Министерство высшего и среднего
специального образования РСФСР
Калининградский Государственный университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 4

Калининград - 1974

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 4.

г.Калининград- 1974 год.

Подписано к печати 28.II.73. КУ-02779. Заказ 044. Тираж 500. Формат 60 х 84/I6. Объем II,39 усл.п.л.

Цена 60 коп.

Ротапринт Клайпедского отделения Гипрорыбфлот – 235802, г. Клайпеда Лит. ССР, Миниос, 2.

ОТ РЕДАКЦИИ

Межвузовский сборник "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" издается один раз в год при Калининградском государственном университете.

Статьи, публикуемые в выпуске 4 этого сборника, посвящены следующим вопросам:

I)Многообразия фигур и пар фигур в проективном пространстве (В.Б.Ким, Л.Г.Корсакова, В.С.Малаховский, В.В.Махоркин, В.М.Овчинников, Г.Л.Светникова, Е.В.Скрыдлова).

2)Многообразия пар фигур в эквиаффинном и аффинном пространствах (Ф.А.Липатова, Т.П.Новожилова, Г.П.Ткач, Е.А.Хляпова).

3)Касательно оснащенные многообразия фигур в трехмерном проективном пространстве.(В.С.Малаховский)

4)Теория гиперполос в многомерном проективном пространстве .(Ю.И.Попов)

5)Нормализация многомерной поверхности в пространстве проективной связности.(Е.Т.Ивлев).

Содержание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

И в л е в Е.Т.

ОБ ОДНОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ.

В пространстве проективной связности $P_{n,n}$ геометрически строятся нормали первого и второго рода в смысле Нордена А.П. m -поверхности S_m с заданным полем гиперплоскостей, проходящих через соответствующие m -плоскости L_m, касательные к S_m.

§I. Аналитический аппарат.

Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,n}$ с n -мерной базой и n -мерными слоями P_n, определенное формами ω^K_J, которые подчинены следующим структурным уравнениям

$$D\omega^J_K = \omega^L_K \wedge \omega^J_L + R^J_{Kij}\,\omega^i \wedge \omega^j,$$

$$\omega^L_L = 0 \qquad (1)$$

$(J,K,L,M = 0,1,\dots,n;\quad i,j,k,l = 1,\dots,n)$

Это пространство является расслоенным пространством, базой которого служит n -мерное дифференцируемое многообразие. Локальные координаты $u^1,\dots,u^n$ точки A базы являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы форм ω^i. Слоем (u), соответствующим точке A базы, является n -мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $T = \{A_0(u), A_1(u), \dots, A_n(u)\}$. При этом I-формы ω^K_J определяют главную линейную часть отображения локального проективного пространства $P_n(u+du)$ точки $A(u+du)$ базы пространства $P_{n,n}$ на исходное пространство $P_n(u)$:

$$A_J(u+du) \to A_J(u,du) \cong A_J(u) + \omega^K_J A_K(u).$$

Здесь предполагается, что $A = A_0$. В формулах (I) тензор кручения-кривизны R^K_{Jij} кососимметричен по индексам i и j.

Рассмотрим в P_n некоторую m -мерную поверхность (m -поверхность) S_m, текущей точкой которой является точка A_0. Тогда дифференциальные уравнения m -поверхности S_m можно записать в виде:

$$\omega_0^{\hat\alpha} = \Lambda^{\hat\alpha}_\alpha\,\omega_0^\alpha,\quad (\alpha,\beta,\gamma,\sigma,\mu = 1,\dots,m;\ \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma,\hat\sigma,\hat\mu = m+1,\dots,n) \qquad (2)$$

$$\Delta\Lambda^{\hat\alpha}_\beta \wedge \omega_0^\beta = 0, \qquad (3)$$

где

$$\Delta\Lambda^{\hat i}_\beta = d\Lambda^{\hat i}_\beta - \Lambda^{\hat i}_\alpha\omega^\alpha_\beta - \Lambda^{\hat i}_\alpha\Lambda^{\hat\beta}_\beta\omega^\alpha_{\hat\beta} + \omega^{\hat i}_\beta + \Lambda^{\hat\gamma}_\beta\omega^{\hat i}_{\hat\gamma} -$$
$$-(\tilde R^{\hat i}_{o\alpha\beta} + \Lambda^{\hat i}_\sigma \tilde R^\sigma_{o\beta\alpha})\,\omega^\alpha_o, \qquad (4)$$

$$\tilde R^i_{o\alpha\beta} = R^i_{o\alpha\beta} + R^i_{o\alpha\hat\beta}\Lambda^{\hat\beta}_\beta + R^i_{o\hat\gamma\beta}\Lambda^{\hat\gamma}_\alpha + R^i_{o\hat\beta\hat\gamma}\Lambda^{\hat\beta}_\alpha\Lambda^{\hat\gamma}_\beta .$$

Здесь и в дальнейшем формы ω^β_o выбираются за базисные.

Развертывая по лемме Картана уравнения (3), получаем

$$\Delta\Lambda^{\hat i}_\beta = \Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma_o . \qquad (5)$$

Здесь величины $\Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma}$ симметричны по индексам β и γ

Проективный репер T локального проективного пространства P_n (слоя) точки A_o m -поверхности S_m выбираем так, чтобы m -плоскость

$$L_m = (A_o\, A_1 \,\ldots\, A_m) \qquad (6)$$

являлась касательной m -плоскостью S_m в точке A_o. Так как при смещении точки A_o по поверхности S_m смещение её образа в исходном слое $P_n(u)$ определяется по формуле

$$A_o(u, du) - A_o(u) = \omega^o_o A_o + \omega^\alpha_o A_\alpha + \omega^{\hat i}_o A_{\hat i} + [2],$$

а главные линейные части этих смещений в слое определяют касательную m -плоскость (6) к S_m в точке A_o, то

$$\omega^{\hat i}_o = 0 . \qquad (7)$$

Из (2) в силу (7) заключаем, что

$$\Lambda^{\hat i}_\alpha = 0 . \qquad (8)$$

Соотношения (4) и (5) с учетом (8) дают

$$\omega^{\hat i}_\beta = \Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma . \qquad (9)$$

где

$$\Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma} = \Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma} + R^{\hat i}_{o\gamma\beta} . \qquad (10)$$

Здесь величины $\Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma}$ симметричны, а величины $R^{\hat i}_{o\gamma\beta}$ кососимметричны по индексам β и γ.

Продолжение системы (9) приводит как и в [3](стр.II2-II3), к системе дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют компоненты геометрического объекта $\{\Lambda^{\hat i}_{\alpha\beta}\}$ [I]:

$$\Delta\Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma} \equiv d\Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma} + \Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma}\omega^o_o - \Lambda^{\hat i}_{\sigma\gamma}\omega^\sigma_\beta - \Lambda^{\hat i}_{\beta\sigma}\omega^\sigma_\gamma + \Lambda^{\hat\gamma}_{\beta\gamma}\omega^{\hat i}_{\hat\gamma} +$$
$$+ (R^\sigma_{o\alpha\gamma}\Lambda^{\hat i}_{\beta\sigma} + R^{\hat i}_{\beta\gamma\alpha})\,\omega^\alpha_o = \bar\Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma\sigma}\,\omega^\sigma_o . \qquad (11)$$

Здесь величины $\bar\Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma\sigma}$ симметричны по индексам γ и σ.

§2. Случай m -мерной гиперполосы.

I. Рассмотрим гиперплоскость, проходящую через m -плоскость (6), которая в локальных координатах репера T слоя $P_n(u)$ точки A_o определяется уравнением:

$$x^n - \ell_p x^p = 0, \quad (p, q, r = m+1, \ldots, n-1) \qquad (12)$$

Так же, как и в [2](стр.56, см.(2.10) и (2.11)), находим, что величины b_p удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$db_p + b_p\omega_n^n - b_p b_q\omega_n^q - b_q\omega_p^q + \omega_p^n = b_{p\alpha}\omega_0^\alpha . \qquad (13)$$

Продолжение этой системы дифференциальных уравнений приводит к дифференциальным уравнениям:

$$db_{p\beta} + b_{p\beta}(\omega_0^0 + \omega_n^n) - b_{p\gamma}\omega_\beta^\gamma - b_{q\beta}\omega_p^q + (A^q_{\gamma\beta}b_q - A^n_{\gamma\beta})\omega_p^\gamma + (A^q_{\gamma\beta}b_q - A^n_{\gamma\beta})b_p\omega_n^\gamma - (b_{\gamma\beta}b_p - b_\gamma b_{p\beta})\omega_n^\gamma = \qquad (14)$$

$$= (b_{p\alpha}R^\alpha_{0\gamma\beta} - b_pR^n_{n\gamma\beta} + b_pb_qR^q_{n\gamma\beta} + b_qR^q_{p\gamma\beta} - R^n_{p\gamma\beta} + b_{p\beta\gamma})\omega^\gamma.$$

Здесь величины $b_{p\beta\gamma}$ симметричны по индексам β и γ

Заметим, что система дифференциальных уравнений, состоящая из (7), (9) и (13) при условии (11) и (14) определяет в пространстве $P_{n,n}$ m-мерную гиперполосу в смысле [4], т.е. m-мерное многообразие, элемент которого состоит из точки A_0 и гиперплоскости, проходящей через плоскость L_m касательную к S_m, описываемой точкой A_0.

2. Так же, как и в [2](стр.76), кривую на S_m будем задавать в виде

$$\omega_0^\alpha = t^\alpha\theta, \quad \mathcal{D}\theta = 0, \qquad (15)$$

где t^α удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dt^\alpha - t^\alpha\omega_0^0 + t^\beta\omega_\beta^\alpha = t_1^\alpha\theta \qquad (15')$$

Условимся $x\{t^\alpha\}$ обозначать линию, описываемую в смысле [2](стр.76-77) точкой x слоя $P(u)$ точки $A_0(u)$ вдоль (15), а $Tx\{t^\alpha\}$ -касательную к ней в точке x [2](стр.77)).

Будем в дальнейшем говорить, что каждой прямой

$$t = t^\alpha(A_0A_\alpha)$$

в L_m отвечает на S_m линия (15), такая, что $t = TA_0\{t^\alpha\}$ и обратно, каждой линии (15) на S_m в L_m отвечает прямая $t = t^\alpha(A_0A_\alpha)$ такая, что $t = TA_0\{t'\}$.

Так же, как и в [2] (стр.79-80) найдем, что система

$$\begin{aligned} x^n &= b_p x^p \\ (b_pA^p_{\alpha\beta} - A^n_{\alpha\beta})x^\alpha t^\beta - b_{p\alpha}x^pt^\alpha &= 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

определит характеристику гиперплоскости (12) вдоль кривой (15), т.е. совокупность фокусов гиперплоскости (12) (в смысле [2], стр.79), отвечающих одной и той же кривой (12). Все характеристики (16) гиперплоскости (12) пересекаются в общем случае, т.е. в случае

$$A = \det\|b_pA^p_{\alpha\beta} - A^n_{\alpha\beta}\| \neq 0 , \qquad (17)$$

по $(n-m-1)$-мерному линейному подпространству ($(n-m-1)$-плоскости) L^*_{n-m-1}, которое в локальных координатах репера слоя $P(u)$ точки $A_0(u)$ определяется системой

$$x^n = b_p x^p , \quad x^\alpha = a^\alpha_p x^p \qquad (18)$$

где a_ρ^α определяется из системы линейных уравнений

$$(b_\rho A^\rho_{\alpha\rho} - \Lambda^n_{\alpha\rho})\, a^\alpha_q = b_{q\rho} \tag{19}$$

с определителем (I7).

В дальнейшем линейное подпространство (I8) будем называть характеристическим элементом гиперплоскости (I2).

Используя уравнения (II),(I3) и (I4), находим:

$$da^\alpha_\rho + \omega^\rho_\rho a^\rho_q + \omega^\alpha_\rho + \omega^\alpha_n b_\rho - a^\alpha_q(\omega^q_\rho + \omega^q_n b_\rho) - a^\alpha_q a^\rho_\rho \omega^q_\rho = a^\alpha_{\rho\rho}\omega^\rho. \tag{20}$$

3.Так как $(n-m-1)$ -плоскость L^*_{n-m-1} является характеристическим элементом гиперплоскости (I2),то она будет иметь фокусную алгебраическую поверхность (фокальную в смысле [2],стр.8I-82).Найдем эту алгебраическую поверхность.Прежде всего из (I8) заключаем,что

$$L^*_{n-m-1} = (E_0 E_{m+1} \dots E_{n-1}), \tag{21}$$

где

$$E_0 = A_0, \quad E_\rho = a^\alpha_\rho A_\alpha + A_\rho + b_\rho A_n. \tag{22}$$

Пусть

$$F = x^0 A_0 + x^\rho E_\rho$$

-фокус $(n-m-1)$ -плоскости (2I) в смысле [2](стр.79). Тогда так же,как и в [2](стр.8I,см.формулы (9,I0), с учетом (2I),(22) и (20) находим,что фокусная алгебраическая поверхность $(n-m-1)$ -плоскости (2I) определяется системой

$$x^n = b_\rho x^\rho, \quad x^\alpha = a^\alpha_\rho x^\rho,$$

$$\det\| x^0 \delta^\alpha_\rho + x^\rho a^\alpha_{\rho\rho}\| = 0.$$

Отсюда следует,что линейная поляра точки A_0 (в смысле [2], стр.84) определяется системой

$$x^n = b_\rho x^\rho, \quad x^\alpha = a^\alpha_\rho x^\rho, \quad x^0 = a_\rho x^\rho, \tag{23}$$

где

$$a_\rho = -\frac{1}{m} a^\alpha_{\rho\alpha}. \tag{24}$$

Обозначив плоскость (23) символом L^*_{n-m-2}, будем иметь:

$$L^*_{n-m-2} = (H_{m+1} \dots H_{n-1}), \tag{25}$$

где

$$H_\rho = E_\rho + a_\rho A_0 = a^\alpha_\rho A_\alpha + A_\rho + b_\rho A_n + a_\rho A_0. \tag{26}$$

§3.Инвариантные конусы и линейные комплексы в L_m.

I.Рассмотрим в каждом локальном пространстве P_n (слое) точки A_0 гиперплоскость,проходящую через L_m и определяемую уравнением

$$x_\alpha x^\alpha = 0 \tag{27}$$

Зададим в m -плоскости L_m прямую

$$x = x^\alpha (A_0 A_\alpha), \tag{28}$$

где при фиксированных главных параметрах x^α удовлетворяют системе

$$\delta x^\alpha - x^\alpha \pi_0^0 + x^\beta \pi_\beta^\alpha = 0.$$

Из соотношения

$$dx = (\dots)^\alpha (A_0 A_\alpha) + x^\alpha \omega_\alpha^{\hat{\alpha}} (A_0 A_{\hat{\alpha}}) + [2]$$

в силу (2),(7) и (9) следует, что каждой прямой (28) в L_m, содержащейся в слое P_n точки A_0, отвечает $(m-1)$-плоскость

$$x^\alpha x_{\hat{\alpha}} A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} t^\beta = 0, \quad t^{\hat{\beta}} = 0 \quad . \tag{29}$$

Геометрически эта $(m-1)$ -плоскость характеризуется тем, что содержит все прямые

$$t = t^\alpha (A_0 A_\alpha), \tag{30}$$

которым отвечают линии (15) такие, что $T_x \{t^\alpha\}$ принадлежат гиперплоскости (27). Здесь $T_x \{t^\alpha\}$ -касательное линейное подпространство к I-семейству прямых (28) вдоль (15), т.е. линейная оболочка всех $T_z \{t^\alpha\}$, причем z -любая точка прямой (28). Аналогично получаем, что каждой прямой (28) в L_m отвечает еще одна $(m-1)$ -плоскость

$$x^\alpha x_{\hat{\alpha}} A^{\hat{\alpha}}_{\beta\alpha} t^\beta = 0 , \quad t^{\hat{\beta}} = 0 \tag{31}$$

Геометрически эта $(m-1)$ -плоскость представляет собой совокупность всех прямых (30), таких, что $T_t \{x^\alpha\}$ принадлежит гиперплоскости (27). Здесь рассматривается линия на S_m , отвечающая прямой (28). Так как тензор $A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}$ не симметричен в общем случае по α и β , то линейные подпространства (29) и (31) в общем случае не совпадают. Эти подпространства будут совпадать либо, когда пространство $P_{n,n}$ является пространством без кручения, либо, когда оно однородно. Заметим, что линейные подпространства (31) и (29) в общем случае не проходят через прямую (28). Все прямые (28), которым отвечают проходящие через них линейные подпространства (29) и (31) (если одно из этих подпространств проходит через (28), то через эту прямую проходит и второе линейное подпространство), образуют в L_m конус второго порядка с вершиной в точке A_0 , определяемый в слое P_n точки A_0 системой

$$x_{\hat{\alpha}} A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \quad , \quad x^{\hat{\beta}} = 0 \quad . \tag{32}$$

Система же

$$x_{\hat{\alpha}} R^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad t^{\hat{\beta}} = 0 \tag{33}$$

определяет в L_m $(m-1)$ -мерный линейный комплекс, который каждой прямой (28) ставит в соответствие $(m-1)$-плоскость, проходящую через прямую (28) и пересечение линейных подпространств (29) и (31), отвечающих этой прямой.

Таким образом, с каждой гиперплоскостью (27) в L_m ассоциируются конус (32) и линейный комплекс (33).

2. Конус (32) и линейный комплекс (33), соответствующие гиперплоскости (12), определяются уравнениями:

$$\Lambda_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{\hat{\imath}} = 0, \tag{34}$$

$$R_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{\hat{\imath}} = 0, \quad t^{\hat{\beta}} = 0, \tag{35}$$

где

$$\Lambda_{\alpha\beta} = b_p \Lambda^p_{\alpha\beta} - \Lambda^n_{\alpha\beta} \tag{36}$$

$$R_{\alpha\beta} = b_p R^p_{o\alpha\beta} - P^n_{o\alpha\beta} . \tag{37}$$

Будем в дальнейшем считать, что

$$\Lambda = \det \| \Lambda_{\alpha\beta} \| \neq 0, \tag{38}$$

т.е. конус (34) является невырожденным. Заметим, что конус (34) и линейный комплекс (35) являются основными в смысле [5] относительно не симметрического тензора

$$A_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha} . \tag{39}$$

3. Среди всех гиперплоскостей (27), проходящих через L_m в слое P_n точки A_o, будем искать такие гиперплоскости, которым соответствуют конусы (32), аполярные конусу (34) в смысле [6], т.е. удовлетворяющие условию:

$$x_{\hat{\imath}} \Lambda^{\hat{\imath}}_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha\beta} = 0, \tag{40}$$

где $\Lambda^{\alpha\beta}$ удовлетворяют условиям:

$$\Lambda_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta\gamma} = \Lambda \delta^\gamma_\alpha . \tag{41}$$

Здесь $\Lambda_{\alpha\beta}$ определяются по формулам (36), а Λ – по формуле (38). Из (40) следует, что все искомые гиперплоскости в слое P_n проходят через одну и ту же $(m+1)$-плоскость, содержащую L_m :

$$L_{m+1} = (L_m , A_{\hat{\imath}}) \Lambda^{\hat{\imath}}, \tag{42}$$

где

$$\Lambda^{\hat{\imath}} = \Lambda^{\hat{\imath}}_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha\beta} . \tag{43}$$

§4. Оснащающая $(n-m)$ -плоскость.

1. Оснащающей $(n-m)$ -плоскостью L_{n-m} или нормалью первого рода m -поверхности S_m в смысле А.П.Нордена [7] называется такая $(n-m)$ -плоскость слоя P_n точки A_o, которая с m -плоскостью L_m имеет только одну общую точку A_o. Пусть $(n-m)$ -плоскость L_{n-m} определяется системой

$$x^\alpha = C^\alpha_{\hat{\imath}} x^{\hat{\imath}} . \tag{44}$$

Тогда в соответствии с [2](стр.57) система величин $C^\alpha_{\hat{\imath}}$ должна удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям

$$dC^\alpha_{\hat{\imath}} - C^\alpha_{\hat{\beta}} \omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\imath}} + C^\gamma_{\hat{\imath}} \omega^\alpha_\gamma + \omega^\alpha_{\hat{\imath}} = C^\alpha_{\hat{\imath}\beta} \omega^\beta . \tag{45}$$

Продолжение системы (45) приводит к дифференциальным уравнениям

$$dC^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta} + C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta}\omega^{0}_{0} - C^{\alpha}_{\hat{\beta}\beta}\omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} - C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta} + C^{\gamma}_{\hat{\alpha}\beta}\omega^{\alpha}_{\gamma} - C^{\alpha}_{\hat{\beta}}A^{\hat{\beta}}_{\gamma\beta}\omega^{\gamma}_{\hat{\alpha}} +$$

$$+ C^{\sigma}_{\hat{\alpha}}A^{\hat{\beta}}_{\sigma\beta}\omega^{\alpha}_{\hat{\beta}} - C^{\gamma}_{\hat{\alpha}}\delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{0}_{\gamma} - \omega^{0}_{\hat{\alpha}}\delta^{\alpha}_{\beta} + (C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\gamma}R^{\gamma}_{0\beta\tau} + R^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta\tau} +$$

$$+ C^{\alpha}_{\hat{\beta}}R^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}\tau\beta})\omega^{\tau} = C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta\gamma}\,\omega^{\gamma}\quad, \tag{46}$$

где величины $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta\gamma}$ симметричны по β и γ.

Для оснащающей $(n-m)$-плоскости (44), внутренне определенной m-мерной гиперполосой, рассматриваемой в настоящей статье, положим

$$C^{\beta}_{\rho} = \frac{m\Lambda a^{\beta}_{\rho} + \Lambda^{q} a^{\rho}_{q} b_{\rho} - q^{\rho} b_{\rho}}{m\Lambda}\,,$$

$$C^{\beta}_{n} = \frac{q^{\beta} - \Lambda^{\rho} a^{\beta}_{\rho}}{m\Lambda}\,. \tag{47}$$

Здесь q^{β} определяется из системы уравнений

$$A_{\alpha\rho}q^{\rho} + \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha}\, b_{\hat{\alpha}} = 0 \quad, \ (b_{n} = -1) \tag{48}$$

с определителем (17), который в силу (38) определяется по формуле

$$A = \det\|A_{\alpha\beta}\|\quad, \tag{49}$$

а величины $\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha}$, явный вид которых нас не интересует, входят в систему

$$d\Lambda^{\hat{\alpha}} - \tilde{\Omega}\Lambda^{\hat{\alpha}} + \omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}\Lambda^{\hat{\beta}} = \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha}\omega^{\alpha}, \tag{50}$$

$$\tilde{\Omega} = \omega^{0}_{0} + \Omega^{*} - \Omega\ ,\quad \Omega = -\omega^{0}_{0} - \omega^{n}_{n} + b_{\rho}\omega^{\rho}_{n}\,,\quad \Omega^{*} = m\Omega - 2\omega^{\alpha}_{\alpha}\,,$$

которую легко получить, если воспользоваться формулами (41), (43), (10) и (11).

Учитывая соотношения (47)-(50), (42), (38), (20), можно показать, что система величин (47) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений типа (45).

