_2(A)$.

3. Точки $F^i = -c^iA + A_4$ являются фокусами прямой (AA_4). Точка A_4 является гармоническим полюсом [6] точки A относительно фокусов этой прямой тогда и только тогда, когда

$$\sum_i c^i = 0.$$

Точку $F^j_i\ (i\neq j)$ называют псевдофокусом [6] прямой (AA_i), если при смещении точки A в направлении AA_j дифференциал точки принадлежит гиперплоскости $[AA_1\ldots A_{j-1}A_{j+1}\ldots A_4]$, т.е. не содержит компоненты по вершине A_j. На каждой касательной (AA_i) к линиям сети σ_3 существует 2 псевдофокуса F^j_i, $i\neq j$

$$F^j_i = -a^j_{ij}A + A_i.$$

Аналогично, на каждой касательной (A_4A_i) к линиям сети существует 2 псевдофокуса $\bar F^j_i$, $i\neq j$

$$\bar F^j_i = -\frac{a^j_{ij}}{c^j}A_4 + A_i.$$

Прямая, проходящая через соответствующие псевдофокусы, пересекает (AA_4) в ее фокусах, а именно,

$$(F^j_i\bar F^j_i)\cap(AA_4) = F^j.$$

Прямые $(F^j_i\bar F^j_i)$, $(F^k_i\bar F^k_i)$ пересекаются в точке

$$M_i = (c^j a^k_{ik} - c^k a^j_{ij})A + (c^k - c^j)A_i + (a^j_{ij} - a^k_{ik})A_4$$

(i, j, k — различны).

Точки $M_i\ (i = 1, 2, 3)$ определяют некоторую плоскость.

На каждой прямой (AA_i), касательной в точке A к линии сети σ_3, определяется точка

$$F_i = -\frac{1}{2}\sum_{j\neq i} a^j_{ij}A + A_i$$

— гармонический полюс точки A относительно псевдофокусов этой прямой. Точка

$$\bar F_i = -\frac{1}{2}\sum \frac{a^j_{ij}}{c^j}A_4 + A_i$$

является гармоническим полюсом точки A_4 относительно псевдофокусов прямой (A_4A_i).

Прямая, соединяющая соответствующие гармонические полюсы, пересекает (AA_4) в точке

$$F_i^* = \sum_{j\neq i} a^j_{ij} A - \sum_{j\neq i} \frac{a^j_{ij}}{c^j} A_4 .$$

На прямых $(AA_i), (A_4A_i), (AA_4)$ возникают следующие инварианты:

$$(A_iF_i, F_i^jF_i^\kappa) = (A_4F_i^*, F^jF^\kappa),$$

$$(A_i\bar F_i, \bar F_i^j \bar F_i^\kappa) = (AF_i^*, F^jF^\kappa)$$

(i, j, κ – различны).

В частности, если псевдофокусы на прямой (AA_i) совпадают, то точки A_4 и F_i^* гармонически разделяют пару F^j и F^κ фокусов прямой (AA_4).

4. Зададим направление $\omega^\kappa = 0$, $\omega^j + \lambda\omega^i = 0$ (i, j, κ различны) на поверхности V_3 и соответствующее ему направление на $\bar V_3$.

При смещении точки A по заданному направлению имеем:

$$dA = \omega_0^0 A + \omega^i(A_i - \lambda A_j),$$

$$dA_4 = \omega_4^4 A_4 + \omega^i(c^iA_i - \lambda c^jA_j)$$

(нет суммирования).

Обозначим $B = A_i - \lambda A_j$, $C = c^iA_i - \lambda c^jA_j$. (16)

Тогда

$$(A_iA_j; BC) = \frac{1}{(AA_4, F^iF^j)} .$$

Пара точек A_i и A_j гармонически разделяет пару точек B и C тогда и только тогда, когда

$$c^i + c^j = 0 .$$

5. Рассмотрим случай, когда два фокуса прямой (AA_4) совпадают, пусть $F^2 = F^3$.

Наша пара гиперповерхностей определяется системой дифференциальных уравнений (2),(3),(4') и конечными соотношениями:

$$c^i a_{ij} = c^j a_{ji} \quad \text{(нет суммирования)},$$

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad c^2 = c^3 .$$

Произвол существования такой пары – две функции трех аргументов. Формы ω_2^1, ω_3^1, ω_1^2, ω_1^3 являются главными, причем

$$a^1_{32} = a^1_{23}, \ a^3_{13} = a^2_{12}, \ a^2_{13} = a^3_{12} = 0 .$$

Откуда следует, что уравнение $\omega^1 = 0$ вполне интегрируемо, оно определяет расслоение гиперповерхностей V_3 и $\bar V_3$ на ∞^1 поверхностей V_2 и $\bar V_2$, любая линия на которых является двой-

ной (см. (16) при $c^i = c^j$). Поверхности V_2 и $\bar V_2$ расположены перспективно с центром перспективы в точке F^2.

Псевдофокусы на прямых (AA_i) и (A_4A_i) совпадают, т.е.

$F_1^2 = F_1^3$, $\bar F_1^2 = \bar F_1^3$.

Прямые (AA_1), (A_4A_1) при смещении их вдоль линий ω^2, ω^3 сети σ_3, $\bar\sigma_3$ не выходят инфинитезимально из гиперплоскостей $[AA_1A_2A_4]$, $[AA_1A_3A_4]$ соответственно.

6. Составим систему дифференциальных уравнений, определяющих пару гиперповерхностей V_3, $\bar V_3$ с асимптотически-сопряженной системой двойных линий. Линия ω^i сети σ_3 является асимптотической на поверхности V_3 тогда и только тогда, когда

$$b_{ii} = 0 . \qquad (17)$$

Направления (A_4A_i) и (A_4A_j) сопряжены на поверхности тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j) . \qquad (18)$$

Итак, пара гиперповерхностей с асимптотически-сопряженной системой двойных линий определяется системой дифференциальных уравнений (2),(3),(4) и конечными соотношениями (17),(18).

Произвол существования такой пары – шесть функций двух аргументов.

Строение форм ω_j^i $(i\neq j)$ показывает, что

$$a^1_{32} = \frac{c^2 - c^1}{c^3 - c^1} a^1_{23}, \quad a^2_{31} = \frac{c^1 - c^2}{c^3 - c^2} a^2_{13},$$

$$a^3_{12} = \frac{a_{11}}{a_{33}} \frac{c^3 - c^2}{c^3 - c^1} a^1_{23} + \frac{a_{22}}{a_{33}} a^2_{13},$$

$$a^3_{21} = \frac{a_{11}}{a_{33}} a^1_{23} + \frac{a_{22}}{a_{33}} \frac{c^1 - c^3}{c^2 - c^3} a^2_{13} .$$

Отсюда следует, что если прямая (AA_1) при смещении ее вдоль линии ω^3 сети σ_3 не выходит инфинитезимально из гиперплоскости $[AA_1A_3A_4]$, т.е. $a^2_{13} = 0$, то фокусу $\bar A_1^3$ соответствует смещение точки A_4 вдоль линии ω^3 сети $\bar\sigma_3$ и $\bar A_1^3 = \bar F_1^3$, а если и прямая (AA_2) при смещении ее вдоль той же линии ω^3 сети σ_3 не выходит инфинитезимально из гиперплоскости $[AA_2A_3A_4]$, т.е. $a^1_{23} = 0$, то фокусу $\bar A_2^3$ соответствует смещение точки A_4 вдоль линии ω^3 сети $\bar\sigma_3$ и $\bar A_2^3 = \bar F_2^3$.

Тогда фокусу $\bar A_i^j$ соответствует смещение точки A_4 вдоль линии ω^j сети $\bar\sigma_3$ и $\bar A_i^j = \bar F_i^j$.

При этих же условиях каждое уравнение $\omega^i=0$ будет вполне интегрируемо, следовательно, сеть двойных линий σ_3 голономна. Тогда она и ∇ -сопряженная система относительно указанной выше аффинной связности ∇. Такое же заключение можно сделать и относительно сети $\bar{\sigma}_3$.

7. Рассмотрим случай, когда на каждой гиперповерхности V_3 и $\bar{V}_3$ сеть двойных линий является сопряженной. Такая пара гиперповерхностей определяется системой дифференциальных уравнений (2), (3), (4) и конечными соотношениями $b_{ij}=0$, $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$. Произвол существования такой пары - одна функция трех аргументов.

При этом структура форм ω^i_j $(i\neq j)$ такая, что

$$a^1_{32}=\frac{c^2-c^1}{c^3-c^1}\,a^1_{23},$$

$$a^2_{13}=-\frac{a_{11}b_{33}-a_{33}b_{11}}{a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22}}\cdot\frac{c^3-c^2}{c^3-c^1}\,a^1_{23},$$

$$a^2_{31}=\frac{a_{11}b_{33}-a_{33}b_{11}}{a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22}}\cdot\frac{c^2-c^1}{c^3-c^1}\,a^1_{23},$$

$$a^3_{12}=\frac{a_{22}b_{11}-a_{11}b_{22}}{a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22}}\cdot\frac{c^3-c^2}{c^3-c^1}\,a^1_{23},$$

$$a^3_{21}=\frac{a_{22}b_{11}-a_{11}b_{22}}{a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22}}\,a^1_{23}.$$

Отсюда заключаем, что если прямая (AA_2) при смещении ее вдоль линии ω^3 сети σ_3 не выходит инфинитезимально из гиперплоскости $[AA_2A_3A_4]$, т.е. $a^1_{23}=0$, то фокусы A^3_2, $\bar{A}^3_2$ соответствуют смещениям точек A, A_4 вдоль линии ω^3 сети σ_3, $\bar{\sigma}_3$ соответственно и $A^3_2=F^3_2$, $\bar{A}^3_2=\bar{F}^3_2$. Тогда фокусы A^j_i, $\bar{A}^j_i$ соответствуют смещениям точек A, A_4 вдоль линии ω^j сети σ_3, $\bar{\sigma}_3$ соответственно и $A^j_i=F^j_i$, $\bar{A}^j_i=\bar{F}^j_i$.

В этом случае каждое уравнение $\omega^i=0$ вполне интегрируемо; сеть двойных линий σ_3 является ∇ -сопряженной системой относительно аффинной связности ∇. Такое же заключение можно сделать и относительно сети $\bar{\sigma}_3$.

Список литературы

1. Фиников С.П. О сети двойных линий в точечном соответствии двух поверхностей и о соответствии А поверхностей.- Матем.сб., 1939, т.6, вып.3, с.475-520.

2. Фиников С.П. Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева.-"Учен.зап.гор.пед.ин-та", 1951, 16, вып.3, с.235-260.

3. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6. Калининград, 1975, с.19-25.

4. Базылев В.Т. О ∇ -сопряженных сетях в пространствах аффинной связности.-"Известия высш.учеб.заведений. Математика", 1974, № 5 (144), с.25-30.

5. Базылев В.Т. О нормализациях проективного пространства, порожденных заданной в нем сетью.-Литовский матем.сб., 6:3, 1966, с.313-321.

6. Базылев В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства.-"Известия высш.учеб.заведений. Математика", 1966, 2(51), с.9-19.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Л.Г.Корсакова

О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР

В работе дается обобщение понятия расслоения для пар конгруэнций некоторых типов фигур трехмерного проективного пространства (прямолинейных конгруэнций, пар C_ℓ [I], где C -коника, ℓ -непересекающая её прямая и пар конгруэнций коник). Показано, что понятие расслоения для пар конгруэнций этих типов фигур можно ввести, используя теорию оснащенных многообразий фигур или специализируя фундаментальные объекты соответствующих многообразий. Трехмерное проективное пространство P_3 относится к подвижному реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$. Уравнения инфинитезимального перемещения репера R имеют вид $dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta$, где линейные дифференциальные формы ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям Картана $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности $\omega_\alpha^\alpha=0$.

В работе принято обозначение

$$\omega_i^4=\omega_i$$

$(i,j,\kappa,q=1,2,\quad i\neq j$ и по индексам i,j суммирование не производится).

Символом δ обозначается дифференцирование по вторичным

параметрам и буквами π_α^β значение форм ω_α^β при фиксированных первичных параметрах.

§ I. Оснащенные пары прямолинейных конгруэнций

В пространстве P_3 рассмотрим пару прямолинейных конгруэнций [2] (ℓ) и (ℓ'), не умаляя общности, предположим, что пара соответствующих прямых ℓ,ℓ' находится в косом положении. Выберем на каждом луче ℓ конгруэнции (ℓ) две несовпадающие точки A_1 и A_2, на соответствующем луче ℓ' – точки A_3 и A_4. Поскольку лучи ℓ,ℓ' -скрещивающиеся, тетраэдр $\{A_\alpha\}$ не вырождается. Поскольку прямые ℓ,ℓ' описывают двупараметрические семейства, имеем:

$$\mathrm{rang}(\omega_1,\omega_2,\omega_1^3,\omega_2^3)=2,\quad \mathrm{rang}(\omega_3^1,\omega_3^2,\omega_4^1,\omega_4^2)=2.$$

Пусть, например, $\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$.

Замкнутая система пфаффовых уравнений пары прямолинейных конгруэнций запишется в виде:

$$\omega_i^3=\Gamma_i^{3\kappa}\omega_\kappa,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{i\kappa}\omega_\kappa,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{i\kappa}\omega_\kappa, \tag{1.1}$$

$$\Delta\Gamma_i^{3\kappa}\wedge\omega_\kappa=0,\quad \Delta\Gamma_3^{i\kappa}\wedge\omega_\kappa=0,\quad \Delta\Gamma_4^{i\kappa}\wedge\omega_\kappa=0 \tag{1.2}$$

где

$$\Delta\Gamma_i^{3i}=d\Gamma_i^{3i}+\Gamma_i^{3i}(\omega_3^3-\omega_4^4)-\omega_3^4[(\Gamma_i^{3i})^2+\Gamma_i^{3j}\Gamma_j^{3i}]+\Gamma_i^{3j}\omega_j^i-\Gamma_j^{3i}\omega_i^j+\omega_4^3,$$

$$\Delta\Gamma_i^{3j}=d\Gamma_i^{3j}+\Gamma_i^{3j}(\omega_j^j-\omega_4^4-\omega_i^i+\omega_3^3)-\Gamma_i^{3j}(\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32})\omega_3^4+(\Gamma_i^{3i}-\Gamma_j^{3j})\omega_i^j,$$

$$\Delta\Gamma_3^{ii}=d\Gamma_3^{ii}+\Gamma_3^{ii}(2\omega_i^i-\omega_3^3-\omega_4^4)-\omega_3^4(\Gamma_3^{ii}\Gamma_i^{3i}+\Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{3i}+\Gamma_4^{ii})+\omega_j^i(\Gamma_3^{12}+\Gamma_3^{21}),$$

$$\Delta\Gamma_3^{ij}=d\Gamma_3^{ij}+\Gamma_3^{ij}(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)-\omega_3^4(\Gamma_3^{ii}\Gamma_i^{3j}+\Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{3j}+\Gamma_4^{ij})+\Gamma_3^{jj}\omega_j^i+\Gamma_3^{ii}\omega_i^j,$$

$$\Delta\Gamma_4^{ii}=d\Gamma_4^{ii}+2\Gamma_4^{ii}(\omega_i^i-\omega_4^4)-\omega_3^4(\Gamma_4^{ii}\Gamma_i^{3i}+\Gamma_4^{ij}\Gamma_j^{3i})+\omega_j^i(\Gamma_4^{12}+\Gamma_4^{21})-\Gamma_3^{ii}\omega_4^3,$$

$$\Delta\Gamma_4^{ij}=d\Gamma_4^{ij}+\Gamma_4^{ij}(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)-\omega_3^4(\Gamma_4^{ii}\Gamma_i^{3j}+\Gamma_4^{ij}\Gamma_j^{3j})+\Gamma_4^{ii}\omega_i^j+\Gamma_4^{jj}\omega_j^i-\Gamma_3^{ij}\omega_4^3.$$

Разрешая квадратичные уравнения (I.2) по лемме Картана, получим:

$$\Delta\Gamma_i^{3k}=\Gamma_i^{3kq}\omega_q, \quad \Delta\Gamma_3^{ik}=\Gamma_3^{ikq}\omega_q, \quad \Delta\Gamma_4^{ik}=\Gamma_4^{ikq}\omega_q. \qquad (1.3)$$

Система уравнений (I.I),(I.3) является системой дифференциальных уравнений внутреннего фундаментального объекта [3]

$$\Gamma_1=\{\Gamma_i^{3k}, \Gamma_3^{ik}, \Gamma_4^{ik}\}$$

пары прямолинейных конгруэнций.

Система величин

$$\Gamma_2=\{\Gamma_1, \Gamma_i^{3kq}, \Gamma_3^{ikq}, \Gamma_4^{ikq}\}$$

образует продолженный внутренний фундаментальный объект.

О п р е д е л е н и е I.I. Пара прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ') называется односторонне ℓ -оснащенной, если на каждом луче ℓ конгруэнции (ℓ) задана инвариантная точка, описывающая гладкую поверхность.

Оснащающую точку луча $\ell\equiv A_1A_2$ можно задать посредством параметра ρ уравнением

$$M=A_1+\rho A_2. \qquad (1.4)$$

Односторонне ℓ -оснащенная пара прямолинейных конгруэнций определяется уравнениями Пфаффа (I.I), уравнением

$$d\rho+\rho(\omega_2^2-\omega_1^1)+\omega_1^2-\rho^2\omega_2^1=m^k\omega_k \qquad (1.5)$$

и их замыканиями. Анализируя эту систему, приходим к выводу, что односторонне ℓ -оснащенные пары существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.

Замыкая уравнение (I.5) и фиксируя первичные параметры, получим:

$$\delta m^1=m^1(\pi_4^4-\pi_2^2)+m^1(\Gamma_1^{31}\pi_3^4+2\rho\pi_2^1)+m^2(\Gamma_2^{31}\pi_3^4-\pi_2^1),$$
$$\delta m^2=m^2(\pi_1^1+\pi_4^4-2\pi_2^2)+m^2(\Gamma_2^{32}\pi_3^4+2\rho\pi_2^1)+m^1(\Gamma_1^{32}\pi_3^4-\pi_1^2). \qquad (1.6)$$

Из системы уравнений (I.6) следует, что величины m^1, m^2 не образуют геометрического объекта [3], но одновременное обращение их в нуль имеет инвариантный смысл.

О п р е д е л е н и е I.2. Односторонне ℓ -оснащенная пара прямолинейных конгруэнций называется односторонне инцидентно ℓ -оснащенной, если касательная плоскость к поверхности, описанной оснащающей точкой, инцидентна соответствующему лучу ℓ' конгруэнции (ℓ').

Односторонне инцидентно ℓ -оснащенные пары выделяются из односторонне ℓ -оснащенных пар прямолинейных конгруэнций соотношениями

$$m^1=m^2=0. \qquad (1.7)$$

Система уравнений односторонне инцидентно ℓ -оснащенной пары содержит уравнения (I.I) и уравнение

$$d\rho+\rho(\omega_2^2-\omega_1^1)+\omega_1^2-\rho^2\omega_2^1=0. \qquad (1.8)$$

О п р е д е л е н и е I.3. Односторонне инцидентно ℓ -оснащенная пара прямолинейных конгруэнций $(\ell),(\ell')$ называется односторонне расслояемой от конгруэнции (ℓ) к (ℓ'), если уравнение (I.8) вполне интегрируемо.

Из требования полной интегрируемости уравнения (I.8) получаем систему трех квадратичных уравнений [2, стр.67]:

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0, \quad \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$
$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0. \qquad (1.9)$$

Следовательно, односторонне расслояемые пары конгруэнций являются подклассами односторонне ℓ -оснащенных пар.

К понятию односторонне расслояемой пары конгруэнций можно прийти также, специализируя внутренний фундаментальный объект Γ_1 неоснащенной пары $(\ell),(\ell')$ прямолинейных конгруэнций.

Рассмотрим следующие функции λ, μ, ν, составленные из компонент внутреннего фундаментального объекта Γ_1 :

$$\lambda = \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{22} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{21} + \Gamma_4^{22},$$
$$\mu = \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{11} - \Gamma_4^{11}, \qquad (1.10)$$
$$\nu = \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} + \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21}.$$

Дифференцируя соотношения (I.IO) при фиксированных первичных параметрах, будем иметь:

$$\delta\lambda = 2(\pi_4^4 - \pi_2^2)\lambda + \lambda\pi_3^4(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}) - \pi_1^2\nu,$$
$$\delta\mu = 2(\pi_4^4 - \pi_1^1)\mu + \mu\pi_3^4(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}) + \pi_2^1\nu, \qquad (1.11)$$
$$\delta\nu = (2\pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2)\nu + \nu\pi_3^4(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}) + 2\pi_1^2\mu - 2\pi_2^1\lambda.$$

Из системы (I.II) следует, что обращение в нуль величин λ, μ, ν одновременно, т.е.

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0 \qquad (1.12)$$

имеет инвариантный смысл.

Используя уравнения (I.I) в квадратичных уравнениях (I.9), убеждаемся, что система (I.I2) вместе с уравнениями (I.I) и их замыканиями определяет односторонне расслояемую пару прямолинейных конгруэнций (от конгруэнции (ℓ) к (ℓ')).

Итак, свойство расслояемости является внутренним свойством пары прямолинейных конгруэнций, не зависящим от оснащения.

О п р е д е л е н и е I.4. Пара прямолинейных конгруэнций $(\ell),(\ell')$ называется двусторонне оснащенной или просто оснащенной, если она является и ℓ -оснащенной, и ℓ' -оснащенной.

Двусторонне расслояемые пары являются подклассами оснащенных пар, причем можно показать, что это свойство, так же, как и свойство односторонней расслояемости, является внутренним свойством пары прямолинейных конгруэнций.

§ 2. Оснащенные пары C_ℓ

Рассмотрим пару C_ℓ [I] конгруэнций, образованную конгруэнцией (C) коник C типа $(2,2,3)^2$[4] и конгруэнцией (ℓ) прямых ℓ, не имеющих с кониками C общих точек. Пусть M -точка пересечения прямой ℓ с плоскостью коники, ℓ' -поляра точки M относительно коники. Помещая вершины A_i репера $R = \{A_\alpha\}$ в точки пересечения прямой ℓ' с коникой, вершину A_3 в точку M, вершину A_4-на прямую ℓ, приведем (при надлежащей нормировке вершин A_α) уравнение коники C к виду:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \qquad (2.1)$$

Пары C_ℓ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k, \tag{2.2}$$
$$\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=a^k\omega_k .$$

Замыкая уравнения (2.2) и фиксируя первичные параметры, найдем закон изменения компонент внутреннего фундаментального объекта

$$\Gamma_1=\{\Gamma_i^{jk},\Gamma_i^{3k},\Gamma_3^{ik},\Gamma_3^{4k},\Gamma_4^{ik},a^k\}$$

пары C_ℓ :

$$\delta\Gamma_i^{ji}=\Gamma_i^{ji}(\pi_4^4-\pi_j^j),\quad \delta\Gamma_i^{jj}=\Gamma_i^{jj}(\pi_i^i+\pi_4^4-2\pi_j^j), \tag{2.3}$$
$$\delta\Gamma_i^{3i}=\Gamma_i^{3i}(\pi_4^4-\pi_3^3)-\pi_4^3,\quad \delta\Gamma_i^{3j}=\Gamma_i^{3j}(\pi_i^i+\pi_4^4-\pi_j^j-\pi_3^3),$$
$$\delta\Gamma_3^{ii}=\Gamma_3^{ii}(\pi_3^3+\pi_4^4-2\pi_i^i),\quad \delta\Gamma_3^{ij}=\Gamma_3^{ij}(\pi_3^3+\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_2^2),$$
$$\delta\Gamma_3^{4i}=\Gamma_3^{4i}(\pi_3^3-\pi_i^i),\quad \delta\Gamma_4^{ii}=2\Gamma_4^{ii}(\pi_4^4-\pi_i^i)+\Gamma_3^{ii}\pi_4^3,$$
$$\delta\Gamma_4^{ij}=\Gamma_4^{ij}(2\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_2^2)+\Gamma_3^{ij}\pi_4^3,\quad \delta a^i=a^i(\pi_4^4-\pi_i^i)+2\Gamma_3^{4i}\pi_4^3.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Пара C_ℓ называется оснащенной, если на каждой конике C конгруэнции (C) задана инвариантная точка, описывающая гладкую поверхность.

Оснащающую точку K коники C можно определить с помощью параметра Θ посредством уравнения

$$K=A_1+\frac{1}{2}\Theta^2A_2+\Theta A_3. \tag{2.4}$$

Оснащенная пара C_ℓ определяется уравнениями (2.2), уравнением

$$\Theta d\Theta-\frac{1}{2}\Theta^2(\omega_1^1-\omega_2^2)-\frac{1}{2}\Theta^3\omega_3^1-\frac{1}{4}\Theta^4\omega_2^1+\Theta\omega_3^2+\omega_1^2=t^k\omega_k \tag{2.5}$$

и их замыканиями.

Замыкая уравнение (2.5) и фиксируя первичные параметры, будем иметь:

$$\delta t^1=t^1(\pi_4^4-\pi_2^2),\quad \delta t^2=t^2(\pi_1^1+\pi_4^4-2\pi_2^2).$$

Следовательно, величины t^1,t^2 -относительные инварианты.

Рассмотрим линии $\omega_i=0$ на поверхности (A_i). Это линии, огибаемые линиями пересечения касательной плоскости к поверхности (A_i) в точке A_i с плоскостью $(A_1A_2A_3)$ коники C.

Условие $t^i=0$ означает, что вдоль линий $\omega_j=0$ касательная плоскость к поверхности (K) в точке K инцидентна ребру A_3A_4. Если же $t^1=t^2=0$, то

$$(dK\,KA_3A_4)=0$$

и касательная плоскость к поверхности (K) в точке K инцидентна прямой A_3A_4.

О п р е д е л е н и е 2.2. Оснащенная пара C_ℓ называется инцидентно-оснащенной, если касательная плоскость к поверхности, описанной оснащающей точкой, инцидентна соответствующему лучу ℓ конгруэнции (ℓ) .

Система уравнений инцидентно-оснащенной пары C_ℓ состоит из уравнений (2.2) и уравнения

$$\Theta d\Theta-\frac{1}{2}\Theta^2(\omega_1^1-\omega_2^2)-\frac{1}{4}\Theta^4\omega_2^1-\frac{1}{2}\Theta^3\omega_3^1+\Theta\omega_3^2+\omega_1^2=0. \tag{2.6}$$

О п р е д е л е н и е 2.3. Инцидентно-оснащенная пара C_ℓ называется односторонне расслояемой (от конгруэнции (C) к конгруэнции (ℓ)),если уравнение (2.6) вполне интегрируемо.

Из условия полной интегрируемости уравнения (2.6) получаем следующие семь квадратичных уравнений:

$$\begin{gathered}\omega_3^i \wedge \omega_j^i = 0, \quad \omega_i^3 \wedge \omega_3^j + \omega_i \wedge \omega_4^j = 0, \\ (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) \wedge \omega_3^i + \omega_3^j \wedge \omega_j^i - 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^i = 0, \\ 2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Значит,односторонне расслояемые пары C_ℓ являются подклассами оснащенных пар C_ℓ.Точно так же,как и для прямолинейных конгруэнций, к понятию односторонне расслояемой пары C_ℓ можно подойти,определенным образом специализируя внутренний фундаментальный объект Γ_1 неоснащенной пары C_ℓ.

Действительно,введем в рассмотрение следующие функции $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \xi$, составленные из компонент объекта Γ_1:

$$\begin{gathered}\alpha_i = \Gamma_3^{ii}\Gamma_j^{ij} - \Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{ii}, \quad \beta_i = \Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij} - \Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii} - \Gamma_4^{ii}, \\ \gamma_i = a^i\Gamma_3^{ij} - a^j\Gamma_3^{ii} + \Gamma_3^{ji}\Gamma_j^{ij} - \Gamma_3^{jj}\Gamma_j^{ii} - 2(\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij} - \Gamma_3^{4j}\Gamma_4^{ii}), \\ \xi = 2(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}) + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_4^{12} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} + \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21} + \Gamma_4^{21}.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Дифференцируя соотношения (2.8) при фиксированных первичных параметрах,используя при этом уравнения (2.3), получим:

$$\begin{gathered}\delta\alpha_i = (2\pi_4^4 + \pi_3^3 - 3\pi_i^i)\alpha_i, \quad \delta\beta_i = 2(\pi_4^4 - \pi_i^i)\beta_i, \\ \delta\gamma_i = (\pi_3^3 + 2\pi_4^4 - \pi_j^j - 2\pi_i^i)\gamma_i, \quad \delta\xi = (2\pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2)\xi.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Следовательно,все величины $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \xi$ -относительные инварианты.

Применяя в квадратичных уравнениях (2.7) систему (2.2), убеждаемся,что уравнения

$$\alpha_i = 0, \quad \beta_i = 0, \quad \gamma_i = 0, \quad \xi = 0 \tag{2.10}$$

и система уравнений (2.2) вместе с их замыканиями определяют односторонне расслояемую пару C_ℓ.

Поэтому свойство расслояемости для пар C_ℓ так же,как и для пар прямолинейных конгруэнций,является внутренним свойством пары.

§ 3. Оснащенные пары конгруэнций коник

Рассмотрим в пространстве P_3 пару $(C_1,C_2)[I]$ конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник,не лежащих в одной плоскости и не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей,описывающих двупараметрические семейства.Пусть A_i -одна из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ, A_3 и A_4-полюсы прямой ℓ относительно коник C_1 и C_2.Будем предполагать, что линейчатое многообразие (A_3A_4),ассоциированное с парой (C_1,C_2),является конгруэнцией.Уравнения коник C_1 и C_2 относительно геометрически фиксированного репера $R=\{A_\alpha\}$ при соответствующей нормировке вершин запишутся в виде:

$$(x^3)^2 - (a_1x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0; \tag{3.1}$$

$$(x^4)^2 - (a_2x^2)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{3.2}$$

Система пфаффовых уравнений пары (C_1, C_2) имеет вид:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k,$$

$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \tag{3.3}$$

$$\Theta_i = A_i^k\omega_k, \quad \Omega_i = b_i^k\omega_k,$$

где
$$\Theta_i = da_i - a_i(\omega_i^i - \omega_{i+2}^{i+2}), \quad \Omega_i = \omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_{i+2}^{i+2}.$$

О п р е д е л е н и е 3.I. Пара (C_1, C_2) конгруэнций коник C_1 и C_2 называется оснащенной, если на каждой конике C_i конгруэнции (C_i) пары (C_1, C_2) задана инвариантная точка, описывающая гладкую поверхность.

Оснащающую точку M коники C_1 можно определить с помощью параметра σ уравнением:

$$M = A_1 + \sigma\left(\tfrac{1}{2}\sigma + a_1\right)A_2 + (\sigma + a_1)A_3, \tag{3.4}$$

а точку N коники C_2 с помощью параметра τ посредством уравнения

$$N = A_2 + \tau\left(\tfrac{1}{2}\tau + a_2\right)A_1 + (\tau + a_2)A_4. \tag{3.5}$$

Оснащенная пара (C_1, C_2) определяется уравнениями (3.3), уравнениями

$$(\sigma + a_1)d\sigma - \tfrac{1}{4}\sigma^4\omega_2^1 - \sigma^3\left(a_1\omega_2^1 + \tfrac{1}{2}\omega_3^1\right) - \sigma^2\left[(a_1)^2\omega_2^1 + \tfrac{3}{2}a_1\omega_3^1 + \tfrac{1}{2}(\omega_1^1 - \omega_2^2)\right] - \sigma\left[(a_1)^2\omega_3^1 + a_1(\omega_1^1 - \omega_2^2) - da_1 - \omega_3^2\right] + \omega_1^2 + a_1\omega_3^2 = \ell^k\omega_k, \tag{3.6}$$

$$(\tau + a_2)d\tau - \tfrac{1}{4}\tau^4\omega_1^2 - \tau^3\left(a_2\omega_1^2 + \tfrac{1}{2}\omega_4^2\right) - \tau^2\left[(a_2)^2\omega_1^2 + \tfrac{3}{2}a_2\omega_4^2 + \tfrac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^1)\right] - \tau\left[(a_2)^2\omega_4^2 + a_2(\omega_2^2 - \omega_1^1) - da_2 - \omega_4^1\right] + \omega_2^1 + a_2\omega_4^1 = p^k\omega_k \tag{3.7}$$

и их замыканиями.

Замыкая уравнения (3.6) и (3.7) и фиксируя первичные параметры, получим:

$$d\ell^1 = \ell^1(\pi_4^4 - \pi_2^2), \quad \delta\ell^2 = \ell^2(\pi_1^1 + \pi_4^4 - 2\pi_2^2),$$
$$\delta p^1 = p^1(\pi_4^4 + \pi_2^2 - 2\pi_1^1), \quad \delta p^2 = p^2(\pi_4^4 - \pi_1^1). \tag{3.8}$$

Значит, величины ℓ^i, p^i - относительные инварианты.