2. Перейдем к выяснению геометрической интерпретации $(n-m)$-плоскости (44), определяемой системами величин (47). Пусть точка

$$R = x^{0}A_{0} + x^{\alpha}A_{\alpha} + x\Lambda^{\hat{\alpha}}A_{\hat{\alpha}}$$

принадлежит линейному подпространству (42). При развертывании пространства $P_{n,n}$ на исходный слой P_{n}, соответствующий точке A_{0}, вдоль любой кривой (15) точка R будет описывать кривую $R\{t^{\alpha}\}$ с касательной $TR\{t^{\alpha}\}$. Линейной оболочкой всех $TR\{t^{\alpha}\}$ будет являться m-мерная плоскость $L(R)_{m}$, касательная к m-поверхности $(R)_{m}$. Будем искать такие точки R, что $L(R)_{m}$ и L_{m+1} принадлежат одной и той же гиперплоскости $\Gamma_{n-1}(R) \supset L_{n-m-\alpha}$. Из

$$dR = (\dots)^{0}A_{0} + (\dots)^{\alpha}A_{\alpha} + (\dots)\Lambda^{\hat{\alpha}}A_{\hat{\alpha}} + x\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha}\omega^{\alpha}A_{\hat{\alpha}} +$$

$$+ x^{\alpha}\omega^{\hat{\alpha}}_{\alpha}A_{\hat{\alpha}} + [2],$$

$$(dR, A_0, A_1 \ldots A_m, \Lambda^{\hat{i}} A_{\hat{i}}, A_{m+1}+b_{m+1}A_n, \ldots, A_{n-1}+b_{n-1}A_n)=0$$

с точностью до членов порядка малости I получаем следующую систему для определения x^ρ, x и x^0:

$$x^\rho A^{\hat{i}}_{\alpha\rho} b_{\hat{i}} + x\Lambda^{\hat{i}}_\alpha b_{\hat{i}} = 0, \quad (b_n=-1) \qquad (51)$$

с определителем $A\neq 0$. Отсюда следует, что q^ρ образуют единственное решение системы (48). Следовательно, геометрическим местом искомых точек R будет являться в общем случае (в случае $A\neq 0$) прямая

$$q = (A_0, \Lambda^{\hat{i}}A_{\hat{i}} + q^\alpha A_\alpha), \qquad (52)$$

проходящая через A_0. В случае $A=0$, как это следует из (51), геометрическим местом искомых точек R будет некоторое линейное подпространство, размерность которого будет равна $m+1-\mathrm{rang}\,\|A_{\alpha\rho}\|$. Из (38),(36),(41),(43) и (48) следует, что прямая (52) в общем случае не лежит в L_m и не принадлежит $(n-m-1)$-плоскости (21). Поэтому линейной оболочкой прямой q и L^*_{n-m-1} будет некоторая $(n-m)$-плоскость

$$L_{n-m} = (A_0, E_{m+1}, \ldots, E_{n-1}, \Lambda^{\hat{i}}A_{\hat{i}}+q^\alpha A_\alpha) = (A_0, C^\alpha_{m+1}A_\alpha + A_{m+1}, \ldots, C^\alpha_n A_\alpha + A_n), \qquad (53)$$

которая в силу (51),(52) и (18) определяется системой (44), где величины $C^\alpha_{\hat{i}}$ определяются по формулам (47). Заметим, что $(n-m)$-плоскость (53) является также линейной оболочкой прямой (52) и линейного подпространства (25).

§5. Нормаль второго рода.

I. Так же как и в §3 (см. (23)-(26)), находим, что линейной полярой точки A_0 относительно фокусной алгебраической поверхности $(n-m)$-плоскости (53) с учетом (47), (45) и (46), является $(n-m-1)$-плоскость $\widetilde{L}_{n-m-1}$, определяемая системой

$$x^\alpha = C^\alpha_{\hat{i}} x^{\hat{i}}, \quad x^0 = U_{\hat{i}} x^{\hat{i}}, \qquad (54)$$

где

$$U_{\hat{i}} = -\frac{1}{m} U^\alpha_{\hat{i}\alpha}, \quad U^\alpha_{\hat{i}\rho} = C^\alpha_{\hat{i}\rho} - C^\alpha_{\hat\rho} C^\gamma_{\hat{i}} A^{\hat\rho}_{\gamma\rho}. \qquad (55)$$

Из (55),(45) и (46) следует, что система величин $U_{\hat{i}}$ удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям

$$dU_{\hat{i}} = -U_{\hat{i}}\omega^0_0 + U_{\hat\rho}\omega^{\hat\rho}_{\hat{i}} - \omega^0_{\hat{i}} - C^\gamma_{\hat{i}}\omega^0_\gamma + U_{\hat{i}\gamma}\omega^\gamma. \qquad (56)$$

Система уравнений (54) дает

$$\widetilde{L}_{n-m-1} = (G_{m+1}, G_{m+2}, \ldots, G_n), \qquad (57)$$

где

$$G_{\hat{i}} = U_{\hat{i}}A_0 + C^\alpha_{\hat{i}}A_\alpha + A_{\hat{i}}. \qquad (58)$$

2. Рассмотрим точки

$$X = A_0 + x^\alpha A_\alpha \in L_m, \quad Y = y^{\hat\alpha} G_{\hat\alpha} \in \tilde{L}_{n-m-1}.$$

Тогда с учетом (55)-(58),(7)-(9) и (45) будем иметь

$$dX = (\omega_0^0 + x^\alpha \omega_\alpha^0) A_0 + (\dots)^\alpha A_\alpha + x^\alpha \omega_\alpha^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha} + [2],$$

$$dY = (\dots)^{\hat\alpha} G_{\hat\alpha} + y^{\hat\alpha} U^*_{\hat\alpha\alpha} \omega^\alpha A_0 + (U_{\hat\alpha} \omega_0^\alpha + U^\alpha_{\hat\alpha\beta} \omega^\beta) A_\alpha + [2], \qquad (59)$$

где

$$U^*_{\hat\alpha\gamma} = U_{\hat\alpha\gamma} + U_{\hat\beta} A^{\hat\beta}_{\alpha\gamma} C^\alpha_{\hat\alpha}. \qquad (60)$$

Из (59) и (60) получаем, что точка $Y = y^{\hat\alpha} G_{\hat\alpha}$, где

$$y^{\hat\alpha} = x^\alpha A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} t^\beta$$

принадлежит $\tilde{L}_{n-m-1}$ и $(L_m, TX\{t^\alpha\})$, а точка

$$\overset{*}{X} = \overset{*}{x}{}^0 A_0 + \overset{*}{x}{}^\alpha A_\alpha,$$

где

$$\overset{*}{x}{}^0 = x^\alpha U^*_{\hat\alpha\sigma} A^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma} t^\gamma y^\sigma, \qquad (61)$$

$$\overset{*}{x}{}^\beta = x^\alpha (U_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\alpha\sigma} t^\beta y^\sigma + A^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma} U^\beta_{\hat\alpha\sigma} t^\gamma y^\sigma), \qquad (62)$$

такова, что $\overset{*}{X} = L_m \cap (\tilde{L}_{n-m-1}, TY\{y^\alpha\})$. Здесь предполагается, что развертка пространства $P_{n,n}$ на исходный слой

P_n точки A_0 производится вдоль кривой на базе:

$$\omega^\alpha = y^\alpha \theta, \quad D\theta = 0, \qquad (63)$$

где y^α удовлетворяют при фиксированных главных параметрах уравнениям типа (15').

Таким образом, мы получаем проективное преобразование (62) (являющееся, как легко показать, в общем случае невырожденным) m-плоскости L_m в себя, переводящее прямую $A_0X \in L_m$ в прямую $A_0\overset{*}{X} \in L_m$. При этом предполагается, что направление (15) не является фокальным для m-плоскости L_m, а (63) – для $\tilde{L}_{n-m-1}$. Проективное преобразование (62) будет проективным преобразованием W в смысле [6], т.е. след матрицы этого преобразования равен нулю, тогда и только тогда, когда

$$a_{\alpha\beta} t^\alpha y^\beta = 0, \qquad (64)$$

где не симметрический в общем случае по нижним индексам тензор $a_{\alpha\beta}$ определяется по формулам

$$a_{\alpha\beta} = U_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\beta\alpha} + A^{\hat\alpha}_{\gamma\alpha} U^\gamma_{\hat\alpha\beta}. \qquad (65)$$

3. Пусть прямые

$$t = t^\alpha (A_0 A_\alpha), \quad y = y^\alpha (A_0 A_\alpha)$$

из L_m отвечают линиям (15) и (63), т.е. $t = TA_0\{t^\alpha\}$, $y = TA_0\{y^\alpha\}$. Тогда в силу (64) каждой прямой $t \in L_m$ отвечают в L_m две $(m-1)$-плоскости, проходящие через A_0:

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta} t^\alpha y^\beta = 0, \quad y^{\hat\beta} = 0, \tag{66}$$

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta} y^\alpha t^\beta = 0. \tag{67}$$

Геометрическая характеристика этих $(m-1)$-плоскостей непосредственно вытекает из рассуждений предыдущего пункта, если $t = A_0X$, $y = A_0\hat{X}$, причем для линейного подпространства (66) надо брать $TX\{t^\alpha\}, TY\{y^\alpha\}$, а для (67) – $TX\{y^\alpha\}, TY\{t^\alpha\}$. Линейные подпространства (66) и (67) дают возможность с помощью тензора $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ в соответствии с [5] определить: <u>основной конус</u> Q_{m-1}:

$$\mathfrak{A}_{(\alpha\beta)} y^\alpha y^\beta = 0, \quad y^{\hat\alpha} = 0, \tag{68}$$

<u>основной $(m-1)$-мерный линейный комплекс K_{m-1}</u>:

$$\mathfrak{A}_{[\alpha\beta]} t^\alpha y^\beta = 0 \tag{68'}$$

4. Заметим, что формулы (61) и (62) определяют некоторое проективное преобразование $\Pi(t,y)$, отвечающее линиям (15) и (63) и переводящее любую точку $X \in L_m$ в точку $Y \in L_m$. Пусть $X \in L_m$ и $x = y = t = A_0X = x^\alpha(A_0A_\alpha)$. Тогда точка $\hat{X} = \hat{x}^0 A_0 + \hat{x}^\alpha A_\alpha$ получается из X преобразованием $\Pi(x,x)$. Эту точку мы будем называть точкой, соответствующей точке X при преобразовании $\Pi = \Pi(x,x)$: $\hat{X} = \Pi X$. Рассмотрим в L_m некоторую $(m-1)$-плоскость $\bar{U}$:

$$u_0 x^0 + u_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^{\hat\alpha} = 0, \tag{69}$$

не проходящую через точку A_0, т.е. $u_0 \neq 0$. Тогда этой $(m-1)$-плоскости в L_m будет соответствовать алгебраический $(m-1)$-мерный конус третьего порядка с вершиной в точке A_0:

$$u_h \mathfrak{A}^h_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \quad x^{\hat\alpha} = 0, \quad (h = 0, 1, \dots m), \tag{70}$$

где

$$\mathfrak{A}^0_{\alpha\beta\gamma} = A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} U^{*}_{\hat\alpha\gamma}, \quad \mathfrak{A}^\sigma_{\alpha\beta\gamma} = U_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} \delta^\sigma_\gamma + A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} U^\sigma_{\hat\alpha\gamma}. \tag{71}$$

Геометрически конус (70) представляет собой совокупность всех прямых A_0X, точкам которых $X = A_0X \cap \bar{U}$ отвечают при преобразовании $\Pi = \Pi(x,x)$ точки $\hat{X} \in \bar{U}$. Будем выбирать такую $(m-1)$-плоскость (69), чтобы алгебраические конусы (70) и (34) были аполярными в смысле [6], т.е.

$$u_0 \mathfrak{A}^0_\alpha + u_\sigma \mathfrak{A}^\sigma_\alpha = 0, \tag{72}$$

где

$$\mathfrak{A}^0_\alpha = \mathfrak{A}^0_{(\alpha\beta\gamma)} \Lambda^{\beta\gamma}, \quad \mathfrak{A}^\sigma_\alpha = \mathfrak{A}^\sigma_{(\alpha\beta\gamma)} \Lambda^{\beta\gamma}. \tag{73}$$

Здесь величины $\Lambda^{\beta\gamma}$ определяются по формулам (41). Можно показать, что

$$\mathfrak{A}^* = \det \| \mathfrak{A}^\sigma_\alpha \|$$

в общем случае отличен от нуля. Тогда из (72) с учетом u_0 получаем

$$u_\sigma = -\frac{\alpha_\sigma}{\alpha} u_0 ,$$ (74)

где каждый определитель α_σ получается из α заменой элементов столбца с номером σ соответствующими элементами α°_λ. Следовательно, существует одна $(m-1)$ - плоскость L^*_{m-1}, в общем случае не проходящая через точку A_0, которой соответствует конус (70), аполярный в смысле [5] конусу (34). Из (74) и (69) следует, что $(m-1)$ - плоскость L^*_{m-1} определяется системой

$$\alpha x^0 - \alpha_\sigma x^\sigma = 0, \quad x^{\hat{\lambda}} = 0 .$$

Это линейное подпространство может служить нормалью второго рода в смысле А.П.Нордена [7]. Поэтому в итоге получается, что m -поверхность S_m с заданным полем гиперплоскостей, содержащих соответствующие m -плоскости L_m, оказывается нормализованной в смысле А.П.Нордена [7].

Замечание I. Рассмотренные в m -плоскости L_m конусы (34) и (68), линейные комплексы (35) и (68) можно использовать для определения инвариантных направлений. Например, можно рассмотреть основные в смысле [5] прямые относительно (34) и (35) или (68) и (68), а также прямые, поляры которых относительно (34) и (68) совпадают. Во всех случаях таких прямых будет не более m

Замечание 2. При $n = \frac{m(m+1)}{2} + 1$ в случае $\operatorname{rang}[R^{\hat{\lambda}}_{o\hat{p}}] = \frac{m(m-1)}{2}$, где $\hat{p} \leftrightarrow (\lambda, \beta)$ $(\lambda < \beta)$ указывает на номер строки, а $\hat{\lambda}$ -на номер столбца, существует единственная (специальная) гиперплоскость (27), которой соответствует неопределенный линейный комплекс (33). Если гиперплоскость (12) считать специальной, то b_p будет удовлетворять системе: $b_p R^p_{o\hat{p}} = R^n_{o\hat{p}}$ с определителем $R = \det[R^p_{o\hat{p}}] \neq 0$. В этом случае m -поверхность S_m оказывается внутренним образом нормализованной в смысле Нордена А.П., т.е нормали первого и второго рода определяются внутренним образом самой m -поверхностью.

Литература

I. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск, матем. об-ва, 2, I953, 275-382.

2. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. Тр. геом. сем. 3., АН СССР, ВИНИТИ, М-I97I, 49-94.

3. Остиану Н.М., Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности II. Там же, 95-II4.

4. Вагнер В.В., Теория поля локальных гиперполос. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, 8, I950, I97-272.

5. Ивлев Е.Т., Исабеков М.Б., К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами. Матер. 3-й научн. конф. по матем. и мех., вып. I, изд-во Томского ун-та, I973, 50-52.

6. Ивлев Е.Т., К геометрической интерпретации операции

свертывания некоторых тензоров. Матер. итоговой научн. конф. матем. и мех. за 1970 год I. Изд-во Томского ун-та, 1970, 121-123.

7. Норден А.П., Обобщение основной теоремы теории нормализации. Изв. высш. уч. зав. "Математика", 1966, №2 (55), 9-19.

• ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

К и м В.Б.

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ, ЭЛЕМЕНТ КОТОРОГО СОСТОИТ ИЗ КУБИКИ И ТОЧКИ.

В работе изучается трехпараметрическое многообразие, элемент которого состоит из плоской кривой третьего порядка (кубики) и точки в P_3. С помощью компонент основного фундаментального объекта строятся некоторые геометрические объекты и изучаются проективно инвариантные геометрические образы, определяемые этими объектами. Эти геометрические образы позволяют получить некоторые частные классы рассматриваемых многообразий.

§1. Включение элемента в репер.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается многообразие $K(0,3,3)^3$ -трехпараметрическое многообразие, элемент которого состоит из кубики K_3 и точки M, не лежащей в плоскости кубики, причем плоскости кубики образуют трехпараметрическое семейство.

Пространство P_3 относится к проективному реперу $R=\{A_0 A_1 A_2 A_3\}$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta . \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 . \qquad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем индексы α, β, γ принимают значения 0,1,2,3,а индексы i, j, k, p, r –значения 1,2,3.Поместим вершину A_0 репера в точку M ,а вершины A_i –в плоскость кубики так,чтобы точка A_1 не лежала на K_3 . Тогда уравнения кубики запишутся в виде

$$a_{ijk} x^i x^j x^k = 0 , \quad x^0 = 0 . \qquad (1.4)$$

где $\quad a_{111} = 1 .$

Обозначая

$$\omega_i = \omega_i^0 , \qquad (1.5)$$

запишем замкнутую систему дифференциальных уравнений многообразия $K(0,3,3)^3$ в виде:

$$\Delta b^p_{ijk} \wedge \omega_p = 0 , \quad \Delta c^{ip} \wedge \omega_p = 0 \qquad (1.6)$$

Здесь

$$\Delta a_{ijk} = da_{ijk} - a_{pjk}\omega_i^p - a_{ipk}\omega_j^p - a_{ijp}\omega_k^p + 3a_{ijk}a_{11p}\omega_1^p ,$$

$$\Delta b^p_{ijk} = db^p_{ijk} - b^p_{ijk}\omega_0^0 + b^r_{ijk}\omega_r^p - b^p_{rjk}\omega_i^r - b^p_{irk}\omega_j^r -$$

$$b^p_{ijr}\omega_k^r + 3(a_{ijk}b^p_{11r} + a_{11r}b^p_{ijk})\omega_1^r + c^{rp}(a_{rjk}\omega_i + a_{irk}\omega_j +$$

$$+ a_{ijr}\omega_k - 3a_{ijk}a_{11r}\omega_1) , \qquad (1.7)$$

$$\Delta c^{ip} = dc^{ip} - 2c^{ip}\omega_0^0 + c^{kp}\omega_k^i + c^{ik}\omega_k^p ,$$

Разрешив систему (1.6) по лемме Картана,будем иметь

$$\Delta b^p_{ijk} = b^{pr}_{ijk}\omega_r , \quad \Delta c^{ip} = c^{ipr}\omega_r . \qquad (1.8)$$

Здесь величины b^{pr}_{ijk} , c^{ipr} симметричны по индексам p, r . Система величин $\Gamma_1 = \{a_{ijk}, b^p_{ijk}, c^{ip}\}$ образует основной геометрический объект [3] многообразия $K(0,3,3)^3$, а система величин $\Gamma_2 = \{a_{ijk}, b^p_{ijk}, c^{ip}, b^{pr}_{ijk}, c^{ipr}\}$ –продолженный внутренний фундаментальный объект .Задание компонент объекта Γ_2 определяет многообразие $K(0,3,3)^3$ с точностью до постоянных.

§2. Некоторые геометрические образы,ассоциированные с многообразием $K(0,3,3)^3$.

Рассмотрим систему величин c^{ij} .Из уравнений (1.7) следует,что эти величины образуют дважды контравариантный тензор.Обозначим $c = \det\| c^{ij} \|$.С помощью уравнений (1.7) получим

$$dc - 8c\omega_0^0 = c^i\omega_i , \qquad (2.1)$$

где выражения C^i для нас несущественны. Следовательно, величина C является относительным инвариантом. Исключим из рассмотрения случай $C=0$, т.е. будем считать тензор C^{ij} невырожденным. С помощью величин C^{ij} и a_{ijk} определим следующие тензоры

$$b^{ij}=\frac{1}{2}(c^{ij}+c^{ji}), \tag{2.2}$$

$$a^{ij}=\frac{1}{2}(c^{ij}-c^{ji}), \tag{2.3}$$

$$a_k=a_{ijk}\,b^{ij}, \tag{2.4}$$

$$a^i=b^{ij}a_j, \tag{2.5}$$

$$b_{ij}\,b^{jk}=b\,\delta_i^k\,, \quad b=\det\|b^{ij}\|. \tag{2.6}$$

Тензоры b^{ij}, b_{ij} -симметричны, а тензор a^{ij} -кососимметричен.

Установим соответствие между прямыми и точками плоскости кубики с одной стороны, и множествами Ψ_1 и Ψ_2 [4] - с другой стороны, следующим образом. Каждой прямой ℓ

$$x_i\,x^i=0\,, \quad x^0=0\,, \tag{2.7}$$

соответствует Ψ_1, определяемое уравнениями

$$\omega_i=x_i\,\theta\,, \quad \Delta\theta=0\,. \tag{2.8}$$

Здесь x_i -некоторые функции главных и вторичных параметров, удовлетворяющие при фиксированных параметрах уравнениям

$$\delta x_i=x_j\,\pi_i^j$$

Геометрически это соответствие означает, что прямая (2.7) является характеристикой плоскости кубики вдоль Ψ_1.

Каждой точке $X=x^iA_i$ сопоставим Ψ_2:

$$x^i\,\omega_i=0\,, \tag{2.9}$$

причем функции x^i должны удовлетворять условию относительной инвариантности [4]. Это Ψ_2 представляет собой совокупность таких Ψ_1, что вдоль каждого из них точка X описывает кривую с касательной, принадлежащей плоскости кубики.

Тензор

$$c^{ij}=a^{ij}+b^{ij} \tag{2.10}$$

порождает два соответствия между точками и прямыми плоскости кубики: левое и правое, которые аналитически выражаются следующим образом

$$x^i=c^{ji}\,x_j\,, \tag{2.11}$$

$$x^i=c^{ij}\,x_j\,. \tag{2.12}$$

В правом соответствии (2.12) каждой прямой ℓ в плоскости кубики соответствует точка R этой же плоскости, являющаяся точкой пересечения с плоскостью кубики касательной к кривой, описываемой точкой A_0 вдоль Ψ_1, соответствующего этой прямой. Совокупность прямых ℓ, проходящих через соответствующие точки R, образует кривую второго класса K^2

$$b^{ij}\,x_i\,x_j=0\,, \quad x^0=0\,, \tag{2.13}$$

огибающую конику K_2:

$$b_{ij} x^i x^j = 0, \ x^0 = 0 \qquad (2.$$

Левое соответствие (2.II) характеризуется следующим образом. Через прямую $\ell \in A_1 A_2 A_3$ и точку A_0 проведе плоскость Π и найдем такое Ψ_2, что плоскость, содер ная все касательные к линиям, описываемым точкой A_0 вдо всех $\Psi_1 \in \Psi_2$, будет совпадать с плоскостью Π. Как было новлено выше, этому Ψ_2 будет соответствовать точка L в кости кубики, которая и является образом прямой ℓ в ле соответствии.

Таким образом, каждой прямой ℓ отвечают две точки (правая) и L (левая), определяемые уравнениями (2.12) и (2.II). Полюсом прямой ℓ относительно коники K_2 являет ся точка $P = p^i A_i$, где

$$p^i = b^{ij} x_j.$$

Нетрудно показать, что для каждой прямой ℓ точки R, L и лежат на одной прямой, причем для аналитических точек имее место равенство

$$P = \frac{1}{2} (R + L)$$

Четвертой гармонической к точкам R, L, P будет точка

$$Q = \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} L = q^i A_i, \qquad (2.15)$$

где

$$q^i = a^{ij} x_j.$$

овем точку Q гармоническим полюсом прямой ℓ.

Пусть $u \equiv u_i x^i = 0$ и $v \equiv v_i x^i = 0$ — две прямые в оскости $A_1 A_2 A_3$. В общем случае точка пересечения х прямых не является гармоническим полюсом для каждой мой. Геометрическое место точек, каждая из которых являет- одновременно точкой пересечения двух прямых и их гармо- ческим полюсом, определяется уравнением

$$a^{ij} u_i v_j = 0, \ x^0 = 0 \qquad (2.16)$$

представляет собой некоторую прямую. Обозначим её ℓ^*.

Т е о р е м а 2.I. Для прямой ℓ^* левая и правая точки совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для некоторой прямой

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0, \ x^0 = 0$$

левая и правая точки совпадают, то должно иметь место

$$c^{ij} \alpha_j = \lambda c^{ji} \alpha_j. \qquad (2.17)$$

Характеристическое уравнение системы (2.17)

$$\det \| c^{ij} - \lambda c^{ji} \| = 0$$

имеет тройной корень $\lambda = 1$. Этому значению λ соответствуют значения

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = a^{23} : a^{31} : a^{12},$$

т.е. для прямой ℓ^* левая и правая точки совпадают.

С л е д с т в и е. Полюс прямой ℓ^* относительно коники K_2 совпадает с правой и левой точкой.

Тензор a_i определяет в плоскости кубики прямую ℓ_1

$$a_i x^i = 0, \quad x^0 = 0, \tag{2.18}$$

которая является аполярной прямой [1] относительно кубики K_3 и коники K_2. Полюсом прямой ℓ_1 относительно коники K_2 будет точка

$$A = a^i A_i, \tag{2.19}$$

определяемая тензором a^i.

§3. Инвариантные точки многообразия $K(0,3,3)^3$.

Продолжим канонизацию репера, положив

$$a_{123} = a \neq -\frac{1}{2}; \; a_{222} = a_{333} = 1; \quad a_{ijj} = 0 \quad (i \neq j), \tag{3.1}$$

При такой фиксации вершины репера A_i станут вершинами сизигетического треугольника кубики [5]. При этом из рассмотрения исключаются случаи: когда кубика K_3 распадается, или имеет особые точки или кратные точки перегиба. Уравнения кубики K_3 примут вид

$$(x^1)^3 + (x^2)^3 + (x^3)^3 + 6a x^1 x^2 x^3 = 0, \quad x^0 = 0 \tag{3.2}$$

Имеем:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk} \omega_k, \quad \omega_0^i = c^{ik} \omega_k,$$

$$\varphi_\rho = \omega_1^1 - \omega_\rho^\rho = b_\rho^k \omega_k, \quad da = \lambda^k \omega_k \tag{3.3}$$

$(i \neq j; \rho = 2,3;$ по ρ не суммировать!)

Дифференцируя систему (3.3) внешним образом, получаем

$$\Delta \Gamma_i^{jk} \wedge \omega_k = 0, \quad \Delta c^{ik} \wedge \omega_k = 0,$$

$$\Delta b_\rho^k \wedge \omega_k = 0, \quad \Delta \lambda^k \wedge \omega_k = 0, \tag{3.4}$$

где

$$\Delta c^{ik} = dc^{ik} - 2c^{ik}\omega_0^0 + c^{jk}\omega_j^i + c^{ij}\omega_j^k;$$

$$\Delta \Gamma_1^{\rho i} = d\Gamma_1^{\rho i} - \Gamma_1^{\rho i}\omega_0^0 + \Gamma_1^{\rho j}\omega_j^i - c^{\rho i}\omega_1 + \Gamma_1^{\tau i}\omega_\tau^\rho - \Gamma_1^{\rho i}\varphi_\rho;$$

$$\Delta \Gamma_\rho^{1i} = d\Gamma_\rho^{1i} - \Gamma_\rho^{1i}\omega_0^0 + \Gamma_\rho^{1j}\omega_j^i - c^{1i}\omega_\rho + \Gamma_\rho^{1i}\varphi_\rho - \Gamma_\tau^{1i}\omega_\rho^\tau;$$

$$\Delta \Gamma_\rho^{\tau i} = d\Gamma_\rho^{\tau i} - \Gamma_\rho^{\tau i}\omega_0^0 + \Gamma_\rho^{\tau j}\omega_j^i - c^{\tau i}\omega_\rho - \Gamma_\rho^{\tau i}(\varphi_\rho - \varphi_\tau) - \Gamma_1^{\tau i}\omega_\rho^1;$$

$$\Delta b_\rho^i = db_\rho^i - b_\rho^i\omega_0^0 - b_\rho^j\omega_j^i - c^{1i}\omega_1 - 2\Gamma_\rho^{1i}\omega_1^\rho - \tag{3.5}$$

$$- \Gamma_\tau^{1i}\omega_1^\tau + c^{\rho i}\omega_\rho + \Gamma_\tau^{\rho i}\omega_\rho^\tau;$$

$$\Delta \lambda^k = d\lambda^k - \lambda^k\omega_0^0 + \lambda^j\omega_j^k$$

Здесь $\rho, \tau = 2,3$, причем $\rho \neq \tau$ и по ρ, τ суммирование не производится.

Система (3.4) является стандартной системой внешних квадратичных уравнений ([6], стр.108). Она в инволюции и определяет решение с произволом двенадцати функций трех аргументов.

Рассмотрим кривую H_3, заданную уравнением

$$a^2\{(x^1)^3+(x^2)^3+(x^3)^3\}-(1-2a^3)x^1x^2x^3=0,\ x^0=0$$

и являющуюся гессианой [5] кубики K_3. Девять точек пер[е]сечния кривых K_3 и H_3 являются точками перегиба кубик[и] K_3. Нетрудно проверить, что действительными точками пер[е]гиба будут точки

$$P_1=A_2-A_3,\quad P_2=A_1-A_3,\quad P_3=A_1-A_2. \quad (3.$$

Эти точки лежат на прямой ℓ:

$$x^1+x^2+x^3=0,\quad x^0=0, \quad (3.$$

которую назовем прямой перегиба. С помощью точек P_i можно охарактеризовать единичные точки $E_{ij}=A_i+A_j$ ребер репера A_iA_j. Единичная точка $E=A_1+A_2+A_3$ плоскости куби[ки] является точкой пересечния гармонических поляр [5] то[]чек перегиба P_i. Поляры точек перегиба P_i относительно коники K_2 пересекаются в точке

$$B=(b^{11}+b^{12}+b^{13})A_1+(b^{21}+b^{22}+b^{23})A_2+(b^{31}+b^{32}+b^{33})$$

являющейся полюсом прямой перегиба ℓ относительно коники K_2. Заметим, что из полярного соответствия относительно K непосредственно следует, что точка B и аполярная прямая ℓ_1 инцидентны тогда и только тогда, когда инцидентны точка A и прямая ℓ.

С помощью введенных выше точек можно охарактеризовать

[аб]солютный инвариант многообразия

$$a=DV(E_{ij},A_k,E,Q_{ij})\quad (i\neq j\neq k)$$

[гд]есь DV -знак сложного отношения точек, Q_{ij} -точка [пе]ресечения прямых, на которые распадается коническая поля[ра] [5] точки перегиба P_k относительно кубики K_3.

Обозначим через ℓ^i касательную к линии $\omega_j=\omega_k=0$, [о]писываемой точкой A_i (i,j,k —различны), а через Π^i_j,Π^i_k плоскости, проходящие через ℓ^i и точки A_j и A_k соот[ве]тственно. Уравнения этих плоскостей соответственно имеют [в]ид

$$\Gamma^{ki}_i x^0-x^k=0, \quad (3.9)$$

$$\Gamma^{ji}_i x^0-x^j=0. \quad (3.10)$$

Прямая ℓ^i и плоскости Π^k_j и Π^j_k пересекаются в точках M^{ik}_j и M^{ij}_k, где

$$M^{ik}_j=A_0+\Gamma^{ik}_k A_i+\Gamma^{ji}_i A_j+\Gamma^{ki}_i A_k, \quad (3.11)$$

$$M^{ij}_k=A_0+\Gamma^{ij}_j A_i+\Gamma^{ji}_i A_j+\Gamma^{ki}_i A_k. \quad (3.12)$$

В общем случае точки M^{ik}_j и M^{ij}_k не совпадают. Через точки M^{ik}_j проходят 15 прямых, причем, прямые $(M^{ik}_j M^{ij}_k)$ совпадают с ℓ^i, прямые $(M^{jk}_i M^{kj}_i)$ пересекают плоскость кубики в точке A_i, прямые $(M^{kj}_i M^{ji}_k)$ и $(M^{ij}_k M^{ki}_j)$ пересекают плоскость кубики в точке S_i, лежащей на ребре репера A_iA_j,

$$S_i=(\Gamma^{ik}_k-\Gamma^{ij}_j)A_i-(\Gamma^{jk}_k-\Gamma^{ji}_i)A_j,$$

все точки S_i лежат на одной прямой.

§4. Некоторые классы многообразий $K(0,3,3)^3$.

Рассмотрим класс, характеризующийся тем, что в нем точ…
M^{ik}_j совпадает с точкой A_0 (i -фиксированно, $j<k$).
Аналитически этот класс характеризуется соотношениями

$$\Gamma^{ki}_i=\Gamma^{ik}_k=\Gamma^{ji}_i=0 \qquad (4.$$

и обладает следующими свойствами. I/ Плоскость Π^i_j совпа…
с плоскостью $A_0A_iA_j$, плоскость Π^k_j -с плоскостью
$A_0A_kA_j$, плоскость Π^i_k -с плоскостью $A_0A_iA_k$.
2/ Точка M^{ji}_k инцидентна плоскости $A_0A_jA_k$, точка M^{k}_{0}…
плоскости $A_0A_kA_j$, точка M^{ki}_j -прямой A_0A_k, точ…
M^{ij}_k прямой A_0A_i. 3/ Пусть K_1, K_2 и K'_1, K'_2 -квазифле…
нодальные точки" [2] пары линейчатых поверхностей $\omega_i=\omega_j=0$…
описываемых прямыми A_0A_i и A_jA_k соответственно. Тогда
имеет место равенство

$$DV(K_1K_2A_0A_i)=DV(K'_1K'_2A_jA_k) \qquad ($$

Докажем свойство 3/ Пусть $K_\xi=A_0+\tau A_i$, $K'_\xi=A_j+tA_k$, …
где t и τ определяются с помощью уравнений

$$t^2(C^{jk}+\Gamma^{ik}_k\Gamma^{jk}_i)+t(\Gamma^{ik}_j\Gamma^{jk}_i-\Gamma^{ik}_k\Gamma^{kk}_i-C^{kk})-\Gamma^{jk}_i\Gamma^{kk}_i=0, \qquad (4$$

$$\tau^2\Gamma^{kk}_i+\tau(C^{kk}-\Gamma^{jk}_i\Gamma^{ik}_j-\Gamma^{kk}_i\Gamma^{ik}_k)-(\Gamma^{ik}_jC^{jk}+\Gamma^{ik}_kC^{kk})=0$$

…ли выполняется (4.1), то уравнения (4.3) принимают вид

$$t^2C^{jk}+t(\Gamma^{ik}_j\Gamma^{jk}_i-C^{kk})-\Gamma^{ik}_j\Gamma^{kk}_i=0,$$
$$\tau^2\Gamma^{kk}_i+\tau(C^{kk}-\Gamma^{ik}_j\Gamma^{jk}_i)-\Gamma^{ik}_jC^{jk}=0. \qquad (4.4)$$

…числив корни этих уравнений и найдя их отношения, получим

$$t_1:t_2=\tau_2:\tau_1$$

…тсюда и вытекает справедливость этого свойства.

Класс многообразия $K(0,3,3)^3$ характеризующийся тем, …о точки M^{ij}_k и M^{ik}_j совпадают, выделяется соотношениями

$$\Gamma^{ik}_k=\Gamma^{ij}_j \quad (i\text{ -фиксировано}) \qquad (4.5)$$

обладает свойствами.

I. Все остальные точки $M^{\ell m}_n$ лежат в одной плоскости.

…ействительно, определитель, составленный из координат этих точек, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \Gamma^{ij}_j & \Gamma^{jk}_k & \Gamma^{kj}_j \\ 1 & \Gamma^{ij}_j & \Gamma^{ji}_i & \Gamma^{kj}_j \\ 1 & \Gamma^{ik}_k & \Gamma^{jk}_k & \Gamma^{kj}_j \\ 1 & \Gamma^{ik}_k & \Gamma^{jk}_k & \Gamma^{ki}_i \end{vmatrix}$$

и в силу (5.5) равен нулю, что равносильно инцидентнос этих точек одной плоскости.

2. Касательные к линиям $\omega_i = \omega_j = 0$, $\omega_i = \omega_k = 0$, описыва точками A_k и A_j соответственно пересекаются. Доказат ство сводится к простым вычислениям.

Рассмотрим такой класс многообразия $K(0,3,3)^3$ у рого тензор c^{ij} симметричен, т.е.

$$c^{ij} = c^{ji}$$

Геометрически этот класс характеризуется тем, что для л прямой $\ell \in A_1A_2A_3$ её левая и правая точки совпадаю

Для этого класса справедливы свойства.

1/ Плоскость, содержащая касательные к линиям, описыва мым точкой A_0 вдоль всех Ψ_1, определяемых уравнение $\omega_i = 0$, пересекает плоскость кубики по прямой, являю щейся полярой точки A_i относительно коники K_2. Действ тельно, т.к. в силу (4.6) $c^{ij} = b^{ij}$, то эта плоскость имеет уравнение

$$b_{i1}x^1 + b_{i2}x^2 + b_{i3}x^3 = 0.$$

Очевидно, что пересечение этой плоскости с плоскостью куб ки и является полярой точки A_i относительно коники K_2

2/ Точка пересечения с плоскостью кубики касательной линии $\omega_i = \omega_j = 0$, описываемой точкой A_0, совпадает с точкой пересечения поляр точек A_i и A_j относительно коники K_2.

вдоль Ψ_1, соответствующего прямой ℓ_1, точка A_0 опи ет линию с касательной A_0A.

Подставляя в (3.5) аналитические условия, выделяющие дый из рассмотренных классов многообразий $K(0,3,3)^3$, учим, что все они существуют и определяются с произволом ити, одиннадцати и девяти функций трех аргументов соот ственно.

Литература

1. Ивлев Е.Т., К геометрической интерпретации операции ертывания некоторых тензоров. Материалы итоговой научной нференции по матем. и мех. за 1970г., I, Томск, 1970, 121-123.

2. Ивлев Е.Т., О паре линейчатых поверхностей в трехмер м проективном пространстве. Геом. сб. 2., Тр. Томского ун-та, 51, 1962, 3-10.

3. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных ногообразий. Тр. Моск. матем. об-ва, 2, 1953, 275-385.

4. Малаховский В.С., К геометрии касательно оснащенных ногообразий. Изв. вузов. Математика, 9, 172 1972, 54-65.

5. Смогоржевский А.С., Столова Е.С., Справочник по теории лоских кривых третьего порядка, М., 1961.

6. Щербаков Р.Н., Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск, 1971.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

К о р с а к о в а Л.Г.

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК, КАСАЮЩИХСЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СВОИХ ПЛОСКОСТЕЙ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматри вается пара конгруэнций коник, касающихся линии пересече ния своих плоскостей. Введено понятие расслояемых пар ко груэнций коник такого типа (пар A) и подробно иссле ваны различные частные подклассы этих конгруэнций.

§I. Пары конгруэнций коник, касающихся линии пересечения своих плоскостей.

Рассмотрим в пространстве P_3 пару (C_1,C_2) конгруэнци $(C_1),(C_2)$ коник, не лежащих в одной плоскости и каса щихся линии ℓ пересечения своих плоскостей α_1 и α_2 в различных точках A_1 и A_2.

Пара (C_1,C_2) называется парой A, если семейства (α_1) и (α_2) плоскостей коник конгруэнций (C_1) и (C_2) - двупараметрические.

Отнесем пару A к реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где вершины A_3 и A_4 выбираются так, чтобы треугольники $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$ были автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно коник C_1 и C_2.

нфинитезимальные перемещения репера R определяются де- ивационными формулами

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4), \qquad (1.1)$$

ричем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям труктуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0. \qquad (1.3)$$

Репер $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ геометрически фиксирован. Уравнения коник C_1 и C_2 относительно репера R (при надлежащей нормировке вершин A_α) имеют вид:

$$(x^2)^2-2x^1x^4=0, \quad x^3=0; \qquad (1.4)$$

$$(x^1)^2-2x^2x^3=0, \quad x^4=0 \qquad (1.5)$$

Обозначим

$$\omega_i^4=\omega_i \qquad (i,j,\kappa=1,2) \qquad (1.6)$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и суммирование по этим индексам не производится. Вибирая формы Пфаффа ω_i за независимые первичные, приводим систему пфаффовых уравнений пары A к виду:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k\,, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k\,, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k\,,$$

$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k\,, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k\,, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k\,, \qquad (1.7)$$

$$\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\,\omega_1^1 = a^k\omega_k\,, \quad \omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\,\omega_2^2 = b^k\omega_k\,,$$

причем

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \Gamma_1^{31} & \Gamma_2^{31} & \Gamma_4^{31} \\ \Gamma_1^{32} & \Gamma_2^{32} & \Gamma_4^{32} \end{pmatrix} = 2. \qquad (1.8)$$

Анализируя систему (I.7), убеждаемся, что пары A существуют и определяются с произволом двенадцати функций двух аргументов.

С парой A ассоциируются следующие основные геометрические образы.

1 Прямолинейные конгруэнции $(A_i A_3)$.

I) Конгруэнция $(A_1 A_3)$.

Фокусы $F = \lambda A_1 + \mu A_3$ луча $A_1 A_3$ и торсы конгруэнции $(A_1 A_3)$ определяются уравнениями:

$$\mu^2(\Gamma_3^{21}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{22}\Gamma_3^{41}) + \lambda\mu(\Gamma_1^{21}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{22} - \Gamma_1^{22}\Gamma_3^{41}) - \lambda^2\Gamma_1^{22} = 0, \qquad (1.9)$$

$$(\Gamma_1^{21}\Gamma^{41} - \Gamma_3^{21})(\omega_1)^2 + (\Gamma_1^{22}\Gamma_3^{41} + \Gamma_1^{21}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{22})\omega_1\omega_2 + \Gamma_1^{22}\Gamma_3^{42}(\omega_2)^2 = 0. \quad (1.10)$$

2) Конгруэнция $(A_2 A_3)$.

Фокусы $F' = \gamma A_2 + \nu A_3$ луча $A_2 A_3$ и торсы этой конгруэнции определяются уравнениями:

$$\gamma^2\Gamma_2^{11} + \gamma\nu(\Gamma_3^{11} + \Gamma_2^{11}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{41}\Gamma_2^{12}) + \nu^2(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{41}\Gamma_3^{12}) = 0, \qquad (1.11)$$

$$\Gamma_2^{11}\Gamma_3^{41}(\omega_1)^2 + (\Gamma_2^{12}\Gamma_3^{41} + \Gamma_2^{11}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{11})\omega_1\omega_2 + (\Gamma_2^{12}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{12})(\omega_2)^2 = 0. \quad (1.12)$$

II. Характеристические точки граней репера R.

Характеристические точки M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно граней $(A_2A_3A_4), (A_1A_3A_4), (A_1A_2A_4), (A_1A_2A_3)$ определяются формулами:

$$M_1 = (\Gamma_3^{11}\Gamma_4^{12} - \Gamma_3^{12}\Gamma_4^{11})A_2 + (\Gamma_4^{11}\Gamma_2^{12} - \Gamma_4^{12}\Gamma_2^{11})A_3 + (\Gamma_2^{11}\Gamma_3^{12} - \Gamma_2^{12}\Gamma_3^{11})A_4\,, \quad (1.13)$$

$$M_2 = (\Gamma_3^{21}\Gamma_4^{22} - \Gamma_3^{22}\Gamma_4^{21})A_1 + (\Gamma_4^{21}\Gamma_1^{22} - \Gamma_4^{22}\Gamma_1^{21})A_3 + (\Gamma_1^{21}\Gamma_3^{22} - \Gamma_1^{22}\Gamma_3^{21})A_4\,, \quad (1.14)$$

$$M_3 = (\Gamma_2^{31}\Gamma_4^{32} - \Gamma_2^{32}\Gamma_4^{31})A_1 + (\Gamma_4^{31}\Gamma_1^{32} - \Gamma_4^{32}\Gamma_1^{31})A_2 + (\Gamma_1^{31}\Gamma_2^{32} - \Gamma_2^{31}\Gamma_1^{32})A_4\,, \quad (1.15)$$

$$M_4 = -\Gamma_3^{41}A_1 - \Gamma_3^{42}A_2 + A_3\,. \qquad (1.16)$$

III. Фокальные точки коник и фокальные семейства конгруэнций (C_1) и (C_2).

Для определения фокальных точек коник и фокальных семейств конгруэнций (C_1) и (C_2) имеем соответственно системы уравнений:

$$(x^2)^2 - 2x^1x^4 = 0\,, \quad x^3 = 0\,, \qquad (1.17)$$

$$x^2(x^1)^2[\Gamma_2^{32} - \Gamma_1^{21}\Gamma_1^{32} - \Gamma_1^{31}(1 - \Gamma_1^{22})] + x^1x^2x^4[(\Gamma_2^{11} - \Gamma_4^{21})\Gamma_1^{32} + \Gamma_2^{32}b^1 -$$
$$- \Gamma_4^{32}\Gamma_1^{21} + \Gamma_4^{31}(\Gamma_4^{22} - \Gamma_2^{12}) - \Gamma_2^{31}b^2 - \Gamma_4^{31}(1 - \Gamma_1^{22})] + (x^4)^2x^1[\Gamma_1^{32}\Gamma_4^{11} + \Gamma_4^{32}b^1 -$$
$$- \Gamma_1^{31}\Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{31}b^2] + (x^1)^3\Gamma_1^{32} + x^4(x^1)^2[\Gamma_1^{32}b^1 + \Gamma_4^{32} - \Gamma_1^{31}b^2] + (x^2)^2x^1[-\Gamma_2^{32}\Gamma_1^{21} +$$
$$+ \Gamma_2^{31}(\Gamma_1^{22} - 1)] + x^4(x^2)^2[\Gamma_2^{32}(\Gamma_2^{11} - \Gamma_4^{21}) + \Gamma_2^{31}(\Gamma_4^{22} - \Gamma_2^{12})] + (x^4)^2x^2[\Gamma_2^{32}\Gamma_4^{31} +$$
$$+ \Gamma_4^{31}(\Gamma_4^{22} - \Gamma_2^{12}) - \Gamma_4^{32}(\Gamma_4^{21} - \Gamma_2^{11}) - \Gamma_2^{31}\Gamma_4^{12}] + (x^4)^3[\Gamma_4^{32}\Gamma_4^{11} - \Gamma_4^{31}\Gamma_4^{12}] = 0.$$

$$(x^1)^2-2x^2x^3=0,\ x^4=0,$$

$$(x^2)^2x^3[a^1+\Gamma^{42}_3\Gamma^{31}_2-\Gamma^{41}_3\Gamma^{32}_2]+(x^2)^3\Gamma^{31}_2+x^2(x^3)^2[\Gamma^{21}_3+\Gamma^{42}_3a^1-\Gamma^{41}_3a^2]$$
$$+x^1(x^2)^2[\Gamma^{31}_1-\Gamma^{11}_2-\Gamma^{32}_2]+x^1x^2x^3[\Gamma^{21}_1-\Gamma^{11}_3+\Gamma^{42}_3(\Gamma^{31}_1-\Gamma^{11}_2)-$$
$$-\Gamma^{41}_3(\Gamma^{32}_1-\Gamma^{12}_2)]+(x^3)^3[\Gamma^{42}_3\Gamma^{21}_3-\Gamma^{41}_3\Gamma^{22}_3]+x^1(x^3)^2[\Gamma^{42}_3(\Gamma^{21}_1-\Gamma^{11}_3)$$
$$-\Gamma^{41}_3(\Gamma^{22}_1-\Gamma^{12}_3)-\Gamma^{22}_3]-(x^1)^2x^2(\Gamma^{32}_1-\Gamma^{12}_2)-(x^1)^2x^3(\Gamma^{22}_1-\Gamma^{12}_3)=0 \qquad (1.1$$

§2. Расслояемые пары конгруэнций коник.