Условие $\ell^i = 0$ ($p^i = 0$) означает, что вдоль линий $\omega_j = 0$ касательная плоскость к поверхности (M) ((N)) в точке M (N) инцидентна ребру A_3A_4. Геометрическая характеристика линиям $\omega_i = 0$ дана в §2.

Если
$$\ell^1 = \ell^2 = 0,$$
то
$$(dM\,M\,A_3A_4) = 0$$
и касательная плоскость к поверхности (M) в точке M инцидентна ребру A_3A_4.

Если же
$$p^1 = p^2 = 0,$$
то
$$(dN\,N\,A_3A_4) = 0,$$
касательная плоскость к поверхности (N) в точке N инцидентна прямой A_3A_4.

О п р е д е л е н и е 3.2. Оснащенная пара (C_1, C_2) называется инцидентно-оснащенной, если касательные плоскости к поверхностям, которые описывают оснащающие точки, инцидентны прямой A_3A_4.

Инцидентно-оснащенные пары (C_1, C_2) характеризуются условиями:

$$\ell^1 = \ell^2 = p^1 = p^2 = 0 \qquad (3.9)$$

и, следовательно, удовлетворяют уравнениям (3.3) и уравнениям.

$$\begin{gathered}(\sigma + a_1)d\sigma - \frac{1}{4}\sigma^4\omega_2^1 - \sigma^3\left(a_1\omega_2^1 + \frac{1}{2}\omega_3^1\right) - \sigma^2\left[(a_1)^2\omega_2^1 + \frac{3}{2}a_1\omega_3^1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\omega_1^1 - \omega_2^2)\right] - \sigma\left[(a_1)^2\omega_3^1 + a_1(\omega_1^1 - \omega_2^2) - da_1 - \omega_3^2\right] + \omega_1^2 + a_1\omega_3^2 = 0,\end{gathered} \qquad (3.10)$$

$$\begin{gathered}(\tau + a_2)d\tau - \frac{1}{4}\tau^4\omega_1^2 - \tau^3\left(a_2\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_4^2\right) - \tau^2\left[(a_2)^2\omega_1^2 + \frac{3}{2}a_2\omega_4^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^1)\right] - \tau\left[(a_2)^2\omega_4^2 + a_2(\omega_2^2 - \omega_1^1) - da_2 - \omega_4^1\right] + \omega_2^1 + a_2\omega_4^1 = 0.\end{gathered} \qquad (3.11)$$

О п р е д е л е н и е 3.3. Инцидентно-оснащенная пара (C_1, C_2) конгруэнций коник C_1, C_2 называется расслояемой, если уравнения (3.10) и (3.11) вполне интегрируемые.

Из условия полной интегрируемости уравнений (3.10) и (3.11) получаем следующую систему квадратичных уравнений: [1, с.211-212]:

$$\begin{gathered}\omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0, \quad \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0, \\ \Omega_1 \wedge \omega_3^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 - 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 = 0, \\ 2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0, \\ \Omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 - 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 + a_1\Theta_1 \wedge \omega_3^1 + (a_1)^2(\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^1) = 0, \\ (a_1)^2\omega_3^2 \wedge \omega_3^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0, \\ (a_1\Theta_1 - \omega_1^2) \wedge \omega_3^2 + (a_1)^2\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 = 0,\end{gathered} \qquad (3.12)$$

$$\begin{gathered}\omega_4^2 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0, \\ \Omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_4^1 \wedge \omega_1^2 - 2\omega_4^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \\ 2\omega_4^2 \wedge \omega_4^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \\ \Omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^1 - 2\omega_4^3 \wedge \omega_3^1 + a_2\Theta_2 \wedge \omega_4^2 + (a_2)^2(\omega_4^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_4^1 \wedge \omega_1^2) = 0, \\ (a_2)^2\omega_4^1 \wedge \omega_4^2 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \\ (a_2\Theta_2 - \omega_2^1) \wedge \omega_4^1 + (a_2)^2\omega_4^3 \wedge \omega_3^1 = 0.\end{gathered} \qquad (3.13)$$

Итак, расслояемые пары (C_1, C_2) являются подклассами оснащенных пар (C_1, C_2). Система (3.12) характеризует одностороннее расслоение [1] от конгруэнции (C_1) к прямолинейной конгруэнции $(A_3 A_4)$, а расслоение от конгруэнции (C_2) коник к $(A_3 A_4)$ определяется системой (3.13).

Можно показать, пользуясь инвариантными аналитическими характеристиками, что свойство пары (C_1, C_2) конгруэнций коник быть расслояемой суть её внутреннее свойство, которое от оснащения не зависит.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.-"Труды геом.семинара". ВИНИТИ АН СССР, М., 1971, 3, с.193-220.

2. Фиников С.П. Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1956.

3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий."Труды Моск.матем.об-ва", 1953, т.2, с.275-383.

4. Малаховский В.С. Многообразия алгебраических элементов в п-мерном проективном пространстве."Тр.Томского ун-та", т.168, 1963, с.28-42.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

В.С.Малаховский

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается конгруэнция (Q) невырожденных линейчатых квадрик Q, имеющая, по крайней мере, две различные фокальные поверхности (A_0) и (A_3), причем поверхность (A_0) - невырожденная и прямая A_0A_3 не является прямолинейной образующей квадрики Q. Построены ассоциированные пары конгруэнций квадрик и установлен характеристический признак конгруэнции квадрик Ли поверхности (A_0).

§ I. Система пфаффовых уравнений конгруэнции (Q)

Отнесем конгруэнцию (Q) к реперу $R=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_i $(i,j,k=1,2)$ - точки пересечения прямолинейных образующих квадрики Q, проходящих через точки $A_0\in Q$, $A_3\in Q$. При надлежащей нормировке вершин репера R уравнение квадрики Q запишется в виде:

$$\mathcal{F}\equiv x^1x^2-x^3x^4=0. \tag{1.1}$$

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{A}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3),$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \tag{1.3}$$

Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции (Q) приводится к виду:

$$\omega_0^3=0,\ \omega_3^0=0,\ \omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k,\ \omega_3^i=b_k^i\omega^k, \tag{1.4}$$

$$\omega_i^3-\omega^j=c_{ik}\omega^k,\ \omega_j^0-\omega_3^i=m_k^i\omega^k,\ \omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3=h_k\omega^k;$$

$$c_{12}-c_{21}=0,\ b_1^1m_2^2-b_2^2m_1^1+b_1^2m_2^1-b_2^1m_1^2=0, \tag{1.5}$$

где $\omega^i\overset{def}{=\!=}\omega_0^i$. Здесь и в дальнейшем $i\neq j$, причем по индексам i и j суммирование не производится.

Фокальные точки квадрики Q [1] определяются системой уравнений

$$\mathcal{F}=0,\ \mathcal{F}_1=0,\ \mathcal{F}_2=0, \tag{1.6}$$

где

$$\mathcal{F}_i\equiv h_ix^1x^2-a_{ii}^j(x^i)^2-a_{ji}^i(x^j)^2+m_i^jx^ix^3+m_i^ix^jx^3+c_{ik}x^ix^k. \tag{1.7}$$

Система уравнений

$$\mathcal{F}_1=0,\ \mathcal{F}_2=0 \tag{1.8}$$

определяет характеристическую кривую ранга 1 квадрики Q [I, с.II7].

2 Зак 15465

§ 2. Пары ассоциированных квадрик

Уравнения
$$\mathcal{F}=0\,,\quad \mathcal{F}_1=0\,, \tag{2.1}$$
$$\mathcal{F}=0\,,\quad \mathcal{F}_2=0 \tag{2.2}$$
определяют характеристики квадрики Q вдоль направлений $A_\circ A_j$ на поверхности $(A_\circ)$.

Рассмотрим квадрики $Q_1^{0,3}$ и $Q_2^{0,3}$, определяемые уравнениями $\mathcal{F}_1=0$ и $\mathcal{F}_2=0$. Имеем:
$$\delta\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_1(\pi_1^1-\pi_\circ^\circ)\,,\quad \delta\mathcal{F}_2=-\mathcal{F}_2(\pi_1^1+\pi_\circ^\circ)\,, \tag{2.3}$$
где δ —символ дифференцирования по вторичным параметрам, а $\pi_\circ^\circ, \pi_1^1$—значения форм $\omega_\circ^\circ, \omega_1^1$ при фиксированных первичных параметрах. Из (2.3) следует, что квадрики $Q_i^{0,3}$ —инвариантные. Для геометрической характеристики этих квадрик рассмотрим два пучка квадрик
$$\Phi_i\equiv\mathcal{F}_i-\lambda_i\mathcal{F}=0 \quad (i=1,2)\,. \tag{2.4}$$
Пучок $\Phi_i=0$ определяет однопараметрическое семейство квадрик, содержащих характеристику $\mathcal{F}=0, \mathcal{F}_i=0$ квадрики Q вдоль направления $A_\circ A_j$ на поверхности $(A_\circ)$. Величина λ_i равна значению полярной формы квадратичной формы Φ_i для точек $A_\circ$ и A_3. Следовательно, квадрика $Q_i^{0,3}$ —это такая квадрика пучка (2.4), относительно которой точки $A_\circ$ и A_3 полярно сопряжены. Из (I.7) следует, что прямая $A_\circ A_3$ является общей прямолинейной образующей квадрик $Q_1^{0,3}$ и $Q_2^{0,3}$.

§ 3. Характеристический признак конгруэнции квадрик Ли

Т е о р е м а 3.I. Если квадрика $Q_1^{0,3}$ распадается на

пару плоскостей с осью $A_\circ A_3$, являющейся асимптотической касательной поверхности $(A_\circ)$, то квадрика $Q_2^{0,3}$ тоже распадается на пару плоскостей с осью $A_\circ A_1$, являющейся асимптотической касательной поверхности $(A_\circ)$, и наоборот.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, например, квадрика $Q_1^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью $A_\circ A_2$, причем прямая $A_\circ A_2$ является асимптотической касательной поверхности $(A_\circ)$. Имеем:
$$h_1=0\,,\ a_{21}^1=0\,,\ m_1^1=0\,,\ c_{11}=0\,,\ c_{12}=0\,. \tag{3.1}$$
Уравнение асимптотических линий поверхности $(A_\circ)$ имеет вид:
$$c_{11}(\omega^1)^2+2(1+c_{12})\omega^1\omega^2+c_{22}(\omega^2)^2=0\,. \tag{3.2}$$
Так как прямая $A_\circ A_2$ является асимптотической касательной поверхности $(A_\circ)$, то
$$c_{22}=0\,. \tag{3.3}$$
Замыкая уравнения
$$\omega_i^3-\omega^j=0\,, \tag{3.4}$$
и учитывая соотношения (3.2), получим
$$h_2=0\,,\ a_{12}^2=0\,. \tag{3.5}$$
Замыкая уравнение
$$\omega_\circ^\circ-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3=0\,, \tag{3.6}$$
находим
$$m_2^2=0\,. \tag{3.7}$$
Учитывая (3.I), (3.3), (3.5), (3.7), получаем
$$\mathcal{F}_2\equiv m_2^1x^2x^3-a_{22}^1(x^2)^2=0\,. \tag{3.8}$$
Следовательно, квадрика $Q_2^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью $A_\circ A_1$, являющейся асимптотической касательной поверх-

ности (A_0).

Т е о р е м а 3.2. Если квадрики $Q_1^{0,3}$, $Q_2^{0,3}$ распадаются на пары плоскостей с осями соответственно A_0A_2 и A_0A_1, то прямые A_0A_i являются асимптотическими касательными поверхности (A_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как квадрика $Q_i^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_j, то

$$a^i_{ji}=0,\ c_{ii}=0,\ c_{ij}=0,\ h_i=0,\ m^i_i=0. \tag{3.9}$$

Уравнение (3.2) асимптотических линий поверхности (A_0) приводится, в силу соотношений (3.9), к виду

$$\omega^1\omega^2=0. \tag{3.10}$$

Следовательно, прямые A_0A_1, A_0A_2 являются асимптотическими касательными поверхности (A_0).

Т е о р е м а 3.3. Квадрики $Q_1^{0,3}$ и $Q_2^{0,3}$ тогда и только тогда распадаются на пары плоскостей с осями A_0A_2 и A_0A_1, когда одна из квадрик $Q_i^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_j, являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения теоремы непосредственно следует из совпадения соотношений (3.9) теоремы 3.2. и соотношений (3.I), (3.3), (3.5), (3.7) теоремы 3.I.

Т е о р е м а 3.4. Конгруэнция (Q) невырожденных линейчатых квадрик тогда и только тогда является конгруэнцией квадрик Ли своей фокальной поверхности (A_0), когда одна из квадрик $Q_i^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_j,

являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Необходимость. Пусть квадрика

$$x^1x^2-x^0x^3=0 \tag{3.11}$$

является квадрикой Ли поверхности (A_0). Тогда выполняются соотношения (3.9) и каждая из квадрик $Q_i^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_j, являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0). 2/Достаточность. Пусть, например, квадрика $Q_1^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_2. Тогда на основании теоремы 3.3, аналогичное свойство справедливо и для квадрики $Q_2^{0,3}$, т.е. соотношения (3.9) имеют место. Значит, Q -квадрика Ли поверхности (A_0).

Используя формулы

$$\omega^3_0=0,\ \omega^j_i=a^j_{ii}\omega^i,\ \ \omega^i_3=b^i_k\omega^k,\ \ \omega^3_i=\omega^j, \tag{3.12}$$
$$\omega^0_j-\omega^i_3=m^i_j\omega^j,\ \ \omega^0_0-\omega^1_1-\omega^2_2+\omega^3_3=h_k\omega^k,\ \omega^0_3=0$$

$$c_{12}-c_{21}=0,\ \ b^2_1m^1_2-b^1_2m^2_1=0, \tag{3.13}$$

находим фокальные точки квадрики Ли Q, отличные от точек A_0 и A_3:

$$B_0=m^2_1m^1_2A_0+m^2_1a^1_{22}A_1+m^1_2a^2_{11}A_2+a^2_{11}a^1_{22}A_3,$$
$$B_i=m^j_iA_j+a^j_{ii}A_3. \tag{3.14}$$

Приходим к следующему известному утверждению:

Т е о р е м а 3.5. Поверхность (A_0) является четырехкратной фокальной поверхностью конгруэнции (Q) квадрик Ли поверхности (A_0). Остальные четыре фокальные поверхности конгруэнции (Q) описываются вершинами четырехсторонника

Демулена [2].

Список литературы

I. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. "Тр.геом.семин. ВИНИТИ АН СССР", 1974, 6, с. II3–I33.

2. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. ОНТИ, М.-Л., I937.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Е.А.Митрофанова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПАРАБОЛОИДОВ В ТРЕХМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуется конгруэнция M_2^1 гиперболических параболоидов, у которых на каждом параболоиде Q существует прямолинейная образующая ℓ_1, являющаяся фокальным многообразием параболоида Q [I]. Показано, что параболоиды Q конгруэнции M_2^1 огибают линейчатую поверхность S вдоль их общих прямолинейных образующих ℓ.

Определение I. Конгруэнцией M_2^1 называется конгруэнция гиперболических параболоидов Q в трехмерном эквиаффинном пространстве A_3, обладающая следующим свойством: на каждом параболоиде $Q \in M_2^1$ существует прямолинейная образующая ℓ_1, являющаяся фокальной прямой [I] параболоида Q.

Теорема I. Конгруэнции M_2^1 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Доказательство. Отнесем конгруэнцию M_2^1 к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, поместив вершину A на прямую ℓ_1, направив векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ по прямолинейным образующим ℓ_1, ℓ_2

гиперболического параболоида Q, а вектор $\bar{e}_3$ — по его диаметру.

При надлежащей нормировке векторов $\bar{e}_\alpha$ (α,β,γ=1,2,3) репера R уравнение параболоида Q запишется в виде:

$$F \equiv x^1x^2 - x^3 = 0. \tag{1}$$

Имеем

$$dF = -(x^1)^2\omega_1^2 - (x^2)^2\omega_2^1 - x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2) + x^3\omega_3^3 - x^3(x^1\Theta^2 + x^2\Theta^1) + x^1(\omega_1^3-\omega^2) + x^2(\omega_2^3-\omega^1) + \omega^3, \tag{2}$$

где ω^α, ω_α^β — компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha, \quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{3}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{4}$$

Так как прямая ℓ_1 является фокальной прямой параболоида $Q \in M_2^1$, то при $x^2=0, x^3=0$ dF обращается в ноль. Система пфаффовых уравнений приводится к виду:

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 - \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0. \tag{5}$$

Замыкая систему (5), получим

$$\omega^2 \wedge \omega_3^2 = 0, \quad \omega_3^3 \wedge \omega^2 = 0, \quad (\omega^1 - \omega_2^3) \wedge \omega^2 = 0, \tag{6}$$

причем

$$\omega^2 \neq 0. \tag{7}$$

Продолжая систему (6), находим:

$$\omega_3^2 = a\omega^2, \quad \omega_3^3 = b\omega^2, \quad \omega^1 - \omega_2^3 = c\omega^2, \tag{8}$$

$$\Delta a \wedge \omega^2 = 0, \quad \Delta b \wedge \omega^2 = 0, \quad \Delta c \wedge \omega^2 = 0, \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Delta a &= da + a(2\omega_2^2 - \omega_3^3), \\ \Delta b &= db - b\omega_2^2 - \omega_3^1 + a\omega_2^3, \\ \Delta c &= dc + c(\omega_3^3 - 2\omega_2^2) + 2b\omega_1^1 + 2\omega_2^1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Система (5), (8) в инволюции и определяет конгруэнцию M_2^1 с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 2. Прямолинейная конгруэнция (ℓ_1) вырождается в линейчатую поверхность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$d\bar{A} = \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2, \quad d\bar{e}_1 = \omega_1^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_3, \tag{11}$$

то ранг системы структурных форм прямой ℓ_1 равен единице (единственная структурная форма ω^2). Поэтому (ℓ_1) — линейчатая поверхность.

Т е о р е м а 3. Конгруэнция M_2 гиперболических параболоидов Q тогда и только тогда является конгруэнцией M_2^1, когда существует линейчатая поверхность S, которую огибают гиперболические параболоиды Q, причем в каждой точке $A \in S$ параболоид Q и линейчатая поверхность S касаются друг друга вдоль общей образующей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Из (11) следует, что касательной плоскостью к линейчатой поверхности S в точке A является плоскость $x^3 = 0$. В силу (1) эта плоскость касается также гиперболического параболоида Q, причем прямая ℓ_1 является их общей прямолинейной образующей.

Достаточность. Пусть существует линейчатая поверхность S такая, что конгруэнция M_2 образована гиперболическими параболоидами Q, касающимися поверхности S вдоль общих прямолинейных образующих. Отнесем конгруэнцию M_2 к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где $A\in\ell_1$, вектор $\bar{e}_1$ направлен по общей прямолинейной образующей параболоида Q и линейчатой поверхности S, вектор $\bar{e}_2$ -по второй прямолинейной образующей параболоида Q, проходящей через точку A, вектор $\bar{e}_3$ -по диаметру параболоида Q, уравнение параболоида Q при надлежащей нормировке векторов $\bar{e}_\alpha$ приводится к виду (1), а пфаффовы уравнения линейчатой поверхности S имеют вид:

$$\omega^3=0,\ \omega_1^2=\alpha\omega^2,\ \omega_1^3=\beta\omega^2. \qquad (12)$$

Продолжая систему (12), находим:

$$\begin{aligned}\delta\alpha&=\alpha\pi_1^1-\alpha^2\pi^1-\beta\pi_3^2,\\ \delta\beta&=-\beta\alpha\pi^1-2\beta\pi_3^3-\alpha\pi_2^3.\end{aligned} \qquad (13)$$

Фиксируем оставшиеся вторичные параметры так, чтобы

$$\alpha=0,\ \beta=1. \qquad (14)$$

Уравнения (12) приводятся к виду (5) и определяют конгруэнцию M_2^1.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.7, Калининград, 1976, 54-60.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Ю.И.П о п о в

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ МНОГОМЕРНОЙ РАСПАДАЮЩЕЙСЯ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В настоящей работе инвариантным методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [1] строятся поля геометрических объектов в окрестностях второго и третьего порядков элемента m-мерной распадающейся гиперполосы RH_m^τ [2],[3] ранга τ проективного пространства P_n $(\tau<m<n)$. Для распадающейся гиперполосы RH_m^τ построен внутренний инвариантный репер третьего порядка, как с помощью первой пары нормальных квазитензоров (§2), так и с помощью второй пары нормальных квазитензоров (§4). Дана геометрическая интерпретация некоторых геометрических оснащающих объектов гиперполосы RH_m^τ. В общем случае найдено поле двупараметрической связки соприкасающихся гиперквадрик, внутренним инвариантным образом присоединенных к исследуемой гиперполосе RH_m^τ.

Обозначения и замечания:

1°. Во всей работе мы придерживаемся следующей схемы использования индексов:

$$p,q,t,f,\ldots=1,2,\ldots,\tau;\quad i,j,k,\ell,s,\ldots=\tau+1,\ldots,m;$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n-1$; $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \ldots = 0, 1, \ldots, n$

2°. Оператор дифференцирования ∇ действует по закону

$$\nabla B^{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_w} = dB^{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_w} - B^{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_u}_{\mathcal{J}\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_w}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1} - \ldots - B^{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_u} +$$

$$+ B^{\mathcal{J}\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_w}\omega^{\mathcal{I}_1}_{\mathcal{J}} + \ldots + B^{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_w}\omega^{\mathcal{I}_u}_{\mathcal{J}}, \quad u, w = 1, 2, \ldots$$

3°. Символом δ обозначаем дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$ при фиксированных главных параметрах через $\pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$. В этом случае оператор обозначается символом ∇_δ.

4°. Символы вида

$$[A_{\mathcal{I}_1}, A_{\mathcal{I}_2}, \ldots, A_{\mathcal{I}_u}] \equiv [A_u] \quad \text{и} \quad [\tau^{\mathcal{I}_1}, \tau^{\mathcal{I}_2}, \ldots, \tau^{\mathcal{I}_w}] \equiv [\tau^w]$$

обозначают соответственно $(u-1)$-плоскость E_{u-1}, натянутую на линейно независимые точки $A_{\mathcal{I}_1}, A_{\mathcal{I}_2}, \ldots, A_{\mathcal{I}_u}$, и $(n-w)$-плоскость E_{n-w}, являющуюся пересечением линейно независимых гиперплоскостей $\tau^{\mathcal{I}_1}, \tau^{\mathcal{I}_2}, \ldots, \tau^{\mathcal{I}_w}$.

5°. В данной работе исключаются из рассмотрения те распадающиеся гиперполосы RH^τ_m, для которых абсолютный инвариант второго порядка t^i_α (§4) равен нулю, в частности, плоские и конические распадающиеся гиперполосы RH^τ_m [2], [4].

§1. Задание распадающейся гиперполосы RH^τ_m в проективном пространстве P_n

Вырожденная гиперполоса CH^τ_m [2] называется распадающейся, если гиперповерхность V^τ_{n-1}, огибающая главные касательные гиперплоскости τ гиперполосы CH^τ_m, распадается

на две тангенциально вырожденные поверхности V^τ_m и V^τ_{n-s-1} с общей направляющей поверхностью V_τ (V_τ -множество всех центров плоских образующих E_s ($s = m - \tau$) базисной поверхности V^τ_m данной гиперполосы [3]).

Распадающуюся нормально-центрированную m-мерную гиперполосу ранга τ обозначим символом RH^τ_m. Присоединим к гиперполосе RH^τ_m подвижной репер $\{A_{\mathcal{J}}\}$ первого порядка, полагая $A_0 = A$, $\tau^n = \tau$, где A — центр плоской образующей E_s базисной поверхности V^τ_m, а τ — главная касательная гиперплоскость [5] гиперполосы RH^τ_m. Далее, точки $\{A_p\}$ поместим в касательную плоскость T_τ поверхности V_τ, точки $\{A_i\}$ — в плоскость E_s, точки $\{A_\alpha\}$ — в $(n-m-1)$-мерную плоскость E_{n-m-1} — плоскую образующую поверхности V^τ_{n-s-1}, точка A_n пусть занимает произвольное положение, образуя с точками $\{A_0, A_p, A_i, A_\alpha\}$ проективный репер $\{A_{\mathcal{J}}\}$ пространства P_n.

Относительно выбранного репера 1-го порядка вырожденная гиперполоса RH^τ_m задается следующими пфаффовыми уравнениями:

$$\omega^n_0 = 0, \quad (1.1) \qquad \omega^i_0 = 0, \quad (1.2) \qquad \omega^\alpha_0 = 0, \quad (1.3)$$

$$\omega^n_i = 0, \quad (1.4) \qquad \omega^n_\alpha = 0, \quad (1.5)$$

$$\omega^\alpha_i = 0, \quad (1.6) \qquad \omega^i_\alpha = 0, \quad (1.7)$$

$$\omega^p_i = b^{pq}_i \omega^n_q = a^p_{iq} \omega^q, \quad b^{pq}_i = b^{qp}_i; \quad (1.8)$$

$$\omega^\alpha_p = b^\alpha_{pq} \omega^q = a^{\alpha q}_p \omega^n_q, \quad b^\alpha_{pq} = b^\alpha_{qp}; \quad (1.9)$$

$$\omega^p_\alpha = b^{pq}_\alpha \omega^n_q = a^p_{\alpha q}\omega^q, \quad b^{pq}_\alpha = b^{qp}_\alpha. \qquad (1.11)$$

и конечными соотношениями

$$a^p_{iq} b^\alpha_{pt} = a^p_{it} b^\alpha_{pq}, \qquad (1.12)$$

$$a^p_{\alpha q} b^i_{pt} = a^p_{\alpha t} b^i_{pq}, \qquad (1.13)$$

которые вытекают из продолжений уравнений (I.6) и (I.7) с учетом уравнений (I.8)-(I.II). Формы $\omega^p = \omega^p_0$ являются базисными формами гиперполосы RH^τ_m, отнесенной к подвижному точечному реперу $\{A_\gamma\}$, а формы ω^n_p являются базисными формами данной гиперполосы, отнесенной к подвижному тангенциальному реперу (τ^γ). Кроме того, формы ω^p и ω^n_p связаны соотношениями:

$$\omega^n_p = a_{pq}\omega^q, \text{ где } a_{pq} = a_{qp}, \quad a = \det\|a_{pq}\| \neq 0. \qquad (1.14)$$

Уравнения (1.1)-(1.3) задают поверхность центров V_τ плоских образующих E_s базисной поверхности V^τ_m гиперполосы RH^τ_m, уравнения (1.1),(1.2),(1.5),(1.7),(1.10),(1.11),(I.13) определяют тангенциально вырожденную поверхность V^τ_{n-s-1}, уравнения (1.1),(1.3),(1.4),(1.6),(1.8),(1.9),(1.12) определяют базисную поверхность V^τ_m гиперполосы RH^τ_m.

Продолжая уравнения (1.8)-(1.11),(1.14), находим:

$$\nabla a_{pq} = -a_{pq}(\omega^0_0 + \omega^n_n) + a_{pqt}\omega^t, \qquad (1.15)$$

$$\nabla b^{pq}_i = b^{pq}_i \omega^n_n + a^{pq}\omega^0_i - b^{pqt}_i \omega^n_t, \qquad (1.16)$$

$$\nabla b^i_{pq} = -b^i_{pq}\omega^0_0 - a_{pq}\omega^i_n + b^i_{pqt}\omega^t, \qquad (1.18)$$

$$\nabla b^{pq}_\alpha = b^{pq}_\alpha \omega^n_n + a^{pq}\omega^0_\alpha - b^{pqt}_\alpha \omega^n_t, \qquad (1.19)$$

где величины $a_{pqt}, b^\alpha_{pqt}, b^i_{pqt}, b^{pqt}_\alpha, b^{pqt}_i$ симметричны по индексам p, q, t.

Рассмотрим матрицу $\|a^{pq}\|$, обратную матрице $\|a_{pq}\|$:

$$a_{pq}a^{qt} = \delta^t_p. \qquad (1.20)$$

Дифференцируя эти соотношения с учетом (1.15), получим:

$$\nabla a^{pq} = a^{pq}(\omega^0_0 + \omega^n_n) - a^{pqt}\omega^n_t, \qquad (1.21)$$

где a^{pqt} симметричны по индексам p, q, t. Из уравнений (1.15) и (1.21) следует, что величины a_{pq}, a^{pq} являются относительными тензорами - основные двухвалентные тензоры распадающейся гиперполосы RH^τ_m.

Системы величин

$$\Gamma_2 = \{a_{pq}, a^{pq}, a_{pqt}, a^{pqt}, b^{pq}_i, b^i_{pq}, b^{pq}_\alpha, b^\alpha_{pq}\}$$

$$\Gamma_3 = \{\Gamma_2, b^{pqt}_i, b^i_{pqt}, b^{pqt}_\alpha, b^\alpha_{pqt}\}$$

образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков распадающейся гиперполосы RH^τ_m.

Дальнейшие продолжения системы (1.15)-(1.19),(1.21) вводят геометрические объекты четвертого и более высокого порядков, определяемые гиперполосой RH^τ_m. Таким образом получена последовательность фундаментальных геометрических объектов гиперполосы RH^τ_m.

Найдем условия инвариантности ряда геометрических образов, возникающих при построении инвариантного репера и ассоциированных в данной гиперполосой RH^{τ}_m. Прежде всего к каждому плоскому элементу (A_o, τ^n) гиперполосы RH^{τ}_m инвариантно присоединяются плоскости E_{n-m} и Π_{m-1} — соответственно нормали первого и второго рода в смысле А.П.Нордена [6] данной гиперполосы RH^{τ}_m.

Нормаль второго рода Π_{m-1} определим точками

$$M_p = A_p + x_p A_o, \quad M_i = A_i + x_i A_o.$$

Точки $\{M_p\}$ определяют инвариантную плоскость $E_{\tau-1}$, лежащую в касательной τ-плоскости E_{τ} поверхности V_{τ}. Условие инвариантности плоскости $E_{\tau-1}$ запишется в виде:

$$\delta M_p \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, M_q)$$

или

$$\nabla_{\delta} x_p = - x_p \pi^o_o - \pi^o_p. \tag{1.22}$$

Условие инвариантности плоскости $E_S \equiv [M_i]$ приводит к уравнениям:

$$\nabla_{\delta} x_i = - x_i \pi^o_o - \pi^o_i. \tag{1.23}$$

Инвариантную нормаль первого рода гиперполосы RH^{τ}_m — $(n-m)$-плоскость $E_{n-m} \equiv [A_o, A_{\alpha}, A_n]$ — зададим как пересечение гиперплоскостей

$$\sigma^p = \tau^p + y^p \tau^n, \quad \sigma^i = \tau^i + y^i \tau^n.$$

Гиперплоскости $\{\sigma^p\}$ определяют инвариантную $(n-\tau)$-плоскость $E_{n-\tau}$, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую плоскую образующую $E_{n-\tau-1} \equiv [A_o, A_i, A_{\alpha}]$ вырожденной гиперповерхности V^{τ}_{n-1}.

Условие инвариантности плоскости $E_{n-\tau}$ имеет вид:

$$\delta \sigma^p \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, \sigma^q)$$

или

$$\nabla_{\delta} y^p = y^p \pi^n_n + \pi^p_n. \tag{1.24}$$

Гиперплоскости $\{\sigma^i\}$ определяют инвариантную $(n-S)$-плоскость E_{n-S}, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую касательную плоскость T_{n-S-1} вырожденной поверхности V^{τ}_{n-S-1}. Условие инвариантности этой плоскости

$$\delta \sigma^i \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, \sigma^j),$$

и, следовательно, величины $\{y^i\}$ удовлетворяют условиям:

$$\nabla_{\delta} y^i = y^i \pi^n_n + \pi^i_n. \tag{1.25}$$

Кроме основных элементов инвариантного оснащения гиперполосы RH^{τ}_m — ее нормалей первого и второго рода, — определим еще инвариантную плоскость $E_{n-m-2} \equiv [M_{\alpha}] \equiv [A_{\alpha} + x_{\alpha} A_o]$, причем $E_{n-m-2} \subset E_{n-m-1}$. Из условия инвариантности плоскости E_{n-m-2} следует, что

$$\nabla_{\delta} x_{\alpha} = - x_{\alpha} \pi^o_o - \pi^o_{\alpha}. \tag{1.26}$$

Далее, выделим инвариантный пучок касательных гиперплоскостей

$$\sigma^{\alpha} = \tau^{\alpha} + y^{\alpha} \tau^n,$$

где

$$\nabla_{\delta} y^{\alpha} = y^{\alpha} \pi^n_n + \pi^{\alpha}_n. \tag{1.27}$$

Гиперплоскости $\{\sigma^{\alpha}\}$ определяют инвариантную $(m+1)$-плоскость $E_{m+1} \equiv [\sigma^{\alpha}]$, проходящую через касательную m-плоскость T_m базисной поверхности V^{τ}_m гиперполосы RH^{τ}_m.