О п р е д е л е н и е I. Пара A называется расслояемой, если существуют односторонние расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к многообразию (A_3A_4) прямых. [I]

Найдем систему уравнений, определяющую расслояемую пару A. Произвольную точку M коники C_2 можно определить с помощью параметра σ посредством уравнения:

$$M=\sigma A_1+\frac{1}{2}\sigma^2A_2+A_3. \qquad (2.1)$$

Так как касательная плоскость к поверхности (M) должна быть инцидентна прямой A_3A_4, то

$$(dM,M,A_3,A_4)=0. \qquad (2.2)$$

Раскрывая (2.2) и учитывая (2.I), получим:

$$\sigma d\sigma=\frac{1}{2}\sigma^3\omega^1_2+\sigma^2(\omega^1_1-\omega^2_2)+\sigma(\omega^1_3-2\omega^2_1)-2\omega^2_3. \qquad (2.3)$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом с использованием (2.3), получим для σ уравнение четвертой степени

$$m_{\mathcal{J}}\sigma^{\mathcal{J}}=0,\quad (\mathcal{J}=0,1,\dots,4) \qquad (2.4)$$

которое должно удовлетворяться тождественно относительно σ. Значит, $m_{\mathcal{J}}=0$. Получаем пять квадратичных уравнений

$$\omega^1_2\wedge\omega^1_3+\omega^1_2\wedge\omega^1_4=0,$$

$$\omega^1_3\wedge\omega^2_2+\omega^1_1\wedge\omega^1_3+\omega^4_1\wedge\omega^1_4-\omega^3_2\wedge\omega^2_3-\omega^4_2\wedge\omega^2_4=0,$$

$$\omega^1_3\wedge(2\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3)-2\omega^2_3\wedge\omega^1_2+\omega^4_3\wedge\omega^1_4-2\omega^3_1\wedge\omega^2_3-2\omega^4_1\wedge\omega^2_4=0,$$

$$\omega^2_3\wedge(2\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3)+\omega^1_3\wedge\omega^2_1+\omega^4_3\wedge\omega^2_4=0, \qquad (2.5)$$

$$\omega^2_3\wedge(\omega^1_3-2\omega^2_1)=0.$$

Квадратичные уравнения, характеризующие расслоения от конгруэнции (C_1) к многообразию прямых A_3A_4, получаются из уравнений (2.5) подстановкой индексов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

Они имеют вид:

$$\omega^4_1\wedge\omega^2_4+\omega^3_1\wedge\omega^2_3=0,$$

$$\omega^2_4\wedge\omega^2_1+\omega^4_2\wedge\omega^2_4+\omega^3_2\wedge\omega^2_3-\omega^4_1\wedge\omega^1_4-\omega^3_1\wedge\omega^1_3=0, \qquad (2.7)$$

$$\omega^2_4\wedge(2\omega^2_2-\omega^1_1-\omega^4_4)-2\omega^1_4\wedge\omega^2_1+\omega^3_4\wedge\omega^2_3-2\omega^4_2\wedge\omega^1_4-2\omega^3_2\wedge\omega^1_3=0,$$

$$\omega_4^1\wedge(2\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_4^4)+\omega_4^2\wedge\omega_2^1+\omega_4^3\wedge\omega_3^1=0,$$

$$\omega_4^1\wedge(\omega_4^2-2\omega_2^1)=0.$$

Системы уравнений (I.7),(2.5),(2.7) определяют расслоя
пары A.

Определение 2. Расслояемая пара A наз
ся парой B, если: I) точки A_3 и A_4 являются характ
тическими точками плоскостей коник C_2 и C_1, 2) касате
ные плоскости к поверхностям (A_1) и (A_2) инцидентны пр
A_3A_4[I].

Из определения пары B следует, что

$$\omega_3^4=0,\quad \omega_4^3=0,\quad \omega_1^2=0,\quad \omega_2^1=0.$$

Пары B удовлетворяют следующей системе пфаффовых и квадратичных уравнений:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,$$

$$\omega_3^4=\omega_4^3=0,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k, \tag{2.8}$$

$$\omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_1^1=a^k\omega_k,\quad \omega_1^1+\omega_4^4-2\omega_2^2=b^k\omega_k,$$

$$\omega_2^3\wedge\omega_3^1+\omega_2\wedge\omega_4^1=0,\quad \omega_3^1\wedge(2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3)=0,$$

$$\omega_3^2\wedge(2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3)=0,\quad \omega_3^2\wedge\omega_3^1=0,\quad \omega_1\wedge\omega_4^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^2=0,$$

$$\omega_2\wedge\omega_4^2+\omega_2^3\wedge\omega_3^2-\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_1^3\wedge\omega_3^1=0,\quad \omega_4^1\wedge\omega_4^2=0, \tag{2.9}$$

$$\omega_4^2\wedge(2\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_4^4)=0,\quad \omega_4^1\wedge(2\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_4^4)=0.$$

мемся исследованием системы квадратичных уравнений (2.9)
ть ни одна из форм Пфаффа ω_3^1, ω_3^2, ω_4^1, ω_4^2 не обра
тся в нуль:

$$\omega_3^1\omega_3^2\omega_4^1\omega_4^2\neq 0. \tag{2.10}$$

меняя лемму Картана, получим

$$\omega_3^2=\lambda_1\omega_3^1,\quad \omega_4^2=\lambda_2\omega_4^1,\quad 2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3=\lambda_3\omega_3^1,$$

$$2\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_4^4=\lambda_4\omega_4^1.$$

гда имеем:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^1=\Gamma_3^{1k}\omega_k,\quad \omega_3^2=\lambda\omega_3^1,$$

$$\omega_4^1=\Gamma_4^{1k}\omega_k,\quad \omega_4^2=\lambda_2\omega_4^1,\quad \omega_4^3=\omega_3^4=0, \tag{2.11}$$

$$2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3=\lambda_3\omega_3^1,\quad 2\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_4^4=\lambda_4\omega_4^1.$$

$$\omega_2^3\wedge\omega_3^1+\omega_2\wedge\omega_4^1=0,$$

$$\omega_1\wedge\omega_4^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^2=0, \tag{2.12}$$

$$\omega_2\wedge\omega_4^2+\omega_2^3\wedge\omega_3^2-\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_1^3\wedge\omega_3^1=0.$$

Замыкая уравнения $\omega_3^4=0$, $\omega_4^3=0$, $\omega_i^j=0$ и учитывая в (2.12) все уравнения системы (2.II), получим пять конечных соотношений:

$$\Gamma_4^{11}=\Gamma_3^{11}(\lambda\Gamma_2^{31}-\Gamma_2^{32}), \tag{2.13}$$

$$\lambda_2 \Gamma_4^{12} = \lambda_1 \Gamma_3^{11} (\Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31}),$$

$$\Gamma_3^{11} (\lambda_1 - \lambda_2) [\lambda_2 (\lambda_1 \Gamma_2^{31} - \Gamma_2^{32}) - (\Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31})] = 0, \quad (2.1$$

$$\Gamma_3^{11} [\lambda_2 (\Gamma_1^{32} + \lambda_2 \Gamma_2^{32})(\lambda_1 \Gamma_2^{31} - \Gamma_2^{32}) - \lambda_1 (\Gamma_1^{31} + \lambda_2 \Gamma_2^{31})(\Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31})]$$

$$\Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21}.$$

Перепишем последнее соотношение из (2.I3) в виде

$$\Gamma_3^{12} = \lambda_1 \Gamma_3^{11},$$

тогда

$$\omega_3^1 = \Gamma_3^{11} (\omega_1 + \lambda_1 \omega_2).$$

Будем исходить из третьего уравнения системы (2.I3). Отсюда видно, что возможны два случая

$$\text{I} \quad \lambda_2 (\lambda_1 \Gamma_2^{31} - \Gamma_2^{32}) = \Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31}, \tag{2.14}$$

$$\text{II} \quad \lambda_1 = \lambda_2 \tag{2.15}$$

($\Gamma_3^{11} \neq 0$, иначе $\omega_3^1 = 0$, что противоречит (2.IO))

О п р е д е л е н и е 3. Пару B, для которой выполняется (2.IO), (2.I4) назовем парой B_1.

Система пфаффовых уравнений пар B_1 имеет вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k} \omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{11} (\omega_1 + \lambda_1 \omega_2),$$

$$\omega_4^1 = \frac{1}{\lambda_2} (\Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31}) \omega_3^1, \quad \omega_3^2 = \lambda_1 \omega_3^1; \quad \omega_4^2 = \lambda_2 \omega_4^1, \tag{2.16}$$

$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_3 \omega_3^1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \lambda_4 \omega_4^1.$$

и имеет место конечное соотношение

$$\Gamma_1^{32} + \lambda_2 \Gamma_2^{32} - \lambda_1 (\Gamma_1^{31} + \lambda_2 \Gamma_2^{31}) = 0. \tag{2.17}$$

Т е о р е м а 2.I. Пары B_1 существуют и определяются с произволом восьми функций одного аргумента. Прямые A_3A_4, ассоциированные с парой B_1, описывают линейчатую поверхность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Анализируя системы (2.I6), (2.I7), убеждаемся, что пары B_1 существуют и определяются с произволом восьми функций одного аргумента.

Имеем:

$$d[A_3A_4] = (\omega_3^3 + \omega_4^4)[A_3A_4] + \omega_3^1 \{[A_1A_4] + \lambda_1 [A_2A_4] + \frac{1}{\lambda_2}(\Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31})([A_3A_1] + \lambda_2 [A_3A_2])\},$$

откуда непосредственно следует второе утверждение теоремы.

О п р е д е л е н и е 4. Пара B, для которой выполняется (2.I5) и (2.IO), называется парой B_2.

Пары B_2 определяются системой пфаффовых уравнений:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k} \omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{11} (\omega_1 + \lambda_1 \omega_2), \quad \omega_3^2 = \lambda_1 \omega_3^1,$$

$$\omega_4^1 = \Gamma_4^{1k} \omega_k, \quad \omega_4^2 = \lambda_1 \omega_4^1, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \tag{2.18}$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_3 \omega_3^1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \lambda_4 \omega_4^1$$

и конечными соотношениями

$$\Gamma_4^{11}=\Gamma_3^{11}(\lambda_1\Gamma_2^{31}-\Gamma_2^{32}),$$
$$\Gamma_4^{12}=\Gamma_3^{11}(\Gamma_1^{32}-\lambda_1\Gamma_1^{31}), \qquad (2.19)$$
$$(\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32})[(\lambda_1)^2\Gamma_2^{31}+\lambda_1(\Gamma_1^{31}-\Gamma_2^{32})-\Gamma_1^{32}]=0.$$

Из (2.I9) следует, что существует два класса пар B_2 : пары B_2' для которых

$$\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32}=0, \qquad (2.20)$$

и пары B_2'', характеризуемые условием

$$(\lambda_1)^2\Gamma_2^{31}+\lambda_1(\Gamma_1^{31}-\Gamma_2^{32})-\Gamma_1^{32}=0 \qquad (2.21)$$

Т е о р е м а 2.2. Пары B_2' существуют и определяются с произволом шести функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Осуществляя продолжение подсистемы (2.I8)

$$\omega_3^2=\lambda_1\omega_3^1, \quad \omega_4^2=\lambda_1\omega_4^1,$$

получим:

$$d\ln\lambda_1+\omega_2^2-\omega_1^1=0. \qquad (2.22)$$

Исходя из (2.22), можно произвести последнюю нормировку вершин репера R так, чтобы

$$\lambda_1=1.$$

Система пфаффовых уравнений пары B_2' запишется в виде:

$$\omega_i^j=0, \quad \omega_1^3=\Gamma_1^{3k}\omega_k, \quad \omega_2^3=\Gamma_2^{31}\omega_1-\Gamma_1^{32}\omega_2,$$
$$\omega_3^1=\Gamma_3^{11}(\omega_1+\omega_2), \quad \omega_3^2=\omega_3^1, \quad \omega_1^1-\omega_2^2=0, \qquad (2.24)$$
$$\omega_4^1=\Gamma_3^{11}[(\Gamma_2^{31}+\Gamma_1^{31})\omega_1+(\Gamma_1^{32}-\Gamma_1^{31})\omega_2], \quad \omega_4^2=\omega_4^1,$$
$$\omega_3^4=0; \ \omega_4^3=0; \ \omega_1^1-\omega_3^3=\lambda_3\omega_3^1, \quad \omega_1^1-\omega_4^4=\lambda_4\omega_4^1.$$

Анализируя систему (2.24), убеждаемся в справедливости теоремы 2.2.

Пары B_2'' образуют подкласс пар B_1 (выделяются из пар B_1 при $\lambda_1=\lambda_2$)

Вернемся вновь к системе (2.9). Мы показали, что при (2.I0), существует только два класса пар B : B_1, B_2. Может представиться I5 случаев, когда одна из форм $\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2$ обращается в нуль, две из них, три, и, наконец, все четыре обращаются в нуль. Этим перебором I5 случаев и будет полностью завершено исследование системы (2.9).

I) Пусть

$$\omega_3^1=0. \qquad (2.25)$$

О п р е д е л е н и е 5. Пару B, характеризуемую условием (2.25), назовем парой B_3.

Система уравнений пары B_3 имеет вид:

$$\omega_i^j=0, \quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1=0, \quad \omega_3^2=\Gamma_3^{22}\omega_2,$$
$$\omega_4^1=\Gamma_2^{31}\omega_3^2, \quad \omega_4^2=-\Gamma_1^{31}\omega_3^2, \quad \omega_3^4=\omega_4^3=0, \qquad (2.26)$$
$$2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3=\mu\omega_2, \quad 2\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_4^4=\lambda\omega_2.$$

2)Пусть

$$\omega_3^2 = 0 \qquad (2.27)$$

Пара B ,для которой выполняется (2.27),называется парой $\widetilde{B}_3$.Пара $\widetilde{B}_3$ определяется системой уравнений Пфаффа

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{11}\omega_1, \quad \omega_3^2 = 0,$$

$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_4^2 = \Gamma_1^{32}\omega_3^1, \quad \omega_4^1 = -\Gamma_2^{32}\omega_3^1, \qquad (2.28)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \eta\omega_1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \nu\omega_1 .$$

Система (2.28) получается из системы (2.26) путем перенумерования вершин A_1 и A_2,следовательно классы B_3 и $\widetilde{B}_3$ проективно эквивалентны,то есть можно говорить об одной паре B_3.

Т е о р е м а 2.3. Пары B_3 существуют и определяются с произволом семи функций одного аргумента.Прямые A_3A_4, ассоциированные с парой B_3, описывают линейчатую поверхность.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Анализируя систему уравнений (2.26),получаем первое утверждение теоремы 2.3.

Имеем:

$$d[A_3A_4] = (\omega_3^3+\omega_4^4)[A_3A_4] + \omega_3^2\{[A_2A_4] + \Gamma_2^{31}[A_3A_1] - \Gamma_1^{31}[A_3A_2]\},$$

откуда непосредственно следует второе утверждение теоремы.

3)

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_3^1 = 0. \qquad (2.29)$$

Из системы уравнений (2.9) и условий (2.29) следует,что ω_4^1, ω_4^2 равны нулю,тогда каждое квадратичное уравнение системы (2.9) обращается в тождество.

О п р е д е л е н и е 6. Пара B в которой точки A_3 и A_4 неподвижны,называется парой B_4 .

Система пфаффовых уравнений пары B_4 имеет вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = \omega_4^2 = 0, \qquad (2.30)$$

$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_1^1 = a^k\omega_k, \quad \omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2 = b^k\omega_k .$$

Т е о р е м а 2.4. Пары B_4 существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. непосредственно следует из исследования системы (2.30).

4)Пусть

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^2 = 0 . \qquad (2.31)$$

О п р е д е л е н и е 7. Пара B ,для которой имеют место уравнения (2.31),называется парой B_5 .

Система уравнений Пфаффа пары B_5 запишется в виде:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{11}\omega_1, \quad \omega_3^2 = \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_4^1 = \Gamma_3^{11}(-\Gamma_2^{32}\omega_1 + \Gamma_1^{32}\omega_2), \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \qquad (2.32)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda\omega_1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \mu\,\omega_4^1 .$$

и имеет место конечное соотношение

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_1^{32}(\Gamma_2^{32} + \Gamma_1^{31}) = 0 \qquad (2.33)$$

Из (2.33) вытекает, что существует два класса пар B_5 : пары B_5', для которых

$$\Gamma_1^{32} = 0, \tag{2.34}$$

и пары B_5'', характеризуемые условием

$$\Gamma_2^{32} + \Gamma_1^{31} = 0 \tag{2.35}$$

($\Gamma_3^{11} \neq 0$, иначе $\omega_3^1 \neq 0$, что противоречит определению пары B_5).

5)

$$\omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^1 = 0. \tag{2.36}$$

Пара B, для которой имеют место уравнения (2.36), называется парой $\widetilde{B}_5$. Пара $\widetilde{B}_5$ определяется уравнениями Пфаффа :

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_3^2 = \Gamma_3^{22}\omega_2,$$

$$\omega_4^2 = \Gamma_3^{22}(\Gamma_2^{31}\omega_1 - \Gamma_1^{31}\omega_2), \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = \omega_4^1 = 0, \tag{2.37}$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \eta\omega_2, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \nu\omega_4^2$$

и конечным соотношением

$$\Gamma_3^{22}\Gamma_2^{31}(\Gamma_2^{32} + \Gamma_1^{31}) = 0. \tag{2.38}$$

Из (2.38) следует, что существует два класса пар $\widetilde{B}_5$: пары $\widetilde{B}_5^1$, для которых

$$\Gamma_2^{31} = 0 \tag{2.39}$$

и пары B_5'', характеризуемые условием

$$\Gamma_2^{32} + \Gamma_1^{31} = 0. \tag{2.40}$$

Классы B_5^1 и $\widetilde{B}_5^1$, B_5'' и $\widetilde{B}_5''$ проективно эквивалентны, следовательно, можно говорить лишь о двух классах: парах B_5' и B_5''.

Т е о р е м а 2.5. Пары B_5' существуют и определяются с произволом шести функций, одного аргумента. Прямые A_3A_4 в паре B_5' описывают линейчатую поверхность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Анализируя систему уравнений (2.32) с учетом (2.34), убеждаемся в справедливости первой части теоремы 2.5 .

Имеем:

$$d[A_3A_4] = (\omega_3^3 + \omega_4^4)[A_3A_4] + \omega_3^1\{[A_1A_4] - \Gamma_2^{32}[A_3A_1]\},$$

откуда непосредственно следует второе утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2.6. Пары B_5'' существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство непосредственно следует из анализа системы (2.32) с учетом условия (2.35).

6)

$$\omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^2 = 0. \tag{2.41}$$

Пару B, для которой выполняются условия (2.41), назовем парой B_6.

Система пфаффовых уравнений пары B_6 имеет вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_2^3 = \Gamma^{3k}\omega_k, \quad \omega_1^3 = \lambda_2\omega_3^2, \quad \omega_3^1 = 0,$$

$$\omega_3^2 = \Gamma_3^{22}\omega_2, \quad \omega_4^1 = \Gamma_2^{31}\omega_3^2; \quad \omega_4^2 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \tag{2.42}$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_3\omega_2, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \lambda_4\omega_2.$$

7) Пусть

$$\omega_4^1 = 0\,,\quad \omega_3^2 = 0\,. \qquad (2.43)$$

Пару B для которой имеют место уравнения (2.43) назов парой $\widetilde{B}_6$. Система дифференциальных уравнений пары $\widetilde{B}_6$ запишется в виде:

$$\omega_i^j = 0\,,\quad \omega_1^3 = \Gamma_1^{3k}\omega_k\,,\quad \omega_2^3 = \lambda_1\omega_3^1\,,\ \omega_3^1 = \Gamma_3^{11}\omega_1\,,$$

$$\omega_3^2 = \omega_4^1 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0\,,\ \omega_4^2 = \Gamma_1^{32}\omega_3^1\,, \qquad (2.44)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \mu_3\,\omega_1\,,\ 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \mu_4\,\omega_1\,.$$

Анализируя системы уравнений (2.42) и (2.44), убеждаемся, что классы B_6 и $\widetilde{B}_6$ —проективно эквивалентные.

Т е о р е м а 2.7. Пары B_6 существуют и определяются с произволом шести функций одного аргумента.

Анализируя систему (2.42), убеждаемся в справедливости теоремы 2.7.

Прямые A_3A_4 и в паре B_6 описывают линейчатую поверхность: $d[A_3A_4] = (\omega_3^3+\omega_4^4)[A_3A_4] + \omega_3^2\{[A_2A_4+\Gamma_2^{31}[A_3A$

8)

$$\omega_4^1 = 0\,. \qquad (2.45)$$

О п р е д е л е н и е 8. Пара B, для которой имеет ме то уравнение (2.45), называется парой B_7.

Система уравнений Пфаффа пар B_7 имеет вид:

$$\omega_i^j = 0,\ \omega_1^3 = \Gamma_1^{3k}\omega_k\,,\ \omega_2^3 = \xi_2\,\omega_3^1\,,\ \omega_3^1 = \Gamma_3^{11}(\omega_1 + \xi\,\omega_2)\,,$$

$$\omega_3^2 = \xi_1\omega_3^1\,,\ \omega_4^1 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0,\ \omega_4^2 = (\Gamma_1^{32} - \xi_1\Gamma_1^{31})\omega_3^1\,, \qquad (2.46)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \xi_3\,\omega_3^1\,,\ 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \xi_4\,\omega_3^1\,.$$

9) Пусть

$$\omega_4^2 = 0\,. \qquad (2.47)$$

Пара B, для которой выполняется (2.47), называется парой $\widetilde{B}_7$. Пара $\widetilde{B}_7$ определяется системой уравнений Пфаффа

$$\omega_i^j = 0\,,\quad \omega_2^3 = \Gamma_2^{3k}\omega_k\,,\quad \omega_1^3 = \lambda_1\omega_3^2\,,\quad \omega_3^2 = \Gamma_3^{22}(\lambda_2\omega_1 + \omega_2)\,,$$

$$\omega_3^1 = \lambda_2\,\omega_3^2\,,\ \omega_4^2 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0\,,\ \omega_4^1 = (\Gamma_2^{31} - \lambda_2\Gamma_2^{32})\omega_3^2\,, \qquad (2.48)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_3\,\omega_3^2\,,\quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \lambda_4\,\omega_3^2\,.$$

Анализируя системы уравнений (2.46) и (2.48) убеждаемся, что классы B_7 и $\widetilde{B}_7$ проективно эквивалентны.

Т е о р е м а 2.8. Пары B_7 существуют и определяются с произволом семи функций одного аргумента. Прямые A_3A_4, ассоциированные с парой B_7, описывают линейчатую поверхность.

Доказательство первого утверждения теоремы следует из исследования системы уравнений (2.46).

Имеем:

$$d[A_3A_4] = (\omega_3^3+\omega_4^4)[A_3A_4] + \omega_3^1\{[A_1A_4] + \xi_1[A_2A_4] + (\Gamma_1^{32} - \xi_1\Gamma_1^{31})[A_3A_2]\},$$

откуда непосредственно следует второе утверждение теоремы 2.8.

Случаи

а/ $\qquad \omega_4^1 = 0\,,\ \ \omega_4^2 = 0\,; \qquad (2.49)$

б/ $\qquad \omega_4^1 = 0,\ \ \omega_4^2 = 0,\ \ \omega_3^1 = 0\,; \qquad (2.50)$

с/ $\qquad \omega_4^1 = 0,\ \ \omega_4^2 = 0,\ \ \omega_3^2 = 0\,; \qquad (2.51)$

исключаются из рассмотрения, так как ранг системы форм $\{\omega^3_1, \omega^3_2, \omega^3_4\}$ равен единице, что противоречит (I.8).

Таким образом, установлено существование восьми и только восьми классов пар B. Это пары $B_1, B'_2, B_3, B_4, B'_5, B''_5, B_6, B_7$.

§3. Геометрические свойства пар B'_2.