Определим точку

$$\bar{M}_n = A_n - y^p A_p - y^\alpha A_\alpha - y^i A_i$$

репера $\{M_\mathcal{J}\}$ таким образом, чтобы плоскость $E_{n-\tau} \equiv [E_{n-\tau-1}, \bar{M}]$ и прямая $h \equiv [A_0, \bar{M}_n]$ были инвариантны. Эти требования приводят к тому, что величины $\{y^p\}, \{y^i\}, \{y^\alpha\}$ удовлетворяют соответственно условиям (1.24), (1.25), (1.27).

Отметим, что задание полей квазитензоров $\{y^p\}, \{y^i\}, \{y^\alpha\}$ определяет поле инвариантных прямых $h(y) = [A_0, \bar{M}_n(y)]$ и, следовательно, поле инвариантных нормалей первого рода $E_{n-\tau}(y) \equiv [E_{n-\tau-1}, h(y)]$ поверхности V_τ. Задание полей квазитензоров $\{y^p\}, \{y^i\}$ определяет поле инвариантных нормалей первого рода E_{n-m} поверхности V^τ_m, а задание полей квазитензоров $\{y^p\}, \{y^\alpha\}$ определяет поле инвариантных нормалей первого рода E_{s+1} поверхности V^τ_{n-s-1}.

Рассмотрим гиперплоскость

$$\tilde{\sigma}^0 = \tau^0 - x_p \tau^0 - x_i \tau^i - x_\alpha \tau^\alpha$$

такую, что плоскости $\Pi_{\tau-1} = [\tilde{\sigma}^0, \tau^i, \tau^\alpha, \tau^n]$ и $\Pi_{n-2} = [\tilde{\sigma}^0, \tau^n]$ инвариантны. Требование инвариантности этих плоскостей приводит к тому, что величины $\{x_p\}, \{x_i\}, \{x_\alpha\}$ удовлетворяют соответственно условиям (1.22), (1.23), (1.26). Причем задание полей квазитензоров $\{x_p\}, \{x_i\}, \{x_\alpha\}$ определяет поле инвариантных плоскостей $\Pi_{n-2} \equiv [\tilde{\sigma}^0, \tau^n]$ и, следовательно, поле инвариантных нормалей второго рода $\Pi_{\tau-1}$ поверхности V_τ. Задание полей квазитензоров $\{x_p\}$ и $\{x_i\}$ определяет поле инвариантных нормалей второго рода Π_{m-1} поверхности V^τ_m, а задание полей квазитензоров $\{x_p\}$ и $\{x_\alpha\}$

определяет поле инвариантных нормалей второго рода Π_{n-s-2} поверхности V^τ_{n-s-1}.

Условие инцидентности точки $\bar{M}_n$ и гиперплоскости $\tilde{\sigma}^0$ задается соотношением $(\bar{M}_n, \tilde{\sigma}^0) = 0$, откуда

$$x_p y^p + x_i y^i + x_\alpha y^\alpha = 0. \tag{1.28}$$

Уравнения (1.24), (1.25), (1.27) и уравнение

$$y^p \pi^0_p + y^i \pi^0_i + y^\alpha \pi^0_\alpha - \pi^0_n = 0 \tag{1.29}$$

определяют инвариантность точки $\bar{M}_n$.

Аналогично уравнения (1.22), (1.23), (1.26) и уравнение

$$x_p \pi^p_n + x_i \pi^i_n + x_\alpha \pi^\alpha_n - \pi^0_n = 0 \tag{1.30}$$

определяют инвариантность гиперплоскости $\tilde{\sigma}^0$.

Квазитензоры $\{x_p\}, \{x_i\}, \{x_\alpha\}, \{y^p\}, \{y^i\}, \{y^\alpha\}$ назовем оснащающими геометрическими объектами распадающейся гиперполосы RH^τ_m. Эти оснащающие объекты определяют соответственно точечный и тангенциальный реперы $(\{M_\mathcal{J}\}$ и $\{\sigma^\mathcal{J}\})$, присоединенные к гиперполосе RH^τ_m. Элементы этих реперов следующим образом выражаются через элементы исходных реперов:

$$\begin{aligned}
&M_0 \equiv A_0, && \tilde{\sigma}^0 = \tau^0 - x_p \tau^p - x_\alpha \tau^\alpha - x_i \tau^i,\\
&M_p = A_p + x_p A_0, && \sigma^p = \tau^p + y^p \tau^n,\\
&M_i = A_i + x_i A_0, && \sigma^i = \tau^i + y^i \tau^n,\\
&M_\alpha = A_\alpha + x_\alpha A_0, && \sigma^\alpha = \tau^\alpha + y^\alpha \tau^n,\\
&\bar{M}_n = A_n - y^p A_p - y^i A_i - y^\alpha A_\alpha; && \sigma^n \equiv \tau^n.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

§2. Построение внутреннего инвариантного репера распадающейся гиперполосы RH_m^τ с помощью первой пары нормальных квазитензоров.

Докажем, что для фундаментального дифференциально геометрического объекта третьего порядка гиперполосы RH_m^τ существуют алгебраические охваты, структура которых такая же, как и структура дифференциально геометрических оснащающих объектов данной гиперполосы RH_m^τ.

В окрестности второго порядка элемента гиперполосы RH_m^τ построим следующие величины:

$$\lambda_i=\frac{1}{\tau}a_{pq}b_i^{pq}, \quad (2.1) \qquad \lambda^i=\frac{1}{\tau}a^{pq}b_{pq}^i, \quad (2.2)$$

$$\lambda_\alpha=\frac{1}{\tau}a_{pq}b_\alpha^{pq}, \quad (2.3) \qquad \lambda^\alpha=\frac{1}{\tau}a^{pq}b_{pq}^\alpha, \quad (2.4)$$

где

$$\nabla_\delta\lambda_i=-\lambda_i\pi_0^0+\pi_i^0, \quad (2.5)$$

$$\nabla_\delta\lambda^i=\lambda^i\pi_n^n-\pi_n^i, \quad (2.6)$$

$$\nabla_\delta\lambda_\alpha=-\lambda_\alpha\pi_0^0+\pi_\alpha^0, \quad (2.7)$$

$$\nabla_\delta\lambda^\alpha=\lambda^\alpha\pi_n^n-\pi_n^\alpha. \quad (2.8)$$

Сравнив уравнения (2.5)-(2.8) соответственно с уравнениями (1.23),(1.25)-(1.27), приходим к выводу, что уравнения (1.23), (1.25)-(1.27) удовлетворяются соответственно при

$$x_i=-\lambda_i;\ y^i=-\lambda^i;\ x_\alpha=-\lambda_\alpha,\ y^\alpha=-\lambda^\alpha.$$

Т е о р е м а 1. Инвариантные оснащающие плоскости

$$E_{S-1}\equiv[M_i]=[A_i-\lambda_iA_0],\ E_{n-s}\equiv[\sigma^i]=[\tau^i-\lambda^i\tau^n],$$

$$E_{n+m+2}\equiv[M_\alpha]=[A_\alpha-\lambda_\alpha A_0],\ E_{m+1}\equiv[\sigma^\alpha]=[\tau^\alpha-\lambda^\alpha\tau^n]$$

внутренним образом присоединены к распадающейся гиперполосе RH_m^τ и определяются в окрестности третьего порядка элемента данной гиперполосы RH_m^τ.

Построим с помощью компонент фундаментального геометрического объекта третьего порядка гиперполосы RH_m^τ охваты, структура которых такая же, как и структура оснащающих объектов x_p и y^p данной гиперполосы RH_m^τ.

Составим величины:

$$d_p=\frac{1}{\tau+2}a_{pqt}a^{qt}, \quad (2.9) \qquad d^p=\frac{1}{\tau+2}a^{pqt}a_{qt}, \quad (2.10)$$

где

$$d^p=a^{pq}d_q, \quad (2.11)$$

$$\nabla_\delta a_{pqt}=-a_{pqt}(2\pi_0^0+\pi_n^n)-a_{(pq}\pi_{t)}^0+a_{(pq}a_{t)s}\pi_n^s, \quad (2.12)$$

$$\nabla_\delta a^{pqt}=-a^{pqt}(\pi_0^0+2\pi_n^n)+a^{(pq}\pi_n^{t)}-a^{(pq}a^{t)s}\pi_s^0. \quad (2.13)$$

Уравнения (2.12) и (2.13) получены из продолжения соответственно уравнений (1.15) и (1.21) при фиксированных главных параметрах. Ковариантно дифференцируя (2.9) и (2.10) и учитывая (1.15),(1.21),(2.12),(2.13),, а затем фиксируя значения главных параметров, находим:

$$\nabla_\delta d_p=-d_p\pi_0^0-\pi_p^0+a_{pq}\pi_n^q, \quad (2.14)$$

$$\nabla_\delta d^p=d^p\pi_n^n+\pi_n^p-a^{pq}\pi_q^0 \quad (2.15)$$

Построим относительные тензоры:

$$\ell_{pqt}=a_{pqt}-a_{(pq}d_{t)}, \quad (2.16)$$

$$\ell^{pqt}=a^{pqt}-a^{(pq}d^{t)}, \quad (2.17)$$

связанные равенством

$$\ell^{pqt} = a^{sp} a^{fq} a^{gt} \ell_{sfg} \tag{2.18}$$

и удовлетворяющие условиям аполярности:

$$\ell_{pqt} a^{qt} = 0\,, \quad \ell^{pqt} a_{qt} = 0. \tag{2.19}$$

Используя соотношения (1.15),(1.21),(2.9),(2.10),(2.14),(2.15),находим:

$$\nabla_\delta \ell_{pqt} = -\ell_{pqt}\,(2\pi^o_o + \pi^n_n), \tag{2.20}$$

$$\nabla_\delta \ell^{pqt} = \ell^{pqt}\,(\pi^o_o + 2\pi^n_n)\,. \tag{2.21}$$

Тензор ℓ_{pqt} является тензором Дарбу [1] базисной поверхности V^τ_m ,а тензор ℓ^{pqt} —тензором Дарбу гиперповерхности V^τ_{n-1} ,огибаемой главными касательными гиперплоскостями τ^n гиперполосы RH^τ_m .С помощью тензоров Дарбу строим относительный инвариант

$$\ell = \ell_{pqt}\, \ell^{pqt}. \tag{2.22}$$

Дальнейшее построение проводится в предположении,что $\ell \neq 0$ В общем случае можно считать,что $\ell \neq 0$,при $\ell_{pqt} \neq 0$ [3]. Имеем:

$$\delta \ln \ell = \pi^n_n - \pi^o_o\,.$$

Это уравнение при незафиксированных значениях главных параметров будет иметь вид:

$$d \ln \ell = \omega^n_n - \omega^o_o + \ell_p \omega^p \tag{2.23}$$

или же

$$d \ln \ell = \omega^n_n - \omega^o_o - \ell^p \omega^n_p\,, \tag{2.24}$$

где

$$\ell^p = a^{pq} \ell_q. \tag{2.25}$$

Наконец,определим оснащающие объекты $\{x_p\}$ и $\{y^p\}$ нужного строения:

$$\lambda_p = -\tfrac{1}{2}\,(d_p + \ell_p), \tag{2.26}$$

$$\lambda^p = -\tfrac{1}{2}\,(d^p + \ell^p), \tag{2.27}$$

где

$$\nabla_\delta \lambda_p = -\lambda_p \omega^o_o + \omega^o_p + \bar{\lambda}^q_p \omega^n_q\,. \tag{2.28}$$

$$\nabla_\delta \lambda^p = \lambda^p \omega^n_n - \omega^p_n - \tilde{\lambda}^p_q \omega^q\,. \tag{2.29}$$

Действительно,уравнения (1.22) и (1.24) удовлетворяются при $x_p = -\lambda_p$; $y^p = -\lambda^p$. Итак,имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 2. Инвариантные нормали первого и второго рода гиперполосы RH^τ_m

$$E_{n-\tau} \equiv [\sigma^p] = [\tau^p - \lambda^p \tau^n] \quad \text{и} \quad E_{\tau-1} \equiv [M_p] = [A_p - \lambda_p A_o]$$

внутренним образом присоединены к данной гиперполосе и определяются в окрестности третьего порядка элемента данной гиперполосы.

Назовем квазитензоры третьего порядка λ^p и λ_p ,задающие внутренние инвариантные нормали первого и второго рода гиперполосы RH^τ_m ,первой парой нормальных квазитензоров данной гиперполосы.Построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы,присоединенные внутренним образом в окрестности третьего порядка элемента гиперполосы RH^τ_m, имеют следующий вид:

$$M_o \equiv A_o\,, \qquad \tilde{\sigma}^o = \tau^o + \lambda_\alpha \tau^\alpha + \lambda_i \tau^i + \lambda_p \tau^p,$$

$$M_p = A_p - \lambda_p A_o\,, \qquad \sigma^p = \tau^p - \lambda^p \tau^n,$$

$$M_i = A_i - \lambda_i A_o, \qquad \sigma^i = \tau^i - \lambda^i \tau^n,$$
$$M_\alpha = A_\alpha - \lambda_\alpha A_o, \qquad \sigma^\alpha = \tau^\alpha - \lambda^\alpha \tau^n,$$
$$\bar{M}_n = A_n + \lambda^\alpha A_\alpha + \lambda^i A_i + \lambda^p A_p; \quad \sigma^n \equiv \tau^n.$$

§3. Поля геометрических объектов распадающейся гиперполосы RH_m^τ

I. Окрестность второго порядка.

В §2 построена система квазитензоров второго порядка (2.I)-(2.4), охватываемая фундаментальным объектом Γ_2 гиперполосы RH_m^τ. Продолжим построение полей геометрических объектов, определяемых в окрестности второго порядка исследуемой гиперполосы RH_m^τ. Имеем

$$c_i^{pq} = b_i^{pq} - \lambda_i a^{pq}, \quad (3.1) \qquad c_{pq}^\alpha = b_{pq}^\alpha - \lambda^\alpha a_{pq}, \quad (3.2)$$

$$c_{pq}^i = b_{pq}^i - \lambda^i a_{pq}, \quad (3.3) \qquad c_\alpha^{pq} = b_\alpha^{pq} - \lambda_\alpha a^{pq}, \quad (3.4)$$

где

$$\nabla_\delta c_i^{pq} = c_i^{pq} \pi_n^n, \quad (3.5) \qquad \nabla_\delta c_{pq}^\alpha = - c_{pq}^\alpha \pi_o^o, \quad (3.6)$$

$$\nabla_\delta c_{pq}^i = - c_{pq}^i \pi_o^o, \quad (3.7) \qquad \nabla_\delta c_\alpha^{pq} = c_\alpha^{pq} \pi_n^n. \quad (3.8)$$

Из равенств (3.5)-(3.8) следует, что величины c_i^{pq}, c_{pq}^i, c_{pq}^α, c_α^{pq} являются относительными тензорами второго порядка. Для этих тензоров выполняются условия аполярности:

$$c_{pq}^i a^{pq} = 0, \qquad c_{pq}^\alpha a^{pq} = 0,$$

$$c_i^{pq} a_{pq} = 0, \qquad c_\alpha^{pq} a_{pq} = 0.$$

Дальнейшие построения проводятся для распадающихся гиперполос RH_m^τ, которые допускают отличный от нуля инвариант $\mathcal{J} = \mathcal{J}(c_i^{pq}, c_{pq}^\alpha)$. В общем случае, когда соприкасающаяся плоскость второго порядка заполняет все пространство, можно показать (аналогично, как это сделано в работе [7]), что к гиперполосе RH_m^τ присоединяются объекты второго порядка $\tilde{c}_{pq}^i$, $\tilde{c}_\alpha^{pq}$ —обращенные тензоры соответственно тензорам c_i^{pq}, $\tilde{c}_\alpha^{pq}$:

$$\tilde{c}_\alpha^{pq} c_{pq}^\beta = \tau \delta_\alpha^\beta; \quad \tilde{c}_\alpha^{pq} c_{tq}^\alpha = (n-m-1)\delta_t^p, \quad \tilde{c}_\alpha^{pq} c_{pq}^\alpha = \tau(n-m-1); \quad (3.9)$$

$$\tilde{c}_{pq}^i c_j^{pq} = \tau \delta_j^i, \quad \tilde{c}_{pq}^i c_i^{pt} = (m-\tau)\delta_q^t, \quad \tilde{c}_{pq}^i c_i^{pq} = \tau(m-\tau). \quad (3.10)$$

Имеем
$$\nabla \tilde{c}_\alpha^{pq} = c_\alpha^{pq} \omega_o^o - \tilde{c}_\alpha^{pqt} \omega_t^n, \quad (3.11)$$

$$\nabla \tilde{c}_{pq}^i = - \tilde{c}_{pq}^i \omega_n^n + \tilde{c}_{pqt}^i \omega^t. \quad (3.12)$$

Составим последовательно величины:
$$t_\alpha^i = \frac{1}{\tau} c_{pq}^i \tilde{c}_\alpha^{pq}, \quad (3.13)$$
$$\nabla_\delta t_\alpha^i = 0. \quad (3.14)$$

Используя компоненты геометрических объектов $\{c_{pq}^i, c_{pq}^\alpha\}$ $\{c_\alpha^{pq}, c_i^{pq}\}$ и двухвалетные основные тензоры a_{pq} и a^{pq}, построим следующие свертки:

$$\ell_{iq}^p = c_i^{ps} a_{sq}, \quad (3.15) \qquad \ell_p^{iq} = c_{ps}^i a^{sq}, \quad (3.16)$$

$$\ell_{\alpha q}^p = c_\alpha^{ps} a_{sq}, \quad (3.17) \qquad \ell_p^{\alpha q} = c_{ps}^\alpha a^{sq}, \quad (3.18)$$

$$\ell^j_i = \frac{1}{\tau}\ell^p_{iq}\ell^{jq}_p = C^{pq}_i C^j_{pq}, \qquad (3.19)$$

$$\ell^\alpha_i = \frac{1}{\tau}\ell^p_{iq}\ell^{\alpha q}_p = C^{ps}_i C^\alpha_{ps}, \qquad (3.20)$$

$$\ell^\beta_\alpha = \frac{1}{\tau}\ell^p_{\alpha q}\ell^{\beta q}_p = C^{ps}_\alpha C^\beta_{ps}, \qquad (3.21)$$

$$\ell_{ij} = \ell^p_{iq}\ell^q_{jp}, \quad (3.22) \qquad \ell^{\alpha\beta} = \ell^{\alpha q}_p \ell^{\beta p}_q, \qquad (3.23)$$

$$\ell_{i\alpha} = \ell^p_{iq}\ell^q_{\alpha p}, \quad (3.24) \qquad \ell^{\alpha i} = \ell^{\alpha q}_p \ell^{ip}_q, \qquad (3.25)$$

удовлетворяющие соответственно дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \ell^p_{iq} = -\ell^p_{iq}\omega^0_0 - \ell^{ps}_{iq}\omega^n_s, \qquad (3.26)$$

$$\nabla \ell^{iq}_p = \ell^{iq}_p\omega^n_n + \ell^{iq}_{ps}\omega^s, \qquad (3.27)$$

$$\nabla \ell^p_{\alpha q} = -\ell^p_{\alpha q}\omega^0_0 - \ell^{ps}_{\alpha q}\omega^n_s, \qquad (3.28)$$

$$\nabla \ell^{\alpha q}_p = \ell^{\alpha q}_p\omega^n_n + \ell^{\alpha q}_{pt}\omega^t, \qquad (3.29)$$

$$\nabla \ell^j_i = \ell^j_i(\omega^n_n - \omega^0_0) + \ell^j_{it}\omega^t, \qquad (3.30)$$

$$\nabla \ell^\alpha_i = \ell^\alpha_i(\omega^n_n - \omega^0_0) + \ell^\alpha_{it}\omega^t, \qquad (3.31)$$

$$\nabla \ell^\beta_\alpha = \ell^\beta_\alpha(\omega^n_n - \omega^0_0) + \ell^\beta_{\alpha t}\omega^t, \qquad (3.32)$$

$$\nabla \ell_{ij} = -2\ell_{ij}\omega^0_0 + \ell_{ijt}\omega^t, \qquad (3.33)$$

$$\nabla \ell^{\alpha\beta} = 2\ell^{\alpha\beta}\omega^n_n + \ell^{\alpha\beta}_t\omega^t, \qquad (3.34)$$

$$\nabla \ell_{i\alpha} = -2\ell_{i\alpha}\omega^0_0 + \ell_{i\alpha t}\omega^t, \qquad (3.35)$$

$$\nabla \ell^{\alpha i} = 2\ell^{\alpha i}\omega^n_n + \ell^{\alpha i}_t\omega^t. \qquad (3.36)$$

Итак, построенные геометрические объекты $\ell^p_{iq}, \ell^{iq}_p, \ell^p_{\alpha q}, \ell^{\alpha q}_p, \ell^j_i, \ell^\alpha_i, \ell^\beta_\alpha, \ell_{ij}, \ell^{\alpha\beta}, \ell_{i\alpha}, \ell^{\alpha i}$ есть относительные тензоры второго порядка данной распадающейся гиперполосы RH^τ_m.

Построим еще один относительный тензор второго порядка Q^i_j:

$$\bar\ell^i_j = t^i_\alpha \ell^\alpha_j, \quad \nabla\bar\ell^i_j = \bar\ell^i_j(\omega^n_n - \omega^0_0) + \bar\ell^i_{jt}\omega^t,$$

$$Q^i_j = \bar\ell^i_j - \ell^i_j, \quad \nabla Q^i_j = Q^i_j(\omega^n_n - \omega^0_0) + Q^i_{jt}\omega^t. \qquad (3.37)$$

Можно показать аналогично, как это сделано в работе [3], что для распадающихся гиперполос RH^τ_m в общем случае при некоторых начальных условиях относительные тензоры ℓ_{ij}, ℓ^j_i, Q^j_i являются невырожденными. Итак, рассмотрим гиперполосы RH^τ_m, для которых тензоры второго порядка ℓ_{ij} и Q^i_j невырождены. Для тензора Q^j_i введем взаимный тензор $\tilde Q^k_i$:

$$Q^j_k\tilde Q^k_i = Q^k_i\tilde Q^j_k = \delta^j_i, \quad \nabla_\delta\tilde Q^k_i + \tilde Q^k_i(\pi^n_n - \pi^0_0) = 0, \qquad (3.38)$$

а с помощью тензора ℓ_{ij} определим симметрический тензор L_{ij}:

$$L_{ij} = -\frac{1}{2}(\tilde Q^k_i\ell_{kj} + \tilde Q^k_j\ell_{ki}), \quad \nabla_\delta L_{ij} = -L_{ij}(\pi^0_0 + \pi^n_n). \qquad (3.39)$$

В общем случае тензор L_{ij} невырожденный, с его помощью строим следующие геометрические объекты второго порядка:

$$L_{i\alpha} = -L_{ij}t^j_\alpha, \quad \nabla L_{i\alpha} = -L_{i\alpha}(\omega^0_0 + \omega^n_n) + L_{i\alpha t}\omega^t, \qquad (3.40)$$

$$L_{\alpha\beta} = -L_{i\alpha}t^i_\beta, \quad \nabla L_{\alpha\beta} = -(\omega^0_0 + \omega^n_n)L_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta t}\omega^t. \qquad (3.41)$$

Положим:

$$\alpha_p = a^{tv} a^{fw} \ell_{vwp} (c^{\alpha}_{tf} \lambda_\alpha + c^i_{tf} \lambda_i), \quad (3.42)$$

$$\beta_p = \ell_{vwp} (c^{vw}_i \lambda^i + c^{vw}_\alpha \lambda^\alpha). \quad (3.43)$$

Величины α_p и β_p ,определяемые в окрестности второго порядка элемента гиперполосы RH^r_m ,в силу уравнений (1.21),(2.5)-(2.8),(2.20),(3.5)-(3.8),удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla_\delta \alpha_p = -\alpha_p (2\pi^o_o - \pi^n_n) + a^{tv} a^{fw} \ell_{vwp} c^\alpha_{tf} \pi^o_\alpha + $$
$$+ a^{tv} a^{fw} \ell_{vwp} c^i_{tf} \pi^o_i , \quad (3.44)$$

$$\nabla_\delta \beta_p = -\beta_p (2\pi^o_o - \pi^n_n) - \ell_{vwp} c^{vw}_\alpha \pi^\alpha_n - \ell_{vwp} c^{vw}_i \pi^i_n . \quad (3.45)$$

Используя тензор Дарбу ℓ_{pqt} ,строим симметрический тензор

$$L_{pq} = a^{tv} a^{fw} \ell_{ptf} \ell_{qvw}, \; \nabla L_{pq} = -2 L_{pq} \omega^o_o + L_{pqt} \omega^t . \quad (3.46)$$

В общем случае тензор L_{pq} невырожденный,т.е.существует взаимный ему тензор L^{pq} :

$$L^{pt} L_{tq} = \delta^p_q ; \; \nabla L^{pq} - 2 L^{pq} \omega^o_o = L^{pq}_t \omega^t . \quad (3.47)$$

Далее,используя свертки величин ℓ^j_i и ℓ^β_α ,найдем относительный инвариант второго порядка K_o .Действительно, последовательно имеем

$$\ell^i_i = \tilde{\ell}_o , \quad \delta \tilde{\ell}_o = \tilde{\ell}_o (\pi^n_n - \pi^o_o), \quad (3.48)$$

$$\ell^\alpha_\alpha = \bar{\ell}_o , \quad \delta \bar{\ell}_o = \bar{\ell}_o (\pi^n_n - \pi^o_o), \quad (3.49)$$

$$K_o = \tilde{\ell}_o + \bar{\ell}_o , \quad dK_o = K_o (\omega^n_n - \omega^o_o) + K_{ot} \omega^t . \quad (3.50)$$

Наконец,вводим в рассмотрение квазитензоры $\{\ell_i , L_{ij}, L_{i\alpha}\}$ и $\{\ell_\alpha , L_{i\alpha}, L_{\alpha\beta}\}$,где величины

$$\ell_i = L_{i\alpha} \lambda^\alpha - L_{ij} \lambda^j - \lambda_i ; \; \ell_\alpha = -(L_{\alpha\beta} \lambda^\beta + L_{i\alpha} \lambda^i + \lambda_\alpha) \quad (3.51)$$

удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\nabla_\delta \ell_i = -\ell_i \pi^o_o + L_{ij} \pi^j_n + L_{i\alpha} \pi^\alpha_n - \pi^o_i , \quad (3.52)$$

$$\nabla_\delta \ell_\alpha = -\ell_\alpha \pi^o_o + L_{i\alpha} \pi^i_n + L_{\alpha\beta} \pi^\beta_n - \pi^o_\alpha . \quad (3.53)$$

II.Окрестность третьего порядка.

Построим систему величин,охваченных компонентами фундаментального дифференциально геометрического объекта третьего порядка Γ_3 гиперполосы RH^r_m .
Продолжение уравнений (1.15),(2.9),(2.10) приводит соответственно к дифференциальным уравнениям:

$$\nabla a_{pqt} + a_{pqt} (2\omega^o_o + \omega^n_n) + a_{(pq} \omega^o_{t)} - a_{s(p} a_{qt)} \omega^s_n = a_{pqts} \omega^s , \quad (3.54)$$

$$\nabla d_p + d_p \omega^o_o - a_{ps} \omega^s_n + \omega^o_p = d_{pt} \omega^t , \quad (3.55)$$

$$\nabla d^p - d^p \omega^n_n + a^{pt} \omega^o_t - \omega^p_n = d^{pq} \omega^n_q , \quad (3.56)$$

где,вообще говоря, $d_{pt} \neq d_{tp}$, $d^{pq} \neq d^{qp}$,а величины a_{pqts} симметричны по первым трем индексам p,q,t .
Системы величин $\{d_{pq}\}$ и $\{d^{pq}\}$ принадлежат окрестности третьего порядка элемента гиперполосы RH^r_m и удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\nabla_\delta d_{pq} + 2 d_{pq} \pi^o_o + d_{(p} \pi^o_{q)} - (a_{pqt} + a_{pq} d_t) \pi^t_n + 2 a_{pq} \pi^o_n +$$
$$+ b^i_{pq} \pi^o_i + b^\alpha_{pq} \pi^o_\alpha + a_{ps} a^s_{\alpha q} \pi^\alpha_n + a_{pt} a^t_{iq} \pi^i_n = 0, \quad (3.57)$$

$$\nabla_\delta d^{pq} = 2d^{pq}\pi^n_n + d^{(p}\pi^{q)}_n - (a^{pqt} + a^{pq}d^t)\pi^\circ_t + 2a^{pq}\pi^\circ_n +$$

$$+ b^{pq}_i \pi^i_n + b^{pq}_\alpha \pi^\alpha_n + a^{pt} a^{\alpha q}_t \pi^\circ_\alpha + a^{pt} a^{iq}_t \pi^\circ_i . \qquad (3.58)$$

При помощи этих величин $\{d_{pq}\}$ и $\{d^{pq}\}$ третьего порядка и уже построенных ранее величин второго порядка последовательно определяем новые величины третьего порядка $T, T_\circ, \hat{T}_{pq}, \hat{T}_p, T^p, K_p, \overline{T}$:

$$T = \frac{1}{r}(d_{pq} - d_p d_q) a^{pq}, \qquad (3.59)$$

$$T_\circ = T - \lambda^i \ell_i - \lambda^\alpha \ell_\alpha , \qquad (3.60)$$

$$\hat{T}_{pq} = d_{pq} - d_p d_q - T_\circ a_{pq} , \qquad (3.61)$$

$$\hat{T}_p = a^{vw} a^{t\ell} \hat{T}_{vt} \ell_{w\ell p} + (\alpha_p - \beta_p), \qquad (3.62)$$

$$T^p = L^{pq} \hat{T}_q , \qquad (3.63)$$

$$K_p = d_p - a_{pq} T^q , \qquad (3.64)$$

$$\overline{T} = \frac{1}{r}(d^{pq} - d^p d^q) a_{pq} , \qquad (3.65)$$

дифференциальные уравнения которых в силу (1.15),(1.21), (2.12)-(2.15),(2.20),(2.21),(3.44)-(3.47),(3.51)-(3.53), (3.56)-(3.58) имеют вид:

$$\delta T = T(\pi^n_n - \pi^\circ_\circ) + 2d_p \pi^p_n - (2\pi^\circ_n + \lambda^\alpha \pi^\circ_\alpha + \lambda^i \pi^\circ_i + \lambda_\alpha \pi^\alpha_n + \lambda_i \pi^i_n), \qquad (3.66)$$

$$\delta T_\circ = T_\circ(\pi^n_n - \pi^\circ_\circ) + 2(d_p \pi^p_n - \pi^\circ_n + \lambda_i \pi^i_n + \lambda_\alpha \pi^\alpha_n). \qquad (3.67)$$

$$\nabla_\delta T_{pq} + 2\hat{T}_{pq}\pi^\circ_\circ - \ell_{pqt}\pi^t_n + c^i_{pq}\pi^\circ_i + c^\alpha_{pq}\pi^\circ_\alpha - \lambda_i a_{pq}\pi^i_n -$$

$$- \lambda_\alpha a_{pq}\pi^\alpha_n + a_{pt} a^t_{qi}\pi^i_n + a_{ps} a^s_{q\alpha}\pi^\alpha_n = 0, \qquad (3.68)$$

$$\nabla_\delta \hat{T}_p + \hat{T}_p(2\pi^\circ_\circ - \pi^n_n) - L_{pq}\pi^q_n = 0, \qquad (3.69)$$

$$\nabla_\delta T^p = T^p \pi^n_n + \pi^p_n , \qquad (3.70)$$

$$\nabla_\delta K_p = -K_p \pi^\circ_\circ - \pi^\circ_p , \qquad (3.71)$$

$$\delta\overline{T} = \overline{T}(\pi^n_n - \pi^\circ_\circ) + 2\pi^\circ_n - 2d^p \pi^\circ_p + \lambda_i \pi^i_n + \lambda_\alpha \pi^\alpha_n + \lambda^i \pi^\circ_i + \lambda^\alpha \pi^\circ_\alpha . \qquad (3.72)$$

Из уравнений (3.70) и (3.71) следует, что каждая из систем величин $\{T^p\}$ и $\{K_p\}$ образует квазитензор третьего порядка исследуемой гиперполосы RH^r_m. Назовем квазитензоры T^p и K_p второй парой нормальных квазитензоров. Определим, используя нормальные квазитензоры, тензоры третьего порядка $T^p + \lambda^p$ и $K_p + \lambda_p$:

$$\nabla(T^p + \lambda^p) = (T^p + \lambda^p)\omega^n_n + (\ldots)_t \omega^t , \qquad (3.73)$$

$$\nabla(K_p + \lambda_p) = -(K_p + \lambda_p)\omega^\circ_\circ + (\ldots)_t \omega^t . \qquad (3.74)$$

и абсолютный инвариант

$$\mathcal{J} = \ell_{pqt} L^{qt} (T^p + \lambda^p), \qquad (3.75)$$

так как из (2.20),(3.46),(3.73) имеем $\delta\mathcal{J} = 0$.