Т е о р е м а 3.I. Пары B'_2 обладают следующими свойствами: I) поверхности (A_3) и (A_4) вырождаются в линии, 2) касательные к линиям (A_3), (A_4) пересекаются в единичной точке $E = A_1 + A_2$ прямой $A_1 A_2$, 3) прямолинейные конгруэнции $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$ односторонне расслояемы (от прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$ к прямолинейной конгруэнции $(A_3 A_4)$; не существует пар B'_2 с двусторонним расслоением этих прямолинейных конгруэнций, 4) торсы прямолинейных конгруэнций $(A_i A_3)$ соответствуют координатным линиям $\omega_i = 0$. Торсы другого семейства этих прямолинейных конгруэнций соответствуют и определяются уравнением

$$\omega_1 + \omega_2 = 0 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (2.24), имеем

$$\begin{aligned} dA_3 &= \omega^1_3 (A_1 + A_2) + \omega^3_3 A_3 , \\ dA_4 &= \omega^1_4 (A_1 + A_2) + \omega^4_4 A_4 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

откуда вытекают утверждения I) и 2) теоремы 3.I. Уравнения

$$\begin{aligned} &\omega^3_2 \wedge \omega^1_3 + \omega_2 \wedge \omega^1_4 = 0, \quad \omega^3_1 \wedge \omega^2_3 + \omega_1 \wedge \omega^2_4 = 0, \\ &\omega^3_1 \wedge \omega^1_3 + \omega_1 \wedge \omega^1_4 - \omega^3_2 \wedge \omega^2_3 - \omega_2 \wedge \omega^2_4 = 0 , \end{aligned} \qquad (3.3)$$

характеризующие одностороннее расслоение от конгруэнции $(A_1 A_2)$ к конгруэнции $(A_3 A_4)$, [2], обращаются в тождество в силу (2.24).

С другой стороны, учитывая (2.24) в квадратичном уравнении

$$\omega^1_3 \wedge \omega^3_1 + \omega^2_3 \wedge \omega^3_2 - \omega^1_4 \wedge \omega_1 - \omega^2_4 \wedge \omega_2 = 0 , \qquad (3.4)$$

которое имеет место при двустороннем расслоении пары прямолинейных конгруэнций $(A_1 A_2)$, $(A_3 A_4)$, [2], получим

$$\Gamma^{32}_1 - \Gamma^{31}_2 - 2\Gamma^{31}_1 = 0 , \qquad (3.5)$$

что противоречит (2.24). Следовательно, не существует пар B'_2 с двусторонним расслоением этих прямолинейных конгруэнций.

Утверждение 4) теоремы непосредственно вытекает из формул (I.I0), (I.I2) с учетом (2.24).

Л и т е р а т у р а

I. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Труды геометрического семинара. М., ВИНИТИ АН СССР, 3, I97I, стр. I93-220.

2. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., I956, стр. 66-69.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

Л и п а т о в а Ф.Л.

КОНГРУЭНЦИИ V_1 .

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуется ча
ный класс невырожденных конгруэнций V пар фигур, обра
ванных эллипсом C и точкой M , инцидентной эллипсу
Отнесем конгруэнцию V к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где
A -центр эллипса C , вектор $\bar{e}_1=\overline{AM}$, вектор $\bar{e}_2=\overline{AA_2}$
сопряжен вектору $\bar{e}_1$ относительно эллипса C , точка A_2
инцидентна этому эллипсу, а вектор $\bar{e}_3$ коллинеарен линии
пересечения касательных плоскостей поверхностей (M), (A_2)
соответственно в точках M и A_2 .

Из рассмотрения исключается случай параллельности эт
касательных плоскостей и совпадения их с плоскостью
эллипса C .

Эллипс C относительно репера R определяется
уравнениями:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1, \quad x^3=0. \tag{1}$$

Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции V
имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\omega^3=a\omega^1+b\omega^2, && \omega_2^2=s\omega^1+t\omega^2,\\
&\omega_1^1=c\omega^1+l\omega^2, && \omega_2^3=q\omega^1+r\omega^2,\\
&\omega_1^2=f\omega^1+h\omega^2, && \omega_3^1=m_1\omega^1+m_2\omega^2,\\
&\omega_1^3=n\omega^1+m\omega^2, && \omega_3^2=n_1\omega^1+n_2\omega^2,\\
&\omega_2^1=p\omega^1+k\omega^2,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&(1+c)(1+h)-lf=0,\\
&(1+p)(1+t)-ks=0.
\end{aligned} \tag{3}$$

где ω^i, ω_i^j $(i,j,k=1,2,3)$ компоненты деривационных
формул репера R , удовлетворяющие уравнениям структуры

$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i, \quad D\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0.$$

Анализируя системы уравнений (2) и (3) убеждаемся, что
невырожденная конгруэнция V существует и определяется
с произволом семи функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнция V называется
конгруэнцией V_1 , если

$$\begin{gathered}
a=b=m=q=m_1=m_2=n_1=n_2=k=h=p=l=s=0,\\
t=c=-1
\end{gathered} \tag{4}$$

Т е о р е м а I. Конгруэнции V_1 существуют и опреде-
ляются с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу соотношений (4), система уравнений (2) примет вид:

$$\omega^3=0\ ,\quad \omega_2^1=0\ ,\quad \omega_3^2=0\ ,\quad \omega_1^1=-\omega^1,$$

$$\omega_2^2=-\omega^2,\quad \omega_1^2=f\omega^1\ ,\quad \omega_2^3=r\omega^2, \tag{5}$$

$$\omega_1^3=n\omega^1,\qquad \omega_3^1=0\ .$$

Замыкая систему уравнений (5), получим три квадратичных уравнения:

$$df\wedge\omega^1+f\,\omega^1\wedge\omega^2=0,$$

$$dn\wedge\omega^1-(fr+n)\,\omega^1\wedge\omega^2=0, \tag{6}$$

$$dr\wedge\omega^2\ +\ r\,\omega^1\wedge\omega^2=0.$$

Из систем уравнений (5) и (6) заключаем, что конгруэнция V существует и определяется с произволом трех функций одног аргумента.

Т е о р е м а 2. Точки пересечения диаметров AM и A лмпсом C конгруэнции V_1 являются его фокальными точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальные поверхности и фо льные семейства конгруэнции (C) определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases}(x^1)^2+(x^2)^2=1\ ,\quad x^3=0\ ,\\ \omega_1^1(x^1)^2+\omega_2^2(x^2)^2+(\omega_2^1+\omega_1^2)x^1x^2+x^1\omega^1+x^2\omega^2=0,\\ x^1\omega_1^3\ +x^2\omega_2^3+\ \omega^3=0\ .\end{cases} \tag{7}$$

Из системы (7), учитывая (5), находим уравнения для определения координат фокальных точек эллипса C конгруэнции V_1:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1\quad ,\quad x^3=0\ ,$$

$$x^1x^2\left[rx^1-(rf+n)x^2+(n-r)\right]=0, \tag{8}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Координаты двух оставшихся фокальных точек эллипса C находятся из системы уравнений

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1\ ,\qquad x^3=0.$$

$$rx^1-(rf+n)x^2\ +\ n-r=0\ . \tag{9}$$

Т е о р е м а 3. Торсы прямолинейных конгруэнций $(A\bar e_1)$ и $(A\bar e_2)$ соответствуют и высекают на поверхности (A) координатные линии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения торсов прямолинейных конгруэнций $(A\bar e_1)$ и $(A\bar e_2)$ конгруэнции V имеют вид:

$$\omega^1\omega^2=0\ .$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

Малаховский В.С.

КАСАТЕЛЬНО ОСНАЩЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ КОНИК.

В трехмерном проективном пространстве исследуется двупараметрическое семейство (конгруэнция) $\mathcal{K}$ кривых второго порядка (коник) с заданным касательным распределением. Такая конгруэнция называется касательно оснащенной конгруэнцией коник, или конгруэнцией $\mathcal{K}^*$ [I]. Построен канонический репер конгруэнции $\mathcal{K}^*$ и рассмотрены основные ассоциированные с ней геометрические образы. Изучены некоторые классы конгруэнций $\mathcal{K}^*$.

§I. Система пфаффовых уравнений невырожденной касательно оснащенной конгруэнции коник.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 конгруэнцию $\mathcal{K}$ коник, плоскости которых образуют двупараметрическое семейство. Располагая вершины A_α $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ репера $\{A_{\alpha'}\}$ $(\alpha',\beta',\gamma'=1,2,3,4)$ в плоскости коники, приведем уравнения коники C конгруэнции $\mathcal{K}$ к виду:

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^4 = 0. \qquad (1.1)$$

причем

$$\det(a_{\alpha\beta}) = \mathrm{Const}. \qquad (1.2)$$

Компоненты $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$ деривационных формул

$$dA_{\alpha'} = \omega_{\alpha'}^{\beta'} A_{\beta'}$$

удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_{\alpha'}^{\beta'} = \omega_{\alpha'}^{\gamma'} \wedge \omega_{\gamma'}^{\beta'} \qquad (1.3)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \qquad (1.4)$$

Обозначим

$$\omega_i = \omega_i^4 \qquad (i,j,k,h = 1,2). \qquad (1.5)$$

Так как плоскости коник конгруэнции $\mathcal{K}$ образуют двупараметрическое семейство, то ранг системы форм $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3^4\}$ равен двум. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0. \qquad (1.6)$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{K}$ запишется в виде:

$$\nabla a_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} a_{\alpha\beta}\, \omega_\gamma^\gamma = b_{\alpha\beta}^{k}\, \omega_k, \quad \omega_3^4 = a^k \omega_k, \qquad (1.7)$$

где ∇ – символ ковариантного дифференцирования. Из (I.2) вытекают тождества

$$a^{\alpha\beta} b^i_{\alpha\beta} = 0, \qquad (1.8)$$

где $a^{\alpha\beta}$ -приведенные миноры элемента $a_{\alpha\beta}$ матрицы $(a_{\alpha\beta})$.
Продолжая (I.7), получим

$$\nabla b^i_{\alpha\beta} + b^i_{\alpha\beta}\left(\tfrac{2}{3}\omega^\gamma_\gamma - \omega^4_4\right) + a^i b^k_{\alpha\beta}\omega^3_k + \tfrac{2}{3}a_{\alpha\beta}\left(\omega^i_4 + a^i\omega^3_4\right) -$$

$$-\left\{a_{\gamma\beta}\left(\delta^i_\alpha + \delta^3_\alpha a^i\right) + a_{\alpha\gamma}\left(\delta^i_\beta + \delta^3_\beta a^i\right)\right\}\omega^\gamma_4 = b^{ik}_{\alpha\beta}\,\omega_k \qquad (1.9)$$

$$da^i + a^k\omega^i_k - a^i\omega^3_3 + a^k a^i\omega^3_k - \omega^i_3 = -\Gamma^{ik}_3\,\omega_k.$$

Зададим величину λ ,удовлетворяющую уравнению

$$d\lambda + \lambda(\omega^1_1 - \omega^2_2) - \lambda^2\omega^2_1 + \omega^1_2 + (a^1 - \lambda a^2)(\lambda\omega^3_1 + \omega^3_2) = m^k\omega_k.$$

Геометрический объект

$$\Gamma = \left\{a_{\alpha\beta},\ b^i_{\alpha\beta},\ a^i,\ \lambda\right\}$$

является касательно оснащающим объектом конгруэнции $\mathcal{K}$ ([I],стр.56). Конгруэнцию $\mathcal{K}$,на которой задано поле геометрического объекта Γ ,назовем касательно оснащенной конгруэнцией коник, или конгруэнцией $\mathcal{K}^*$.Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{K}^*$ состоит из уравнений (I.7), (I.9) и (I.10).

Обозначим буквами P_3 и P_1, P_2 соответственно характеристическую точку плоскости $x^4 = 0$ и точки пересечения коникой C поляры точки P_3 относительно C .

Определение I. Конгруэнция $\mathcal{K}^*$ называется невырожденной, если I) поверхности (P_α) не вырождаются в линии, 2) точка P_3 не инцидентна конике C , 3) касательная плоскость к поверхности (P_i) в точке P_i не содержит точки P_j $(i \neq j)$. В работе рассматриваются только невырожденные конгруэнции $\mathcal{K}^*$.

§2. Геометрические образы, ассоциированные с конгру- с конгруэнцией $\mathcal{K}^*$.

Геометрический объект (I.II) содержит подобъекты $\{a_{\alpha\beta}\}$, $\{a^i\}$ и $\{a^i, \lambda\}$. Подобъект $\{a_{\alpha\beta}\}$ определяет конику C , подобъект $\{a^i\}$ -характеристическую точку P_3 плоскости коники C .

Имеем:

$$P_3 = A_3 - a^k A_k, \qquad (2.1)$$

$$dP_3 = (\omega^3_3 - a^k\omega^3_k)P_3 + \Gamma^{\ell k}_3\,\omega_\ell A_k. \qquad (2.2)$$

Подобъект $\{a^i, \lambda\}$ определяет в плоскости коники инвариантную прямую

$$x^1 - \lambda x^2 + \mu x^3 = 0, \quad x^4 = 0, \qquad (2.3)$$

где

$$\mu = a^1 - \lambda a^2. \qquad (2.4)$$

Прямая (2.3), называемая оснащающей прямой, является характеристикой плоскости коники C вдоль ассоциированного однопараметрического семейства ([I], стр.59)

$$\Theta_1 \equiv \lambda\omega_1 + \omega_2 = 0. \qquad (2.5)$$

Из (2.I), (2.3) следует, что точка P_3 инцидентна оснащающей прямой. Относительно инвариантную форму Θ_1 назовем оснащающей формой Пфаффа.

Так как точка P_3 не инцидентна конике C, то

$$b = a_{kh} a^k a^h + a_{33} - 2 a_{3k} a^k \neq 0. \qquad (2.6)$$

Введем обозначения:

$$b_i = a_{ki} a^k - a_{3i}, \quad b_3 = a_{13} a^1 + a_{23} a^2 - a_{33}, \qquad (2.7)$$

$$m_1^1 = -(\lambda b_3 + \mu b_2), \quad m_1^2 = \mu b_1 - b_3, \quad m_1^3 = \lambda b_1 + b_2, \qquad (2.8)$$

$$m_2^1 = (b_2 a_{3\alpha} - b_3 a_{2\alpha}) m_1^\alpha, \; m_2^2 = (b_3 a_{1\alpha} - b_1 a_{3\alpha}) m_1^\alpha, \; m_2^3 = (b_1 a_{2\alpha} - b_2 a_{1\alpha}) m_1^\alpha, \qquad (2.9)$$

$$c_i = (-1)^j (\lambda \Gamma_3^{j2} - \Gamma_3^{j1}), \quad c_3 = c_k a^k, \qquad (2.10)$$

$$n_1^1 = b_3 c_2 - b_2 c_3, \quad n_1^2 = b_3 c_1 - b_1 c_3, \quad n_1^3 = b_2 c_1 - b_1 c_2, \qquad (2.11)$$

$$n_2^1 = (\quad a_{3\alpha} - b_3 a_{2\alpha}) n_1^\alpha, \; n_2^2 = (b_3 a_{1\alpha} - b_1 a_{3\alpha}) n_1^\alpha, \; n_2^3 = (b_1 a_{2\alpha} - b_2 a_{1\alpha}) n_1^\alpha, \qquad (2.12)$$

$$\hat{m}_i = (-1)^j (m_2^j + a^j m_2^3), \; \hat{m}_3 = a^k \hat{m}_k, \; \hat{n}_i = (-1)^j (n_2^j + a^j n_2^3), \; \hat{n}_3 = a^k \hat{n}_k, \qquad (2.13)$$

$$\lambda^* = \frac{\hat{m}_1 \Gamma_3^{12} + \hat{m}_2 \Gamma_3^{11}}{\hat{m}_1 \Gamma_3^{22} + \hat{m}_2 \Gamma_3^{21}}. \qquad (2.14)$$

На конгруэнции K^* системы величин (2.7)- (2.I4) определяют следующие геометрические образы.

Поляра точки P_3 относительно коники C:

$$b_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^4 = 0 \qquad (2.15)$$

Оснащающая точка

$$M_1 = m_1^\alpha A_\alpha, \qquad (2.16)$$

являющаяся точкой пересечения поляры (2.I5) с оснащающей прямой (2.3). Сопряженно оснащающая точка

$$M_2 = m_2^\alpha A_\alpha \qquad (2.17)$$

-точка поляры (2.I5), полярно сопряженная оснащающей точке M_1 относительно коники C.

Индуцированная прямая

$$c_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^4 = 0 \qquad (2.18)$$

-касательная на поверхности (P_3) вдоль ассоциированного однопараметрического семейства (2.5).

Индуцированная точка

$$N_1 = n_1^\alpha A_\alpha, \qquad (2.19)$$

являющаяся точкой пересечения поляры (2.I5) с индуцированной прямой (2.I8).

Сопряженно индуцированная точка

$$N_2 = n_2^\alpha A_\alpha \qquad (20)$$

-точка поляры (2.13), полярно сопряженная индуцированной точке относительно коники C .

Сопряженно оснащающая прямая

$$\hat{m}_\alpha x^\alpha = 0\ , \ x^4 = 0 \tag{2.21}$$

-касательная $P_3 M_2$ на поверхности (P_3).

Сопряженно индуцированная прямая

$$\hat{n}_\alpha x^\alpha = 0, \ x^4 = 0 \tag{2.22}$$

-касательная $P_3 N_2$ на поверхности (P_3).

Сопряженно оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_2 = \omega_1 + \overset{*}{\lambda}\, \omega_2 . \tag{2.23}$$

§3. Канонический репер конгруэнции $\mathcal{K}^*$.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}^*$ к частично канонизированному реперу, совместив вершины A_α с точками P_α, расположив вершину A_4 на линии пересечения касательных плоскостей к поверхностям (P_i) в точках P_i и приведя вершину λ к единице. Тогда

$$a_{ii} = 0\ , \ a_{i3} = 0\ , \ a^i = 0, \ \lambda = 1\ , \ \Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21}\ , \tag{3.1}$$

$$\omega_3^4 = 0\ . \ \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k\ , \ \omega_i^j = h_i\,\omega_i^3\ , \ \omega_4^i - h_j\,\omega_4^3 = \ell^k\omega_k\ ,$$

$$\omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\,\omega_k\ , \ \omega_1^1 - \omega_2^2 = 2\rho^k\omega_k\ . \tag{3.2}$$

Так как поверхность (P_3) не вырождается в линию, то

$$\Delta = \Gamma_3^{11}\,\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\,\Gamma_3^{21} \neq 0\ . \tag{3.3}$$

Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, символами $\pi_{\alpha'}^{\beta'}$ —значения форм $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$ при фиксированных первичных параметрах. Из (1.6), (3.2) следует

$$\delta\left(\frac{a_{12}}{a_{33}}\right) = \frac{a_{12}}{a_{33}}\left(\pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3\right),$$

$$\delta\Delta = 2\,\Delta\left(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2\right), \tag{3.4}$$

$$\delta\left(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}\right) = \left(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}\right)\left(\pi_4^4 - \pi_3^3\right) - 2\pi_4^3\ .$$

Фиксируя оставшиеся вторичные параметры так, чтобы

$$a_{12} + a_{33} = 0\ . \ \Delta = -1\ . \ \Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32} = 0\ , \tag{3.5}$$

получим канонический репер невырожденной конгруэнции $\mathcal{K}^*$.

Положим

$$\Gamma_1^{31} = \alpha\ , \ \Gamma_3^{11} = a\ , \ \Gamma_3^{12} = b\ , \ \Gamma_3^{22} = c\ , \tag{3.6}$$

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\,\omega_3^3 = 2q^k\omega_k\ , \ \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 = 4r^k\omega_k\ . \tag{3.7}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\omega_1^3 = \alpha\omega_1 + \Gamma_1^{32}\omega_2\ , \ \omega_2^3 = \Gamma_2^{31}\omega_1 - \alpha\,\omega_2\ , \ \omega_3^4 = 0\ , \\ \omega_3^1 = a\omega_1 + b\,\omega_2\ , \ \ \omega_3^2 = b\,\omega_1 + c\,\omega_2\ ,\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\omega_1^2 = h_1(\alpha\omega_1 + \Gamma_1^{32}\omega_2),\quad \omega_2^1 = h_2(\Gamma_2^{31}\omega_1 - \alpha\omega_2),$$
$$\omega_4^\alpha = \Gamma_4^{\alpha k}\omega_k, \tag{3.9}$$

$$\omega_1^1 = (p^k+\tau^k)\omega_k,\quad \omega_2^2 = (\tau^k - p^k)\omega_k,$$
$$\omega_3^3 = (\tau^k - q^k)\omega_k,\quad \omega_4^4 = (q^k - 3\tau^k)\omega_k, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{D}\omega_1 = (\alpha h_1 + q^2 - 4\tau^2 - p^2)\,\omega_1\wedge\omega_2,$$
$$\mathcal{D}\omega_2 = (4\tau^1 - p^1 - q^1 + \alpha h_2)\,\omega_1\wedge\omega_2, \tag{3.11}$$

причем

$$ac - b^2 + 1 = 0,\quad \Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31} \neq 0. \tag{3.12}$$

Уравнения коники (I.I) принимают вид:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0,\quad x^4 = 0. \tag{3.13}$$

Ассоциированные геометрические образы (2.15)-(2.23) в каноническом репере задаются следующими формулами.

Оснащающая прямая

$$x^1 - x^2 = 0,\quad x^4 = 0 \tag{3.14}$$

Поляра точки P_3 относительно коники C :

$$x^3 = 0,\quad x^4 = 0. \tag{3.15}$$

Оснащающая точка

$$M_1 = A_2 + A_1. \tag{3.16}$$

Сопряженно оснащающая точка

$$M_2 = A_2 - A_1. \tag{3.17}$$

Индуцированная прямая

$$(c-b)x^1 + (a-b)x^2 = 0,\quad x^4 = 0. \tag{3.18}$$

Индуцированная точка

$$N_1 = (a-b)A_1 + (c-b)A_2. \tag{3.19}$$

Сопряженно индуцированная точка

$$N_2 = (a-b)A_1 + (b-c)A_2. \tag{3.20}$$

Сопряженно оснащающая прямая

$$x^1 + x^2 = 0,\quad x^4 = 0. \tag{3.21}$$

Сопряженно индуцированная прямая

$$(c-b)x^1 + (a-b)x^2 = 0,\quad x^4 = 0. \tag{3.22}$$

Оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_1 = \omega_1 + \omega_2. \tag{3.23}$$

Сопряженно оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_2 = \omega_1 + \frac{a+b}{b+c}\,\omega_2. \tag{3.24}$$

§4. Конгруэнции $\mathcal{K}_0^*$.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathcal{K}_0^*$ называется конгруэнция $\mathcal{K}^*$, обладающая следующими свойствами:

1)оснащающая точка M_1 является характеристической точ
плоскости (A_1,A_2,A_4), 2)существует одностороннее расслоени
от конгруэнции (C) коник к линейчатому многообразию (M_1A_4) [2].

Т е о р е м а 4.1. Конгруэнции $\mathcal{K}_0^*$ существуют и опр
деляются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия 1) определени
следует

$$\omega_1^3+\omega_2^3=0. \qquad (4$$

Имеем

$$\Gamma_2^{31}=-\alpha,\quad \Gamma_1^{32}=\alpha,\quad \alpha\neq 0. \qquad (4$$

Следовательно,

$$\omega_1^3=\alpha\theta_1,\quad \omega_2^3=-\alpha\theta_1, \qquad (4$$

$$\omega_1^2=\beta\theta_1,\quad \omega_2^1=\gamma\theta_1, \qquad (4$$

где

$$\beta=\alpha h_1,\quad \gamma=-\alpha h_2. \qquad (4$$

Замыкая (4.1), находим:

$$\omega_4^3\wedge\theta_1+2\alpha(p^2-p^1)\,\omega_1\wedge\omega_2=0 \qquad (4$$

Для получения аналитической характеристики условия рас-
слоения от (C) к (M_1A_4) зададим произвольную точку M
коники (3.13) с помощью параметра σ посредством урав

$$M=A_1+\frac{1}{2}\sigma^2A_2+\sigma A_3. \qquad (4.7)$$

Так как касательная плоскость к поверхности (M) содержит прямую M_1A_4, то

$$(dM\,M\,M_1A_4)=0. \qquad (4.8)$$

Учитывая (4.1), (4.7), получаем

$$(2+\sigma^2)\,d\sigma=-\frac{1}{2}\sigma^4\omega_1^3+\sigma^3(\omega_2^1+\omega_3^3-\omega_2^2)+$$
$$+\sigma^2(2\omega_1^3+2\omega_3^1-2\omega_3^2)+2\sigma(\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_1^2)-2\omega_1^3 \qquad (4.9)$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом с учетом (4.9), находим для σ уравнение шестой степени, которое должно обращаться в тождество. Имеем:

$$\omega_4^3\wedge\omega_i=0,\quad (\omega_4^i-\omega_4^j)\wedge\omega_j=0,$$
$$\vartheta_1\wedge\omega_3^i=0,\quad \vartheta_1\wedge\vartheta_2=0, \qquad (4.10)$$
$$(\omega_1^1-\omega_2^2)\wedge\omega_1^3=0,$$

где

$$\vartheta_1=\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_2^1-\omega_1^2,$$
$$\vartheta_2=\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3 \qquad (4.11)$$

Из (4.10) находим:

$$\omega_4^1-\omega_4^2=0\,,\quad \omega_4^3=0\,,\quad \vartheta_1=0\,. \qquad (4.12)$$

Замыкания (4.12) не приводят к новым уравнениям.