§4. Построение внутреннего инвариантного репера с помощью второй пары нормальных квазитензоров.

Рассмотрим построение внутреннего инвариантного репера $\{M_\mathcal{J}\}$ распадающейся гиперполосы RH_m^τ, для которой тензор $\ell=0$ $(\ell_{pqt}\neq 0)$. В этом случае оснащающие объекты $\{y^p\}$ и $\{x_p\}$ можно охватить второй парой нормальных квазитензоров T^p, K_p третьего порядка, а охваты остальных оснащающих объектов $x_i, x_\alpha, y^i, y^\alpha$ оставить теми же, что и в §2. В нормали первого рода $E_{n-\tau}$ поверхности V_τ определим инвариантную оснащающую плоскость $N_{n-\tau-1}\equiv[\mathcal{K}, M_i, M_\alpha]$, где

$$K=\rho^\circ A_\circ - T^p A_p + \lambda^i A_i + \lambda^\alpha A_\alpha + A_n. \tag{4.1}$$

Требование инвариантности плоскости $N_{n-\tau-1}$ приводит к уравнению

$$\delta\rho^\circ=\rho^\circ(\pi_n^n-\pi_\circ^\circ)+T^p\pi_p^\circ-\lambda^i\pi_i^\circ-\lambda^\alpha\pi_\alpha^\circ-\pi_n^\circ. \tag{4.2}$$

Инвариантная точка K является точкой пересечения оснащающей плоскости $N_{n-\tau-1}$ с инвариантной прямой $h\equiv[A_\circ, \bar{M}_n]$. Аналогично рассмотрим инвариантную гиперплоскость

$$\nu^\circ=\tau^\circ-K_p\tau^p+\lambda_i\tau^i+\lambda_\alpha\tau^\alpha+\theta\tau^n, \tag{4.3}$$

где

$$\delta\theta=\theta(\pi_n^n-\pi_\circ^\circ)-K_p\pi_n^p+\lambda_i\pi_n^i+\lambda_\alpha\pi_n^\alpha+\pi_n^\circ. \tag{4.4}$$

Инцидентность точки K и гиперплоскости ν° задается соотношением $(K,\nu^\circ)=0$ или

$$\theta+\rho^\circ+K_pT^p+\lambda_i\lambda^i+\lambda_\alpha\lambda^\alpha=0. \tag{4.5}$$

Нетрудно убедиться, что величины

$$N=\tfrac{1}{2}[T-\lambda^\alpha\lambda_\alpha-\lambda_i\lambda^i-(2d_p-a_{pq}T^q)T^p] \tag{4.6}$$

$$S=\tfrac{1}{2}[\bar{T}-\lambda_i\lambda^i-\lambda_\alpha\lambda^\alpha-(2d^p-a^{pq}K_q)K_p] \tag{4.7}$$

удовлетворяют соответственно уравнениям (4.2) и (4.4), если положить $\rho^\circ=N$, $\theta=S$.

Таким образом, точка

$$K=NA_\circ-T^pA_p+\lambda^iA_i+\lambda^\alpha A_\alpha+A_n \tag{4.8}$$

и гиперплоскость

$$\nu^\circ=\tau^\circ-K_p\tau^p+\lambda_i\tau^i+\lambda_\alpha\tau^\alpha+S\tau^n \tag{4.9}$$

внутренним инвариантным образом присоединены к гиперполосе RH_m^τ в окрестности третьего порядка элемента данной гиперполосы. При этом условие инцидентности (4.5) точки K и гиперплоскости ν° не выполняется. Однако можно выделить на прямой $[A_\circ K]$ инвариантную точку

$$\bar{K}=A_n-T^pA_p+\lambda^iA_i+\lambda^\alpha A_\alpha-(S+T^pK_p+\lambda_i\lambda^i+\lambda_\alpha\lambda^\alpha)A_\circ, \tag{4.10}$$

внутренним образом присоединенную к гиперполосе RH_m^τ и инцидентную гиперплоскости ν°, а в пучке гиперплоскостей $[\nu^\circ, \sigma^n]$ — внутреннюю инвариантную гиперплоскость

$$\bar{\nu}_\circ=\tau^\circ-K_p\tau^p+\lambda_i\tau^i+\lambda_\alpha\tau^\alpha-(N+K_pT^p+\lambda_i\lambda^i+\lambda_\alpha\lambda^\alpha)\tau^n, \tag{4.11}$$

инцидентную точке K.

Величины

$$\lambda_n=\frac{\alpha\bar{S}+\beta S}{\alpha+\beta}, \quad \lambda^\circ=\frac{\alpha N+\beta\bar{N}}{\alpha+\beta}, \tag{4.12}$$

где

$$\bar{S}=-(N+K_pT^p+\lambda_i\lambda^i+\lambda_\alpha\lambda^\alpha),\quad \bar{N}=-(S+K_pT^p+\lambda_i\lambda^i+\lambda_\alpha\lambda^\alpha),$$

3 Зак. 15465

а α и β —произвольные действительные числа, удовлетворяющие, соответственно, уравнениям (4.4) и (4.2). Таким образом, точка

$$M_n = A_n - T^p A_p + \lambda^i A_i + \lambda^\alpha A_\alpha + \lambda^0 A_0 \qquad (4.13)$$

и гиперплоскость

$$\sigma^0 = \tau^0 - K_p \tau^p + \lambda_i \tau^i + \lambda_\alpha \tau^\alpha + \lambda_n \tau^n, \qquad (4.14)$$

внутренним инвариантным образом присоединены к гиперполосе RH^τ_m в окрестности третьего порядка ее плоского элемента и удовлетворяют условию инцидентности (4.5).

Построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы, присоединенные внутренним образом в окрестности третьего порядка элемента гиперполосы RH^τ_m, имеют следующий вид:

$$M_0 \equiv A_0, \qquad \sigma^0 = \tau^0 - K_p \tau^p + \lambda_i \tau^i + \lambda_\alpha \tau^\alpha + \lambda_n \tau^n,$$
$$M_p = A_p + K_p A_0, \qquad \sigma^p = \tau^p + T^p \tau^n,$$
$$M_i = A_i - \lambda_i A_0, \qquad \sigma^i = \tau^i - \lambda^i \tau^n,$$
$$M_\alpha = A_\alpha - \lambda_\alpha A_0, \qquad \sigma^\alpha = \tau^\alpha - \lambda^\alpha \tau^n,$$
$$M_n = A_n - T^p A_p + \lambda^i A_i + \lambda^\alpha A_\alpha + \lambda^0 A_0, \qquad \sigma^n \equiv \tau^n.$$

§5. Геометрическая интерпретация оснащающих объектов распадающейся гиперполосы

Для выяснения геометрического смысла некоторых элементов внутреннего оснащения, построенного в §2 и §4, рассмотрим фокальные образы [8], связанные с распадающейся гиперполосой RH^τ_m.

Проведя совершенно аналогичные рассуждения, как и в работах [2],[3], приходим к следующим результатам:

Т е о р е м а 3. Внутренняя оснащающая плоскость E_{s-1}, принадлежащая плоской образующей $E_s \subset V^\tau_m$, является гармонической полярой [9] точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$:

$$\det \| x^i b^{pt}_i a_{qt} + x^0 \delta^p_q \| = 0; \; x^p = x^\alpha = x^n = 0, \qquad (5.1)$$

принадлежащей плоской образующей E_s гиперполосы RH^τ_m.

Внутренняя оснащающая плоскость $E_{n-s} \equiv [\sigma^i]$, проходящая через касательную плоскость T_{n-s-1} поверхности V_{n-s-1}, является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса $\mathcal{K}_\tau$:

$$\det \| y_n \delta^t_p + y_i a^{it}_p \| = 0; \; y_\alpha = y_n = y_0 = 0, \qquad (5.2)$$

вершиной которого является плоскость T_{n-s-1}.

Т е о р е м а 4. Внутренняя инвариантная плоскость $\Pi_{n-\tau-2} = [M_i, M_\alpha]$ является гармонической полярой точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$:

$$\det \| x^0 \delta^q_p + x^i a^q_{ip} + x^\alpha a^q_{\alpha p} \| = 0; \; x^p = x^n = 0, \qquad (5.3)$$

которая принадлежит плоской образующей $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V^τ_{n-1} (плоскость $E_{n-\tau-1}$ является характеристикой гиперполосы RH^τ_m).

Инвариантная плоскость $E_{\tau+1} \equiv [\sigma^i, \sigma^\alpha]$, внутренним образом присоединенная к распадающейся гиперполосе RH^τ_m и проходящая через касательную плоскость $T_\tau \subset V_\tau$, является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса $\mathcal{K}_\tau$:

$$\det \| y_n \delta^p_q + a^{\alpha p}_q y_\alpha + a^{ip}_q y_i \| = 0; \; y_p = y_0 = 0, \qquad (5.4)$$

вершиной которого является касательная плоскость $T_\tau \subset V_\tau$.

Теорема 5. Внутренняя инвариантная плоскость $\Pi_{n-m-2} = [M_\alpha]$, принадлежащая образующей $E_{n-m-1} \equiv [A_0, M_\alpha]$ поверхности V^τ_{n-s-1}, является гармоническим полюсом точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{J}_\tau$:

$$\det\|x^0\delta^p_q + x^\alpha b^{pt}_\alpha a_{qt}\| = 0; \quad x^p = x^i = x^n = 0, \tag{5.5}$$

которая принадлежит плоскости $E_{n-m-1} \subset V^\tau_{n-s-1}$; внутренняя инвариантная плоскость $E_{m+1} = [\sigma^\alpha]$ является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса $\mathcal{Q}_\tau$:

$$\det\|y_n\delta^p_q + a^{\alpha p}_q y_\alpha\| = 0; \quad y_p = y_i = y_0 = 0, \tag{5.6}$$

вершиной которого является плоскость $E_m = [\sigma^\alpha, \tau^n]$.

II. По аналогии с работами [10], [11], гиперквадрику Q_{n-1}, касающуюся гиперплоскости τ^n в точке A, назовем соприкасающейся гиперквадрикой гиперполосы $RH^\tau_m \subset P_n$, если она имеет касание 2-го порядка с базисной поверхностью V^τ_m данной гиперполосы (Q_{n-1} имеет тангенциальное касание 2-го порядка с тангенциально вырожденной гиперповерхностью V^τ_{n-1} гиперполосы RH^τ_m).

Проведя аналогичные рассуждения, что и в работе [3] §5, приходим к выводу: в дифференциальной окрестности третьего порядка элемента распадающейся гиперполосы $RH^\tau_m \subset P_n$ определена двупараметрическая связка внутренне инвариантно присоединенных к гиперполосе полей соприкасающихся гиперквадрик, дифференциальные уравнения которых в точечном репере (4.15) записываются в виде:

$$a_{pq}x^p x^q + L_{ij}x^i x^j + L_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2L_{i\alpha}x^i x^\alpha + 2\ell_i x^i x^n +$$
$$+ 2\ell_\alpha x^\alpha x^n + 2d_p x^p x^n + (T_0 + u_1 K_0 + u_2 \ell_0)(x^n)^2 = 2x^0 x^n, \tag{5.7}$$

где u_1 и u_2 – инвариантные параметры.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геомmтрия погруженных многообразий. – "Труды Моск. матем. о-ва", 1953, т. 2, с. 275–382.

2. Попов Ю.И., Мишенина Т.И. Инвариантное оснащение распадающейся (n–2)-мерной гиперполосы CH^τ_{n-2} ранга τ многомерного проективного пространства. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 5. Калининград, 1974, с. 103–130.

3. Попов Ю.И. Внутренние оснащения вырожденной m-мерной гиперполосы H^τ_m ранга τ многомерного проективного пространства. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 6. Калининград, 1975, с. 102–142.

4. Попов Ю.И. Аффинные связности вырожденных гиперполос. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 7. Калининград, 1976, с. 79–85.

5. Вагнер В.В. Теория поля локальных гиперполос. – В кн.: Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу, Вып. 8, 1950, с. 97–272.

6. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.–Л., 1950.

7. Остиану Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. – "Труды геом. семин. ВИНИТИ", М., 1966, т. 1, с. 239–263.

8. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга. – "Изв. высш. учебн. заведений. Математика", №1, 1957, с. 9–19.

9. Casanova G. La nation de pôle harmonique. Rev. math. spéc., 1955, t. 65, №6, s. 437–440.

10. Столяров А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы. "Изв. высш. учебн. заведений. Математика", №10, 1957, с. 97-99.

11. Олоничев П.И. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполосы. ДАН СССР, т. 80, №2, 1951, с. 165-168.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 8 1977

УДК 513.73

Е.В. Скрыдлова

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ТОЧКОЙ

В трехмерном проективном пространстве продолжается изучение вырожденных [1] конгруэнций $(CP)_{1,2}$, порожденных кривой второго порядка (коникой) C и точкой P, в которых многообразие коник C -однопараметрическое, а многообразие точек P -двупараметрическое [2].

Изучены некоторые новые свойства расслояемых конгруэнций $(CP)_{1,2}$.

Вырожденные конгруэнции $(CP)_{1,2}$ характеризуются взаимно неоднозначным отображением, которое каждой точке P поверхности (P) ставит в соответствие единственную конику C однопараметрического семейства (C), полным прообразом которой является линия Γ_c на поверхности (P).

Отнесем конгруэнцию $(CP)_{1,2}$ к подвижному реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, в котором вершина A_4 совпадает с точкой P, вершины A_1 и A_2 являются точками пересечения касательной плоскости к поверхности (P) с коникой C, а A_3 -полюс прямой A_1A_2 относительно коники C.

Уравнения коники C и система пфаффовых уравнений конгруэнции $(CP)_{1,2}$ в репере R ,с учетом определенной нормировки ,приводятся соответственно к виду:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0; \tag{1}$$

$$\omega_i^4=\Gamma_i^4\omega_3^4;\ \omega_i^j=\Gamma_i^j\omega_3^4,\ \omega_3^4=\lambda_\kappa\omega^\kappa,$$
$$\omega_1^3=\varphi\omega^1+\psi\omega^2,\ \omega_2^3=\psi\omega^1+\eta\omega^2,\ \omega_4^3=0, \tag{2}$$
$$\omega_3^i=\Gamma_3^i\omega_3^4+\omega_j^3,\ 2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=p\,\omega_3^4.$$

Формы

$$\omega_4^i=\omega^i \tag{3}$$

здесь приняты в качестве базисных линейно независимых форм,индексы i,j,κ принимают значения I,2,причем $i\neq j$.

Осуществим нормировку вершин репера таким образом, чтобы единичная точка $E_{12}=A_1+A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна касательной к линии Γ_c в точке A_4,тогда

$$\omega_3^4=\lambda(\omega^1-\omega^2). \tag{4}$$

В работе [2] рассмотрены,так называемые,расслояемые конгруэнции $(CP)_{1,2}$,для которых прямолинейные конгруэнции (A_iA_3) односторонне расслояемы к конгруэнции касательных к линиям Γ_c и сеть линий на поверхности (P) ,огибаемая прямыми A_iA_4,сопряжена.

Аналитически расслояемые конгруэнции $(CP)_{1,2}$ характеризуются следующими условиями:

$$(\omega_i^3+\omega_j^3)\wedge\omega_i^j=0,$$
$$(\omega_i^i-\omega_j^j-\omega_i^i+\omega_j^j)\wedge\omega_3^j=0, \tag{5}$$
$$(\omega_i^i-\omega_j^j)\wedge\omega_j^i+(\omega_i^3+\omega_j^3)\wedge\omega_3^i=0;$$

$$\psi=0. \tag{6}$$

(по i,j не суммировать !)

В силу невырождения прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) $(E_{12}A_4)$ в линейчатые поверхности имеем

$$(\omega_1^3+\omega_2^3)\wedge\omega_3^4\neq 0. \tag{7}$$

Система уравнений (5) в этом случае приводится к виду:

$$\omega_i^j=0, \tag{8}$$

$$(\omega_i^3+\omega_j^3)\wedge\omega_3^i=0,\ (\omega_i^i-\omega_j^j)\wedge\omega_3^i=0, \tag{9}$$

откуда непосредственно получаем

$$\Gamma_3^1+\Gamma_3^2=0, \tag{10}$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=\mu(\omega_1^3+\omega_2^3). \tag{11}$$

Положим

$$\Gamma_3^1=b, \tag{12}$$

тогда

$$\omega_3^1=b\,\omega_3^4+\omega_2^3,\ \ \omega_3^2=-b\,\omega_3^4+\omega_1^3, \tag{13}$$

а также

$$b\lambda(\varphi+\eta)=\varphi\eta. \tag{14}$$

Из замыкания уравнений (8) получим

$$\Gamma_2^4=\eta b,\ \Gamma_1^4=-\varphi b. \tag{15}$$

В силу неравенства (7) последнюю нормировку вершин репера R можно осуществить таким образом,что

$$\varphi+\eta=1. \tag{16}$$

Продолжая теперь уравнений (I3),а также систему уравнений

$$\omega_1^4=-\varphi b\,\omega_3^4,\ \ \omega_2^4=\eta b\,\omega_3^4.$$
$$\omega_1^3=\varphi\omega^1,\ \ \omega_2^3=\eta\omega^2, \tag{17}$$

с учетом нормировки (I6),получим

$$d\varphi+\varphi(\omega_3^3+\omega_4^4-2\omega_1^1)=p\lambda\omega^1,$$

$$[d\mathscr{b} + \mathscr{b}(\omega_1^1 - \omega_4^4) + \rho\,\omega_2^3 + \omega^1] \wedge \omega_3^4 = 0,$$

$$\omega_4^4 - \omega_3^3 = (2\varphi - 1)(\omega_1^1 - \omega_2^2), \qquad (18)$$

$$\mathscr{b}\mu + \rho + 2 = 0;$$

$$\rho\mu(2\varphi - 1) = 0, \qquad (19)$$

причем в случае

$$\rho\mu = 0 \qquad (20)$$

мы приходим к противоречию.

Из соотношения (I9) тогда следует

$$2\varphi - 1 = 0. \qquad (21)$$

С учетом равенства (2I) система пфаффовых уравнений расслояемой конгруэнции $(CP)_{1,2}$ окончательно приводится к виду

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \frac{1}{2}\omega^i, \quad \omega_i^4 = \frac{1}{8}(\omega^j - \omega^i), \quad \omega_4^3 = 0,$$

$$\omega_3^i = \frac{1}{4}(\omega^i + \omega^j), \quad \omega_3^4 = \lambda(\omega^1 - \omega^2), \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = 0 \qquad (22)$$

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 4\lambda(\omega^1 + \omega^2), \quad 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = -4\omega_3^4, \quad d\lambda = 0.$$

Замыкание системы уравнений (20) удовлетворяется тождественно, следовательно, она является вполне интегрируемой.

Для расслояемых конгруэнций $(CP)_{1,2}$ доказаны [2] следующие свойства: I/ A_i –суть характеристические точки граней $(A_iA_3A_4)$; 2/фокусы луча A_1A_2 конгруэнции (A_1A_2) гармонически разделяют вершины A_1 и A_2 репера R; 3/плоскости коник C образуют пучок; 4/фокусы луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) являются двойными точками гомографии [3] пары поверхностей (A_1) и (A_2), причем один из них $(K = A_4 - 2A_3)$ описывает линию, касательная к которой пересекает плоскость коники C в полюсе характеристики этой плоскости относительно коники; 5/пространственный четырехугольник $A_1A_4A_2K$ описывает конфигурацию T; 6/прямолинейные конгруэнции (A_iA_4) являются конгруэнциями W; 7/пары прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) и $(E_{12}A_4)$ двусторонне расслояемы.

Рассмотрим однопараметрический пучок квадрик Q_a, ассоциированных с парой образующих элементов расслояемой конгруэнции $(CP)_{1,2}$:

$$Q_a \equiv (x^3)^2 - 2x^1x^2 + a(x^4)^2 = 0, \quad da = 0. \qquad (23)$$

Геометрически каждая квадрика этого пучка характеризуется тем, что плоскость коники C и точка P относительно нее полярно сопряжены. Рассмотрим однопараметрический пучок конгруэнций (Q_a), образованных квадриками (23).

Т е о р е м а I. Характеристическое многообразие [4] каждой из конгруэнций (Q_a) представляет собой пару кривых второго порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическое многообразие конгруэнции, образованной каждой из квадрик типа (23), задается системой уравнений

$$(x^1 + x^2)(x^3 + x^4) = 0,$$

$$4\lambda x^1x^2 + \frac{3}{4}x^1x^3 + \frac{1}{2}x^2x^3 + x^2x^4 + \frac{a}{8}(x^1 - x^2)x^4 - \lambda a x^3x^4 = 0,$$

которая определяет пару коник, расположенных в плоскостях $(E_{12}^*A_3A_4)$ и $(A_1A_2E_{34}^*)$, где $E_{12}^* = A_1 - A_2$, $E_{34}^* = A_3 - A_4$.

Т е о р е м а 2. Поверхность (P), ассоциированная с с расслояемой конгруэнцией $(CP)_{1,2}$, является коинцидентной поверхностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Находя директрису Вильчинского, ось Чеха и ребро Грина поверхности (P), ассоциированной с расслояемой конгруэнцией $(CP)_{1,2}$, убеждаемся, что все эти замечательные прямые совпадают между собой и определяются точками A_4 и $S = 2\lambda E^{*}_{12} + A_3$.

Следовательно, канонический пучок поверхности (P) вырождается в прямую A_4S, а сама поверхность (P) является коинцидентной.

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.41-49.

2. Скрыдлова Е.В. Об одном классе вырожденных конгруэнций квадратичных пар.-В кн.:Украинский геометрический сборник. Вып.18, Харьков, 1975, с.126-135.

3. Фиников С.П. Асимптотически сопряженные двойные линии Ермолаева.-"Уч.зап.Моск. пед .ин -та", 1951, №16, вып.3, с. 235-260.

4. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве."Тр. геом. семинара.Всес.ин-т научн. и технич. информации", 1974, 6, с.113-133.

УДК 513.73

Е.П. С о п и н а

КОНГРУЭНЦИИ ЭЛЛИПСОИДОВ С ФОКАЛЬНОЙ КОНГРУЭНЦИЕЙ ЭЛЛИПСОВ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассмотрена конгруэнция V_2 эллипсоидов, имеющая фокальную конгруэнцию эллипсов [1], но не являющаяся конгруэнцией V_2° [2]. Доказана теорема существования и установлены некоторые геометрические свойства таких конгруэнций. Для конгруэнций одного класса получено безынтегральное представление.

§1. Теорема существования

О п р е д е л е н и е 1.1. Конгруэнцией V_2 называется конгруэнция эллипсоидов в A_3, обладающая следующими свойствами: 1/каждый эллипсоид $Q \in V_2$ содержит в качестве фокального многообразия эллипс C, центр A которого не совпадает с центром B эллипсоида Q; 2/плоскости эллипсов C образуют двупараметрическое семейство, причем характеристическая точка M плоскости эллипса C не совпадает с его центром A и не принадлежит квадрике Q.

О п р е д е л е н и е 1.2. Конгруэнцией V_2^1 называется конгруэнция V_2 с невырожденной индикатрисой векторов $\overline{AB}$. Конгруэнцией V_2^2 называется конгруэнция V_2 с вырождающейся индикатрисой векторов $\overline{AB}$.

Т е о р е м а 1.1. Существуют два и только два непересекающихся класса конгруэнций V_2 конгруэнции V_2^1 и V_2^2, определяемые с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство. Отнесем конгруэнцию V_2 к каноническому реперу $R=\{A,\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$, где $\overline{e}_3=\overline{AB}$, концы векторов $\overline{e}_i$ $(i,j,\kappa=1,2)$ расположены на эллипсе C, причем векторы $\overline{e}_1,\overline{e}_2$ сопряжены относительно эллипса C и вектор $\overline{e}_1$ направлен по прямой AM. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\overline{A}=\omega^{\alpha}\overline{e}_{\alpha},\quad d\overline{e}_{\alpha}=\omega^{\beta}_{\alpha}\overline{e}_{\beta}\quad(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3),$$

причем формы Пфаффа ω^{β}_{α} удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha}=\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma},\quad \mathcal{D}\omega^{\beta}_{\alpha}=\omega^{\gamma}_{\alpha}\wedge\omega^{\beta}_{\gamma}.$$

Уравнения эллипсоида Q и эллипса C запишутся соответственно в виде

$$F\equiv(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-2x^3-1=0, \tag{1.1}$$

$$f\equiv(x^1)^2+(x^2)^2-1=0. \tag{1.2}$$

Так как каждая точка эллипса C является фокальной точкой эллипсоида Q конгруэнции V_2^1, то

$$dF|_{x^3=0}=\mu f. \tag{1.3}$$

Система Пфаффовых уравнений конгруэнции V_2^1 приводится к виду:

$$\omega^3+\lambda\omega_1=0,\quad \omega^1_1=\omega^2_2,\quad \omega^2_1+\omega^1_2=0,\quad \omega^3=\omega^1_1,\quad \omega^i=\omega_i \tag{1.4}$$

$$\omega^2_1=a^{\kappa}\omega_{\kappa}, \tag{1.5}$$

$$\omega^i_3=\alpha\omega_i,\quad \omega^3_3=\lambda(\alpha-2)\omega_1,\ \text{где}\ d\alpha=2\alpha\lambda(\alpha-1)\omega_1, \tag{1.6}$$

$$\omega_i\overset{def}{=}\omega^3_i,\quad \lambda^2\neq 1. \tag{1.7}$$

Из (I.7) и формулы

$$d\overline{e}_3=\alpha(\omega_1\overline{e}_1+\omega_2\overline{e}_2)+\lambda(\alpha-2)\omega_1\overline{e}_3 \tag{1.8}$$

следует, что конгруэнции V_2^1 характеризуются неравенством

$$\alpha(\alpha+1)\neq 0, \tag{1.9}$$

а конгруэнции V_2^2 соотношением

$$\alpha=0. \tag{1.10}$$

Замкнутая система уравнений конгруэнции V_2^1 состоит из пфаффовых уравнений (I.4),(I.5),(I.6) и квадратичных уравнений

$$d\lambda\wedge\omega_1+\lambda a^1\omega_1\wedge\omega_2=0,\quad da^{\kappa}\wedge\omega_{\kappa}+A\omega_1\wedge\omega_2=0, \tag{1.11}$$

где

$$A=(a^1)^2+(a^2)^2-\lambda a^2(\alpha-1)-\alpha. \tag{1.2}$$

Замкнутая система уравнений конгруэнции V_2^2 состоит из пфаффовых уравнений (I.4),(I.5), уравнений

$$\omega^i_3=0,\quad \omega^3_3+2\omega^3=0 \tag{1.13}$$

и квадратичных уравнений

$$d\lambda\wedge\omega_1+\lambda a^1\omega_1\wedge\omega_2=0,\ da^{\kappa}\wedge\omega_{\kappa}+\left((a^1)^2+(a^2)^2+\lambda a^2\right)\omega_1\wedge\omega_2=0. \tag{1.14}$$

Следовательно, конгруэнции V_2^1 и V_2^2 существуют и каждая определяется с произволом одной функции двух аргументов.

§ 2. Конгруэнции V_2^1

Анализируя уравнения (I.4),(I,6),(I.II), убеждаемся, что конгруэнции V_2^1 обладают следующими свойствами: I/Торсы прямолинейных конгруэнций (AM), $(A\overline{e}_2)$ соответствуют координатным линиям $\omega_1=0$. 2/Касательная плоскость к поверхности (B) коллинеарна вектору $\overline{e}_2$. 3/Вдоль линий $\omega_1=0$ инвариант α постоянен. 4/Прямолинейная конгруэнция (AB) вырождается в связку прямых с центром в точке

$$\overline{P}=\overline{A}-\frac{1}{\alpha}\overline{e}_3. \tag{2.1}$$

Докажем, например, свойство 4. Имеем:

$$d\overline{P}=0.$$

Следовательно, P - инвариантная точка пространства, причем $P\in AB$.

Т е о р е м а 2.1. Все квадрики Q конгруэнции V_2^1 касаются вдоль коники C инвариантной квадрики Q_0.

$$\Phi \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - \alpha (x^3)^2 - 2x^3 - 1 = 0 \qquad (2.3)$$

с центром в точке P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$d\Phi = 2\lambda\omega_1\Phi.$$

Следовательно, Q_0 инвариантная квадрика. Из уравнений (1.1) и (2.3) видно, что квадрики Q_0 и Q касаются друг друга вдоль коники C и что P —центр квадрики Q_0.

Т е о р е м а 2.2. Точка A является серединой отрезка BB^*, где B^*—полюс плоскости коники C относительно квадрики Q_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$\bar{B}^* = \bar{A} - \bar{e}_3, \quad \bar{B} = \bar{A} + \bar{e}_3 .$$

Следовательно, точка A является серединой отрезка BB^*.

§ 3. Конгруэнции V_2^2

Т е о р е м а 3.1. Конгруэнции допускают следующее безынтегральное представление: возьмем произвольную гладкую поверхность (M) (одна функция двух аргументов) и эллиптический параболоид Π (восемь параметров). Пусть C -эллипс, являющийся сечением эллиптического параболоида Π касательной плоскостью к поверхности (M) в точке M, B^*-полюс плоскости эллипса C относительно Π, B -точка, аффинно-симметричная точке B^* относительно центра A эллипса C, Q -эллипсоид с центром в точке B, касающийся эллиптического параболоида Π вдоль C. Тогда конгруэнция эллипсоидов есть конгруэнция V_2^2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Все квадрики Q конгруэнции V_2^2 касаются инвариантного параболоида Π

$$\Phi_0 \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^3 - 1 = 0 \qquad (3.1)$$

вдоль эллипса C, причем центр A эллипса C является серединой отрезка BB^*, где B -центр эллипсоида Q, а B^*—полюс плоскости эллипса C (касательной плоскости к характеристической поверхности M) относительно эллиптического параболоида Π.

2/Отнесем конгруэнцию Q, указанную в теореме 3.1, к реперу $R=\{A, \bar{e}_\alpha\}$, где A —центр эллипса C, $\bar{e}_1$, направлен по прямой AM, $\bar{e}_2$ расположен в плоскости эллипса C и сопряжен вектору $\bar{e}_1$, концы векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ расположены на эллиптическом параболоиде Π, а вектор $\bar{e}_3$ совмещен с вектором $\overline{AB}$. Тогда уравнения эллиптического параболоида Π и эллипсоида Q запишутся соответственно в виде (3.1), (1.1). Уравнение поверхности (M) имеет вид:

$$\omega^3 + \lambda\omega_1 = 0 . \qquad (3.2)$$

Условие инвариантности эллиптического параболоида Π $d\Phi_0 = \mu\Phi_0$ приводит вместе с уравнением (3.2) к системе пфаффовых уравнений (1.4), (1.5), (1.13), определяющих конгруэнцию V_2^2.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник. В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7. Калининград, 1976, с.54-60.

2. Сопина Е.П. Конгруэнции центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7. Калининград, 1976, с.105-110.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

А.В.Столяров

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА НОРМАЛИЗОВАННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ m-МЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе [7] изучаются связности, индуцируемые при различных оснащениях ρ-мерного многообразия m-мерных плоскостей n-мерного проективного пространства P_n $(\rho+m \leq n)$, в наиболее общей постановке (не предполагая наличия в каждом слое центра); вопросы аффинного оснащения m-многообразия m-плоскостей в P_n рассматривались в [16]. В работе [15] рассматриваются вопросы получения особого типа связности при некоторых расслоениях пространства P_n.

В настоящей работе изучаются некоторые вопросы внутренней геометрии нормализованного [8] распределения $\mathfrak{M}$ m-мерных линейных элементов (в частности, m-мерной поверхности V_m) пространства проективной связности $P_{n,n}$ (проективного пространства P_n).

С применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, какую ей дал Г.Ф.Лаптев [3],[4],[12], показано, что на нормализованном распределении $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ кроме первой аффинной связности $\overset{1}{\nabla}$ индуцируется двупараметрическая связка вторых аффинных связностей $\overset{2}{\nabla}$. В случае поверхности $V_m \subset P_n$ эта связка вырождается в одну связность с нулевым кручением и при $m=n-1$ представляет собой аффинную связность второго рода [8]. Отметим, что в случае нормализованной поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$ некоторые вопросы первой $\overset{1}{\nabla}$ и второй $\overset{2}{\nabla}$ аффинных связностей автором рассмотрены в работе [14].

На нормализованном распределении $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ m-мерных линейных элементов ($m < n-1$) построен другой аналог аффинной связности второго рода $\overset{2}{\hat{\nabla}}$ с помощью невырожденного тензора 2-го порядка b_{ij}, определяемого самим распределением. В случае поверхности $V_m \subset P_n$ ($2 < m < n-1$) в 4-й дифференциальной окрестности найдены поля инвариантных нормалей первого и второго родов, индуцирующие эквиаффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\hat{\nabla}}$, а их средняя геометрия является римановой с метрическим тензором b_{ij}.

Работа выполнена инвариантным методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [3]; основные ее результаты в случае $P_{n,n} \equiv P_n$ доложены на 6-й Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии [13].

На протяжении всего изложения индексы будут пробегать следующие значения:

$$\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{K}}, \bar{\mathcal{L}} = 0,1,\dots,n; \quad \mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L},P,Q = 1,2,\dots,n;$$
$$i,j,k,\ell,s,t = 1,2,\dots,m; \quad \alpha,\beta,\gamma = m+1,\dots,n.$$

I. Рассмотрим классическое пространство проективной связности $P_{n,n}$, определенное Э.Картаном [2],[17] с помощью $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\omega_{\bar{\mathcal{K}}}^{\bar{\mathcal{J}}}$, подчиненных структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_{\bar{\mathcal{K}}}^{\bar{\mathcal{J}}} = \omega_{\bar{\mathcal{K}}}^{\bar{\mathcal{L}}} \wedge \omega_{\bar{\mathcal{L}}}^{\bar{\mathcal{J}}} + \frac{1}{2} R_{\bar{\mathcal{K}}PQ}^{\bar{\mathcal{J}}}\, \omega_0^P \wedge \omega_0^Q, \quad \omega_{\bar{\mathcal{L}}}^{\bar{\mathcal{L}}} = 0; \qquad (1)$$

в случае нулевого тензора кривизны-кручения $R_{\bar{\mathcal{K}}PQ}^{\bar{\mathcal{J}}}$ пространство $P_{n,n}$ представляет собой n-мерное проективное пространство P_n.

В пространстве $P_{n,n}$ рассмотрим распределение $\mathfrak{M}$ m-мерных линейных элементов; будем считать, что данное многообразие есть распределение касательных элементов [5] (центр принадлежит соответствующей ему плоскости).

Согласно [6] в репере 0-го порядка система дифференциальных уравнений распределения $\mathfrak{M}\subset P_{n,n}$ имеет вид:

$$\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{i\varkappa}\,\omega^\varkappa_0. \qquad (2)$$

Продолжая уравнения (2), имеем [6]:

$$\nabla_d \Lambda^\alpha_{ij} + \Lambda^\alpha_{ij}\,\omega^0_0 = \Lambda^\alpha_{ij\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_0. \qquad (3\text{а})$$

$$\nabla_d \Lambda^\alpha_{i\beta} + \Lambda^\alpha_{i\beta}\,\omega^0_0 - \delta^\alpha_\beta\,\omega^0_i - \Lambda^\alpha_{is}\,\omega^s_\beta = \Lambda^\alpha_{i\beta\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_0; \qquad (3\text{б})$$

здесь оператор ∇_d действует по закону ковариантного дифференцирования; например, $\nabla_d\Lambda^\alpha_{ij} = d\Lambda^\alpha_{ij} - \Lambda^\alpha_{ik}\,\omega^k_j - \Lambda^\alpha_{kj}\,\omega^k_i + \Lambda^\beta_{ij}\,\omega^\alpha_\beta$.

Равенство нулю тензора неголономности [6] $\tau^\alpha_{ij} \overset{def}{=} \Lambda^\alpha_{[ij]} + \frac{1}{2} R^\alpha_{0ij}$ есть условие, при котором m-мерные линейные элементы распределения $\mathfrak{M}\subset P_{n,n}$ огибаются m-мерными поверхностями V_m ($n-m$)-параметрического семейства непересекающихся поверхностей т.е. распределение $\mathfrak{M}$ голономно).

Компоненты тензора $a^\alpha_{ij} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(\Lambda^\alpha_{ij} + \Lambda^\alpha_{ji})$, симметричного по индексам i, j, в силу (3-а) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_d a^\alpha_{ij} + a^\alpha_{ij}\,\omega^0_0 = a^\alpha_{ij\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_0. \qquad (4)$$

Продолжая уравнения (3-а), имеем:

$$\nabla_d \Lambda^\alpha_{ijk} + 2\Lambda^\alpha_{ijk}\,\omega^0_0 + \Lambda^\alpha_{ij}\,\omega^0_k + \Lambda^\alpha_{ik}\,\omega^0_j + \Lambda^\alpha_{kj}\,\omega^0_i - (\Lambda^\alpha_{is}\Lambda^\beta_{jk} + \Lambda^\alpha_{sj}\Lambda^\beta_{ik} + \Lambda^\beta_{ij}\Lambda^\alpha_{sk})\,\omega^s_\beta = \Lambda^\alpha_{ijk\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_0, \qquad (5\text{а})$$

$$\nabla_d \Lambda^\alpha_{ij\beta} + 2\Lambda^\alpha_{ij\beta}\,\omega^0_0 + (\delta^\gamma_\beta\Lambda^\alpha_{ij} - \delta^\alpha_\beta\Lambda^\gamma_{ij})\,\omega^0_\gamma - (\delta^\gamma_\beta\Lambda^\alpha_{ijs} + \Lambda^\gamma_{ij}\Lambda^\alpha_{s\beta} + \Lambda^\alpha_{is}\Lambda^\gamma_{j\beta} + \Lambda^\alpha_{sj}\Lambda^\gamma_{i\beta})\,\omega^s_\gamma = \Lambda^\alpha_{ij\beta\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_0. \qquad (5\text{б})$$

Предположим, что $n-m < \frac{m(m+1)}{2}$; в этом случае согласно [6] для достаточно широкого класса распределений $\mathfrak{M}\subset P_{n,n}$ существует обращенный тензор первого порядка V^{ij}_α:

$$\nabla_d V^{ij}_\alpha - V^{ij}_\alpha\,\omega^0_0 = V^{ij}_{\alpha\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_0; \qquad (6)$$

компоненты V^{ij}_α симметричны по индексам i, j и удовлетворяют конечным соотношениям $V^{ij}_\alpha\Lambda^\beta_{ij} = m\,\delta^\beta_\alpha$, $V^{ik}_\alpha a^\alpha_{kj} = (n-m)\,\delta^i_j$.

В дальнейшем для данного распределения $\mathfrak{M}$ мы предполагаем существование тензора V^{ij}_α.

2. Рассмотрим распределение $\mathfrak{M}\subset P_{n,n}$, оснащенное (нормализованное) в смысле А.П.Нордена [8] полями нормалей ν^i_α, ν^0_i первого и второго родов:

$$\nabla_d \nu^i_\alpha + \omega^i_\alpha = \nu^i_{\alpha\varkappa}\,\omega^\varkappa_0; \quad \nabla_d \nu^0_i + \omega^0_i = \nu^0_{i\varkappa}\,\omega^\varkappa_0. \qquad (7)$$

Можно показать, что система форм $\{\overset{1}{\theta}{}^i_j\}$, где

$$\overset{1}{\theta}{}^i_0 \overset{def}{=} \omega^i_0 - \nu^i_\alpha\,\omega^\alpha_0, \quad \overset{1}{\theta}{}^i_j \overset{def}{=} \omega^i_j - \nu^i_\alpha\,\omega^\alpha_j - \delta^i_j(\omega^0_0 - \overset{1}{\theta}{}^s_0\,\nu^0_s) + \nu^0_j\,\omega^i_0 - (\nu^i_{\alpha j} - \Lambda^\beta_{sj}\,\nu^i_\beta\,\nu^s_\alpha)\,\omega^\alpha_0,$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева [3],[12]; следовательно, на нормализованном распределении $\mathfrak{M}\subset P_{n,n}$ система форм $\{\overset{1}{\theta}{}^i_j\}$ определяет аффинную связность, которую назовем первой аффинной связностью и обозначим через $\overset{1}{\nabla}$.

Если перейти к реперу, адаптированному данной нормализации распределения ($\nu^i_\alpha = 0$, $\nu^0_i = 0$, что согласно [9] в силу (7) возможно), то формы ω^i_α, ω^0_i становятся главными:

$$\omega^i_\alpha = c^i_{\alpha\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \quad \omega^0_i = a^0_{i\varkappa}\,\omega^\varkappa, \qquad (8)$$

а формы $\overset{1}{\theta}{}^i_j$, определяющие связность $\overset{1}{\nabla}$, примут вид:

$$\overset{1}{\theta}{}^i_0 = \omega^i_0, \quad \overset{1}{\theta}{}^i_j = \omega^i_j - \delta^i_j\,\omega^0_0 - c^i_{\alpha j}\,\omega^\alpha_0. \qquad (9)$$

Продолжая уравнения (8), имеем, в частности:

$$\nabla_d C^i_{\alpha j} + C^i_{\alpha j}\,\omega^o_o - \delta^i_j\,\omega^o_\alpha = C^i_{\alpha j \mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_o. \qquad (10)$$

В структурных уравнениях Картана-Лаптева

$$\mathcal{D}\overset{1}{\theta}{}^i_o = \overset{1}{\theta}{}^j_o \wedge \overset{1}{\theta}{}^i_j + \frac{1}{2}\,\overset{1}{\tau}{}^i_{PQ}\,\omega^P_o \wedge \omega^Q_o,$$
$$\mathcal{D}\overset{1}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^k_j \wedge \overset{1}{\theta}{}^i_k + \frac{1}{2}\,\overset{1}{\tau}{}^i_{jPQ}\,\omega^P_o \wedge \omega^Q_o, \qquad (11)$$

которым подчинены формы (9), каждая из систем величин $\overset{1}{\tau}{}^i_{PQ}$, $\overset{1}{\tau}{}^i_{jPQ}$ образует тензор – соответственно тензор кручения и тензор кривизны первого пространства аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,m}$; они имеют следующие строения:

$$\overset{1}{\tau}{}^i_{PQ} = R^i_{oPQ} + 2\,C^i_{[PQ]}, \quad C^i_{jQ} = 0,$$

$$\overset{1}{\tau}{}^i_{jPQ} = 2\,(a^o_{j[P}\delta^i_{Q]} - C^k_{[P|j|}C^i_{Q]k} - \delta^i_j\,a^o_{[PQ]} + \Lambda^\alpha_{j[P}C^i_{|\alpha|Q]} - C^i_{\alpha j}\Lambda^\alpha_{[PQ]} - C^i_{\alpha j[P}\delta^\alpha_{Q]} + R^i_{jPQ} - \delta^i_j R^o_{oPQ} - C^i_{\alpha j} R^\alpha_{oPQ}; \qquad (12)$$

здесь следует иметь в виду, что $C^s_{ij} = a^o_{\alpha\mathcal{J}} = \Lambda^\alpha_{\beta\mathcal{J}} = 0$.

Заметим, что совокупность величин $\tau^i_{\alpha\beta} \overset{def}{=} C^i_{[\alpha\beta]} + \frac{1}{2}R^i_{o\alpha\beta}$ представляет собой тензор неголономности распределения нормалей первого рода $\mathcal{N}_{n-m}$. Нетрудно показать, что в случае пространства $P_{n,n}$ без кручения ($R^{\mathcal{J}}_{oPQ} = 0$) пространство $\overset{1}{A}_{n,m}$ имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда распределение нормалей первого рода является голономным.

Итак, справедлива

Т е о р е м а I. На нормализованном распределении $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ индуцируется первая аффинная связность $\overset{1}{\nabla}$, определяемая формами (9) (в репере, адаптированном данной нормализации); тензор кручения и тензор кривизны соответствующего пространства аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,m}$ имеют строения (12), причем при нулевом кручении пространства $P_{n,n}$ кручение пространства $\overset{1}{A}_{n,m}$ равно нулю тогда и только тогда, когда распределение нормалей первого рода является голономным.

Тензор кривизны $\overset{1}{\tau}{}^i_{jPQ}$ пространства $\overset{1}{A}_{n,m}$ охватывает подтензоры $\overset{1}{\tau}{}^i_{jst}$, $\overset{1}{\tau}{}^i_{js\alpha}$, $\overset{1}{\tau}{}^i_{j\alpha\beta}$; в частности, подтензор $\overset{1}{\tau}{}^i_{jst}$ согласно (12) имеет следующее строение:

$$\overset{1}{\tau}{}^i_{jst} = 2\,(a^o_{j[s}\delta^i_{t]} + \Lambda^\alpha_{j[s}C^i_{|\alpha|t]} - \delta^i_j\,a^o_{[st]} - C^i_{\alpha j}\tau^\alpha_{st}) + R^i_{jst} - \delta^i_j R^o_{ost}. \qquad (13)$$

В случае $P_{n,n} \equiv P_n$ условие параллельного перенесения допустимого [8] направления $[A_o\ \mu^i A_i]$ в связности $\overset{1}{\nabla}$ вдоль кривой ℓ

$$\begin{cases} \omega^i_o = \ell^i\theta, \quad \mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta^o_o, \\ \omega^\alpha_o = 0, \end{cases} \qquad (14)$$

принадлежащей распределению $\mathcal{M} \subset P_n$, эквивалентно тому (как и на нормализованной поверхности $V_m \subset P_n$, см.[8]), что при смещении центра A_o вдоль кривой ℓ смещение нормальной точки $M = \mu^i A_i$ принадлежит плоскости $[M\,\mathcal{N}_{n-m}]$.

3. На нормализованном распределении $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ индуцируется не единственная аффинная связность. Согласно [4] другая связность, определяемая формами $\overset{2}{\theta}{}^i_j$, получается из форм $\omega^{\varkappa}_o$, $\overset{1}{\theta}{}^i_j$ преобразованием

$$\overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + \Gamma^i_{j\varkappa}\,\omega^{\varkappa}_o. \qquad (15)$$

Формы $\overset{2}{\theta}{}^i_j$ удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{2}{\theta}{}^k_j \wedge \overset{2}{\theta}{}^i_k + \Delta\Gamma^i_{j\varkappa}\wedge\omega^{\varkappa}_o.$$

Следовательно, формы $\overset{2}{\theta}{}^i_j$ образуют систему форм расслоенной структуры по отношению к базовым формам $\omega^{\varkappa}_o$. Согласно теореме Картана-Лаптева [3],[12] формы $\overset{2}{\theta}{}^i_j$ задают аффинную связность тогда и только тогда, когда задано поле

$$\Delta\Gamma^i_{\bar{j}\varkappa} = \Gamma^i_{\bar{j}\varkappa\mathcal{Z}}\,\omega^{\mathcal{Z}}_o ; \qquad (16)$$

при этом каждая из систем величин

$$\overset{2}{\tau}{}^i_{PQ} \overset{def}{=} -2\Gamma^i_{o[PQ]}, \quad \overset{2}{\tau}{}^i_{jPQ} \overset{def}{=} -2\Gamma^i_{j[PQ]}$$

образует, соответственно, тензор кручения и тензор кривизны пространства аффинной связности $\overset{2}{A}_{n,m}$, определяемого системой форм $\{\overset{2}{\theta}{}^i_j\}$.

Нетрудно показать, что требование (16) равносильно тому, что функции $\Gamma^i_{\bar{j}\varkappa}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &\nabla_d\Gamma^i_{o\varkappa} + \Gamma^i_{o\varkappa}\,\omega^o_o = \widetilde{\Gamma}^i_{o\varkappa\mathcal{Z}}\,\omega^{\mathcal{Z}}_o, && (а)\\ &\nabla_d\Gamma^i_{js} + \Gamma^i_{js}\,\omega^o_o = \widetilde{\Gamma}^i_{js\mathcal{Z}}\,\omega^{\mathcal{Z}}_o, && (б) \qquad (17)\\ &\nabla_d\Gamma^i_{j\alpha} + \Gamma^i_{j\alpha}\,\omega^o_o = \widetilde{\Gamma}^i_{j\alpha\mathcal{Z}}\,\omega^{\mathcal{Z}}_o. && (в) \end{aligned}$$

Следующие охваты в силу (3), (5), (6), (8), (10) удовлетворяют уравнениям (17):

$$\Gamma^i_{o\varkappa} = 0,\ \Gamma^i_{jk} = M^i_{jk} + \tau_1 S^i_{jk},\ \Gamma^i_{j\alpha} = M^i_{j\alpha} + \tau_2 S^i_{j\alpha}, \qquad (18)$$

где

$$M^i_{jk} \overset{def}{=} V^{il}_\beta \Lambda^\beta_{ljk}, \qquad S^i_{jk} \overset{def}{=} V^{il}_\beta \Lambda^\beta_{l\gamma}\Lambda^\gamma_{jk},$$

$$M^i_{j\alpha} \overset{def}{=} V^{il}_\beta \left(\Lambda^\beta_{lj\alpha} + \frac{1}{m}\Lambda^\beta_{lj} c^s_{\alpha s} - \delta^\beta_\alpha \Lambda^\gamma_{ls} c^s_{\gamma j}\right), \qquad (19)$$

$$S^i_{j\alpha} \overset{def}{=} V^{il}_\beta \Lambda^\beta_{l\gamma}\Lambda^\gamma_{j\alpha},$$

τ_1 и τ_2 — инвариантные параметры.

Согласно (15), (18) формы $\overset{2}{\theta}{}^i_j$, определяющие вторую аффинную связность $\overset{2}{\nabla}$ на нормализованном распределении $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$, примут вид:

$$\begin{aligned} &\overset{2}{\theta}{}^i_o \equiv \overset{1}{\theta}{}^i_o \equiv \omega^i_o, \\ &\overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + M^i_{j\varkappa}\,\omega^{\varkappa}_o + \tau_1 S^i_{jk}\,\omega^k_o + \tau_2 S^i_{j\alpha}\,\omega^\alpha_o. \end{aligned} \qquad (20)$$

Доказана

Т е о р е м а 2. На нормализованном распределении $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ кроме первой аффинной связности $\overset{1}{\nabla}$ индуцируется двупараметрическая связка вторых аффинных связностей $\overset{2}{\nabla}$, определяемых формами (20).

Так как каждая из систем величин Γ^i_{jk} и $\Gamma^i_{j\alpha}$ меняется по тензорному закону (см. (17), то имеем еще два пучка вторых аффинных связностей, определяемых формами

$$\begin{aligned} &\omega^i_o,\ \overset{2}{\widetilde{\theta}}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + (M^i_{jk} + \tau_1 S^i_{jk})\,\omega^k_o,\ \Gamma^i_{j\alpha} = 0 \quad \text{(первый пучок)},\\ &\omega^i_o,\ \overset{2}{\widetilde{\widetilde{\theta}}}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + (M^i_{j\alpha} + \tau S^i_{j\alpha})\,\omega^\alpha_o,\ \Gamma^i_{jk} = 0 \quad \text{(второй пучок)}. \end{aligned} \qquad (21)$$

Отметим, что в вопросах параллельного перенесения допустимых направлений [8] вдоль кривых (14) из всех вторых связностей „рабочими" являются лишь связности первого пучка (так называемые ограниченные связности [1]).

Рассмотрим распределение $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ гиперплоскостных элементов ($m = n-1$); в этом случае в предположении существования тензора Λ^{is}_n, обратного тензору Λ^n_{ij}, можно в (19) взять наиболее простые охваты; например, $M^i_{jk} = \Lambda^{il}_n \Lambda^n_{ljk}$, $S^i_{jk} = \Lambda^{il}_n \Lambda^n_{ln}\Lambda^n_{jk}$. При этом первый пучок связностей (21) определяется формами

$$\omega^i_o,\ \overset{2}{\widetilde{\theta}}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + \Lambda^{il}_n\left(\Lambda^n_{ljk} + \tau_1 \Lambda^n_{ln}\Lambda^n_{jk}\right)\omega^k_o. \qquad (22)$$

Справедливы следующие утверждения (доказательства их опускаем):

1) первая связность $\overset{1}{\nabla}$ и связность $\overset{2}{\nabla}_{\tau_1=0}$ первого пучка (22) при $\tau_1 = 0$ обобщенно сопряжены относительно тензора Λ^n_{ij} (необязательно симметрического) вдоль кривых (I4), принадлежащих распределению $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ гиперплоскостных элементов;

2) в случае распределения $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ гиперплоскостных элементов условие параллельного перенесения допустимого направления $[A_0, \mu^i A_i]$ вдоль кривой (I4) в связности $\overset{2}{\nabla}_{\tau_1=0}$ эквивалентно тому, что нормальная гиперплоскость, отвечающая этому направлению т.е. гиперплоскость, проходящая через нормаль первого рода и характеристику текущей гиперплоскости распределения при смещении по данному направлению), „вращается" вокруг инцидентной ей ($n-3$)-мерной плоскости, принадлежащей нормали второго рода.

Если взять нормализованную поверхность $V_m \subset P_n$, то согласно (9) формы $\overset{1}{\theta}{}^i_j$, определяющие аффинную связность $\overset{1}{\nabla}$, в адаптированном репере примут вид:

$$\overset{1}{\theta}{}^i_0 = \omega^i_0, \quad \overset{1}{\theta}{}^i_j = \omega^i_j - \delta^i_j \omega^0_0. \tag{23}$$

Семейство вторых аффинных связностей $\overset{2}{\nabla}$ при этом вырождается в одну связность, определяемую (согласно (20)) системой форм

$$\overset{2}{\theta}{}^i_0 = \omega^i_0, \quad \overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + V^{i\ell}_\beta \Lambda^\beta_{\ell j k} \omega^k_0. \tag{24}$$

Как первая, так и вторая аффинные связности, индуцируемые нормализацией поверхности $V_m \subset P_n$, имеют нулевое кручение, причем в случае $m = n-1$ эти связности являются аффинными связностями первого и второго родов на нормализованной гиперповерхности [8].

4. Предположим, что распределение $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ не является распределением гиперплоскостных элементов ($m < n-1$). В этом случае в работе [11] при $n-m < \frac{m(m+1)}{2}$ во второй дифференциальной окрестности элемента распределения в репере нулевого порядка построен тензор C_α :

$$\nabla_d C_\alpha + C_\alpha \omega^0_0 = C_{\alpha x} \omega^x_0. \tag{25}$$

Совокупность величин $b_{ij} \overset{def}{=} C_\alpha a^\alpha_{ij}$ согласно (4), (25) образует симметрический тензор второго порядка:

$$\nabla_d b_{ij} + 2 b_{ij} \omega^0_0 = b_{ijx} \omega^x_0, \tag{26}$$

где $b_{ijx} = C_\alpha a^\alpha_{ijx} + C_{\alpha x} a^\alpha_{ij}$, $b_{[ij]x} = 0$.

Есть основание полагать, что тензор b_{ij} в общем случае невырожден; следовательно, существует взаимный тензор b^{ij}, компоненты которого определяются из соотношений $b^{ik} b_{kj} = \delta^i_j$ и удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_d b^{ij} - 2 b^{ij} \omega^0_0 + b^{ik} b^{js} b_{ks\mathcal{J}} \omega^{\mathcal{J}}_0 = 0. \tag{27}$$

Аналогично п.3 можно показать, что в репере, адаптированном данной нормализации распределения $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$, следующие охваты удовлетворяют уравнениям (I7):

$$\Gamma^i_{0x} = 0, \quad \Gamma^i_{jk} = b^{i\ell} b_{\ell jk}, \quad \Gamma^i_{j\alpha} = b^{i\ell} b_{\ell j\alpha} + 2 C^i_{\alpha j}.$$

Следовательно, другой аналог второй аффинной связности – связность $\hat{\overset{2}{\nabla}}$, индуцируемая на нормализованном распределении $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ ($m < n-1$), определяется системой форм

$$\omega^i_0, \quad \hat{\overset{2}{\theta}}{}^i_j \overset{def}{=} \overset{1}{\theta}{}^i_j + b^{i\ell} b_{\ell jk} \omega^k_0 + (b^{i\ell} b_{\ell j\beta} + 2 C^i_{\beta j}) \omega^\beta_0. \tag{28}$$

Справедлива

Т е о р е м а 3. На нормализованном распределении $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ m-мерных линейных элементов ($m < n-1$) индуцируется аффинная связность $\overset{2}{\hat{\nabla}}$, определяемая системой форм (28) (в адаптированном репере); связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\hat{\nabla}}$ вдоль кривых, принадлежащих распределению, сопряжены относительно поляритета b_{ij} , причем их средняя связность является метрической (вообще говоря, с кручением).

Заметим, что вторая часть теоремы 3 непосредственно следует из того, что в силу уравнений (26) согласно (23) и (28) справедливо

$$d b_{ij} - b_{ik}\overset{1}{\theta}{}^k_j - b_{kj}\overset{2}{\hat{\theta}}{}^k_i = (b_{ik} c^k_{\alpha j} - b_{kj} c^k_{\alpha i})\omega^\alpha_0 . \qquad (29)$$

5. Аффинную связность $\overset{2}{\hat{\nabla}}$, введенную в п.4, можно рассматривать и на нормализованной поверхности $V_m \subset P_n$, $m \neq n-1$, ибо в качестве тензора C_α (см. (25)) в этом случае можно взять тензор b_α 3-го порядка, построенный в работе [10] при $n-m < \frac{(m+1)(m+2)}{6}$ (в силу чего $m>2$):

$$\nabla_d b_\alpha + b_\alpha \omega^0_0 = b_{\alpha s}\omega^s_0 . \qquad (30)$$

Следовательно, $b_{ij} = b_\alpha \Lambda^\alpha_{ij}$ – тензор 3-го порядка ($a^\alpha_{ij} \equiv \Lambda^\alpha_{ij}$); мы по-прежнему предполагаем невырожденность этого тензора (согласно [10] это предположение является правомерным).

В силу $\omega^\alpha_0 \equiv 0$ первая $\overset{1}{\nabla}$ и вторая $\overset{2}{\hat{\nabla}}$ аффинные связности теперь определяются соответственно формами (см.(23),(28)):

$$\omega^i_0,\ \overset{1}{\theta}{}^i_j = \omega^i_j - \delta^i_j\omega^0_0 \quad \text{(первая связность)},$$
$$\omega^i_0,\ \overset{2}{\hat{\theta}}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + b^{il} b_{ljk}\omega^k_0 \quad \text{(вторая связность)}. \qquad (31)$$

Тензор кручения $\overset{2}{\hat{\tau}}{}^i_{jk}$ второй аффинной связности $\overset{2}{\hat{\nabla}}$, вообще говоря, отличен от нуля (заметим, что $\overset{1}{\tau}{}^i_{jk} = 0$):

$$\overset{2}{\hat{\tau}}{}^i_{jk} = 2 b^{il} b_{\alpha[j}\Lambda^\alpha_{k]l} . \qquad (32)$$

Тензор кривизны $\overset{2}{\hat{\tau}}{}^i_{jkt}$ аффинной связности $\overset{2}{\hat{\nabla}}$ на нормализованной поверхности $V_m \subset P_n$ имеет вид:

$$\overset{2}{\hat{\tau}}{}^i_{jkt} = \overset{1}{\tau}{}^i_{jkt} + 2(2\delta^i_j a^0_{[kt]} - a^0_{j[k}\delta^i_{t]} - b^{il} a^0_{l[k} b_{t]j} + c^i_{\alpha[k}\Lambda^\alpha_{t]j} + b^{il} b_{sj} c^s_{\alpha[k}\Lambda^\alpha_{t]l}). \qquad (33)$$

Заметим, что тензор кривизны $\overset{1}{\tau}{}^i_{jkt}$ первой аффинной связности вычисляется по формуле (13), в которой $\tau^\alpha_{st} = 0$, $R^{\bar{\gamma}}_{\bar{x}st} = 0$.

6. Обозначая через $b = |b_{ij}| \neq 0$, согласно (26) имеем

$$d \ln b = 2(\omega^k_k - m\omega^0_0) + b_k\omega^k_0 ,$$

где $b_k = b^{ij} b_{ijk}$. Продолжая последнее уравнение, находим

$$\nabla_d b_k + b_k\omega^0_0 + 2[(m+1)\omega^0_k - \Lambda^\alpha_{sk}\omega^s_\alpha] = l_{ks}\omega^s_0,\ l_{[ks]} = 0 . \qquad (34)$$

Аналогично, продолжая уравнения (30), получим

$$\nabla_d b_{\alpha k} + 2 b_{\alpha k}\omega^0_0 + b_{ks}\omega^s_\alpha + b_\alpha\omega^0_k = b_{\alpha k s}\omega^s_0 . \qquad (35)$$

В 4-й дифференциальной окрестности точки $A_0 \in V_m$ строим охваты

$$F^i_\alpha \overset{def}{=} \frac{1}{2}(b^i_\alpha - A_{\alpha k} b^{ki}),\ F^0_i \overset{def}{=} \frac{1}{2}(A_{\alpha k} b^{ks} + b^s_\alpha)\Lambda^\alpha_{si} , \qquad (36)$$

где

$$b^i_\alpha = b^{ij} b_{\alpha j},\ A_{\alpha k} = \frac{1}{m+2} b_\alpha (b_k + 2 b^j_\beta \Lambda^\beta_{jk}) - b_{\alpha k} . \qquad (37)$$

Величины F^i_α, F^0_i в силу (3-а), (27), (30), (34), (35) удовлетворяют уравнениям (7); следовательно, поля нормалей F^i_α , F^0_i в 4-й дифференциальной окрестности определяют внутреннюю нормализацию поверхности $V_m \subset P_n$. Заметим, что построение полей квазитензоров F^i_α, F^0_i проведено в репере I-го порядка.

Поле гиперквадрик

$$b_{ij} x^i x^j + 2 A_{\alpha i} x^\alpha x^i + g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 2 b_\alpha x^0 x^\alpha \qquad (38)$$

является полем соприкасающихся гиперквадрик поверхности $V_m \subset P_n$, причем в случае выполнения уравнений

$$\nabla_d g_{\alpha\beta} + 2 g_{\alpha\beta}\,\omega_0^0 + b_{(\alpha}\,\omega_{\beta)}^0 - A_{(\alpha|j|}\,\omega_{\beta)}^j = g_{\alpha\beta\kappa}\,\omega_0^\kappa$$

гиперквадрики поля (38) будут инвариантны относительно преобразований стационарной подгруппы точки $A_0 \in V_m$.

Отметим, что охват коэффициентов $g_{\alpha\beta}$ компонентами фундаментального объекта поверхности $V_m \subset P_n$ возможен в 5-й дифференциальной окрестности и осуществляется по схеме 6, ибо коэффициенты $A_{\alpha\kappa}$ (см. (37)) гиперквадрики (38) можно представить в виде

$$A_{\alpha\kappa} = -\left(b_{\kappa\ell}\,F_\alpha^\ell - b_\alpha F_\kappa^0\right). \tag{39}$$

Строение (39) коэффициентов $A_{\alpha\kappa}$ обеспечивает взаимность [8] нормализации поверхности $V_m \subset P_n$ ($2 < m < n-1$) полями нормалей F_α^i, F_i^0 относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (38).

Справедливы следующие предложения:

Т е о р е м а 4. Взаимная относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (38) нормализация поверхности $V_m \subset P_n$ ($2 < m < n-1$) индуцирует аффинную связность $\overset{2}{\nabla}$ с нулевым кручением тогда и только тогда, когда данная поверхность нормализована полями инвариантных нормалей F_α^i, F_i^0.

Т е о р е м а 5. Внутренние геометрии первой и второй аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$, индуцируемых при нормализации поверхности $V_m \subset P_n$ ($2 < m < n-1$) полями нормалей F_α^i, F_i^0, являются эквиаффинными, а их средняя геометрия - риманова с основным тензором b_{ij} ; при этом эти связности совпадают тогда и только тогда, когда соприкасающиеся гиперквадрики (38) имеют касание 3-го порядка с поверхностью V_m.

Список литературы

I. А л е с к о в с к и й В.А., Г о х м а н А.В. О линейных связностях в неголономном многообразии. Материалы 4-й Прибалт. геом. конф. Тарту, 1973, с.3-4.

2. К а р т а н Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. ИЛ, Изд. Казанск. ун-та, 1962.

3. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - "Тр. Моск. матем. о-ва", 1953, т.2, с.275-382.

4. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. - "Тр. 4-го Всес. матем. съезда" (1961), т.2, 1964, с.226-233.

5. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов. - "Тр. Геом. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР", 1971, т.3, с. 29-48.

6. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. - "Тр. Геом. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР", 1971, т.3, с.49-94.

7. Л у м и с т е Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях. - "Уч. зап. Тартуского гос. ун-та", 1965, в.177, с.6-42.

8. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

9. О с т и а н у Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Rev. math. pures et appl (RPR), 1962, т.7, № 2, 231-240.

10. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. - "Тр. Геом. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР", 1966, т.1, с.239-264.

11. О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II. - "Тр. Геом. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР", 1971, т.3, с.95-114.

I2. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.– "Тр. Геом. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР", 1973, т.4, с.7-70.

I3. Столяров А.В. Внутренняя геометрия сетей на распределениях m-мерных линейных элементов проективного пространства P_n. Тезисы докл. на 6-й Всес. конф. по совр. проблемам геометрии. Вильнюс, 1975, с.231-233.