Обозначим:

$$\Gamma_4^{1i}=c^i\,.$$

Матрица деривационных формул канонического репера конгруэнции $\mathcal{K}_0^*$ примет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\beta-\gamma)\theta_1+\psi & \beta\theta_1 & \alpha\theta_2 & \omega_1 \\ \gamma\theta_1 & \psi+\frac{1}{2}(\gamma-\beta)\theta_1 & -\alpha\theta_1 & \omega_2 \\ a\omega_1+b\omega_2 & b\omega_1+c\omega_2 & \psi-\chi & 0 \\ c^k\omega_k & c^k\omega_k & 0 & \chi-3\psi \end{bmatrix}. \qquad (4.13)$$

где

$$\psi=\tau^k\omega_k=\frac{1}{4}\left(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4\right),$$
$$\chi=q^k\omega_k=\frac{1}{2}\left(\omega_1^1+\omega_2^2-2\,\omega_3^3\right). \qquad (4.14)$$

Пфаффова система имеет вид:

$$\omega_3^4=0\,,\quad \omega_4^1-\omega_4^2=0\,,\quad \omega_1^3+\omega_2^3=0\,,$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=(\beta-\gamma)\,\theta_1\,,\quad \omega_1^2=\beta\,\theta_1\,,\quad \omega_2^1=\gamma\,\theta_1\,,\quad \omega_1^3=\alpha\,\theta_1\,,$$
$$\omega_3^1=a\omega_1+b\,\omega_2\,,\quad \omega_3^2=b\omega_1+c\,\omega_2\,, \qquad (4.15)$$
$$\psi=\tau^k\omega_k\,,\quad \chi=q^k\omega_k\,,$$

причем

$$ac-b^2+1=0 \qquad (4.16)$$

Из (4.15),(4.16) следует, что конгруэнции $\mathcal{K}_0^*$ существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Теорема 4.1. Линейчатое многообразие (M_1A_4) ассоциированное с конгруэнцией $\mathcal{K}_0^*$, вырождается в неподвижную прямую.

Доказательство. Имеем:

$$d[MA_4]=\left\{\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\theta_1+\chi-2\psi\right\}[MA_4]\,. \qquad (4.17)$$

§5. Конгруэнции $\mathcal{L}$.

Определение 3. Конгруэнцией $\mathcal{L}$ называется конгруэнция $\mathcal{K}^*$, на которой имеют место односторонние расслоения от прямолинейных конгруэнций (A_iA_4) к прямолинейной конгруэнции (M_1A_3) ([3],стр.66).

Обозначим:

$$\Omega_1=\omega_3^1-\omega_3^2\,,\quad \Omega_2=\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_2^1-\omega_1^2\,. \qquad (5.1)$$

Условия одностороннего расслоения от прямолинейных конгруэнций (A_1A_4) и (A_2A_4) к прямолинейной конгруэнции (M_1A_3) запишутся в виде:

$$\omega_4^3 \wedge \Omega_1 + \omega_4^2 \wedge \Omega_2 = 0,$$

$$\omega_1^2 \wedge \theta_1 = 0,$$

$$\omega_1^3 \wedge \Omega_1 + \omega_1^2 \wedge \Omega_2 - \omega_4^2 \wedge \theta_1 = 0, \tag{5.2}$$

$$\omega_4^3 \wedge \Omega_1 + \omega_4^1 \wedge \Omega_2 = 0,$$

$$\omega_2^1 \wedge \theta_1 = 0, \quad \omega_2^3 \wedge \Omega_1 + \omega_2^1 \wedge \Omega_2 + \omega_4^1 \wedge \theta_1 = 0.$$

Имеем:

$$\omega_1^2 = \beta\,\theta_1, \quad \omega_2^1 = \gamma\,\theta_1. \tag{5.3}$$

Сравнивая (5.3) с уравнениями

$$\omega_1^2 = h_1 \omega_1^3, \quad \omega_2^1 = h_2 \omega_2^3, \tag{5.4}$$

получим

$$h_1(\Gamma_1^{32} - \alpha) = 0, \quad h_2(\Gamma_2^{31} + \alpha) = 0,$$
$$h_1 \Gamma_1^{32} - \beta = 0, \quad h_2 \Gamma_2^{31} - \gamma = 0. \tag{5.5}$$

Анализируя уравнения (5.5) выделяем четыре случая, каждый из которых определяет конгруэнции с произволом двух функций двух аргументов. Объединение этих четырех классов исчерпывает конгруэнции $\mathcal{L}$.

§6. Конгруэнции $\mathcal{L}^*$.

О п р е д е л е н и е 4. Конгруэнцией $\mathcal{L}^*$ называется конгруэнция $\mathcal{L}$, обладающая следующими свойствами:

1) оснащающая точка M_1 является характеристической точкой плоскости $(M_1 A_3 A_4)$, 2) сопряженно индуцированная точка N_2 совпадает с оснащающей точкой M_1.

Условия 1) и 2) определения 4 в силу (3.12) приводятся соответственно к виду

$$\Omega_2 = 0, \tag{6.1}$$

$$\Omega = \varepsilon\,\theta_1, \quad \varepsilon^2 = 1 \tag{6.2}$$

Присоединяя (6.1) и (6.2) к уравнениям, характеризующим конгруэнции $\mathcal{L}$, и анализируя полученную систему, убеждаемся, что существует четыре и только четыре класса конгруэнций $\mathcal{L}^*$ (конгруэнции $\mathcal{L}_1^*, \mathcal{L}_2^*, \mathcal{L}_3^*, \mathcal{L}_4^*$) определяемые соответственно следующими системами уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 0, \ \omega_2^1 = 0, \ \omega_1^3 = \alpha\omega_1 + \Gamma_1^{32}\omega_2, \ \omega_1^3 + \omega_2^3 = \kappa\,\theta_1, \\ \omega_3^1 = (b+\varepsilon)\omega_1 + b\,\omega_2, \ \omega_3^2 = b\omega_1 + (b-\varepsilon)\omega_2, \ \omega_3^4 = 0, \\ \omega_4^3 = \kappa_3\,\theta_1, \ \omega_4^2 - \omega_4^1 = \kappa_2\,\theta_1, \ \varepsilon\,\omega_1^3 - \omega_4^1 = \kappa_1\,\theta_1, \\ \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \ \omega_1^1 = \tau\,\theta_1, \ \omega_1^1 - \omega_3^3 = q^{\kappa}\omega_{\kappa}, \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 0, \ \omega_1^3 = \alpha\,\theta_1, \ \omega_1^3 + \omega_2^3 = 0, \ \omega_2^1 = h_2\omega_2^3, \\ \omega_3^1 = (b+\varepsilon)\omega_1 + b\omega_2, \ \omega_3^2 = b\omega_1 + (b-\varepsilon)\omega_2, \ \omega_3^4 = 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_2^1=0\,,\quad \omega_4^1=\kappa_1\theta_1\,,\quad \omega_4^2=\varepsilon\omega_1^3\,,\quad \omega_4^3=0\,, \tag{6.4}$$
$$\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=2q^k\omega_k\,,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4=4\tau\theta_1\,,$$

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_1^3=\alpha\theta_1\,,\quad \omega_1^3+\omega_2^3=0\,,\quad \omega_1^2=h_1\omega_1^3\,,\quad \omega_2^1=0\,,\\ &\omega_3^1=(b+\varepsilon)\omega_1+b\omega_2\,,\quad \omega_3^2=b\omega_1+(b-\varepsilon)\omega_2\,,\quad \omega_3^4=0\,,\\ &\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_1^2=0\,,\quad \omega_4^1=\varepsilon\omega_1^3\,,\quad \omega_4^2=\kappa_2\theta_1\,,\quad \omega_4^3=0\,,\\ &\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=2q^k\omega_k\,,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4=4\tau\theta_1 \end{aligned}\right. \tag{6.5}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_1^3=\alpha\theta_1\,,\quad \omega_1^3+\omega_2^3=0\,,\quad \omega_1^2=h_1\omega_1^3\,,\quad \omega_2^1=h_2\omega_2^3\,,\\ &\omega_3^1=(b+\varepsilon)\omega_1+b\omega_2\,,\quad \omega_3^2=b\omega_1+(b-\varepsilon)\omega_2\,,\quad \omega_3^4=0,\\ &\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_1^2+\omega_2^1=0\,,\quad \omega_4^1=\kappa_1\theta_1\,,\quad \omega_4^2=\kappa_2\theta_1\,,\\ &\omega_4^3=\kappa_3\theta_1\,,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=2q^k\omega_k\,,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4=4\tau\theta_1 \end{aligned}\right. \tag{6.6}$$

Из (6.3)-(6.6) следует, что конгруенции $\mathcal{L}_1^*$ определяются с произволом восьми функций одного аргумента, а конгруенции $\mathcal{L}_2^*, \mathcal{L}_3^*, \mathcal{L}_4^*$ с произволом одной функции двух аргументов. Из (6.3)-(6.6) непосредственно вытекает также

Т е о р е м а 6.1. Конгруэнции $\mathcal{L}_\alpha^*$ обладают следующими свойствами: 1) поверхности $(A_1), (A_2), (A_4)$ конгруэнций $\mathcal{L}_2^*, \mathcal{L}_3^*, \mathcal{L}_4^*$ вырождаются в линии, 2) точка A_i конгруэнции $\mathcal{L}_1^*$ является характеристической точкой плоскости $(A_i A_3 A_4)$, 3) точка A_1 (A_2) конгруэнции $\mathcal{L}_2^*$ $(\mathcal{L}_3^*)$ является характеристической точкой плоскости $(A_1 A_3 A_4)$ $((A_2 A_3 A_4))$.

Л и т е р а т у р а

1. Малаховский В.С., К геометрии касательно оснащенных многообразий. Математика, Изв. высш. уч. зав. 1972, 9(124), 54-65.

2. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Труды геом. семинара. Ин-т научн. инф. АН СССР, М., 1971, 3, 193-220.

3. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1956.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

Малаховский В.С., Махоркин В.В.

КОНГРУЭНЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В работе рассматриваются конгруэнции V невырожденных квадрик в трехмерном проективном пространстве P_3. В то время как дифференциальная геометрия конгруэнций коник разработана сравнительно глубоко (см. [2]), конгруэнции квадрик изучены еще недостаточно. Д.Ример [6] применил для изучения конгруэнций квадрик метод перенесения в точечное девятимерное пространство. Он построил канонические реперы конгруэнций различных типов квадрик, получил формулы типа Френе и дал интерпретацию инвариантов деривационных формул. В настоящей работе исследование конгруэнций квадрик осуществлено без перенесения в девятимерное проективное пространство. Показано, что квадрики огибают в общем случае восемь поверхностей, называемых фокальными. Построены и геометрически охарактеризованы канонические реперы, две или три вершины которых являются фокальными точками квадрики. Для каждой пары фокальных точек определена четверка точек, инцидентных одной прямой и образующих гармоническую четверку. Исследованы классы конгруэнций квадрик

со специальными свойствами ассоциированных образов, в том числе подкласс конгруэнций квадрик с тремя плоскими фокальными поверхностями.

§I. Фокальные точки квадрики, принадлежащей конгруэнции.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3, отнесенном к подвижному реперу $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ двупараметрическое семейство (конгруэнцию) V невырожденных поверхностей второго порядка (квадрик).

Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4), \tag{1.1}$$

причем формы пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{1.3}$$

Квадрика Q конгруэнции V определяется уравнением

$$F \equiv a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \tag{1.4}$$

причем

$$\det \| a_{\alpha\beta} \| = c \neq 0, \tag{1.5}$$

где C -произвольная отличная от нуля константа. Система пфаффовых уравнений конгруэнции V запишется в виде

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta i}\,\tau^i \quad (i,j,\kappa=1,2) \tag{1.6}$$

где τ^i -инвариантные формы параметрической группы [1] и

$$\nabla a_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta . \tag{1.7}$$

Из (I.5) вытекают тождества

$$a^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta i} = 0, \tag{1.8}$$

где $a^{\alpha\beta}$ -приведенные алгебраические дополнения элемента $a_{\alpha\beta}$ матрицы $\| a_{\alpha\beta} \|$.

Рассмотрим квадратичные формы

$$F_i = \lambda_{\alpha\beta i}\, x^\alpha x^\beta . \tag{1.9}$$

Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, т.е. при $\tau^1 = \tau^2 = 0$. Так как

$$\delta F_i = \vartheta^j_i F_j , \tag{1.10}$$

где ϑ^j_i —некоторые формы Пфаффа, то линия

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0 \tag{1.11}$$

является инвариантной кривой четвертого порядка, называемой характеристическим многообразием ранга I конгруэнции V [2].

Точки квадрики (I.4), лежащие на (I.II), называются её фокальными точками [4]. Из (I.4), (I.II) следует, что квадрика конгруэнции V имеет в общем случае восемь фокальных точек. Поверхности, описываемые этими точками, называются фокальными поверхностями конгруэнции V.

Т е о р е м а I.I. Каждая фокальная поверхность является огибающей поверхностью квадрик конгруэнции V.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поместим вершину A_1 репера в произвольную фокальную точку квадрики (I.4), а вершины A_2 и A_3 расположим в касательной плоскости к этой квадрике в точке A_1. Тогда

$$a_{11} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 0,\ a_{14} \neq 0 . \tag{1.12}$$

Из (I.6) находим

$$\omega^4_1 = -\frac{1}{2a_{14}}\left(\lambda_{111}\tau^1 + \lambda_{112}\tau^2\right). \tag{1.13}$$

Так как A_1 —фокальная точка, то её координаты удовлетворяют уравнениям (I.II). Имеем:

$$\lambda_{111} = 0,\quad \lambda_{112} = 0 . \tag{1.14}$$

Подставляя (I.I4) в (I.I3), получим

$$\omega^4_1 = 0 .$$

Следовательно, плоскость $A_1A_2A_3$ является касательной плоскостью к фокальной поверхности (A_1). Теорема доказана.

§2. Канонические реперы конгруэнции V.

Исключая из рассмотрения случай, когда все фокальные поверхности конгруэнции V сливаются в одну или когда семь фокальных поверхностей вырождаются в линии, поместим вершины A_1 и A_2 репера в фокальные точки квадрики, описывающие невырожденные фокальные поверхности. Вершины A_3 и A_4 расположим на прямой, полярно сопряженной прямой A_1A_2 относительно квадрики (I.4) так, чтобы точки A_3 и A_4 были полярно сопряжены относительно квадрики. Имеем

$$a_{11}=a_{13}=a_{14}=a_{22}=a_{23}=a_{24}=a_{34}=0. \tag{2.1}$$

$$a_{44}\,a_{33}\,a_{12}\neq 0. \tag{2.2}$$

Нормировкой вершин репера и выбором константы C (см.(I.5)) приводим коэффициенты $a_{33}=a_{44}=1$, $a_{12}=-1$. Уравнение квадрики Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции V запишется в виде

$$(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2=0. \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\ \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\ \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\\ \omega_3^4+\omega_4^3=a^k\omega_k,\ \ \omega_1^1+\omega_2^2=\Gamma_i^{ik}\omega_k,\ \omega_3^3=\Gamma_3^{3k}\omega_k.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$, по индексам i и j суммирование не производится и

$$\omega_i^4=\omega_i. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\xi=\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31}-\Gamma_1^{31}\Gamma_2^{32}+1,\ \ \eta=\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32}. \tag{2.6}$$

Продолжая (2.4), находим:

$$\delta\xi=\xi\eta, \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\delta\eta=(\eta^2+2\xi)\pi_3^4,\\ \delta(\Gamma_1^{32}-\Gamma_2^{31})=(\Gamma_1^{32}+\Gamma_2^{31})[2\pi_1^1+(\Gamma_1^{31}-\Gamma_2^{32})\pi_3^4].\end{gathered} \tag{2.8}$$

Из невырожденности поверхностей (A_i) следует, что

$$\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31}\neq 0. \tag{2.9}$$

Формула (2.7) показывает, что обращение ξ в нуль имеет инвариантный смысл. Исключая из рассмотрения такие конгруэнции, фиксируем оставшиеся вторичные параметры так, чтобы

$$\eta=0,\quad \Gamma_1^{32}-\Gamma_2^{31}=0. \tag{2.10}$$

Положим

$$\alpha=\Gamma_1^{32},\quad \beta=\Gamma_2^{32}. \tag{2.11}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции V принимает вид:

$$\begin{gathered}\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=(-1)^i\beta\omega_i+\alpha\omega_j,\ \ \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\\ \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\ \ \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\ \ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\\ \omega_i^i=\Gamma_i^{ik}\omega_k,\ \ \omega_3^3=\Gamma_3^{3k}\omega_k,\end{gathered} \tag{2.12}$$

причем

$$\alpha\neq 0. \tag{2.13}$$

Построенный репер назовем каноническим репером первого рода конгруэнции V. Если же фиксация (2.10) оставшихся двух вторичных параметров не осуществлена, то такой репер назовем частично канонизированным репером первого рода

Исследование некоторых классов конгруэнций квадрик с тремя и более различными фокальными поверхностями целесообразно осуществлять в репере, вершины A_1, A_2, A_3 которого являются фокальными точками квадрики, а вершина A_4 - полюсом плоскости $A_1A_2A_3$ относительно квадрики. Нормировка вершин репера осуществляется так, что

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1 , \ a_{44} = -\frac{1}{2} . \qquad (2.14)$$

Такой репер называется каноническим репером второго рода конгруэнции V. Уравнение квадрики и система пфаффовых уравнений конгруэнции V относительно такого репера имеют соответственно вид:

$$x^1x^2 + x^2x^3 + x^1x^3 - \frac{1}{2}(x^4)^2 = 0, \qquad (2.15)$$

$$\begin{gathered} \omega_1^2 = \gamma_1^{2k}\omega_k , \ \ \omega_2^3 = \gamma_2^{3k}\omega_k , \ \ \omega_3^1 = \gamma_3^{1k}\omega_k , \\ \omega_4^i = \gamma^{ik}\omega_k , \ \ \omega_3^4 = \gamma_3^{4k}\omega_k , \ \ \omega_4^3 = \gamma_4^{3k}\omega_k , \\ \omega_i^i = \gamma_i^{ik}\omega_k , \ \ \omega_3^3 = \gamma_3^{3k}\omega_k , \\ \omega_1^2 + \omega_1^3 = 0 ; \ \ \omega_2^1 + \omega_2^3 = 0 ; \ \ \omega_3^1 + \omega_3^2 = 0 \end{gathered} \qquad (2.16)$$

§3. Ассоциированные φ-точки.

Рассмотрим на ребре $\ell \equiv A_3A_4$ частично канонизированного репера I-го рода некоторую инвариантную точку

$$N = A_3 + \lambda A_4 , \qquad (3.1)$$

не лежащую на квадрике (2.3), т.е.

$$\lambda^2 + 1 \neq 0 . \qquad (3.2)$$

Из инвариантности точки N следует:

$$\delta\lambda = \lambda^2\pi_4^3 - \pi_3^4 . \qquad (3.3)$$

Линия

$$\theta_i \equiv (1 - \lambda\Gamma_i^{3i})\omega_i - \lambda\Gamma_i^{3j}\omega_j = 0 \qquad (3.4)$$

на поверхности (A_i) характеризуется тем, что касательная к ней проходит через точку N.

Точка

$$M_i = (\Gamma_i^{3i} + \Gamma_i^{3j}\nu_j)A_3 + A_4 , \qquad (3.5)$$

где

$$\nu_j = \frac{\lambda\Gamma_j^{3i}}{1 - \lambda\Gamma_j^{3j}} , \qquad (3.6)$$

является точкой пересечения с прямой ℓ касательной к линии $\theta_j = 0$ на поверхности (A_i).

Точка N^*, полярно сопряженная точке N относительно квадрики Q, определяется формулой

$$N^* = -\lambda A_3 + A_4 . \qquad (3.7)$$

Потребуем, чтобы точки M_1 и M_2 гармонически делили точки N, N^*, т.е.

$$(M_1M_2 ; NN^*) = -1 . \qquad (3.8)$$

Имеем:

$$M_i = (\Gamma_i^{3i} + \nu_j \Gamma_i^{3j} + \lambda) N + [1 - \lambda(\Gamma_i^{3i} + \nu_j \Gamma_i^{3j})] N^*. \qquad (3.9)$$

Условие (3.8) приводится к уравнению четвертой степени относительно λ:

$$\varphi_a(\lambda)\ \varphi_c(\lambda) = 0, \qquad (3.10)$$

где

$$\varphi_a(\lambda) = \lambda^2 \eta - 2\lambda\xi - \eta, \qquad (3.11)$$

$$\varphi_c(\lambda) = \lambda^2(\Gamma_1^{31}\Gamma_2^{32} - \Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31}) - \lambda\eta + 1. \qquad (3.12)$$

Точки (3.I), определяемые уравнениями $\varphi_a(\lambda)=0$, $\varphi_c(\lambda)=0$, назовем соответственно φ_a-точками и φ_c-точками.

Фиксация (2.I0) обозначает, что точки A_3 и A_4 совмещаются с φ_a-точками.

Теорема 3.I. φ_c-точки гармонически делят φ_a-точки.

Доказательство. Отнесем конгруэнцию V к каноническому реперу первого рода. Тогда уравнение (3.I2) запишется в виде:

$$(\alpha^2 + \beta^2)\lambda^2 - 1 = 0. \qquad (3.13)$$

Так как A_3 и A_4 являются φ_a-точками, то из (3.I3) непосредственно следует утверждение теоремы.

§4. Геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией квадрик.

Отнесем конгруэнцию V к каноническому реперу первого рода и рассмотрим некоторые геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией V.

I. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2), (A_3A_4), (A_iA_3), (A_iA_4) ребер репера.

Фокусы

$$F = \lambda\mathcal{P} + \mu Q \qquad (4.1)$$

луча, где $\mathcal{P}$ и Q соответствующие вершины репера, и торсы этих прямолинейных конгруэнций определяются соответственно уравнениями:

(A_1A_2)

$$\lambda^2\Gamma_1^{32} - 2\lambda\mu\Gamma_1^{31} - \mu^2\Gamma_2^{31} = 0, \qquad (4.2)$$

$$\Gamma_2^{31}(\omega_1)^2 - 2\Gamma_1^{31}\omega_1\omega_2 - \Gamma_1^{32}(\omega_2)^2 = 0, \qquad (4.3)$$

(A_3A_4)

$$(4.4) \qquad (\lambda\Gamma_3^{11} + \mu\Gamma_4^{11})(\lambda\Gamma_3^{22} + \mu\Gamma_4^{22}) - (\lambda\Gamma_3^{12} + \mu\Gamma_4^{12})(\lambda\Gamma_3^{21} + \mu\Gamma_4^{21}) = 0.$$

$$(\Gamma_3^{11}\omega_1 + \Gamma_3^{12}\omega_2)(\Gamma_4^{21}\omega_1 + \Gamma_4^{22}\omega_2) - (\Gamma_3^{21}\omega_1 + \Gamma_3^{22}\omega_2)(\Gamma_4^{11}\omega_1 + \Gamma_4^{12}\omega_2) = 0, \qquad (4.5)$$

$(A_i A_3)$

$$\mu\left[\mu\left(\Gamma_3^{ji}\Gamma_3^{4j}-\Gamma_3^{jj}\Gamma_3^{4i}\right)-\lambda\Gamma_3^{jj}\right]=0, \qquad (4.6)$$

$$\omega_i\left(\Gamma_3^{ji}\omega_i+\Gamma_3^{jj}\omega_j\right)=0, \qquad (4.7)$$

$(A_i A_4)$

$$\mu^2\left(\Gamma_4^{3j}\Gamma_4^{ji}-\Gamma_4^{jj}\Gamma_4^{3i}\right)+\lambda\mu\left(\Gamma_i^{3j}\Gamma_4^{ji}-\Gamma_4^{jj}\Gamma_i^{3i}\right)=0, \qquad (4.8)$$

$$\left(\Gamma_4^{jj}\omega_j+\Gamma^{ji}\omega_i\right)\left(\Gamma_i^{3j}\omega_j+\Gamma_i^{3i}\omega_i\right)=0. \qquad (4.9)$$

2. Касательные плоскости к поверхностям (A_3) и (A_4). Они определяются соответственно точками A_3, N_1, N_2 и A_4, K_1, K_2, где

$$N_i=\Gamma_3^{\alpha i}A_\alpha, \quad K_i=\Gamma_4^{\alpha i}A_\alpha \qquad (4.10)$$

3. Характеристические точки H_3 и H_4 граней $(A_1A_2A_4)$ и $(A_1A_2A_3)$.

Имеем

$$H_3=m^k A_k+A_4, \quad H_4=A_3-\Gamma_3^{4k}A_k, \qquad (4.11)$$

где

$$\left(\Gamma_i^{3i}\Gamma_j^{3j}-\Gamma_i^{3j}\Gamma_j^{3i}\right)m^i=\Gamma_j^{3i}\Gamma_4^{3j}-\Gamma_j^{3j}\Gamma_4^{3i}. \qquad (4.12)$$

4. Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнций коник C_1, C_2:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \; x^4=0, \qquad (4.13)$$

$$(x^4)^2-2x^1x^2=0, \; x^3=0. \qquad (4.14)$$

Они определяются соответственно системами уравнений:

$$(\omega_1^1+\omega_2^2)x^1x^2+(-\omega_1^3+\omega_3^2)x^1x^3+(-\omega_2^3+\omega_3^1)x^2x^3+\omega_3^3(x^3)^2=0,$$
$$x^3\omega_3^4+x^k\omega_k=0, \; (x^3)^2-2x^1x^2=0, \; x^4=0 \qquad (4.15)$$

$$(\omega_1^1+\omega_2^2)x^1x^2+(-\omega_1+\omega_4^2)x^1x^4+(-\omega_2+\omega_4^1)x^2x^4+\omega_4^4(x^4)^2=0,$$
$$x^k\omega_k^3+x^4\omega_4^3=0, \; (x^4)^2-2x^1x^2=0, \; x^3=0. \qquad (4.16)$$

§5. Конгруэнции K.

Определение I. Конгруэнцией K называется конгруэнция V, обладающая следующими свойствами:

I) индуцированная пара (C_1, C_2) конгруэнций коник C_1 и C_2 является расслояемой [3],

2) вершины A_3 и A_4 канонического репера первого рода являются характеристическими точками соответственно плоскостей $x^4=0$ и $x^3=0$,

3) поверхность (A_3) или поверхность (A_4) не вырождается в линию.

Теорема 5.I. Существует только два непересекающихся класса конгруэнций K, каждый из которых определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Доказательство. Используя условия определения конгруэнции K, убеждаемся, что в каноническом репере первого рода выполняются уравнения (см. [3], стр. 211-212)

$$\omega_3^4 = 0,\ \omega_4^3 = 0,\ \omega_3^3 = 0,\ \omega_4^4 = 0, \tag{5.1}$$

$$\omega_i \wedge \omega_4^j + \omega_i^3 \wedge \omega_3^j = 0,$$

$$\omega_3^k \wedge \omega_k = 0,\ \omega_4^k \wedge \omega_k = 0,$$

$$\omega_3^k \wedge \omega_k^3 = 0,\ \omega_4^k \wedge \omega_k^3 = 0, \tag{5.2}$$

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 = 0,$$

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 - \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

причем

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \neq 0. \tag{5.3}$$

Учитывая (2.12), заменяем квадратичные уравнения (5.2) конечными:

$$\Gamma_4^{ii} = \alpha b + (-1)^i \beta \Gamma_3^{ii}, \tag{5.4}$$

$$\Gamma_3^{21} = b, \quad \Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21}, \tag{5.5}$$

$$\alpha(\Gamma_3^{11} - \Gamma_3^{22}) + 2\beta b = 0, \tag{5.6}$$

$$\alpha(\Gamma_4^{11} - \Gamma_4^{22}) + 2\beta \Gamma_4^{12} = 0, \tag{5.7}$$

$$m + \Gamma_4^{12}\Gamma_4^{21} - \Gamma_4^{11}\Gamma_4^{22} = 0, \tag{5.8}$$

$$\Gamma_4^{12} = \alpha \Gamma_3^{11} - m, \tag{5.9}$$

где

$$b = \Gamma_3^{12}, \quad m = \Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - b^2. \tag{5.10}$$

В силу условия 3 определения I

$$m \neq 0. \tag{5.11}$$

Подставляя в (5.7) значения Γ_4^{ik} из (5.4), (5.5), (5.9) и учитывая (5.11), получим:

$$\beta = 0. \tag{5.12}$$

Уравнения (5.4)-(5.9) приводятся к виду

$$\beta = 0,\ \Gamma_3^{11} = \Gamma_3^{22},\ \Gamma_4^{ii} = \alpha b,\ \Gamma_3^{21} = b,\ \Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21},$$

$$m + \Gamma_4^{12}\Gamma_4^{21} - \Gamma_4^{11}\Gamma_4^{22} = 0,\quad \Gamma_4^{12} = \alpha \Gamma_3^{11} - m. \tag{5.13}$$

Обозначим:

$$\Gamma_3^{11} = a, \quad \Gamma_1^{1i} = \rho^i. \tag{5.14}$$

Система уравнений (2.12), (5.1) приводится к виду:

$$\omega_i^j = 0,\ \omega_3^4 = 0,\ \omega_4^3 = 0,\ \omega_3^3 = 0,\ \omega_4^4 = 0,\ \omega_1^1 = \rho^k \omega_k, \tag{5.15}$$

$$\omega_3^i = a\omega_i + b\omega_j, \tag{5.16}$$

$$\omega_i^3 = \alpha \omega_j, \quad \omega_4^i = \alpha \omega_3^j - m\omega_j, \tag{5.17}$$

причем

$$\alpha^2 + m - 2a\alpha + 1 = 0 \tag{5.18}$$

Продолжая (5.17), находим

$$d\alpha = 2\alpha\Omega, \quad dm = 4\alpha a \Omega, \tag{5.19}$$

где

$$\Omega = p^1\omega_1 - p^2\omega_2 . \qquad (5.20)$$

Дифференцируя (5.18) с учетом (5.19), получим

$$da = 2\alpha\Omega \qquad (5.21)$$

Так как

$$m = a^2 - b^2 , \qquad (5.22)$$

то из (5.19),(5.21) находим

$$db = 0 . \qquad (5.23)$$

Продолжая (5.16) с учетом (5.21),(5.23), находим

$$p^1(\alpha - a) = 0 , \quad p^2(\alpha - a) = 0 . \qquad (5.24)$$

Равенства (5.24) выделяют только два случая:

$$a = \alpha , \qquad (5.25)$$

$$p^1 = p^2 = 0 , \quad a - \alpha \neq 0 . \qquad (5.26)$$

Случай (5.26) приводит к противоречию. Действительно, замыкая уравнение

$$\omega_1^1 = 0 , \qquad (5.27)$$

получим

$$\alpha a = 0 , \qquad (5.28)$$

это противоречит неравенствам (2.13),(5.11). Рассмотрим

случай (5.25). Из (5.18) находим:

$$b = \varepsilon , \quad \varepsilon^2 = 1 . \qquad (5.29)$$

Следовательно, конгруэнции K разбиваются на два непересекающихся класса: конгруэнции K_1 (когда $b = 1$) и конгруэнции K_{-1} (когда $b = -1$). Замкнутая система уравнений, определяющая конгруэнции K_ε, имеет вид:

$$\begin{gathered}\omega_i^j = 0 , \quad \omega_j^4 = 0 , \quad \omega_4^3 = 0 , \quad \omega_3^3 = 0 , \quad \omega_4^4 = 0 , \\ \omega_i^1 = p^k\omega_k , \quad \omega_i^3 = a\omega_j , \quad \omega_3^i = a\omega_i + \varepsilon\omega_j , \\ \omega_4^i = \varepsilon\omega_3^i , \quad da = 2a\Omega .\end{gathered} \qquad (5.30)$$

$$\begin{gathered}dp^1\wedge\omega_1 + dp^2\wedge\omega_2 + (a^2 - 2p^1p^2 - 1)\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0 , \\ dp^1\wedge\omega_1 - dp^2\wedge\omega_2 = 0 .\end{gathered} \qquad (5.31)$$

Следовательно,

$$S_1 = 2 , \quad q = 2 , \quad S_2 = 0 , \quad Q = N = 2 .$$

Система (5.30),(5.31) - в инволюции и определяет конгруэнции K_ε с произволом двух функций одного аргумента.

Т е о р е м а 5.2. Конгруэнции K_ε обладают следующими геометрическими свойствами:

1) Фокусы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят точки A_1, A_2,

2) Прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) вырождается в связку

прямых с центром в точке

$$\mathcal{J}_\varepsilon = A_3 - \varepsilon A_4, \qquad (5.32)$$

3)Двойные точки Ермолаева [5]

$$T_1 = aA_3 - A_4, \quad T_2 = aA_3 + A_4 \qquad (5.33)$$

поверхностей $(A_1),(A_2)$ являются φ_a-точками.

4) Характеристическое многообразие (I.II) является четверкой прямых

$$\mathcal{L}_1 \equiv A_1A_2, \mathcal{L}_2 \equiv A_3A_4, \mathcal{L}_3 \equiv P_1T_1, \mathcal{L}_4 \equiv P_2T_2, \qquad (5.34)$$

где точки

$$P_1 = A_1 + A_2, \quad P_2 = A_1 - A_2 \qquad (5.35)$$

-фокусы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2).

5)Все коники конгруэнций $(C_1),(C_2)$ принадлежат конусу

$$\Phi \equiv (x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^2 + 2\varepsilon x^3x^4 = 0 \qquad (5.36)$$

с вершиной в точке $\mathcal{J}_\varepsilon$.

Доказательство. I)Фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) есть точки A_1+A_2 и $A_1 A_2$. 2) $d\mathcal{J}_\varepsilon = 0$. 3)Имеем

$$(dA_1)_{\omega_1+\omega_2=0} = \omega_1^1 A_1 + \omega_2 T_1,$$
$$(dA_2)_{\omega_1+\omega_2=0} = \omega_2^2 A_2 + \omega_1 T_1, \qquad (5.37)$$

$$(dA_1)_{\omega_1-\omega_2=0} = \omega_1^1 A_1 + \omega_2 T_2,$$
$$(dA_2)_{\omega_1-\omega_2=0} = \omega_2^2 A_2 + \omega_1 T_2 \qquad (5.37)$$

4) Уравнения (I.II) приводятся к виду

$$x^1x^3 + ax^2x^4 = 0, \; x^2x^3 + ax^1x^4 = 0, \qquad (5.38)$$

откуда непосредственно видно, что линия (5.38) распадается на прямые $\mathcal{L}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3,4)$.

5)Утверждение непосредственно следует из сравнения формул (4.I3),(4.I4),(5.36).

§6. Конгруэнции $\mathcal{L}$.

Отнесем конгруэнцию V к каноническому реперу второго рода. Назовем фокальную поверхность конгруэнции V плоской, если она является плоскостью или вырождается в плоскую линию.

Определение 3. Конгруэнцией $\mathcal{L}$ называется конгруэнция V, обладающая следующими свойствами:

I)Фокальные поверхности $(A_1),(A_2),(A_3)$ являются плоскими,

2)прямые A_1A_3 и A_2A_3 являются компонентами характеристического многообразия ранга один (многообразия (I.II)).

Теорема 6.I. Конгруэнции $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. Так как поверхности

$(A_1),(A_2),(A_3)$ плоские, то

$$
\begin{gathered}
\omega_4^i = 0, \quad \omega_4^3 = 0, \\
\omega_3^1 - \omega_1^3 - \omega_1^1 + \omega_3^3 = 0, \\
\omega_1^2 - \omega_2^1 - \omega_2^2 + \omega_1^1 = 0, \\
\omega_2^3 - \omega_3^2 - \omega_3^3 + \omega_2^2 = 0.
\end{gathered} \tag{6.1}
$$

Уравнения (I.II) в силу (2.I6), (6.I) приводятся к виду:

$$
\begin{gathered}
2(\gamma_3^{31} x^1 x^2 + \gamma_2^{21} x^1 x^3 + \gamma_1^{11} x^2 x^3) - x^1 x^4 - \gamma_3^{41} x^3 x^4 + (\gamma_3^{31} + \gamma_2^{21} + \gamma_1^{11})(x^4)^2 = 0, \\
2(\gamma_3^{32} x^1 x^2 + \gamma_2^{22} x^1 x^3 + \gamma_1^{12} x^2 x^3) - x^2 x^4 - \gamma_3^{42} x^3 x^4 + (\gamma_3^{32} + \gamma_2^{22} + \gamma_1^{12})(x^4)^2 = 0.
\end{gathered} \tag{6.2}
$$

Так как прямые $A_i A_3$ принадлежат характеристическому многообразию (6.2), то

$$
\gamma_2^{2i} = 0, \quad \gamma_1^{1i} = 0. \tag{6.3}
$$

Замкнутая система уравнений, определяющая конгруэнции $\mathcal{L}$, приводится к виду:

$$
\begin{gathered}
\omega_1^2 = \gamma_1^{2k} \omega_k, \quad \omega_3^4 = \gamma_3^{4k} \omega_k, \quad \omega_4^i = 0, \quad \omega_4^3 = 0, \\
\omega_1^2 + \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 + \omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \\
\omega_1^2 + \omega_3^3 = 0, \quad \omega_1^2 - \omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_2^2 = 0,
\end{gathered} \tag{6.4}
$$

$$
\begin{gathered}
d\gamma_1^{2k} \wedge \omega_k + h\, \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\
d\gamma_3^{4k} \wedge \omega_k + k\, \omega^1 \wedge \omega^2 = 0,
\end{gathered} \tag{6.5}
$$

где

$$
\begin{gathered}
h = \gamma_1^{21} \gamma_1^{22} (\gamma_3^{41} - \gamma_3^{42}) + (\gamma_1^{21})^2 (1 - \gamma_3^{42}) + (\gamma_1^{22})^2 (\gamma_3^{41} - 1), \\
k = (\gamma_1^{22} - \gamma_1^{21}) \gamma_3^{41} \gamma_3^{42} + \gamma_1^{21} (\gamma_3^{41} - \gamma_3^{42}) + \gamma_1^{22} (\gamma_3^{41})^2 - \gamma_1^{21} (\gamma_3^{42})^2.
\end{gathered} \tag{6.6}
$$

Имеем

$$
S_1 = 2, \ q = 4, \ S_2 = 2, \ N = Q = 6.
$$

Система (6.4), (6.5) - в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{L}$ с произволом двух функций двух аргументов.

Обозначим:

$$
\ell \equiv A_1 A_2, \quad \ell_2 \equiv A_1 A_3, \quad \ell_3 \equiv A_2 A_3. \tag{6.7}
$$

$$
P_1 = \gamma_1^{2k} A_k, \quad P_2 = \rho A_1 + \gamma_1^{22} A_3, \quad P_3 = \rho A_2 - \gamma_1^{21} A_3, \tag{6.8}
$$

где

$$
\rho = \gamma_1^{21} \gamma_3^{42} - \gamma_1^{22} \gamma_3^{41}. \tag{6.9}
$$

Геометрически точки (6.8) характеризуются тем, что поверхность (P_a) $(a=1,2,3)$ является фокальной поверхностью прямолинейной конгруэнции (ℓ_a).

Т е о р е м а 6.2. Конгруэнции $\mathcal{L}$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1) точки P_1, P_2, P_3 инцидентны одной прямой, 2) прямая $A_3 A_4$ является неподвижной, 3) точки A_a $(a=1,2,3)$ являются фокальными точками коники C_4:

$$
x^1 x^2 + x^2 x^3 + x^1 x^3 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{6.10}
$$

причем точка A_3 -сдвоенная фокальная точка.

Доказательство. Имеем:

$$1)\ \rho P_1 - \gamma_1^{21} P_2 - \gamma_1^{22} P_3 = 0, \quad 2)\ d[A_3 A_4] = 0. \qquad (6.11)$$

3) Фокальные точки коники C_4 определяются уравнением (6.10) и уравнением

$$x^1 x^2 (x^1 \gamma_1^{22} - x^2 \gamma_1^{21} - \rho x^3) = 0. \qquad (6.12)$$

Литература

1. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. "Геометрия", 1963 (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР), М., 1965, 5-64.
2. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия семейств линий и поверхностей. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия, 10, М., 1972, 113-158.
3. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Тр. геом. семинара ВИНИТИ АН СССР. М., 1971, 3, 193-220.
4. Махоркин В.В, Некоторые типы многообразий гиперквадрик. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 3, Калининград, 1973, 50-59.
5. Фиников С.П., Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева. Уч. записки МГПИ, 16, вып. 3, 1951, 235-260.
6. Rimer D. Congruences de quadriques en P_3 et A_3. „Math. Nachr.", 1972, 53, №1-6, 345-359.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Новожилова Т.П.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(CL)_{1,2}$.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ пар фигур C и L, где C -эллипс, L -прямая, не инцидентная плоскости эллипса [1]. Исследованы торсовые конгруэнции $(CL)_{1,2}$. Выделены конгруэнции с осевой и центральной аффинной симметрией.

§1. Канонический репер конгруэнции $(CL)_{1,2}$.

Канонический репер $R = \{A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_3\}$ конгруэнции $(CL)_{1,2}$ строится следующим образом: начало A репера R помещается в точку пересечения прямой L с плоскостью соответствующего ей эллипса C, $\bar e_3 = \overline{AM}$, где M -центр эллипса, конец N вектора $\bar e_2$ выбирается так, что $\overline{AN} = \overline{MP}$, где $\overline{MP}$ -вектор, сопряженный вектору $\overline{AM}$, и точка P инцидентна эллипсу C, вектор $\bar e_1$ направляется по прямой L.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar A = \omega^i \bar e_i, \quad d\bar e_i = \omega_i^j \bar e_j, \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \qquad (1)$$

причем формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \qquad (2)$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \qquad (3)$$

Пусть

$$\omega^1\wedge\omega^2\neq 0. \qquad (4)$$

Уравнения эллипса C и система дифференциальных уравнений конгруэнции $(CL)_{1,2}$ запишутся в виде :

$$b(x^3-1)^2+(x^2)^2-1=0,\ x^1=0.\ b>0; \qquad (5)$$

$$\begin{gathered}\omega_3^3=\alpha\omega^1-\omega^3,\quad \omega_3^1=n\omega^1,\quad \omega_1^3=\Gamma_{1\vartheta}^3\omega^\vartheta,\\ \tfrac{1}{2}d\ln b=\rho\omega^1-\omega^3,\quad \omega_2^1=m\omega^1,\quad \omega_1^2=\Gamma_{1\vartheta}^2\omega^\vartheta,\\ b\omega_2^3=l\omega^1+\omega^2,\quad \omega_2^2=\beta\omega^1,\quad \omega^3=\Gamma_\vartheta^3\omega^\vartheta,\\ \omega_3^2=\gamma\omega^1-\omega^2,\quad (\vartheta=1,2).\end{gathered} \qquad (6)$$

Исследуя систему уравнений (6), приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а I. Конгруэнции $(CL)_{1,2}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. В расширенном аффинном пространстве прямая AN или прямая AM параллельны характеристике плоскости эллипса в том и только в том случае, когда эта характеристика является несобственной прямой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристика плоскости эллипса параллельна прямой AN (AM) в том случае, когда $m=0$ ($n=0$), но, в силу уравнений (6), из $m=0$ следует $n=0$ и наоборот. При этих условиях уравнения характеристики

$$1+mx^2+nx^3=0,\quad x^1=0 \qquad (7)$$

определяют несобственную прямую расширенного аффинного пространства.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнция $(CL)_{1,2}$, у которой касательная плоскость к поверхности (A) содержит точку A, называется конгруэнцией $(CL)_{1,2}^{f}$.

Аналитически конгруэнции $(CL)_{1,2}^{f}$ выделяются из конгруэнций $(CL)_{1,2}$ условием

$$\Gamma_2^3=0 \qquad (8)$$

и существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 3. Для конгруэнции $(CL)_{1,2}^{f}$ справедливы следующие свойства: 1/ линейчатая поверхность $\omega^1=0$, описанная прямой L, пересекает плоскость эллипса C по эллипсу

$$f=b(x^3-1)^2+(x^2)^2-b=0, \qquad (9)$$

2/ координатная линия $\omega^1=0$ на поверхности, описанной точкой $\bar K=\bar A+\bar e_3$, является плоской линией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка A пересечения прямой L с плоскостью эллипса C принадлежит эллипсу (9). Используя деривационные формулы (I) и условие стационарности точки

$$dx^i=-x^j\omega_j^i-\omega^i, \qquad (10)$$

получим $(df)_{\omega^1=0}=0$. Следовательно эллипс, определяемый уравнением (9), инвариантен вдоль $\omega^1=0$

2/ из (I), (6) и (8) следует, что

$$(d\bar K)_{\omega^1=0}=[(1+\Gamma_{12}^2)\bar e_2+\Gamma_{12}^3\bar e_3]\omega^2, \qquad (11)$$

$$(d\bar{e}_3)_{\omega^1=0} = -\bar{e}_2\omega^2,$$

$$(d\bar{e}_2)_{\omega^1=0} = \frac{1}{b}\bar{e}_3\omega^2,$$

т.е. для любого $n = 1, 2, 3 \dots$

$$((d^n\bar{K})_{\omega^1=0}, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0.$$

Теорема доказана.

§ 2. Торсовые конгруэнции $(CL)_{1,2}$

Задание конгруэнции $(CL)_{1,2}$ определяет расслоение конгруэнции (L) на однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей, которые характеризуются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\omega_3^3 = -\omega^3, \quad b\omega_2^3 = \omega^1, \quad \omega_3^1 = \omega_2^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^3 = \Gamma_{12}^3\omega^2,$$

$$\frac{1}{2}d\ln b = -\omega^3, \quad \omega_3^2 = -\omega^2, \quad \omega^3 = \Gamma_2^3\omega^2, \quad \omega_1^2 = \Gamma_{12}^2\omega^2. \qquad (12)$$

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнция $(CL)_{1,2}$ называется торсовой, если все поверхности (I2) - торсы.

О п р е д е л е н и е 3. Назовем параллелограмм с вершинами (I,I,0),(I,-I,0),(-I,-I,0),(-I,I,0) координатным параллелограммом плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Рассмотрим торсовые конгруэнции $(CL)_{1,2}$, для которых

выполняются условия:

I/точка A является характеристической точкой плоскости эллипса C, 2/касательные к асимптотическим линиям поверхности (A) в точке A являются диагоналями координатного параллелограмма, 3/ прямая AM является аффинной нормалью поверхности (A) в точке A.