I4. Столяров А.П. О внутренней геометрии поверхности Картана.– В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, 1976, с.III-II8.

I5. Широков А.П. О нормализациях в проективном пространстве с заданным расслоением.– "Изв. вузов. Матем.", 1974, № 5, с. 216-221.

16. Galvani O. La réalisation des connexions ponctuelles affinés et la géométrie des groupes de Lie J. math. pures et appl., 1946, 25, 209-239.

17. Cartan E. Lecons sur la théorie des éspaces á connexion projective. Paris, 1937.

УДК 513.73

Г.П.Ткач

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГООБРАЗИЙ ПАР ФИГУР В A_3.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается пара B -невырожденная конгруэнция пар фигур $\{F, \ell\}$, где F -парабола, ℓ -прямая, инцидентная плоскости параболы, пересекающая параболу F, но не являющаяся ей диаметром. Строится канонический репер пары B, доказывается, что такие пары существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов. Исследуются некоторые классы пары B.

§I. Канонический репер пары B. Пары B°

Присоединим к паре B канонический репер $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, имеющий следующую геометрическую характеристику: вершина A репера R выбирается в точке пересечения с параболой F ее касательной ℓ', проведенной параллельно прямой ℓ. Вектор $\bar{e}_1$ направлен по диаметру параболы в точке A, конец $\bar{e}_1$ лежит на прямой ℓ. Вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной к параболе, вектор $\bar{e}_3$ -параллельно линии пересечения касательных плоскостей к поверхностям (P_1) и (P_2), где P_1 и P_2 -точки пересечения прямой ℓ с параболой F.

Условие

$$\frac{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}{\beta_1^*\gamma_2^*-\alpha_2^*\gamma_1^*}-\frac{\gamma_1\beta_2-\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1^*\beta_2^*-\alpha_1^*\gamma_2^*}\neq 0\,, \tag{1.1}$$

где

$$\alpha_i=1+\Gamma^i_{1i}+\sqrt{2}\,\Gamma^i_{2i}\,,\qquad \alpha_i^*=1+\Gamma^i_{1i}-\sqrt{2}\,\Gamma^i_{2i}\,,$$

$$\beta_i=\Gamma^j_{1i}+\sqrt{2}\,\Gamma^j_{2i}\,,\qquad \beta_i^*=\Gamma^j_{1i}-\sqrt{2}\,\Gamma^j_{2i}\,,$$

$$\gamma_i=\Gamma^3_i+\Gamma^3_{1i}+\sqrt{2}\,\Gamma^3_{2i}\,,\quad \gamma_i^*=\Gamma^3_i+\Gamma^3_{1i}-\sqrt{2}\,\Gamma^3_{2i}\,,$$

($i,j,k=1,2$ $i\neq j$ по i и j суммирование не производится) характеризует пары с непараллельными касательными плоскостями к поверхностям (P_i).

Условие того, что вектор $\bar{e}_3$ параллелен линии пересечения касательных плоскостей к поверхностям (P_i), запишется в виде

$$\begin{aligned}&(\omega^1+\omega^1_1)\wedge(\omega^2+\omega^2_1)+2\,\omega^1_2\wedge\omega^2_2=0,\\ &(\omega^1+\omega^1_1)\wedge\omega^2_2+\omega^1_2\wedge(\omega^2+\omega^2_1)=0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Уравнения параболы F и прямой ℓ в каноническом репере примут соответственно вид:

$$\begin{aligned}&(x^2)^2-2x^1=0,\quad x^3=0,\\ &x^1=1\,,\quad x^2=t\,,\quad x^3=0\,.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Исключая из рассмотрения случай вырождения поверхности (A) примем формы Пфаффа ω^i за линейно независимые формы пары B .

Система пфаффовых и конечных уравнений пары B запишется в виде

$$\begin{aligned}&\omega^3=\Gamma^3_k\,\omega^k,\quad \omega^i_j=\Gamma^i_{jk}\,\omega^k,\quad \omega^i_i=\Gamma^i_{jk}\,\omega^k,\\ &\omega^3_i=\Gamma^3_{ik}\,\omega^k,\quad \omega^i_3=\Gamma^i_{3k}\,\omega^k,\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}&(1+\Gamma^1_{11})(1+\Gamma^2_{12})-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+2\,(\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21})=0,\\ &(1+\Gamma^1_{11})\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{21}+\Gamma^1_{21}(1+\Gamma^2_{12})-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}=0.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Анализируя систему (I.4) и (I.5), убеждаемся, что пары B существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е I. Пара многообразий (L), (α), где (L) -прямолинейная конгруэнция или конгруэнция плоских кривых, а (α) -семейство попарно непараллельных плоскостей, называется односторонне аффинно расслояемой от конгруэнции (L) к многообразию (α) , если: I/между плоскими кривыми L конгруэнции (L) и плоскостями α многообразия (α) установлено взаимно однозначное соответствие; 2/к конгруэнции (L) можно присоединить однопараметрическое семейство Σ поверхностей так, чтобы касательные плоскости к каждой поверхности семейства Σ в точках пересечения с кривой L конгруэнции (L) были параллельны соответствующей плоскости α многообразия (α).

О п р е д е л е н и е 2. Парой B° называется пара B , для которой: I/существует аффинное расслоение от конгруэнции (F) к многообразию (Π_1); 2/существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (ℓ) к прямолинейной конгруэнции $(A,\bar{e}_3)$; 3/конец вектора $\bar{e}_1$ принадлежит характеристическому подпространству плоскости параболы. Π_α-плоскость, определяемая уравнением $x^\alpha=0$, где $\alpha,\beta,\gamma=$ 1,2,3.

Т е о р е м а 1. Существуют два непересекающихся класса пар B° -пары B_1° и B_2° с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пары B° определяются системой Пфаффа (1.4) и квадратичными уравнениями

$$
\begin{gathered}
\omega^1\wedge\omega_2^1=0,\ (\omega^2+\omega_1^2)\wedge\omega_2^1=0,\ (\omega_1^1-2\omega_2^2)\wedge\omega_2^1=0,\\
(\omega^1+\omega_1^1)\wedge\omega_1^2+2\omega_2^1\wedge\omega_2^2=0,\ (\omega^1+\omega_1^1)\wedge\omega_1^3+(\omega^2+\omega_1^2)\wedge\omega_2^3=0,\\
\omega^1\wedge\omega_1^1-\omega^2\wedge\omega_2^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2=0,\ \omega^2\wedge\omega_2^1+\omega^3\wedge\omega_3^1=0,\\
(\omega^1+\omega_1^1)\wedge\omega^2=0,\ (\omega^1+\omega_1^1)\wedge\omega_2^2=0,\ \omega_2^3\wedge\omega_3^1=0.
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

Рассмотрим случай

$$\omega_2^1\neq 0. \tag{1.7}$$

Тогда система (1.6) с учетом (1.4) приводится к виду:

$$
\begin{gathered}
1+\Gamma_{12}^2=0,\ 1+\Gamma_{11}^1=0,\ \Gamma_{22}^1=0,\ \Gamma_{12}^1-2\Gamma_{22}^2=0,\ \Gamma_{12}^1\Gamma_{21}^2=0,\\
\Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^1-\Gamma_{22}^3\Gamma_{31}^1=0,\ \Gamma_{12}^1+\Gamma_{21}^1-\Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^2+\Gamma_{22}^3\Gamma_{31}^2=0,\\
\Gamma_{21}^1-\Gamma_1^3\Gamma_{32}^1+\Gamma_2^3\Gamma_{31}^1=0,\ \Gamma_{12}^1(\Gamma_{21}^1-\Gamma_{11}^2)=0,\ \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^3-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^3=0,
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

Пусть

$$\Gamma_{12}^1=0, \tag{1.9}$$

тогда из последнего уравнения системы (1.8) имеем:

$$\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^3=0.$$

Случай

$$\Gamma_{22}^3=0$$

ведет к понижению ранга системы форм

$$\{\omega_2^3,\ \omega_2^1,\ \omega^1+\omega_1^1,\ \omega^3+\omega_1^3\}, \tag{1.10}$$

что противоречит пункту 2 определения 2, а случай

$$\Gamma_{11}^2=0$$

приводит к противоречию с условием (1.1).

Пусть теперь

$$\Gamma_{12}^1\neq 0,$$

тогда

$$\Gamma_{21}^1-\Gamma_{11}^2=0,\quad \Gamma_{21}^2=0.$$

Этот случай также ведет к тому, что касательные плоскости к поверхностям (P_i) параллельны, и поэтому исключается из рассмотрения.

Положим теперь

$$\omega_2^1=0. \tag{1.11}$$

Тогда из первых трех уравнений системы (1.8) имеем, что ранг системы форм

$$\{\omega^1,\ \omega^2+\omega_1^2,\ \omega_1^1-2\omega_2^2\}$$

равен двум,т.е. параболы F образуют двупараметрическое семейство в плоскости Π_3 ,а из последних двух уравнений системы (I.8) получаем

$$\omega^3\wedge\omega_3^1=0,\quad \omega_2^3\wedge\omega_3^1=0.$$

Если

$$\omega_3^1=0, \tag{1.12}$$

т.е. формы ω^3 и ω_2^3 линейно независимы,то система (I.8) с учетом (I.12),(I.11) и (I.4) примет вид:

$$1+\Gamma_{11}^1=0,\quad \Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1=0,\quad \Gamma_{12}^1\Gamma_{21}^2=0, \tag{1.13}$$

$$\Gamma_{11}^3\Gamma_{12}^1-(1+\Gamma_{12}^2)\Gamma_{21}^3+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^3=0,\quad \Gamma_{12}^1-\Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^2+\Gamma_{22}^3\Gamma_{31}^2=0.$$

Если

$$\Gamma_{12}^1=0,$$

то

$$\omega^1+\omega_1^1=0.$$

а это противоречит условию (I.I),следовательно,

$$\Gamma_{12}^1\neq 0,\quad \Gamma_{11}^2=0,\quad \Gamma_{21}^2=0. \tag{1.14}$$

Пары B° ,для которых плоскость параболы F образует двупараметрическое семейство, назовем парами B_1° .Они определяются следующими пфаффовыми и конечными уравнениями:

$$\omega_2^1=0,\quad \omega_3^1=0,\quad \omega^3+\omega_1^3=0,\quad \omega^i+\omega_1^i=(\delta_1^i+\Gamma_{12}^i)\omega^2,$$
$$\omega_2^2=\Gamma_{22}^2\omega^2,\quad \omega^3=\Gamma_\kappa^3\omega^\kappa,\quad \omega_2^3=\Gamma_{2\kappa}^3\omega^\kappa,\quad \omega_3^2=\Gamma_{3\kappa}^2\omega^\kappa \tag{1.15}$$

$$\Gamma_{12}^1-\Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^2+\Gamma_{22}^3\Gamma_{31}^2=0,\quad \Gamma_{11}^3\Gamma_{12}^1-(1+\Gamma_{12}^2)\Gamma_{21}^3=0. \tag{1.16}$$

Анализируя систему (I.I5),(I.I6),находим,что пары B_1° определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Пусть теперь

$$\omega_3^1\neq 0,$$

т.е. формы ω^3 и ω_2^3 -линейно зависимы,тогда

$$\omega_2^3=\alpha\,\omega_3^1,\quad \omega^3=\beta\,\omega_3^1.$$

Если

$$\alpha=0,$$

то из системы (I.I3) имеем

$$\Gamma_{12}^1=0,$$

(противоречие с (I.I4).

Если

$$\beta=0,$$

то из замыкания $\omega^3=0$ имеем:

$$\Gamma_{21}^3=0,$$

а это приводит к понижению ранга системы (I.I0).

Следовательно,

$$\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0, \tag{1.17}$$

тогда второе уравнение системы (I.I6) примет вид:

$$\alpha\Gamma_{31}^1\left[1+\Gamma_{12}^2-\beta\left(\Gamma_{31}^1\Gamma_{32}^2-\Gamma_{32}^1\Gamma_{31}^2\right)\right]=0.$$

Случай

$$\Gamma_{31}^1=0$$

приводит к противоречию с условием (I.I),следовательно,

$$1+\Gamma_{12}^2-\beta\left(\Gamma_{32}^1\Gamma_{32}^2-\Gamma_{32}^1\Gamma_{31}^2\right)=0. \tag{1.18}$$

Пары B° ,для которых плоскость параболы образует однопараметрическое семейство,называются парами B_2° .

Система уравнений Пфаффа,определяющая пары B_2°, имеет вид:

$$\omega^3+\omega_1^3=0, \quad \omega_2^1=0, \quad \omega^1+\omega_1^1=\Gamma_{12}^1\omega^2,$$

$$\omega^3=\beta\omega_3^1, \quad \omega_2^3=\alpha\omega_3^2, \quad \omega_2^2=\Gamma_{22}^2\omega^2, \tag{1.19}$$

$$\omega^2+\omega_1^2=\beta\left(\Gamma_{31}^1\Gamma_{32}^2-\Gamma_{32}^1\Gamma_{31}^2\right)\omega^2, \quad \omega_3^i=\Gamma_{3k}^i\omega^k.$$

Пары B_2^o существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов. Из уравнений (I.I6),(I.I5) непосредственно вытекает

Т е о р е м а 2. Пары B_1^o обладают следующими геометрическими свойствами: I/координатные линии $\omega^2=0$ соответствуют торсам прямолинейных конгруэнций $(A,\bar{e}_1)$, (ℓ); 2/координатные линии $\omega^1=0$ соответствуют торсам прямолинейных конгруэнций (ℓ^1), $(A,\bar{e}_3)$; 3/характеристические точки плоскостей Π_3 и Π_2 лежат на диаметре параболы F, проходящем через начало координат; 4/один собственный фокус прямолинейной конгруэнции $(A,\bar{e}_1)$ совпадает с характеристической точкой плоскости Π_3, другой - характеристической точкой плоскости Π_2; 5/поверхность (A_1) вырождается в линию; 6/конгруэнции $(A,\bar{e}_3)$ и (ℓ) являются цилиндрическими.

§ 2. Пары B^*

О п р е д е л е н и е 4. Парой B^* называется пара B, для которой существует аффинное расслоение от конгруэнции (F) к многообразию (Π_1), плоскость параболы является касательной плоскостью к поверхности (A), а координатные линии $\omega^1\omega^2=0$ —асимптотическими линиями этой поверхности.

Т е о р е м а 3. Пары B^* существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пары B^* определяются системой Пфаффа (I.4) и квадратичными уравнениями

$$\omega^i\wedge\omega_2^1=0, \quad (\omega^1+\omega_1^1)\wedge(\omega^2+\omega_1^2)+2\omega_2^1\wedge\omega_2^2=0,$$

$$\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0, \quad (\omega^1+\omega_1^1)\wedge\omega_2^2+\omega_2^1\wedge(\omega^2+\omega_1^2)=0, \tag{2.1}$$

$$(\omega_1^1-2\omega_2^2)\wedge\omega_2^1-2\omega_2^3\wedge\omega_3^1=0, \quad \omega_1^2\wedge\omega_2^1+\omega_1^3\wedge\omega_3^1=0.$$

Из первых двух уравнений системы (2.I) имеем:

$$\omega_2^1=0, \tag{2.2}$$

замыкание которого

$$\omega_2^3\wedge\omega_3^1=0.$$

Тогда система (2.I) примет вид:

$$\omega^k\wedge\omega_k^3=0, \quad \omega_i^3\wedge\omega_3^1=0,$$

$$(\omega^1+\omega_1^1)\wedge\omega_2^2=0, \quad (\omega^1+\omega_1^1)\wedge(\omega^2+\omega_1^2)=0,$$

откуда

$$\omega_3^1=0, \quad \omega^i+\omega_1^i=m_i\omega_2^2, \tag{2.3}$$

причем, учитывая (I.I), $m_i\neq 0$.

Замыкая уравнения

$$\omega_i^3=b\omega^j,$$

получим

$$-\frac{1}{2}\,d\ln b=\omega_3^3+(m_2\Gamma_{22}^2-1)\,\omega^1. \tag{2.4}$$

Система Пфаффа, определяющая пары B^*, запишется в виде

$$\omega^3=0, \quad \omega_2^1=0, \quad \omega_3^1=0, \quad \omega_i^3=b\omega^j, \quad \omega^i+\omega_1^i=m_i\omega_2^2, \tag{2.5}$$

$$\omega_2^2=\Gamma_{2k}^2\omega^k, \quad \omega_3^2=\Gamma_{3k}^2\omega^k, \quad -\frac{1}{2}\,d\ln b=\omega_3^3+(m_2\Gamma_{22}^2-1)\omega^1. \quad (2.5)$$

Анализируя систему (2.5), заключаем, что пары B^* существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Для поверхности (A) пар B^* найдены: аффинная нормаль, соприкасающиеся квадрики, направления и линии Дарбу, пучок квадрик Дарбу.

Т е о р е м а 4. Пары B^* обладают следующими геометрическими свойствами: 1/ аффинная нормаль поверхности (A) лежит в плоскости Π_1; 2/ прямые ℓ^1 образуют однопараметрическое семейство; 3/ конгруэнция $(A,\bar{e}_3)$ - цилиндрическая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Аффинная нормаль поверхности (A) определяется уравнением

$$\bar{H}=A+\Gamma_{12}^2\bar{e}_2+b\bar{e}_3,$$

откуда следует утверждение теоремы. 2/ Так как ранг системы форм $\{\omega^1,\omega^3,\omega_2^1,\omega_2^3\}$ равен единице, то прямые ℓ^1 образуют однопараметрическое семейство. 3/ Уравнения для определения фокусов и торсов луча прямолинейной конгруэнции $(A,\bar{e}_3)$ имеют вид:

$$\lambda\Gamma_{3,2}^2+1=0,$$

$$\omega^1\omega_3^2=0,$$

откуда следует, что конгруэнция $(A,\bar{e}_3)$ - цилиндрическая, т.е. одно семейство торсов состоит из цилиндров.

О п р е д е л е н и е 4. Пары B^*, для которых касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ параллельна плоскости Π_2, называется парой B_0^*.

Т е о р е м а 5. Пары B_0^* существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ параллельна плоскости Π_2 при условии

$$\omega_1^2=0. \quad (2.6)$$

Из (2.3) имеем:

$$m_2\Gamma_{21}^2=0, \quad m_1\Gamma_{22}^2-1=0,$$

а уравнение (2.4) примет вид:

$$\frac{1}{2}\,d\ln b+\omega_3^3=0. \quad (2.7)$$

Замыкая уравнения (2.6) и (2.7), с учетом этих же уравнений и системы (2.5), получим:

$$b\,\Gamma_{3i}^2=0,$$

откуда

$$\omega_3^2=0.$$

Система уравнений Пфаффа, определяющая пары B_0^*, имеет вид:

$$\omega^3=0, \quad \omega_j^i=0, \quad \omega_3^i=0, \quad \omega_i^3=b\,\omega^j,$$
$$\omega^1+\omega_1^1=m_1\omega_2^2, \quad \omega_2^2=\Gamma_{22}^2\omega^2, \quad \frac{1}{2}\,d\ln b+\omega_3^3=0. \quad (2.8)$$

Из системы (2.8) следует, что произвол существования пар две функции одного аргумента.

Т е о р е м а 6. Для пар B_0^* 1/ прямая $\bar{R}=\bar{A}+\bar{e}_3$ является аффинной нормалью поверхности (A); 2/ поверхность (A) - гиперболический параболоид; 3/ поверхность (A_1) вырождается в линию; 4/ точка A является сдвоенной фокальной точкой параболы F.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Вектор аффинной нормали поверхности (A) для пар B_0^* имеет вид:

$$\bar{n}\,(0,0,b).$$

2/Асимптотические линии поверхности (A) определяются уравнением $\omega^1\omega^2=0$. Векторы $\bar{e}_i$ -векторы касательных к этим линиям, следовательно,

$$(d\bar{e}_1)_{\omega^2=0}=-\omega^1\bar{e}_1,$$

$$(d\bar{e}_2)_{\omega^2=0}=\Gamma^2_{22}\bar{e}_2\,.$$

значит линии $\omega^1=0$, $\omega^2=0$ -прямые. Так как поверхность имеет две серии прямолинейных образующих, то она является квадрикой. Её уравнение имеет вид:

$$Q_A=bx^1x^2-x^3=0\,. \tag{2.9}$$

Поэтому (A) -гиперболический параболоид. 3/Найдем

$$dA_1=(\omega^k+\omega^k_1)\bar{e}_k+(\omega^3+\omega^3_1)\bar{e}_3=(m_1\Gamma^2_{22}\bar{e}_1+\bar{e}_2+b\bar{e}_3)\omega^2,$$

следовательно, поверхность (A_1) вырождается в линию.

4/Система, определяющая фокальные поверхности параболы F, для пар B^*_o имеет вид:

$$(x^2)^2-2x^1=0,\quad x^3=0,$$

$$(x^2)^2\left[(x^2)^2+2\Gamma^2_{22}(m_1-2)x^2-6\right]=0. \tag{2.10}$$

Из (2.10) видно, что A -сдвоенная фокальная точка параболы F конгруэнции (F). Причем, в расширенном аффинном пространстве существует только четыре фокальные точки параболы F конгруэнции (F).

Список литературы.

1. Ткач Г.П. Аффинно расслояемые пары многообразий фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. Тезисы докладов 5 Всесоюзной межвузовской конференции по геометрии, Самарканд, 1972, с.2-15

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Т.П.Ф у н т и к о в а

БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ $(LP)_{2,1}$

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(LP)_{2,1}$ пар фигур $\{L,P\}$, где L - прямая, P-точка [1]. Вырожденные конгруэнции $(LP)_{2,1}$ характеризуются соответствием, при котором каждой прямой L прямолинейной конгруэнции (L) соответствует единственная точка P линии (P), полным прообразом которой является линейчатая поверхность $(L)_P$ прямолинейной конгруэнции (L). Конгруэнции $(LP)_{2,1}$ определяются с произволом трех функций двух аргументов.

§1. Торсовые конгруэнции $(LP)_{2,1}$. Конгруэнции K

Присоединим к конгруэнции $(LP)_{2,1}$ канонический репер $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, имеющий следующую геометрическую характеристику: вершина A репера помещена в ту точку луча L прямолинейной конгруэнции (L), в которой касательная плоскость к линейчатой поверхности $(L)_P$ параллельна касательной $\tilde{\ell}$ линии (P) в соответствующей точке P, конец вектора $\vec{e}_1$ совмещен с точкой P, вектор $\vec{e}_2$ параллелен касательной $\tilde{\ell}$, вектор $\vec{e}_3$ направлен по лучу L прямолинейной конгруэнции (L) и нормирован таким образом, что касательная к индикатрисе вектора $\vec{e}_3$ вдоль линии, соответствующей линейчатой поверхности $(L)_P$, инцидентна плоскости, аффинно-биссекторной относительно плоскости Π_1, проходящей через прямую L параллельно касательной $\tilde{\ell}$ к линии (P) в точке P, и плоскости Π_2, определяемой прямой L и точкой P. Эту плоскость назовем плоскостью Π.

Торсовыми конгруэнциями $(LP)_{2,1}$ назовем такие конгруэнции $(LP)_{2,1}$, у которых линейчатые поверхности $(L)_P$-торсы.

В этом случае точка A будет являться точкой ребра возврата торса $(L)_P$.

Рассмотрим торсовые конгруэнции $(LP)_{2,1}$, удовлетворяющие следующим условиям: 1/фокальная поверхность (A) прямолинейной конгруэнции (L) не вырождается в линию или точку; 2/касательная плоскость к поверхности (A) в точке A параллельна касательной к линии (P) в соответствующей точке P, - и назовем их конгруэнциями K.

Конгруэнции K определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\omega^1=0,\ \omega_1^1=0,\ \omega^3+\omega_1^3=0,\ \omega_2^1=a\theta,\ \omega_2^3=c\theta,\\ \omega_3^2=m\theta+\omega_3^1,\ \omega^3=p\,\omega_3^1,\ \omega_2^2=n\,\omega_3^1+s\theta,\ \omega^2=\ell\theta.\end{gathered} \tag{1}$$

где $\theta=\omega^2+\omega_1^2$, $p\neq 0$, ω^i, ω_i^j —компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства и условию эквиаффинности, и существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Введем следующие обозначения: линии $\theta = 0$ на поверхности (A), являющиеся прообразом точек P линии (P), назовем линиями Γ_p и линии $\omega_3^1 = 0$ на поверхности (A), огибаемые прямыми $(A, \vec{e}_2)$, параллельными касательным к линии (P), назовем линиями Γ.

Т е о р е м а I. Конгруэнции K обладают следующими свойствами: I/линии Γ_p, Γ на поверхности (A) сопряжены; 2/торсы прямолинейных конгруэнций $(A, \vec{e}_\alpha)$ ($\alpha = 1,2,3$) соответствуют; 3/прямолинейная конгруэнция (AP) является конгруэнцией Рибокура; 4/линии Γ_p -линии тени на поверхности (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Для поверхности (A) конгруэнции K уравнение асимптотических линий записывается в виде

$$p(\omega_3^1)^2 + \ell a \theta^2 = 0, \tag{2}$$

т.е. линии Γ_p, Γ сопряжены на поверхности (A). 2/Торсы прямолинейных конгруэнций $(A, \vec{e}_\alpha)$ задаются уравнениями $(d\vec{A}, \vec{e}_\alpha, d\vec{e}_\alpha) = 0$, которые в силу системы (I) принимают следующий вид:

$$\theta \cdot \omega_3^1 = 0. \tag{3}$$

3/Справедливость данного свойства следует непосредственно из свойств I и 2.

4/Касательные плоскости к поверхности (A) вдоль линии Γ_p огибаются торсом с образующей $(A, \vec{e}_2)$. Так как для конгруэнции K торсы $\theta = 0$ прямолинейной конгруэнции $(A, \vec{e}_2)$ являются цилиндрическими поверхностями, то линии Γ_p -линии тени на поверхности (A).

Т е о р е м а 2. Если для конгруэнции K справедливо одно из следующих свойств: I/линия (P) является прямой; 2/существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$; 3/фокальная поверхность (A) прямолинейной конгруэнции (L) является цилиндрической поверхностью, то справедливы и остальные два свойства.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Пусть линия (P) конгруэнции K является прямой, т.е. выполняется условие

$$d\vec{P} = \lambda d^2\vec{P},$$

и, следовательно,

$$a = 0, \quad c = 0. \tag{4}$$

В этом случае уравнение асимптотических линий поверхности (A) принимает вид:

$$(\omega_3^1)^2 = 0,$$

причем

$$(d\vec{A})_{\omega_3^1 = 0} = \ell\theta\vec{e}_2, \quad d\vec{e}_2 = (n\omega_3^1 + s\theta)\vec{e}_2, \tag{5}$$

т.е. поверхность (A) -цилиндрическая.

Также в силу равенств (4) условия аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$$\omega^i \wedge \omega_i^3 = 0, \quad \omega_3^i \wedge \omega_i^3 = 0 \quad (i = 1,2) \tag{6}$$

тождественно удовлетворяются, следовательно, указанное расслоение существует.

2/Пусть теперь для конгруэнции K справедливо второе свойство, т.е. выполняются условия (6). Учитывая в квадратичных уравнениях (6) пфаффовы уравнения (I), получаем:

$$c=0\,,\ a=0\,. \tag{7}$$

Из условий (7) следует справедливость остальных свойств.

3/Потребуем, чтобы фокальная поверхность (A) прямолинейной конгруэнции (L) являлась цилиндрической поверхностью. Из уравнений (2) и условия $p\neq 0$ следует, что поверхность (A) является цилиндрической, если

$$la=0$$

и

$$d\vec{e}_2=(n\omega_3^1+s\theta)\vec{e}_2+a\theta\vec{e}_1+c\theta\vec{e}_3=\lambda\vec{e}_2,$$

т.е. если

$$a=0\,,\ c=0. \tag{8}$$

Из равенств (8) следует справедливость первого и второго свойства.

Т е о р е м а 3. Если поверхность (A) конгруэнции K является средней поверхностью прямолинейной конгруэнции (AP), то: I/фокальная поверхность прямолинейной конгруэнции (AP), отличная от линии (P), вырождается в линию; 2/прямолинейная конгруэнция (L) является цилиндрической, а поверхность (A) -поверхностью переноса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Поверхность (A) является средней поверхностью прямолинейной конгруэнции (AP) при условии

$$l=\frac{1}{2}\,. \tag{9}$$

Тогда вторым фокусом луча этой конгруэнции, отличным от

точки P, является точка $\vec{F}=\vec{A}-\vec{e}_1$. Учитывая условие (9) в системе уравнений (I), получаем следующие соотношения:

$$m=0\,,\quad s+a-\frac{1}{2}=0\,. \tag{10}$$

В силу равенства (9)

$$d(\vec{A}-\vec{e}_1)=2p\,\omega_3^1\vec{e}_3,$$

т.е. фокальная поверхность (F) вырождается в линию.

2/Так как

$$(d\vec{e}_3)_{\omega_3^1=0}=-\theta s\vec{e}_3,$$

то торсы $\omega_3^1=0$ прямолинейной конгруэнции (L) являются цилиндрическими поверхностями, а линии Γ на поверхности (A) -линиями тени. Таким образом, на поверхности (A) имеем сопряженную сеть линий тени: Γ, Γ_p, т.е. поверхность (A) поверхность переноса. Теорема доказана.

Конгруэнции K, обладающие свойствами, указанными в теореме 3, существуют с произволом четырех функций одного аргумента. Такие конгруэнции назовем конгруэнциями K_1.

§ 2. Безынтегральное построение конгруэнций K_1

Основываясь на свойствах, указанных в теореме 3, дадим один из способов построения произвольной конгруэнции K_1 [2].

Чтобы построить конгруэнцию K_1, следует взять произвольную прямолинейную конгруэнцию с двумя вырождающимися в линии фокальными поверхностями. Тогда поверхность, описанная центром луча заданной прямолинейной конгруэнции, и одна из фокальных линий будут составлять конгруэнцию K_1.

Докажем это предположение.

Пусть задана произвольная прямолинейная конгруэнция (A_0A_1) с вырождающимися в линии фокальными поверхностями (A_0), (A_1). Отнесем эту конгруэнцию к подвижному реперу $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, вершину A которого поместим в центр луча прямолинейной конгруэнции (A_0A_1), вектор $\vec{e}_1$ направим по этому лучу и конец его совместим с фокальной точкой A_1 луча, векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ направим по прямым, параллельным касательным, к линиям (A_1), (A_0) в точках A_1, A_0.

В построенном репере

$$d\vec{A}_1=\lambda\vec{e}_2,\quad d\vec{A}_0=\mu\vec{e}_3,$$

т.е.

$$\omega^1+\omega_1^1=0,\ \omega^3+\omega_1^3=0,\ \omega^1-\omega_1^1=0,\ \omega^2-\omega_1^2=0. \tag{11}$$

Из уравнений (II) следует, что

$$\omega^1=0,\quad \omega_1^1=0,$$

$$\omega^2\wedge\omega_2^1=0,\ \omega^3\wedge\omega_3^1=0,\ \omega^3\wedge\omega_3^2=0,\ \omega^2\wedge\omega_2^3=0. \tag{12}$$

Нормируя вектор $\vec{e}_3$ таким же образом, как и у конгруэнции $(LP)_{2,1}$ в §I, и раскрывая квадратичные уравнения (I2), получаем систему дифференциальных уравнений (I) и условия (9), (I0), которые определяют конгруэнцию (A_0A_1).

Следовательно, высказанное предположение о построении произвольной конгруэнции K_1 оказалось верным.

Список литературы

I. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, I973, с.4I-49.

2. Гринцевичус К. О линейных неголономных комплексах.- "Литовский матем. сбор.", I974, т.I4, №2, с.3I-4I.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Е.А.Хляпова

КОНГРУЭНЦИИ ОСНАЩЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В П-МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В п-мерном аффинном пространстве рассматриваются невырожденные (п-I)-мерные многообразия (конгруэнции) φ_{n-1} пар фигур $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\}$, где $\mathcal{F}_1$ -центральный квадратичный элемент, а $\mathcal{F}_2$ -точка, не инцидентная его гиперплоскости. Пара $\mathcal{F}$ названа оснащенным квадратичным элементом. Для оснащенного квадратичного элемента введено понятие псевдофокальных точек, найдена их геометрическая характеристика в трехмерном аффинном пространстве. Получен характеристический признак совпадения фокальных точек коники $\mathcal{F}_1$ конгруэнции φ_2 с псевдофокальными точками оснащенной коники $\mathcal{F}$ этой же конгруэнции.

§I. Псевдофокальные точки оснащенного квадратичного элемента конгруэнции

Отнесем конгруэнцию φ_{n-1} к частично канонизированному реперу $R_1=\{A,\bar e_\alpha\}$ $(\alpha,\beta=1,2,\dots,n)$, начало A которого совмещено с центром квадратичного элемента $\mathcal{F}_1$, векторы $\bar e_i$ $(i,j,k=1,2,\dots,n-1)$ расположены параллельно его гиперплоскости, а вектор $\bar e_n$ коллинеарен прямой AF_2.

Уравнения квадратичного элемента $\mathcal{F}_1$, формула, задающая точку $\mathcal{F}_2$, и система дифференциальных уравнений конгруэнции φ_{n-1} записываются соответственно в виде:

$$a_{ij}x^ix^j-1=0,\quad x^n=0\ ; \tag{1}$$

$$\bar{\mathcal{F}}_2=\bar A+c^n\bar e_n, \tag{2}$$

$$\omega^n=\Lambda^n_i\omega^i,\quad \omega^n_i=\Lambda^n_{ij}\omega^j,\quad \omega^i_n=\Lambda^i_{nj}\omega^j, \tag{3}$$

$$\theta_{ij}=\Lambda_{ijk}\omega^k,\quad \Delta c^n=\Lambda_i\omega^i,$$

где

$$\theta_{ij}\equiv da_{ij}-a_{kj}\omega^k_i-a_{ik}\omega^k_j,\quad \Delta c^n\equiv dc^n+\omega^n_nc^n,$$

$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\dots\wedge\omega^{n-1}\neq 0,$$

$\omega^\alpha,\omega^\alpha_\beta$ -компоненты инфинитезимальных перемещений репера.

Последовательные продолжения уравнений

$$\theta_{ij}=\Lambda_{ijk}\omega^k \tag{4}$$

приводят к бесконечной последовательности функций:

$$\Lambda_{iji_1},\Lambda_{iji_1i_2},\dots,\Lambda_{iji_1\dots i_p},\dots,\quad (i_1,\dots,i_p=1,\dots,n-1), \tag{5}$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla\Lambda_{iji_1}=\Lambda_{iji_1k}\omega^k,$$

$$\nabla\Lambda_{iji_1i_2}=\Lambda_{iji_1i_2k}\omega^k,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\nabla\Lambda_{iji_1\dots i_p}=\Lambda_{iji_1\dots i_pk}\omega^k,$$

где

$$\nabla\Lambda_{iji_1\dots i_p}\equiv d\Lambda_{iji_1\dots i_p}-\Lambda_{kji_1\dots i_p}\omega^k_i-\dots-\Lambda_{iji_1\dots k}\omega^k_{i_p}.$$

С помощью функций (5) строим систему алгебраических уравнений

$$\mathcal{F}_3 \equiv \Lambda_{(i_1 i_2 i_3)} x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} - 2! = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{7}$$
$$\mathcal{F}_n \equiv \Lambda_{(i_1 \ldots i_n)} x^{i_1} \cdot \ldots \cdot x^{i_n} - (n-1)! = 0,$$

каждое из которых определяет инвариантное алгебраическое многообразие-цилиндрическую алгебраическую гиперповерхность с образующими, параллельными вектору $\bar{e}_n$. Таким образом, в пространстве A_n возникает семейство инвариантных цилиндрических алгебраических гиперповерхностей порядков 3,...,п, которое пересекает квадратичный элемент $\mathcal{F}_1$ в п! точках, определяемых системой уравнений:

$$a_{ij} x^i x^j - 1 = 0, \quad x^n = 0, \quad \mathcal{F}_3 = 0, \ldots, \mathcal{F}_n = 0. \tag{8}$$

Эти точки назовем псевдофокальными точками оснащенного квадратичного элемента $\mathcal{F}$.

Введем следующие обозначения: пусть M -некоторая фиксированная точка квадратичного элемента $\mathcal{F}_1$, ℓ_M-линия пересечения касательной гиперплоскости гиперповерхности (A) с 2-плоскостью $(A, \overline{AM}, \bar{e}_n)$, τ_M -линия на гиперповерхности (M), соответствующая линии с касательной ℓ_M на гиперповерхности (A).

Т е о р е м а I. На гиперповерхности, описанной псевдофокальной точкой M оснащенного квадратичного элемента $\mathcal{F}$, касательная вдоль линии τ_M инцидентна гиперплоскости, образованной вектором $\bar{e}_n$ и касательной (п-2)-плоскостью к квадратичному элементу $\mathcal{F}_1$ в этой же точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем конгруэнцию φ_{n-1} к реперу $R_{2,M} = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, конец E_1 вектора $\bar{e}_1$ которого совмещен с исследуемой точкой M, векторы $\bar{e}_a$ $(a=2,\ldots,n-1)$ коллинеарны касательной (п-2)-плоскости квадратичного элемента в точке M. В репере $R_{2,M}$ линия τ_M поверхности $(M) \equiv E_1$ определяется уравнениями

$$\omega^a = 0 \tag{9}$$

и имеют место соотношения

$$a_{11} = 1, \quad a_{1a} = 0, \quad \omega_1^i = \Lambda_{1j}^i \omega^j, \quad \omega_a^1 = \Lambda_{ai}^1 \omega^i, \tag{10}$$

$$2\omega_1^1 + \Lambda_{111} \omega^1 = -\Lambda_{11a} \omega^a. \tag{11}$$

Так как точка $M \equiv E_1$ -одна из псевдофокальных точек оснащенного квадратичного элемента $\mathcal{F}$, то из третьего уравнения системы (8) следует, что

$$\Lambda_{111} = 2. \tag{12}$$

Учитывая соотношение (I2) в выражении (II), получаем

$$\omega^1 + \omega_1^1 = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^a). \tag{13}$$

Имеем

$$d\bar{E}_1 = (\omega^1 + \omega_1^1)\bar{e}_1 + (\omega^a + \omega_1^a)\bar{e}_a + (\omega^n + \omega_1^n)\bar{e}_n.$$

Следовательно,

$$(d\bar{E}_1)_{\omega^a=0} = \omega_1^a \bar{e}_a + (\omega^n + \omega_1^n)\bar{e}_n.$$

Таким образом, теорема доказана.

§ 2. Геометрическая характеристика псевдофокальных точек оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2

Рассмотрим конгруэнцию φ_2 оснащенных коник $\mathcal{F}$ в трехмерном аффинном пространстве.

Сохраняем обозначения предыдущего параграфа. Как следует из (8), в трехмерном аффинном пространстве координаты шести псевдофокальных точек оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2 определяются из системы уравнений:

$$a_{ij}\, x^i x^j - 1 = 0\,, \quad x^3 = 0\,, \tag{14}$$
$$\Lambda_{(ijk)}\, x^i x^j x^k - 2 = 0\,,$$

где

$$i, j, k = 1,2.$$

Т е о р е м а 2. Фиксированная точка M коники $\mathcal{F}_1$ конгруэнции φ_2 тогда и только тогда является псевдофокальной точкой оснащенной коники $\mathcal{F}$, когда касательная к линии τ_M в точке M инцидентна плоскости, образованной вектором $\bar{e}_3$ и касательной к конике $\mathcal{F}_1$ в этой же точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия, приведенного в теореме, была установлена в теореме I. Для доказательства достаточности отнесем конгруэнцию φ_2 к реперу $R_{2,M}$, построенному в предыдущем параграфе. Соотношения (I0) и (II) имеют соответственно вид:

$$a_{11} = 1\,, \quad a_{12} = 0\,, \quad \omega_1^i = \Lambda_{1j}^i\, \omega^j, \; \omega_2^1 = \Lambda_{2i}^1\, \omega^i, \tag{15}$$
$$2\,\omega_1^1 + \Lambda_{111}\,\omega^1 = -\Lambda_{112}\,\omega^2. \tag{16}$$

Линия τ_M поверхности $(M) \equiv (E_1)$ определяется уравнением

$$\omega^2 = 0\,. \tag{17}$$

Имеем

$$d\bar{E}_1 = (\omega^1 + \omega_1^1)\bar{e}_1 + (\omega^2 + \omega_1^2)\bar{e}_2 + (\omega^3 + \omega_1^3)\bar{e}_3\,. \tag{18}$$

Пусть на поверхности (E_1), описанной фиксированной точкой E_1 коники $\mathcal{F}_1$, касательная к линии τ_M инцидентна плоскости $(E_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Тогда

$$\omega^1 + \omega_1^1 = 0 \quad (mod\; \omega^2). \tag{19}$$

Сравнивая (I6) и (I9), получаем условие

$$\Lambda_{111} = 2$$

того, что E – псевдофокальная точка оснащенной коники $\mathcal{F}$.

Установим связь между фокальными точками коники $\mathcal{F}_1$ и псевдофокальными точками оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2, предварительно приведя некоторые формулы.

Уравнения коники $\mathcal{F}_1$ в репере $R_{2,M}$ записываются в виде:

$$(x^1)^2 + a\,(x^2)^2 - 1 = 0\,, \quad x^3 = 0\,, \tag{20}$$

где

$$a = a_{22}\,,$$

и имеют место соотношения

$$\Lambda_{111} = -2\Lambda_{11}^1\,, \quad \Lambda_{112} = -2\Lambda_{12}^1\,, \quad \Lambda_{121} = -(\Lambda_{21}^1 + a\Lambda_{11}^2), \tag{21}$$
$$\Lambda_{122} = -(\Lambda_{22}^1 + a\Lambda_{12}^2),\; da = \omega^1(2a\Lambda_{21}^2 + \Lambda_{221}) + \omega^2(2a\Lambda_{22}^2 + \Lambda_{222}).$$

Следовательно, система уравнений (I4) для нахождения координат псевдофокальных точек оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2, принимает вид:

$$(x^1)^2 + a\,(x^2)^2 - 1 = 0\,, \quad x^3 = 0\,,$$
$$(2\Lambda_{11}^1 (x^1)^2 + 2\,(\Lambda_{21}^1 + a\Lambda_{11}^2)\, x^1 x^2 - \Lambda_{221}\,(x^2)^2 + 2x^1)\,x^1 + \tag{22}$$
$$+ (2\Lambda_{12}^1 (x^1)^2 + 2\,(\Lambda_{22}^1 + a\,\Lambda_{12}^2)\, x^1 x^2 - \Lambda_{222}\,(x^2)^2 + 2x^2)\,x^2 = 0\,.$$

Координаты фокальных точек коники $\mathcal{F}_1$ определяются из уравнений

$$(x^1)^2 + a(x^2)^2 - 1 = 0\,,\quad x^3 = 0\,,$$

$$(2\Lambda^1_{11}(x^1)^2 + 2(\Lambda^1_{21} + a\Lambda^2_{11})x^1x^2 - \Lambda_{221}(x^2)^2 + 2x^1)(\Lambda^3_{12}x^1 + \Lambda^3_{22}x^2 + \Lambda^3_2) -$$
$$-(2\Lambda^1_{12}(x^1)^2 + 2(\Lambda^1_{22} + a\Lambda^2_{12})x^1x^2 - \Lambda_{222}(x^2)^2 + 2x^2)(\Lambda^3_{11}x^1 + \Lambda^3_{21}x^2 + \Lambda^3_1) = 0. \quad (23)$$

Исключим из рассмотрения случай, когда касательная плоскость поверхности, описанной исследуемой фиксированной точкой M, коллинеарна плоскости, образованной вектором $\bar{e}_3$ и касательной к конике $\mathcal{F}_1$ в точке M, т.е. считаем, что

$$|\Lambda^1_{11} + 1| + |\Lambda^1_{12}| \neq 0. \quad (24)$$

Т е о р е м а 3. Фокальная точка M коники $\mathcal{F}_1$ тогда и только тогда является псевдофокальной точкой оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2, когда касательная к линии τ_M в точке M совпадает с касательной к конике $\mathcal{F}_1$ в этой же точке.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть фокальная точка $M \equiv E_1$ коники $\mathcal{F}_1$ в то же время является псевдофокальной точкой оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2, тогда из систем уравнений (22) и (23) получаем:

$$\Lambda^1_{11} = -1\,,\quad \Lambda^1_{12}(\Lambda^3_{11} + \Lambda^3_1). \quad (25)$$

Из неравенства (24) и первого уравнения системы (25) следует, что

$$\Lambda^1_{12} \neq 0.$$

Уравнения (25) приводятся к виду:

$$\Lambda^1_{11} = -1,\quad \Lambda^3_{11} + \Lambda^3_1 = 0. \quad (26)$$

Вдоль линии τ_M имеем:

$$(d\bar{E}_1)_{\omega^2=0} = \omega^1\big((1+\Lambda^1_{11})\bar{e}_1 + (1+\Lambda^2_{11})\bar{e}_2 + (\Lambda^3_1 + \Lambda^3_{11})\bar{e}_3\big). \quad (27)$$

Из (27) непосредственно следует, что при условиях (26) касательная к линии τ_M поверхности $(M) \equiv (E_1)$ совпадает с касательной к конике $\mathcal{F}_1$ в этой же точке.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть на поверхности, описанной фокальной точкой $M \equiv E_1$, касательная к линии τ_M совпадает с касательной к конике $\mathcal{F}_1$ в этой же точке. Тогда:

$$\Lambda^1_{11} = -1\,,\quad \Lambda^3_1 + \Lambda^3_{11} = 0. \quad (28)$$

Подставляя соотношения (28) в систему уравнений (22), убеждаемся, что точка $M \equiv E_1$ является псевдофокальной точкой оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2.

Список литературы

I. Малаховский В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.- "Труды Томского ун-та", 1963, вып.3, с.45-53.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

В.Н. Х у д е н к о

О МНОГООБРАЗИЯХ МНОГОМЕРНЫХ КВАДРИК В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В последнее время возрос интерес к дифференциальной геометрии семейств линий и поверхностей, т.е. к изучению многообразий, образующим элементом которых является поверхность или линия рассматриваемого пространства.

В частности, в n-мерном проективном пространстве изучались многообразия квадрик. В.С.Малаховским [3]-[6] осуществлено инвариантное построение дифференциальной геометрии многообразий $(n-2)$-мерных квадрик (квадратичных элементов) В.В.Махоркиным [8],[9] изучены многообразия гиперквадрик. Многообразия квадрик произвольной размерности $p\ (1 \le p \le n-3)$ почти не рассматривались. Целью настоящей статьи является изучение фокальных образов многообразий p-мерных квадрик в многомерных проективных пространствах.

§1. Многообразия $(h, m, n)_p^2$

Отнесем пространство P_n к подвижному реперу $R=\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$. Инфинитезимальные перемещения репера определяются уравнениями

$$dA_J = \omega_J^K A_K, \quad (J, L, K = 1,2,\dots,n+1), \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω_J^K удовлетворяют условиям

$$\mathcal{D}\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K, \qquad \omega_1^1+\omega_2^2+\dots+\omega_{n+1}^{n+1} = 0. \tag{2}$$

Поместим вершины A_α $(\alpha,\beta,\gamma,\eta = 1,\dots,p+2)$ в $(p+1)$-мерной плоскости p-мерной квадрики Q_p. Тогда уравнения этой квадрики запишутся в виде

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0, \tag{3}$$

причем

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad \det(a_{\alpha\beta}) = 1 \quad (a, b = p+3, \dots, n+1).$$

Формы Пфаффа ω_α^a, $\theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma - a_{\beta\gamma}\omega_\alpha^\gamma + \frac{2}{p+2}a_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\gamma$ являются структурными формами [2] p-мерной квадрики Q_p.

Рассмотрим многообразие $(h,m,n)_p^2$ — m-мерное многообразие p-мерных квадрик Q_p, плоскости которых образуют h-параметрическое семейство [6].

Обозначим буквой N ранг квадрики Q_p, буквой $\bar N$ — ранг $(p+1)$-мерной плоскости квадрики Q_p. Имеем:

$$N = C_{p+3}^2 + (p+2)(n-p-1), \qquad \bar N = (p+2)(n-p-1). \tag{4}$$

На основании результатов работы [7] имеет место

Т е о р е м а 1. Многообразия $(h,m,n)_p^2$ определяются с произволом S_m функций m аргументов, где

$$S_m = \begin{cases} N - \bar N - m + h, & m > h; \\ N - m, & m = h. \end{cases} \tag{5}$$

Многообразие $(h,m,n)^2_p$ определяется системой дифференциальных уравнений

$$\Theta_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta\tilde{\mathcal{T}}}\tau^{\tilde{\mathcal{T}}}, \quad (\tilde{\mathcal{T}}=1,2,\dots,m) \qquad (6)$$

$$\omega^a_\alpha = b_{\alpha i}\tau^i, \quad (i=1,2,\dots,h)$$

где $\tau^{\tilde{\mathcal{T}}}$ —параметрические формы, удовлетворяющие структурным уравнениям бесконечной аналитической группы [IO].

§ IO. Фокальные образы многообразия $(h,h,n)^2_p$

Рассмотрим многообразие $(h,h,n)^2_p$. Принимая формы Пфаффа $\omega^{n+1}_i=\omega_i$ за независимые первичные формы, запишем замкнутую систему дифференциальных уравнений этого многообразия в виде

$$\omega^{n+1}_\xi = \Gamma^i_\xi\omega_i, \quad \omega^{\hat a}_\alpha = \Gamma^{\hat a i}_\alpha\omega_i,$$

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\alpha\beta}\omega_i, \quad \Delta\Gamma^i_\xi\wedge\omega_i = 0, \qquad (7)$$

$$\Delta\Gamma^{\hat a i}_\alpha\wedge\omega_i = 0, \quad \Delta\Gamma^i_{\alpha\beta}\wedge\omega_i = 0,$$

где

$$\Delta\Gamma^i_\xi = d\Gamma^i_\xi + \Gamma^j_\xi\omega^i_j - \omega^i_\xi + \Gamma^{\hat a i}_\xi\omega^{n+1}_{\hat a} + \Gamma^j_\xi\Gamma^i_\eta\omega^\eta_j - \Gamma^k_\xi\Gamma^{\hat a i}_k\omega^{n+1}_{\hat a},$$

$$\Delta\Gamma^{\hat a j}_i = \nabla\Gamma^{\hat a j}_i + \Gamma^{\hat a k}_i\Gamma^j_\eta\omega^\eta_k - \Gamma^{\hat a k}_i\Gamma^{\hat b j}_k\omega^{n+1}_{\hat b} - \Gamma^{\hat a j}_i\omega^{n+1}_{n+1} + \delta^j_i\omega^{\hat a}_{n+1},$$

$$\Delta\Gamma^{\hat a i}_\xi = \nabla\Gamma^{\hat a i}_\xi + \Gamma^{\hat a j}_\xi\Gamma^i_\eta\omega^\eta_j - \Gamma^{\hat a j}_\xi\Gamma^{\hat b i}_j\omega^{n+1}_{\hat b} - \Gamma^{\hat a i}_\xi\omega^{n+1}_{n+1} + \Gamma^i_\xi\omega^{\hat a}_{n+1},$$

$$\Delta\Gamma^k_{ij} = \nabla\Gamma^k_{ij} - 2a_{\gamma(i}\Gamma^{\hat a k}_{j)}\omega^\gamma_{\hat a} - 2a_{\gamma(i}\delta^k_{j)}\omega^\gamma_{n+1} + \frac{2}{p+2}\Gamma^k_{ij}\omega^\gamma_\gamma - \frac{2}{p+2}a_{ij}(\Gamma^{\hat a k}_\gamma\omega^\gamma_{\hat a} - \delta^k_\ell\omega^\ell_{n+1} - \Gamma^k_\xi\omega^\xi_{n+1}) + \Gamma^\ell_{ij}(\Gamma^k_\xi\omega^\xi_\ell - \Gamma^{\hat a k}_\ell\omega^{n+1}_{\hat a}) - \Gamma^k_{ij}\omega^{n+1}_{n+1},$$

$$\Delta\Gamma^k_{i\xi} = \nabla\Gamma^k_{i\xi} - 2a_{\gamma(i}\Gamma^{\hat a k}_{\xi)}\omega^\gamma_{\hat a} - a_{i\gamma}\Gamma^k_\xi\omega^\gamma_{n+1} - a_{\gamma\xi}\delta^k_i\omega^\gamma_{n+1} + \frac{2}{p+2}a_{i\xi}(\Gamma^{\hat a k}_\gamma\omega^\gamma_{\hat a} + \omega^k_{n+1} + \Gamma^k_\eta\omega^\eta_{n+1}) + \frac{2}{p+2}\Gamma^k_{i\xi}\omega^\gamma_\gamma + \Gamma^j_{i\xi}(\Gamma^k_\eta\omega^\eta_j - \Gamma^{\hat a k}_j\omega^{n+1}_{\hat a}) - \Gamma^k_{i\xi}\omega^{n+1}_{n+1},$$

$$\Delta\Gamma^k_{\xi\eta} = \nabla\Gamma^k_{\xi\eta} - 2a_{\gamma(\xi}\Gamma^{\hat a k}_{\eta)}\omega^\gamma_{\hat a} - 2a_{\gamma(\xi}\Gamma^k_{\eta)}\omega^\gamma_{n+1} + \frac{2}{p+2}a_{\xi\eta}(\omega^k_{n+1} + \Gamma^k_{\bar\eta}\omega^{\bar\eta}_{n+1} + \Gamma^{\hat a k}_\gamma\omega^\gamma_{\hat a}) + \frac{2}{p+2}\Gamma^k_{\xi\eta}\omega^\gamma_\gamma + \Gamma^i_{\xi\eta}(\Gamma^k_{\bar\eta}\omega^{\bar\eta}_i - \Gamma^{\hat a k}_i\omega^{n+1}_{\hat a}) - \Gamma^k_{\xi\eta}\omega^{n+1}_{n+1}; \qquad (8)$$

здесь и в дальнейшем в этом параграфе индексы принимают следующие значения:

$$i,j,k,\ell = 1,2,\dots,h; \quad \hat a,\hat b = p+3, p+4,\dots,n;$$

$$a,b = p+3, p+4,\dots,n+1; \quad \eta,\xi,\bar\eta = h+1,\dots,p+2.$$

Система величин $\Gamma_1=\{a_{\alpha\beta},\Gamma^i_\xi,\Gamma^{\hat a i}_\alpha,\Gamma^i_{\alpha\beta}\}$ образует фундаментальный объект первого порядка. Для конгруэнции субквадратичных элементов ($h=n-1$, $p=n-3$) этот объект является основным объектом многообразия [1],[11].

Рассмотрим множество точек p-мерной квадрики Q_p многообразия $(h,h,n)^2_p$, которые также принадлежат смежной квадрике. Такое множество, называемое фокальным многообразием квадрики Q_p, задается системой уравнений

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ x^a=0,\ d(a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta)=0,\ dx^\alpha=0. \quad (9)$$

Система (9) приводится к виду

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta\omega_i=0,\ \Gamma^{\hat a i}_\alpha x^\alpha\omega_i=0,\ (\Gamma^i_\xi x^\xi+x^i)\omega_i=0,$$
$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ x^a=0. \quad (10)$$

Определение. Алгебраическое многообразие пространства P_n, определяемое системой уравнений

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ \Gamma^{\hat a i}_\alpha x^\alpha=0,\ \Gamma^i_\xi x^\xi+x^i=0,$$
$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ x^a=0, \quad (11)$$

назовем сильно фокальным многообразием квадрики Q_p многообразия $(h,h,n)^2_p$. При

$$n\leqslant\frac{p(h+1)}{h} \quad (12)$$

квадрика $Q_p\in(h,h,n)^2_p$ обладает в общем случае сильно фокальным многообразием, причем при

$$n=\frac{p(h+1)}{h} \quad (13)$$

система уравнений (11) определяет алгебраическое многообразие нулевой размерности (2^{h+1}) степени. Таким образом, имеет место

Теорема 2. Если $n=\frac{p(h+1)}{h}$, то каждая p-мерная квадрика Q_p многообразия $(h,h,n)^2_p$ имеет в общем случае 2^{h+1} сильно фокальных точек.

§ 3. Конгруэнции коник в четырехмерном проективном пространстве

Рассмотрим в четырехмерном проективном пространстве трехмерное многообразие коник, двумерные плоскости которых образуют трехпараметрическое семейство, т.е. многообразие $(3,3,4)^2_1$. Как следует из теоремы 1, многообразие $(3,3,4)^2_1$ определяется с произволом восьми функций трех аргументов. Система (3) в рассматриваемом случае примет вид:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ x^4=0,\ x^5=0. \quad (14)$$

Здесь и в дальнейшем в этом параграфе $\alpha,\beta,\gamma,\eta=1,2,3$.

Замкнутая система дифференциальных уравнений многообразия $(3,3,4)^2_1$ примет вид:

$$\Theta_{\alpha\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma,\qquad \Delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\wedge\omega_\gamma=0,$$
$$\omega^4_\alpha=\Gamma^{4\gamma}_\alpha\omega_\gamma,\qquad \Delta\Gamma^{4\gamma}_\alpha\wedge\omega_\gamma=0, \quad (15)$$

где

$$\Delta\Gamma^\eta_{\alpha\beta}=\nabla\Gamma^\eta_{\alpha\beta}-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma^{4\eta}_\gamma\omega^5_4+\Gamma^\eta_{\alpha\beta}(\tfrac{2}{3}\omega^\gamma_\gamma-\omega^5_5)+$$
$$+\tfrac{2}{3}a_{\alpha\beta}\Gamma^{4\eta}_\gamma\omega^\gamma_4-2a_{\gamma(\alpha}\Gamma^{4\eta}_{\beta)}\omega^\gamma_4+\tfrac{2}{3}a_{\alpha\beta}\omega^\eta_5-$$
$$-2a_{\gamma(\alpha}\delta^\eta_{\beta)}\omega^\gamma_{n+1},$$
$$\Delta\Gamma^{4\gamma}_\alpha=\nabla\Gamma^{4\gamma}_\alpha-\Gamma^{4\beta}_\alpha\Gamma^{4\gamma}_\beta\omega^5_4+\Gamma^{4\gamma}_\alpha(\omega^4_4-\omega^5_5)+\delta^\gamma_\alpha\omega^5_4.$$

Фокальное многообразие коник Q_1 задается системой уравнений

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0\,, \quad x^4 = 0\,, \quad x^5 = 0\,,$$

$$[x^1(\Gamma^{42}_\gamma \Gamma^3_{\alpha\beta} - \Gamma^2_{\alpha\beta}\Gamma^{43}_\gamma) - x^2(\Gamma^{41}_\gamma \Gamma^3_{\alpha\beta} - \Gamma^1_{\alpha\beta}\Gamma^{43}_\gamma) + x^3(\Gamma^{41}_\gamma \Gamma^2_{\alpha\beta} - \Gamma^{42}_\gamma \Gamma^1_{\alpha\beta})]\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0\,, \tag{16}$$

которая определяет в P_4 алгебраическое многообразие нулевой размерности восьмой степени. Следовательно, в четырехмерном проективном пространстве у каждой коники Q_1 многообразия $(3,3,4)^2_1$ в общем случае имеется восемь фокальных точек. Таким образом, становится понятен геометрический смысл произвола задания многообразия $(3,3,4)^2_1$: для задания многообразия $(3,3,4)^2_1$ нужно задать 8 фокальных гиперповерхностей (8 функций трех аргументов), которых будет касаться многообразие $(3,3,4)^2_1$. Сильно фокальных многообразий у коники Q_1 многообразия $(3,3,4)^2_1$ в общем случае не существует, так как не выполняется неравенство (I2).

Для многообразия построен геометрический фиксированный репер $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, где A_1 и A_2 – фокальные точки коники Q_1, точка A_3 принадлежит двумерной плоскости коники Q_1 и полярно сопряжена с точками A_1 и A_2 относительно этой коники; точки A_4 и A_5 являются фокусами луча прямолинейной конгруэнции (ℓ), где ℓ – прямая, по которой пересекаются касательные гиперплоскости к фокальным гиперповерхностям (A_1) и (A_2) и гиперповерхности (E). Здесь $E = A_1 + A_2$ – фокус луча прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$.

Список литературы

I. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр.Моск.матем.о-ва", 1953, №2, с.275-382.

2. Лаптев Г.Ф. Распределение касательных элементов.-"Тр. геом.семинара ВИНИТИ АН СССР", 1971, с.29-48.

3. Малаховский В.С. Многообразия алгебраических элементов в п-мерном проективном пространстве.-"Литовский матем. сб.", 1963, 3, №2, с.2II-2I2.

4. Малаховский В.С. Многообразия алгебраических фигур в п-мерном однородном пространстве.- В кн.: 3-й Сибирской конференции по матем. и механике. Томск, 1964, с.8-10.

5. Малаховский В.С. Дифференциальна геометрия семейств квадрик.-В кн.: Первая республ.конф.матем.Белоруссии. Тезисы докл., 1964, с.40-44.

6. Малаховский В.С. Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов.-"Тр.Томского ун-та", 1964, 176, с.II-19.

7. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-"Тр.геом. семинара ВИНИТИ АН СССР", 1969, с.179-206.

8. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в п-мерном проективном пространстве.-"Тр.геом.семинара ВИНИТИ АН СССР", 1974, 6, с.113-133.

9. Махоркин В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.50-59.

10. Остиану Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве.-"Тр. геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР", 1969, с.247-262

11. Худенко В.Н. Об основном объекте $(n-1)$-мерного многообразия субквадратичных элементов.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6, Калининград, 1975, с. 222-227.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Ю.И.Шевченко

ОБ ОСНАЩЕНИЯХ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Известно, что поверхность в многомерном проективном пространстве можно рассматривать с двух точек зрения: 1/как многообразие точек (0-мерных плоскостей); 2/как голономное многообразие центрированных плоскостей. Если соприкасающаяся плоскость не заполняет всего пространства, то возможна третья точка зрения на поверхность как специальное многообразие пар плоскостей, одна из которых играет роль касательной плоскости, а другая-роль соприкасающейся плоскости. В каждом из трех случаев с поверхностью ассоциируется некоторое главное расслоение. Показано, что оснащение Бортолотти, нормализация Нордена и обобщенная нормализация (введенная в работе) позволяют задавать связности в соответствующих ассоциированных расслоениях.

Работа выполнена методом продолжений и охватов Г.Ф. Лаптева.

§ 1. Оснащение Бортолотти

Отнесем N-мерное проективное пространство P_N к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{J}}\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA_{\mathcal{J}'} = \Theta^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'} A_{\mathcal{K}'} \quad (\mathcal{I}', \mathcal{J}', \mathcal{K}' = 0, 1, \dots, N),$$

причем формы Пфаффа $\Theta^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\Theta^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'} = \Theta^{\mathcal{I}'}_{\mathcal{J}'} \wedge \Theta^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{I}'}.$$

В качестве инвариантных форм проективной группы $GP(N,R)$ будем рассматривать формы $\omega^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{K}'} = \Theta^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{K}'} - \delta^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{K}'} \Theta^0_0$, которые удовлетворяют структурным уравнениям [I],[2]:

$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{K}'} = \omega^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{K}'} \wedge \omega^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{J}'} - \delta^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{K}'} \omega^{\mathcal{J}} \wedge \omega_{\mathcal{J}},$$

где

$$\omega^{\mathcal{I}} = \omega^{\mathcal{I}}_0, \qquad \omega_{\mathcal{J}} = \omega^0_{\mathcal{J}} \qquad (\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 1, \dots, N).$$

В проективном пространстве P_N рассмотрим n-мерную поверхность X_n $(1 \le n < N)$ как n-мерное многообразие точек. Произведем специализацию подвижного репера $R_0 = \{A_0, A_{\mathcal{I}}\}$, совмещая вершину A_0 с точкой, описывающей поверхность X_n. Репер R_0 является репером нулевого порядка. Система дифференциальных уравнений поверхности X_n в репере R_0 имеет вид:

$$\omega^a = \Lambda^a_i \omega^i,$$

где $\quad i, j, k, l = 1, \dots, n; \quad a, b, c = n+1, \dots, N.$

Продолжая эту систему уравнений, получим

$$\overline{\nabla} \Lambda^a_{(i)} + \omega^a_i = \Lambda^a_{ij} \omega^j,$$

причем дифференциальный оператор $\overline{\nabla}$ действует следующим образом:

$$\overline{\nabla} \Lambda^a_{(i)} = d\Lambda^a_i - \Lambda^a_j \overline{\omega}^j_i + \Lambda^b_i \omega^a_b \quad (\overline{\omega}^j_i = \omega^j_i - \Lambda^a_i \omega^j_a).$$

Функции Λ^a_i образуют фундаментальный объект первого порядка. С поверхностью X_n в репере R_0 ассоциируется главное расслоение $G_0(X_n)$ со структурными уравнениями

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \overline{\omega}^i_j,$$

$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{K}} = \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \wedge \omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} + \omega^i \wedge \omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{K}i},$$

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{J}} = \omega^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}} \wedge \omega_{\mathcal{K}},$$

где

$$\omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{K}i} = -\delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{K}}(\omega_i + \Lambda^a_i \omega_a) - \omega_{\mathcal{K}}(\Delta^{\mathcal{I}}_i + \Delta^{\mathcal{I}}_a \Lambda^a_i),$$

причем обобщенный символ Кронекера $\Delta^{\mathcal{I}}_i$ совпадает с символом Кронекера δ^j_i, когда индекс $\mathcal{I}$ принимает значения индекса j, и равен нулю, когда индекс $\mathcal{I}$ принимает значения индекса a.

Базой главного расслоения $G_0(X_n)$ является поверхность X_n, а типовым слоем - подгруппа стационарности точки A_0. Такое главное расслоение называют [11] расслоением центропроективных (коаффинных) реперов.

Связность в главном расслоении $G_0(X_n)$ задается [3],[4] с помощью поля объекта связности $\Gamma = (\Gamma^{\mathcal{I}}_{\mathcal{K}i}, \Gamma_{\mathcal{J}i})$ на базе X_n:

$$\overline{\nabla}\Gamma^{\mathcal{I}}_{\mathcal{K}(i)} + \omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{K}i} = \Gamma^{\mathcal{I}}_{\mathcal{K}ij}\omega^j,$$

$$\overline{\nabla}\Gamma_{\mathcal{J}(i)} + \Gamma^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}i}\omega_{\mathcal{K}} = \Gamma_{\mathcal{J}ij}\omega^j.$$

Т е о р е м а . Для задания связности в ассоциированном расслоении $G_0(X_n)$ достаточно произвести оснащение Бортолотти [I2] поверхности X_n, т.е. к каждой точке поверхности присоединить гиперплоскость P_{N-1}, не проходящую через эту точку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Гиперплоскость P_{N-1} зададим уравнением
$$x^0 - \lambda_{\mathcal{J}} x^{\mathcal{J}} = 0,$$
причем
$$\nabla \lambda_{\mathcal{J}} + \omega_{\mathcal{J}}^0 = \lambda_{\mathcal{J}i}\,\omega^i,$$
где дифференциальный оператор ∇ действует обычным образом:
$$\nabla \lambda_{\mathcal{J}} = d\lambda_{\mathcal{J}} - \lambda_{\mathcal{K}}\,\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}}.$$

Оснащение Бортолотти задается полем квазитензора $\lambda_{\mathcal{J}}$ на базе X_n. Фундаментальный объект первого порядка Λ_i^a и оснащающий квазитензор $\lambda_{\mathcal{J}} = (\lambda_i, \lambda_a)$ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:
$$\Gamma_{\mathcal{K}i}^{\mathcal{J}} = -\delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}(\lambda_i + \Lambda_i^a \lambda_a) - \lambda_{\mathcal{K}}(\Delta_i^{\mathcal{J}} + \Delta_a^{\mathcal{J}} \Lambda_i^a),$$
$$\Gamma_{\mathcal{J}i} = -\lambda_{\mathcal{J}}(\lambda_i + \Lambda_i^a \lambda_a),$$
что и требовалось доказать.

§ 2. Нормализация Нордена

В проективном пространстве P_N рассмотрим [I, c.353] поверхность X_n как n-мерное многообразие n-мерных центрированных плоскостей T_n, обладающее свойствами: а/центр плоскости T_n описывает n-мерное многообразие; б/первая дифференциальная окрестность центра плоскости T_n принадлежит этой же плоскости. Произведем специализацию подвижного репера $R_1 = \{A_0, A_i, A_a\}$, помещая вершину A_0 в центр плоскости T_n, а вершины A_i — на плоскость T_n. Система дифференциальных уравнений поверхности X_n в репере R_1 имеет вид:
$$\omega^a = 0, \qquad \omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j. \qquad (1)$$

Замыкая первую подсистему системы уравнений (I), получим $\Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ji}^a$. Продолжая вторую подсистему, получим
$$\nabla \Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ijk}^a \omega^k.$$

С поверхностью X_n в репере R_1 ассоциируется главное расслоение $G_1(X_n)$ со структурными уравнениями
$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \qquad (2)$$
$$\mathcal{D}\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \qquad (3)$$
$$\mathcal{D}\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij}, \qquad (4)$$
$$\mathcal{D}\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^i \wedge \omega_{bi}^a,$$
$$\mathcal{D}\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^j \wedge \omega_{aj}^i,$$
$$\mathcal{D}\omega_a = \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^b \wedge \omega_b,$$
где
$$\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^a \omega_a^i - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j, \quad \omega_{ij} = \Lambda_{ij}^a \omega_a,$$
$$\omega_{bi}^a = -\Lambda_{ij}^a \omega_b^j - \delta_b^a \omega_i, \quad \omega_{aj}^i = -\delta_j^i \omega_a.$$

Базой главного расслоения $G_1(X_n)$ является поверхность X_n, а типовым слоем-подгруппа стационарности $G_1 \subset GP(N,R)$ центрированной касательной плоскости T_n. Это расслоение содержит расслоение коаффинных реперов $H_1(X_n)$ со структурными уравнениями (2)-(4), типовой слой которого есть коаффинная группа $GA^*(n,R) \subset G_1$, действующая в центрированной касательной плоскости T_n.

Связность в главном расслоении $G_1(X_n)$ зададим с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = (\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}, \Gamma_{ai})$$

на базе X_n:

$$\nabla \Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l,$$

$$\nabla \Gamma_{ij} + \Gamma^k_{ij}\omega_k + \omega_{ij} = \Gamma_{ijk}\omega^k,$$

$$\nabla \Gamma^a_{bi} + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{bij}\omega^j,$$

$$\nabla \Gamma^i_{aj} - \Gamma^i_{kj}\omega^k_a + \Gamma^b_{aj}\omega^i_b + \omega^i_{aj} = \Gamma^i_{ajk}\omega^k,$$

$$\nabla \Gamma_{ai} + \Gamma^b_{ai}\omega_b - \Gamma_{ji}\omega^j_a + \Gamma^j_{ai}\omega_j = \Gamma_{aij}\omega^j$$

Л е м м а I. Для задания связности в ассоциированном расслоении $G_1(X_n)$ достаточно к каждой касательной плоскости T_n присоединить: I/ $(N-n-1)$-мерную плоскость P_{N-n-1}, не имеющую общих точек с касательной плоскостью T_n (плоскость Картана [I3]); 2/$(n-1)$-мерную плоскость P_{n-1}, принадлежащую касательной плоскости T_n и не проходящую через ее центр (нормаль второго рода в смысле А.П.Нордена).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Плоскость Картана P_{N-n-1} зададим системой точек

$$B_a = A_a + \lambda^i_a A_i + \lambda_a A_0,$$

причем [5, с.245]

$$\nabla \lambda^i_a + \omega^i_a = \lambda^i_{aj}\omega^j, \qquad (5)$$

$$\nabla \lambda_a + \lambda^i_a\omega_i + \omega_a = \lambda_{ai}\omega^i.$$

Нормаль второго рода P_{n-1}[6] зададим системой точек

$$B_i = A_i + \lambda_i A_0,$$

причем

$$\nabla \lambda_i + \omega_i = \lambda_{ij}\omega^j.$$

Оснащение, указанное в лемме I, задается полем квазитензора $\lambda = (\lambda^i_a, \lambda_a, \lambda_i)$ на базе X_n. Фундаментальный тензор Λ^a_{ij} и оснащающий квазитензор λ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\lambda^i_a - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j, \qquad (6)$$

$$\Gamma_{ij} = \Lambda^a_{ij}\lambda_a - \lambda_i\lambda_j,$$

$$\Gamma^a_{bi} = -\Lambda^a_{ij}\lambda^j_b - \delta^a_b\lambda_i,$$

$$\Gamma^i_{aj} = \delta^i_j(\lambda^k_a\lambda_k - \lambda_a) - \Lambda^b_{jk}\lambda^k_a\lambda^i_b,$$

$$\Gamma_{ai} = \lambda^j_a(\lambda_i\lambda_j - \Lambda^b_{ij}\lambda_b) - \lambda_a\lambda_i.$$

Л е м м а 2. Присоединение к каждой касательной плоскости T_n нормали первого рода в смысле А.П.Нордена позволяет определить оснащение Картана поверхности X_n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нормаль первого рода P_{N-n} [6], пересекающую касательную плоскость T_n лишь в ее центре, зададим системой уравнений

$$x^i - \lambda^i_a x^a = 0,$$

причем функции λ^i_a удовлетворяют уравнениям (5). Продолжая систему уравнений (5), получим

$$\nabla \lambda^i_{aj} - \lambda^i_b\omega^b_{aj} + \lambda^k_a\omega^i_{kj} + \omega^i_{aj} = \lambda^i_{ajk}\omega^k.$$

Фундаментальный тензор Λ^a_{ij} и квазитензор λ^i_a вместе со своим продолжением λ^i_{aj} позволяют охватить функции λ_a (которые вместе с квазитензором λ^i_a определяют плоскость Картана) по формулам:

$$\lambda_a = \frac{1}{n}\left(\Lambda^b_{ij}\lambda^i_a\lambda^j_b - \lambda^i_{ai}\right).$$

Т е о р е м а. Нормализация Нордена поверхности X_n позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_1(X_n)$.

З а м е ч а н и е I. Из формул (6) следует,что объект $\Gamma^i_{jk}\subset\Gamma$,который с точки зрения расслоенных пространств естественно называть объектом линейной связности [I4],охвачен симметричным образом.Для поверхности в аффинном пространстве охват объекта Γ^i_{jk} осуществлен Г.Ф.Лаптевым [7].

З а м е ч а н и е 2. Лемму 2 доказала Н.М.Остиану [5,с.257].Геометрическая характеристика построенной плоскости Картана найдена Е.Т.Ивлевым [8].Для поверхности,несущей сеть сопряженных линий,этот вопрос рассматривал М.А.Акивис [9].

З а м е ч а н и е 3. Л.С.Атанасян доказал теорему [I0,с.I6],аналогичную нашей,для многокомпонентного объекта связности другой природы.

§ 3. Обобщенная нормализация

В случае выполнения неравенства $N>\frac{1}{2}n(n+3)$ поверхность X_n проективного пространства P_N можно рассматривать с третьей точки зрения: как n-мерное многообразие пар плоскостей $(T_n, T_{\frac{1}{2}n(n+3)})$,обладающее свойствами: а/центрированная плоскость T_n принадлежит плоскости $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$;

б/первая дифференциальная окрестность центра плоскости T_n принадлежит этой же плоскости;в/вторая дифференциальная окрестность центра плоскости T_n принадлежит плоскости $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$.Произведем специализацию подвижного репера $R_2=\{A_0, A_i, A_\alpha, A_u\}$,помещая вершину A_0 в центр плоскости T_n ,вершины A_i -на плоскость T_n ,вершины A_α -на плоскость $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$.Здесь и в дальнейшем новые индексы принимают значения:

$$\alpha,\beta,\gamma = n+1,\dots,\tfrac{1}{2}n(n+3);\quad u,v,w=\tfrac{1}{2}n(n+3)+1,\dots,N.$$

Система дифференциальных уравнений поверхности X_n в репере R_2 имеет вид:

$$\omega^\alpha=0,\quad \omega^u=0,\quad \omega^u_i=0, \qquad (1)$$

$$\omega^\alpha_i=\Lambda^\alpha_{ij}\omega^j,\quad \omega^u_\alpha=\Lambda^u_{\alpha i}\omega^i. \qquad (2)$$

Замыкая систему уравнений (I),получим

$$\Lambda^\alpha_{ij}=\Lambda^\alpha_{ji},\quad \Lambda^\alpha_{ij}\Lambda^u_{\alpha k}=\Lambda^\alpha_{ik}\Lambda^u_{\alpha j}.$$

Продолжая систему уравнений (2),получим

$$\nabla\Lambda^\alpha_{ij}=\Lambda^\alpha_{ijk}\omega^k,\quad \nabla\Lambda^u_{\alpha i}=\Lambda^u_{\alpha ij}\omega^j,$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует обычным образом:

$$\nabla\Lambda^u_{\alpha i}=d\Lambda^u_{\alpha i}-\Lambda^u_{\alpha j}\omega^j_i-\Lambda^u_{\beta i}\omega^\beta_\alpha+\Lambda^v_{\alpha i}\omega^u_v.$$

С поверхностью X_n в репере R_2 ассоциируется,в частности,главное расслоение $H_2(X_n)$со структурными уравнениями

$$\mathcal{D}\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j,$$

$$\mathcal{D}\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk},$$
$$\mathcal{D}\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij},$$
$$\mathcal{D}\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_{\beta i},$$
$$\mathcal{D}\omega^i_\alpha = \omega^j_\alpha \wedge \omega^i_j + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^i_\beta + \omega^j \wedge \omega^i_{\alpha j},$$
$$\mathcal{D}\omega_\alpha = \omega^i_\alpha \wedge \omega_i + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + \omega^i \wedge \omega_{\alpha i},$$

где

$$\omega^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jk}\omega^i_\alpha - \delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j,$$
$$\omega_{ij} = \Lambda^\alpha_{ij}\omega_\alpha, \quad \omega_{\alpha i} = \Lambda^u_{\alpha i}\omega_u,$$
$$\omega^\alpha_{\beta i} = \Lambda^u_{\beta i}\omega^\alpha_u - \Lambda^\alpha_{ij}\omega^j_\beta - \delta^\alpha_\beta\omega_i,$$
$$\omega^i_{\alpha j} = \Lambda^u_{\alpha j}\omega^i_u - \delta^i_j\omega_\alpha.$$

Базой главного расслоения $H_2(X_n)$ является поверхность X_n, а типовым слоем – группа $H_2 \subset GP(N,R)$, действующая на паре плоскостей $(T_n, T_{\frac{1}{2}n(n+3)})$. Связность в главном расслоении $H_2(X_n)$ зададим с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = (\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^i_{\alpha j}, \Gamma_{\alpha i}),$$

компоненты которого удовлетворяют почти таким же уравнениям, как в §2 (лишь в последней системе уравнений добавляются формы $\omega_{\alpha i}$).

Л е м м а I. Для задания связности в ассоциированном расслоении $H_2(X_n)$ достаточно к каждой паре плоскостей $(T_n, T_{\frac{1}{2}n(n+3)})$ присоединить: а/ нормаль второго рода P_{n-1} в смысле А.П.Нордена; б/ $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$-мерную плоскость $P_{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)}$, принадлежащую соприкасающейся плоскости $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ и не имеющую общих точек с касательной плоскостью T_n; в/ $(N-\frac{1}{2}n(n+3)-1)$-мерную плоскость $P_{N-\frac{1}{2}n(n+3)-1}$, не имеющую общих точек с соприкасающейся плоскостью $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нормаль второго рода P_{n-1} определяется квазитензором λ_i (см. §2). Плоскости, указанные в пунктах б, в, зададим системами точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda^i_\alpha A_i + \lambda_\alpha A_0,$$
$$B_u = A_u + \lambda^\alpha_u A_\alpha + \lambda^i_u A_i + \lambda_u A_0,$$

причем

$$\nabla\lambda^i_\alpha + \omega^i_\alpha = \lambda^i_{\alpha j}\omega^j, \tag{3}$$
$$\nabla\lambda_\alpha + \lambda^i_\alpha\omega_i + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\omega^i.$$
$$\nabla\lambda^\alpha_u + \omega^\alpha_u = \lambda^\alpha_{ui}\omega^i, \tag{4}$$
$$\nabla\lambda^i_u + \lambda^\alpha_u\omega^i_\alpha + \omega^i_u = \lambda^i_{uj}\omega^j, \tag{5}$$
$$\nabla\lambda_u + \lambda^i_u\omega_i + \lambda^\alpha_u\omega_\alpha + \omega_u = \lambda_{ui}\omega^i.$$

Оснащение, указанное в лемме I, задается полем квазитензора

$$\lambda = (\lambda_i, \lambda^i_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda^\alpha_u, \lambda^i_u, \lambda_u)$$

на базе X_n. Фундаментальный объект $\Lambda = (\Lambda^\alpha_{ij}, \Lambda^u_{\alpha i})$ и оснащающий квазитензор λ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_\alpha - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j,$$

$$\Gamma_{ij} = \Lambda^\alpha_{ij}\lambda_\alpha - \lambda_i\lambda_j,$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta i} = \Lambda^u_{\beta i}\lambda^\alpha_u - \Lambda^\alpha_{ij}\lambda^j_\beta - \delta^\alpha_\beta\lambda_i,$$

$$\Gamma^i_{\alpha j} = \Lambda^u_{\alpha j}\lambda^i_u - \delta^i_j(\lambda_\alpha - \lambda^k_\alpha\lambda_k) - \Lambda^\beta_{jk}\lambda^i_\beta\lambda^k_\alpha,$$

$$\Gamma_{\alpha i} = \Lambda^u_{\alpha i}\lambda_u - \lambda_i(\lambda_\alpha - \lambda^j_\alpha\lambda_j) - \Lambda^\beta_{ij}\lambda^j_\alpha\lambda_\beta.$$

О п р е д е л е н и е. Обобщенной нормализацией поверхности X_n назовем присоединение к каждой паре плоскостей $(T_n, T_{\frac{1}{2}n(n+3)})$ следующих геометрических образов: 1/нормали второго рода P_{n-1} в смысле А.П.Нордена; 2/$\frac{1}{2}n(n+1)$-мерной плоскости $P_{\frac{1}{2}n(n+1)}$, принадлежащей соприкасающейся плоскости $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ и пересекающей касательную плоскость T_n лишь в ее центре; 3/ $(N-\frac{1}{2}n(n+3))$-мерной плоскости $P_{N-\frac{1}{2}n(n+3)}$, пересекающей соприкасающуюся плоскость $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ в той же точке.

Л е м м а 2. Обобщенная нормализация поверхности позволяет построить оснащение, указанное в лемме I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Плоскости, описанные в пунктах 2, 3 определения, зададим системами уравнений

$$x^u = 0, \quad x^i - \lambda^i_\alpha x^\alpha = 0;$$

$$x^\alpha - \lambda^\alpha_u x^u = 0, \quad x^i - \lambda^i_u x^u = 0,$$

причем функции λ^i_α, λ^α_u, λ^i_u удовлетворяют уравнениям (3), (4), (5) соответственно. Продолжая систему уравнений (3)-(5), получим

$$\nabla\lambda^i_{\alpha j} - \lambda^i_\beta\omega^\beta_{\alpha j} + \lambda^k_\alpha\omega^i_{kj} + \omega^i_{\alpha j} = \lambda^i_{\alpha jk}\omega^k,$$

$$\nabla\lambda^\alpha_{ui} + \lambda^\beta_u\omega^\alpha_{\beta i} - \lambda^\alpha_v\omega^v_{ui} - \Lambda^\alpha_{ij}\omega^j_u = \lambda^\alpha_{uij}\omega^j,$$

$$\nabla\lambda^i_{uj} + \lambda^k_u\omega^i_{kj} - \lambda^i_v\omega^v_{uj} + \lambda^\alpha_{uj}\omega^i_\alpha + \lambda^\alpha_u\omega^i_{\alpha j} - \delta^i_j\omega_u = \lambda^i_{ujk}\omega^k,$$

где

$$\omega^u_{vi} = -\delta^u_v\omega_i - \Lambda^u_{\alpha i}\omega^\alpha_v.$$

Обобщенная нормализация поверхности X_n задается полем квазитензора $\bar{\lambda} = (\lambda_i, \lambda^i_\alpha, \lambda^\alpha_u, \lambda^i_u)$ на базе X_n. Доказательство сводится к построению компонент λ_α, λ_u, которые в совокупности с нормализующим квазитензором $\bar{\lambda}$ образуют оснащающий квазитензор λ. Фундаментальный объект Λ и компоненты $\lambda^i_\alpha, \lambda^\alpha_u, \lambda^i_u$ нормализующего квазитензора вместе со своими продолжениями $\lambda^i_{\alpha j}$, λ^α_{ui}, λ^i_{uj} позволяют охватить компоненты λ_α, λ_u по формулам:

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{n}(\Lambda^u_{\alpha i}\mu^i_u + \Lambda^\beta_{ij}\lambda^j_\alpha\lambda^i_\beta - \lambda^i_{\alpha i}),$$

$$\lambda_u = \frac{1}{n}[\lambda^i_\alpha(\lambda^\alpha_{ui} + \Lambda^\alpha_{ij}\lambda^j_u) + \Lambda^v_{\alpha i}\lambda^\alpha_u\mu^i_v - \lambda^i_{ui}],$$

где

$$\mu^i_u = \lambda^i_u - \lambda^\alpha_u\lambda^i_\alpha.$$

Т е о р е м а. Обобщенная нормализация поверхности X_n позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $H_2(X_n)$.

П р е д л о ж е н и е. Обобщенную нормализацию поверхности X_n можно представить в другой геометрической форме, а именно, к каждой паре плоскостей $(T_n, T_{\frac{1}{2}n(n+3)})$

присоединять нормали первого и второго рода в смысле А.П. Нордена, а также нормаль третьего рода- $(N-\frac{1}{2}n(n+1))$ - мерную плоскость $P_{N-\frac{1}{2}n(n+1)}$, пересекающую соприкасающуюся плоскость $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ по касательной плоскости T_n.

Доказательство. Нормали первого и второго рода зададим системами уравнений

$$x^i-\lambda^i_\alpha x^\alpha-\mu^i_u x^u=0, \quad x^\alpha-\lambda^\alpha_u x^u=0,$$

где функции λ^i_α, λ^α_u удовлетворяют уравнениям (3),(4), а функции μ^i_u —следующим уравнениям:

$$\nabla\mu^i_u-\lambda^i_\alpha\omega^\alpha_u+\omega^i_u=\mu^i_{uj}\omega^j.$$

Нормаль второго рода входит в обе формы обобщенной нормализации, поэтому в доказательстве не участвует.

Плоскости, указанные в пунктах 2, 3 определения, и касательная плоскость T_n дают возможность построить нормали первого и третьего рода:

$$P_{N-n}=P_{\frac{1}{2}n(n+1)}\cup P_{N-\frac{1}{2}n(n+3)},$$

$$P_{N-\frac{1}{2}n(n+1)}=P_{N-\frac{1}{2}n(n+3)}\cup T_n.$$

Обратно, нормали первого и третьего рода вместе с соприкасающейся плоскостью $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ дают

$$P_{\frac{1}{2}n(n+1)}=P_{N-n}\cap T_{\frac{1}{2}n(n+3)},$$

$$P_{N-\frac{1}{2}n(n+3)}=P_{N-n}\cap P_{N-\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

Аналитически эквивалентность двух форм обобщенной нормализации обосновывается подобием геометрических

объектов $(\lambda^i_\alpha, \lambda^\alpha_u, \lambda^i_u)$, $(\lambda^i_\alpha, \lambda^\alpha_u, \mu^i_u)$.

Список литературы

I.Лаптев Г.Ф.Дифференциальная геометрия погруженных многообразий."Тр.Моск.матем.о -ва",т.2,1953,с.275-382.

2.Лумисте Ю.Г.Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях."Уч.зап.Тартуск.ун-та", вып.177,1965,с.6-41.

3.Лаптев Г.Ф.Многообразия,погруженные в обобщенные пространства."Тр.4-го Всесоюзн.матем.съезда",1961,т.2,Л., "Наука",1964,с.226-233.

4.Остиану Н.М.,Рыжков В.В.,Швейкин П.И. Очерк научных исследований Г.Ф.Лаптева."Тр.Геом.семинара",т.4,М.,1973,с.7-68.

5.Остиану Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства."Тр.Геом.семинара",т.I,М.,1966, с.239-263.

6.Норден А.П.Пространства аффинной связности.М.-Л., Гостехиздат,1950.

7.Лаптев Г.Ф.Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности.ДАН СССР,1959,т.126,№3, с.409-413.

8.Ивлев Е.Т.О многообразии $E(o, n-m, m)$ в n-мерном проективном пространстве P_n $(m>2, n>m(m+1))$."Сибирский матем.журнал",1967,т.8,№5,с.1143-1155.

9.Акивис М.А.Об инвариантном оснащении поверхности, несущей сеть сопряженных линий."Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина", №374,т.I,1970,с.18-27.

10.Атанасян Л.С.К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства."Уч.зап.МГПИ им. В.И.Ленина",т.108,вып.2,,1957,с.3-44.

11. Cattaneo – Gasparini J. Sulle connessioni infinitesimali nello spazio fibrato dei riferimenti affini di una V_n. Rend. mat. e applic., 17, № 3-4, 1958, 327-404.

12. Bortolotti E. Connessioni nelle varieta luogo di spazi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81-89.

13. Cartan E. Les espaces a connexion projective. Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу, 1937, 4, 147-159.

14. Legrand G. Connexions infinitesimales definies sur l'espace fibre des reperes affines d'une variete differentiable. C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 6, 586-588.

Семинар
по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском государственном университете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 26 мая 1976 года.

Ниже приводится план работы семинара с 13 октября 1976 года по 25 мая 1977 года.

13.10.1976г. В.С.Малаховский. Группы Ли, порожденные фигурами однородного пространства.

20.10.1976г. Е.А.Хляпова. Конгруэнции оснащенных квадратичных элементов в n-мерном аффинном пространстве.

27.10.1976г. Л.Г.Корсакова. О некоторых характеристиках расслояемых пар конгруэнций фигур.

3.11.1976г. Ю.И.Попов. О полях геометрических объектов многомерной распадающейся гиперполосы проективного пространства.

10.11.1976г. Т.П.Фунтикова. Безынтегральное представление одного класса вырожденных конгруэнций.

17.11.1976г. Е.В.Скрыдлова. О вырожденных конгруэнциях, порожденных кривой второго порядка и точкой.

24.11.1976г. Ю.И.Шевченко. Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства.

1.12.1976г. Г.П.Ткач. Об одном классе многообразий пар фигур в A_3.

8.12.1976г. В.Н.Худенко. О многообразиях многомерных квадрик в проективном пространстве.

15.12.1976г. В.С.Малаховский. Поверхности, нормали которых ортогонально пересекают линию.

22.12.1976г. Е.А.Митрофанова. Об одном классе конгруэнций гиперболических параболоидов в трехмерном эквиаффинном пространстве.

22.12.1976г.Е.П.С о п и н а.Конгруэнции эллипсоидов с фокальной конгруэнцией эллипсов.

9.2.1977г.Н.П о л и щ у к.О конгруэнциях коник с одной вырождающейся фокальной поверхностью.

16.2.1977г.Н.Е р м а к о в а.Конгруэнции коник,характеристическая точка плоскостей которых инцидентна конике.

2.3.1977г.И.Л о м о в ц е в а.Оснащенные вырожденные гиперполосы многомерного проективного пространства.

9.3.1977г.Л.П е р е л ы г и н а.Оснащенные регулярные гиперполосы многомерного проективного пространства.

16.3.1977г.Т.А н д р е е в а.Многообразие фигур в P_n, порожденных прямой и гиперквадрикой.

23.3.1977г.О.В е р б н я к.Многообразия гиперцилиндров в n-мерном аффинном пространстве.

30.3.1977г.Н.Б е з с м е р т н а я.Многообразия центральных квадратичных элементов в четырехмерном аффинном пространстве.

6.4.1977г.В.С.М а л а х о в с к и й.Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве.

13.4.1977г.Е.Ч е р е п о в.Конгруэнция квадрик в P_3 с двумя вырождающимися фокальными поверхностями.

20.4.1977г.С.К и ш т а н о в а.Конгруэнция квадрик в P_3,касающихся двух плоскостей.

27.4.1977г. М.Б о я р ч е н к о.Многообразия нецентральных квадратичных элементов в четырехмерном аффинном пространстве.

4.5.1977г.А.Х о м и ч.Некоторые типы конгруэнций квадрик с вырождающимися фокальными поверхностями.

11.5.1977г.А.Д м о в с к а я.Конгруэнции пар парабол в трехмерном аффинном пространстве.

18.5.1977г.О.П о л и н.Конгруэнция параболоидов в E_3.

25.5.1977г.Л.Т и т о в а.Многообразие полуквадратичных пар фигур в n-мерном аффинном пространстве.

УДК 513.73

О специальных три - тканях на V_2 в E_3 . Величкин В.Н. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып. 8, Калининград, 1977, с. 5_-9.

Изучаются связности, индуцированные три-тканью, заданной на поверхности евклидова пространства

Библиография : 4 названия.

УДК 513.73

О сети двойных линий на паре гиперповерхностей четырехмерного проективного пространства. Д у л а л а е в а Т. А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып. 8, Калининград, 1977, с. 10-17.

Рассмотрены пары гиперповерхностей в проективном четырехмерном пространстве и получено условие голономности сети двойных линий.

Библиография : 6 названий.

УДК 513.73

О некоторых характеристиках расслояемых пар конгруэнций фигур. К о р с а к о в а Л. Г. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 8, Калининград, 1977, с. 18- 31.

Дается обобщение понятия расслоения для пар конгруэнций некоторых типов фигур трехмерного проективного пространства.

Библиография: 4 названия.

УДК 513.73

Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве. М а л а х о в с к и й В.С. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып. 8, 1977, с. 32-38.

Рассмотрены конгруэнции линейчатых квадрик. Получен характеристический признак конгруэнции квадрик Ли.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Об одном классе конгруэнций гиперболических параболоидов в трехмерном эквиаффинном пространстве. М и т р о ф а н о в а Е.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.8, Калининград, 1977, с. 39-42.

Исследуется специальный тип конгруэнции гиперболических параболоидов. Показано, что параболоиды, конгруэнции этого типа, огибают линейчатую поверхность вдоль их общих прямолинейных образующих.

Библиография: 1 название.

УДК 513.73

О полях геометрических объектов многомерной распадающейся гиперполосы проективного пространства. П о п о в Ю.И. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.8, Калининград, 1976, с.43-70.

Построены поля геометрических объектов в окрестностях второго и третьего порядков элемента распадающейся гиперполосы. Дана геометрическая интерпретация некоторых геометрических оснащающих объектов гиперполосы.

Библиография: 11 названий.

УДК 513.73

О вырожденных конгруэнциях, порожденных кривой второго порядка и точкой. С к р ы д л о в а Е.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.8, Калининград, 1977, с. 71-76.

Изучается вырожденные конгруэнции, образованные коникой и точкой. Установлен ряд геометрических свойств специальных типов таких конгруэнций.

Б и б л и о г р а ф и я: 4 названия.

УДК 513.73.

Конгруэнции эллипсоидов с фокальной конгруэнцией эллипсов. С о п и н а Е.П. "Дифференциальная геометрия мнообразий фигур", Вып.8, Калининград, 1977, с. 77-81.

В трехмерном аффинном пространстве рассмотрена конгруэнция эллипсоидов, имеющая фокальную конгруэнцию эллипсов. Для специального класса таких конгруэнций получено безынтегральное представление.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Аффинные связности на нормализованном распределении m-мерных линейных элементов. С т о л я р о в А.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып.8. 1977, с. 82-96.

Рассмотрены некоторые вопросы внутренней геометрии нормализованного распределения m-мерных линейных элементов пространства проективной связности

Библиография: 17 названий.

УДК 513.73

Об одном классе многообразий пар фигур в A_3. Т к а ч Г.П. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.8, 1977, с. 97-109.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается конгруэнция пар фигур, образованных параболой и прямой. Исследованы некоторые специальные классы таких многообразий.

Библиография: 1 название.

УДК 513.73

Безынтегральное представление одного класса вырожденных конгруэнций $(LP)_{2,1}$ Ф у н т и к о в а Т.П. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.8, 1977, с. 110-117.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции пар фигур, порожденных прямой и точкой. Дано безынтегральное представление специального класса таких конгруэнций.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Конгруэнции оснащенных квадратичных элементов в n-мерном аффинном пространстве. Х л я п о в а Е.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.8, Калининград, 1977, с. 118-125.

Введено понятие псевдофокальных точек оснащенного квадратичного элемента конгруэнции. Найдена их геометрическая характеристика в трехмерном аффинном пространстве.

Библиография: 1 название.

УДК 513.73

О многообразиях многомерных квадрик в проективном пространстве. Х у д е н к о В.Н. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.8, Калининград, 1977, с. 126-134.

Изучаются фокальные образы многообразий Р-мерных квадрик. Введено понятие сильно фокального многообразия квадрики.

Библиография: 11 названий.

УДК 513.73

Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства. Ш е в ч е н к о Ю.И. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Вып.8, Калининград, 1977, с. 135-150.

Показано, что оснащение Бортолотти, нормализация Нордена и обобщенная нормализация (введенная в работе) позволяют задавать связности в соответствующих ассоциированных расслоениях.

Библиография: 14 названий.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 8

Редактор В. И. Васильева. Техн. ред. Н. Д. Шишкова. Корректор С. А. Сахарова.
Сдано в набор 24/V 1977. Подписано к печати 13/VII 1977 г. Формат бумаги $60 \times 90^1/_{16}$.
Сорт бумаги офсетная № 1, 80 г/м. Печ. л. Уч.-изд. л. 10. КУ 04270. Заказ 15465.
Тираж 500 экз. Цена 1 руб.
Калининградский государственный университет, ул. Университетская, 2
Типография издательства «Калининградская правда», у. Калининград, ул. Карла Маркса, 18.

1 руб.