Такие конгруэнции назовем конгруэнциями $(CL)^{\circ}_{1,2}$. Аналитически условия (I-2) записываются в виде:

$$\Gamma_1^3 = \Gamma_2^3 = 0, \quad \Gamma_{12}^3 = \ell = 0, \quad \Gamma_{11}^3 = -\frac{1}{b}. \qquad (13)$$

Из соотношений (I3) следует:

$$b\omega_1^3 = -\omega^1, \quad b\omega_2^3 = \omega^2. \qquad (14)$$

Замыкая уравнения (I4) с учетом системы (6), получим:

$$\Gamma_{11}^1 = m, \quad \Gamma_{12}^2 = 2\rho - \alpha + 2\beta. \qquad (15)$$

Условие (3) приводится к виду:

$$\alpha = \rho \qquad (16)$$

Учитывая (I6), находим:

$$\gamma = 0, \quad n(\rho + 2\beta) + 2\beta = 0, \quad m[3\rho(n+1) + 2\beta] = 0.$$

Приходим к двум возможным случаям:

$$n = m = \beta = 0, \quad \rho \neq 0; \qquad (17)$$

$$\rho = 0, \quad \beta = 0. \qquad (18)$$

О п р е д е л е н и е 4. Конгруэнции $(CL)^{\circ}_{1,2}$, для которых $b \neq const$ $(\rho \neq 0)$, назовем конгруэнциями с осевой аффинной симметрией. Конгруэнции $(CL)^{\circ}_{1,2}$, для которых $b = const$ $(\rho = 0)$, назовем конгруэнциями с центральной аффинной симметрией.

Торсовые конгруэнции с осевой симметрией определяются вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений:

$$\omega_3^3 = \rho\omega^1, \quad \frac{1}{2} d\ln b = \rho\omega^1, \quad b\omega_2^3 = \omega^2, \quad b\omega_1^3 = -\omega^1,$$

$$\omega_3^2 = -\omega^2, \quad \omega_3^1 = \omega_2^1 = \omega_2^2 = \omega^3 = 0, \tag{19}$$

$$\omega_1^2 = \rho\omega^2, \quad d\rho = \left(\frac{1}{b} - 2\rho^2\right)\omega^1.$$

Рассмотрим прямую, проходящую через центр эллипса C и фокальную точку $A - \frac{1}{\rho}\bar{e}_1$ луча L прямолинейной конгруэнции (L).

Уравнения этой прямой имеют вид:

$$x^3 = \rho x^1 + 1, \quad x^2 = 0. \tag{20}$$

Исходя из (10) и (19), получаем $d(x^3 - \rho x^1 - 1) \equiv 0$, т.е. прямая (20) неподвижна. Назовем её осью аффинной симметрии конгруэнции, определяемой дифференциальными уравнениями (19).

Т е о р е м а 5. Конгруэнции $(CL)^{\circ}_{1,2}$ с осевой аффинной симметрией обладают следующими свойствами:

1/линия, описываемая центрами M эллипсов C, есть прямая (20), 2/плоскости эллипсов C составляют пучок параллельных плоскостей, 3/эллипсы C принадлежат цилиндру с образующей, параллельной оси симметрии (20), 4/линейчатая поверхность (12) есть конус с вершиной в точке $\bar{A} - \frac{1}{\rho}\bar{e}_1$ и направляющей кривой (9), 5/плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ образуют пучок плоскостей с осью $x^3 = \rho x^1 + 1$, $x^2 = 0$, 6/торсы прямолинейных конгруэнций (AM), (AN), (L) соответствуют, прямолинейные конгруэнции (AM) и (AN) являются цилиндрическими конгруэнциями, 7/координатные линии $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ на поверхности (A) являются плоскими линиями и располагаются соответственно в плоскостях $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$, 8/существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и от прямолинейной конгруэнции (AM) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, 9/линия $\omega^2 = 0$ является линией тени на поверхности (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойства (1-5) непосредственно вытекают из неподвижности прямой (20) и уравнений (19). Докажем свойства (6-8).

С в о й с т в о 6. Торсы прямолинейных конгруэнций (AM), (AN), (L) определяются уравнением

$$\omega^1\omega^2 = 0.$$

Имеем:

$$(d\bar{e}_2)_{\omega^2=0} = 0, \quad (d\bar{e}_3)_{\omega^2=0} = \rho\omega^1\bar{e}_3.$$

Свойство доказано.

С в о й с т в о 7. Так как

$$(d\bar{A})_{\omega^1=0} = \omega^2\bar{e}_2, \quad (d\bar{e}_2)_{\omega^1=0} = \frac{1}{b}\omega^2\bar{e}_3, \quad (d\bar{e}_3)_{\omega^1=0} = -\omega^2\bar{e}_2$$

и

$$(d\bar{A})_{\omega^2=0} = \omega^1\bar{e}_1, \quad (d\bar{e}_1)_{\omega^2=0} = \omega^1\left(-\rho\bar{e}_1 - \frac{1}{b}\bar{e}_3\right),$$

$$(d\bar{e}_3)_{\omega^2=0} = \rho\omega^1\bar{e}_3,$$

то для любого $n = 1, 2, 3 ..$

$$((d^n\bar{A})_{\omega^1=0}, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0, \quad ((d^n\bar{A})_{\omega^2=0}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0,$$

т.е.координатные линии на поверхности (A) являются плоскими линиями.

С в о й с т в о 8. Условия аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и от прямолинейной конгруэнции (AM) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ записываются соответственно в виде:

$$\begin{cases} \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \\ \omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega^\vartheta \wedge \omega_\vartheta^3 = 0, \\ \omega_3^\vartheta \wedge \omega_\vartheta^3 = 0 \end{cases}$$

и,в силу (19),тождественно удовлетворяются,что и доказывает свойство.

С в о й с т в о 9. Касательные плоскости к поверхности (A) ,взятые вдоль линии $\omega^2 = 0$, огибаются торсом с образующей AN ,точка ребра возврата которого является несобственной точкой,т.е.линия $\omega^2 = 0$ есть линия тени на поверхности (A).

Центрально симметричные торсовые конгруэнции определяются системой дифференциальных уравнений :

$$\omega_1^3 + \omega^2 - \omega_2^2 = 0, \quad \frac{1}{2} d\ln b = 0, \quad b\omega_2^3 = \omega^2,$$

$$\omega_3^2 = -\omega^2, \quad \omega_3^1 = -\omega^1, \quad \omega_2^1 = m\omega^1, \quad b\omega_1^3 = -\omega^1, \qquad (21)$$

$$\omega_1^2 = m\omega^1$$

и существует с произволом одной функции одного аргумента.

Центром симметрии конгруэнции,определяемой системой дифференциальных уравнений (21),является неподвижная точка M.

Т е о р е м а 6. Конгруэнция $(CL)^\circ_{1,2}$ с центральной аффинной симметрией обладает следующими свойствами:

1/все эллипсы C принадлежат квадрике

$$F_1 \equiv b(x^3-1)^2 + (x^2)^2 - (x^1)^2 - 1 = 0, \qquad (22)$$

поверхность (A) является квадрикой

$$F_2 \equiv b(x^3-1)^2 + (x^2)^2 - (x^1)^2 - b = 0, \qquad (23)$$

2/линейчатая поверхность (12) является цилиндрической поверхностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

С в о й с т в о 1.Эллипс C принадлежит квадрике (22). Используя систему дифференциальных уравнений (21) и условия (10),получим $dF_1 = 0$.Следовательно,квадрика, определяемая уравнением (22), является инвариантной квадрикой.Аналогично доказывается второе утверждение свойства 1.

С в о й с т в о 2. Из уравнений (21) и (1) следует

$$(d\bar{e}_1)_{\omega^1=0} = 0;$$

т.е.линейчатая поверхность (12) является цилиндрической поверхностью.

Л и т е р а т у р а.

1.Малаховский В.С.,О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 41-49.

2. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 143-153.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

Новожилова Т.П.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ПАР ФИГУР, ОБРАЗОВАННЫХ ПРЯМОЙ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются конгруэнции $(LP)_{2,1}$ [1]-вырожденные конгруэнции пар фигур, образованных прямой L и точкой P, не инцидентной этой прямой, когда (L) - прямолинейная конгруэнция, а (P) - линия. Исследованы расслояемые конгруэнции $(LP)_{2,1}$.

§1. Канонический репер конгруэнции $(LP)_{2,1}$.

Канонический репер $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ конгруэнции $(LP)_{2,1}$ строится следующим образом: вершину A репера помещаем в центр луча L прямолинейной конгруэнции (L), конец N вектора $\bar e_3$ в один из фокусов этого луча, конец вектора $\bar e_1$ помещаем в точку P, соответствующую лучу L, вектор $\bar e_2$ направляем параллельно касательной L' к линии (P) в точке P. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar A=\omega^i\bar e_i,\quad d\bar e_i=\omega_i^j\bar e_j,\quad (i,j,\vartheta=1,2,3),\tag{1}$$

где формы Пфаффа $\omega^i,\ \omega_i^j$ удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства:

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^i \wedge \omega_i^j , \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^0 \wedge \omega_0^j \tag{2}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{3}$$

Выбираем формы Пфаффа ω^1, ω^2 за независимые первичные формы, тогда

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0. \tag{4}$$

Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции $(LP)_{2,1}$ приводится к виду:

$$\omega^3 = \Gamma_k^3 \omega^k , \quad \omega_1^1 = -\omega^1 , \quad \omega_1^3 = -\omega^3, \quad \omega_2^i = \Gamma_{2k}^i \omega^k,$$

$$\omega_3^l = \Gamma_{3k}^l \omega^k , \quad \omega_1^2 = \Gamma_{1k}^2 \omega^k , \quad (k, l = 1,2) ; \tag{5}$$

$$\Gamma_{31}^1 = -\Gamma_{32}^2 = S , \quad \Gamma_{31}^2 \Gamma_{32}^1 + S^2 = 1 , \quad \Gamma_{21}^1 = \mu \Gamma_{22}^1,$$

$$\Gamma_{21}^3 = \mu \Gamma_{22}^3 , \quad \text{где} \quad \mu = \frac{\Gamma_{11}^2}{1+\Gamma_{12}^2} . \tag{6}$$

Исследуя эту систему, приходим к следующей теореме:

Т е о р е м а I. Конгруэнции $(LP)_{2,1}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

§2. Расслояемые конгруэнции $(LP)_{2,1}$.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнция $(LP)_{2,1}$ называется расслояемой, если существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (L) к многообразию прямых (L') [2].

Условия одностороннего расслоения от прямолинейной конгруэнции (L) к многообразию прямых (L') записываются в виде:

$$\omega_3^2 \wedge \omega_2^1 = 0 , \quad \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \quad \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0 . \tag{7}$$

Анализируя уравнения (5),(6),(7), выделяем следующие три случая:

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{21}^3 = 0, \quad S^2 = 1, \quad S(2\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 - 1) = \Gamma_1^3; \tag{8}$$

$$\Gamma_{22}^3 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad S^2 = 1, \quad S(2\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 - 1) = 0; \tag{9}$$

$$\Gamma_{22}^3 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0 , \tag{10}$$

которые определяют, соответственно, расслояемые конгруэнции $(LP)_{2,1}^1, (LP)_{2,1}^2, (LP)_{2,1}^3$. Рассматривая замкнутую систему уравнений каждого из этих классов конгруэнций $(LP)_{2,1}$, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $(LP)_{2,1}^1$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов. Конгруэнции $(LP)_{2,1}^2$ существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента. Конгруэнции $(LP)_{2,1}^3$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Геометрически конгруэнции $(LP)_{2,1}^3$ характеризуются тем, что линия (P) есть прямая. Действительно, из соотношений (10),(6) и системы уравнений (5) находим:

$$d\bar{P} = (\omega^2 + \omega_1^2)\bar{e}_2 \quad , \quad d\bar{e}_2 = \omega_2^2 \bar{e}_2 .$$

Следовательно, линия (P) является прямой. Конгруэнции $(LP)^1_{2.1}$, $(LP)^2_{2.1}$ -торсовые конгруэнции [3].

Т е о р е м а 3. Если касательная плоскость к поверхности (A) проходит через прямую L^1, то конгруэнции $(LP)^1_{2.1}$, $(LP)^2_{2.1}$, $(LP)^3_{2.1}$ являются аффинно расслояемыми от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ и от прямолинейной конгруэнции (AP) к семейству плоскостей $(A,\bar{e}_2\bar{e}_3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие того, что прямая L^1 инцидентна касательной плоскости к поверхности (A) в точке A записывается в виде:

$$\Gamma^3_k = 0 . \tag{11}$$

Аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ и от прямолинейной конгруэнции (AP) к семейству плоскостей $(A,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ задается следующими квадратичными уравнениями:

$$\begin{cases} \omega^k \wedge \omega^3_k = 0 , \\ \omega^k_3 \wedge \omega^3_k = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega^{k+1} \wedge \omega^1_{k+1} = 0 , \\ \omega^{k+1}_1 \wedge \omega^1_{k+1} = 0, \end{cases}$$

которые тождественно удовлетворяются в силу условия (II) и, соответственно, условий (8), (9) или (10).

Для конгруэнций $(LP)^2_{2.1}$ справедлива и обратная теорема.

Т е о р е м а 4. Конгруэнции $(LP)^1_{2.1}$ обладают следующими свойствами: I/прямолинейные конгруэнции (L) и (AP) имеют общую фокальную поверхность, являющуюся огибающей семейства плоскостей $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_3)$, 2/если фокальная точка F_1 луча L прямолинейной конгруэнции (L) совпадает с характеристической точкой грани $(A,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$, то фокальная сеть на поверхности (F_1) является координатной сетью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/фокус $\bar{F}_2 = \bar{A} + S\bar{e}_3$ луча L прямолинейной конгруэнции (L) и фокус $\bar{A} - \frac{1}{\Gamma^2_{12}}\bar{e}_2$ луча AP прямолинейной конгруэнции (AP) инцидентны характеристике

$$1 + \Gamma^2_{12} x^1 - S x^3 = 0 , \quad x^2 = 0 \tag{12}$$

плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_3)$. 2/фокальная точка $\bar{F}_1 = \bar{A} - S\bar{e}_3$ луча L прямолинейной конгруэнции (L) совпадает с характеристической точкой грани $(A,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ в том случае, если

$$\Gamma^1_{32} = 0 . \tag{13}$$

В силу условия (13), уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (L) принимает вид:

$$\omega^1 \omega^2 = 0 ,$$

т.е. фокальная сеть на поверхности (F_1) является координатной сетью.

Т е о р е м а 5. Для конгруэнции $(LP)^2_{2,1}$ справедливы следующие свойства: I/соприкасающаяся плоскость кривой (P) в точке P проходит через точку A ,2/поверхность (A) есть линейчатая поверхность с образующей AP .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение I/ теоремы пять непосредственно следует из системы (5) и соотношений (9). 2/ Рассмотрим на поверхности (A) линию $\omega^2=0$.

$$(dA)_{\omega^2=0}=\omega^1\bar{e}_1 \quad , (d\bar{e}_1)_{\omega^2=0}=-\omega^1\bar{e}_1 \, ,$$

т.е. линия $\omega^2=0$ является прямой, и поверхность (A) - линейчатая.

Л и т е р а т у р а.

I. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 41-49.

2. Похила М.М., Пары многообразий квадратичных элементов в n -мерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2, 1971, 43-54.

3. Новожилова Т.П., Вырожденные конгруэнции $(CL)_{4,2}$. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.4.

4. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференциальная геом. многообразий фигур", вып.3, 1973, 143-153.

5. Фиников С.П., Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1950.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

О в ч и н н и к о в В.М.

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ $\Psi_{2,3}$.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются пары $\Psi_{2,3}$ [3], образованные конгруэнцией коник (C) и поверхностью S_2. Для подкласса таких пар решена задача расслоения от конгруэнции коник (C) к прямолинейной конгруэнции, ассоциированной с парой $\Psi_{2,3}$.

§I. Репер пары $\Psi_{2,3}$.

Отнесем пару $\Psi_{2,3}$ к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, где A_3 -характеристическая точка плоскости коники C , точки A_1, A_2 располагаются на конике таким образом, что треугольник $A_1A_2A_3$ является автополярным треугольником второго рода, вершина A_4 совмещается с текущей точкой поверхности S_2 .

Деривационные формулы репера R записываются в виде:

$$dA_\alpha=\omega^\beta_\alpha A_\beta \, , \qquad (1.1)$$

где ω^β_α -формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{1.3}$$

Принимая формы

$$\omega_1^4 = \omega_1, \quad \omega_2^4 = \omega_2 \tag{1.4}$$

за независимые первичные формы, запишем пфаффову систему уравнений пары $\Psi_{2,3}$ в виде:

$$\begin{gathered}\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \quad \omega_3^4 = 0, \\ \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k\omega_k.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем $i, j, k \neq 4$ и по индексам i, j $(i \neq j)$ суммирование не производится.

§2. Расслояемые пары $\Psi_{2,3}$.

Определение I. Расслояемой парой $\Psi_{2,3}$, или парой ϕ, называется пара $\Psi_{2,3}$, которая обладает следующими свойствами:

I) существует одностороннее расслоение от конгруэнции (C) коник C к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4),

2) существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1, A_2),

3) характеристическая поверхность (A_3) не вырождается в линию,

4) точка A_3 инцидентна касательным плоскостям к поверхностям $(A_1), (A_2)$,

5) прямая A_3A_4 не инцидентна касательным плоскостям к поверхностям $(A_1), (A_2)$.

В силу условий I), 2) для пар ϕ выполняются следующие квадратичные уравнения:

$$\begin{gathered}\omega_3^2\wedge\omega_1^2 = 0, \quad \omega_3^1\wedge\omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^1\wedge\omega_3^2 - \omega_2^3\wedge\omega_3^2 + \omega_1\wedge\omega_4^1 = 0, \\ \omega_1^3\wedge\omega_3^2 + \omega_1\wedge\omega_4^2 = 0, \quad (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3)\wedge\omega_3^2 + \omega_3^1\wedge\omega_1^2 = 0, \\ (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3)\wedge\omega_3^1 + \omega_3^2\wedge\omega_2^1 = 0, \quad \omega_2^3\wedge\omega_3^1 + \omega_2\wedge\omega_4^1 = 0, \\ \omega_4^k\wedge\omega_k^3 = 0, \quad \omega_3^k\wedge\omega_k = 0, \quad \omega_3^1\wedge\omega_3^2 + \omega_1^3\wedge\omega_3^1 + \omega_4^2\wedge\omega_2 = 0.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Так как поверхность (A_3) не вырождается в линию, то

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2 \neq 0, \tag{2.2}$$

или

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21} \neq 0. \tag{2.3}$$

В силу условий 4), 5) определения пары ϕ имеем:

$$\Gamma_1^{22} = \Gamma_2^{11} = 0, \quad \Gamma_1^{21} \neq 0, \quad \Gamma_2^{12} \neq 0. \tag{2.4}$$

тогда первые два уравнения системы (2.I) дадут

$$\Gamma_3^{11} = 0, \quad \Gamma_3^{22} = 0. \tag{2.5}$$

Замыкая уравнение

$$\omega_3^4 = 0, \tag{2.6}$$

получим

$$\Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21}.$$

С учетом неравенства (2.3) вершины репера R можно пронормировать так, что

$$\Gamma_3^{12} = 1, \tag{2.7}$$

тогда будем иметь

$$\omega_3^1 = \omega_2, \quad \omega_3^2 = \omega_1 \tag{2.8}$$

Обозначим

$$\theta_1 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4, \quad \theta_2 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3. \tag{2.9}$$

Из системы (2.I) и замыканий уравнений (2.8) получим:

$$\theta_2 \wedge \omega_1 - \Gamma_1^{21} \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \quad \theta_2 \wedge \omega_2 + \Gamma_2^{12} \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \tag{2.10}$$

$$\theta_1 \wedge \omega_2 + 2\Gamma_1^{21} \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \quad \theta_1 \wedge \omega_2 - 2\Gamma_2^{12} \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \tag{2.11}$$

откуда следует

$$(\theta_1 + 2\theta_2) \wedge \omega_1 = 0, \quad (\theta_1 + 2\theta_2) \wedge \omega_2 = 0. \tag{2.12}$$

Из уравнений (2.I2) получаем

$$\theta_1 + 2\theta_2 = 0. \tag{2.13}$$

В силу условия эквипроективности (1.3) последнее равенство приводится к виду:

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 = 0. \tag{2.14}$$

Тогда из уравнений (2.I0) с учетом (2.I4) будем иметь:

$$\omega_3^3 = \Gamma_2^{12} \omega_1 + \Gamma_1^{21} \omega_2. \tag{2.15}$$

Обозначим

$$\Gamma_1^{31} = \alpha, \quad \Gamma_1^{32} = \beta, \quad \Gamma_2^{31} = \gamma. \tag{2.16}$$

Замыкая уравнение (2.I4), получим

$$2(\omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2) + \omega_1 \wedge \omega_4^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0. \tag{2.17}$$

В то же время система (2.I) дает следствие

$$\omega_1 \wedge \omega_4^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^2 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 = 0. \tag{2.18}$$

Сравнивая уравнение (2.I7), (2.I8) с учетом (2.8), находим:

$$\omega_1^3 \wedge \omega_2 + \omega_2^3 \wedge \omega_1 = 0, \tag{2.19}$$

$$\omega_1 \wedge \omega_4^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0, \tag{2.20}$$

откуда

$$\omega_1^3 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2^3 = \gamma\omega_1 + \alpha\omega_2 \tag{2.21}$$

а также

$$\Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21}. \tag{2.22}$$

Коэффициенты $\Gamma^{11}_4, \Gamma^{12}_4, \Gamma^{22}_4$ теперь однозначно находятся из системы (2.I):

$$\Gamma^{11}_4=\gamma\ ;\ \Gamma^{12}_4 = 1-\alpha\ ;\ \Gamma^{22}_4=\beta . \qquad (2.23)$$

Имеем:

$$\omega_4^1=\gamma\,\omega_1+(1-\alpha)\,\omega_2\ ;\quad \omega_4^2=(1-\alpha)\,\omega_1+\beta\,\omega_2 . \qquad (2.24)$$

Таким образом, пары ℓ определяются следующей системой Пфаффа:

$$\omega_1^2=\Gamma^{21}_1\,\omega_1,\quad \omega_2^1=\Gamma^{12}_2\,\omega_2,\quad \omega_1^3=\alpha\,\omega_1+\beta\,\omega_2,$$

$$\omega_2^3=\gamma\,\omega_1+\alpha\,\omega_2,\quad \omega_3^1=\omega_2,\quad \omega_3^2=\omega_1,\quad \omega_3^4=0, \qquad (2.25)$$

$$\omega_4^1=\gamma\,\omega_1+(1-\alpha)\,\omega_2,\quad \omega_4^2=(1-\alpha)\,\omega_1+\beta\,\omega_2,$$

$$\omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\,\omega_k,\quad \omega_3^3=\Gamma^{12}_2\,\omega_1+\Gamma^{21}_1\,\omega_2,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3=0 .$$

Замыкая первые два уравнения этой системы, получим

$$\delta\left(\Gamma^{21}_1-\Gamma^{12}_2\right)=\left(\Gamma^{21}_1+\Gamma^{12}_2\right)\pi_1^1, \qquad (2.26)$$

где δ -символ дифференцирования, π_1^1-значение формы ω_1^1 при фиксированных первичных параметрах.

В силу равенства (2.26) и учитывая 5) определения I, оставшуюся нормировку вершин репера R можно осуществить так,что

$$\Gamma^{21}_1-\Gamma^{12}_2=0 . \qquad (2.27)$$

Полагая

$$\Gamma^{21}_1=\Gamma^{12}_2=2\lambda, \qquad (2.28)$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=2\left(p\,\omega_1+q\,\omega_2\right), \qquad (2.29)$$

получим

$$\omega_1^2=2\lambda\,\omega_1,\quad \omega_2^1=2\lambda\,\omega_2, \qquad (2.30)$$

$$\omega_3^3=2\lambda\left(\omega_1+\omega_2\right). \qquad (2.31)$$

Замыкания уравнений (2.30) имеют вид:

$$d\lambda\wedge\omega_1+\lambda(q-3\lambda)\,\omega_1\wedge\omega_2=0, \qquad (2.32)$$

$$d\lambda\wedge\omega_2+\lambda(3\lambda+p)\,\omega_1\wedge\omega_2=0, \qquad (2.33)$$

откуда

$$d\lambda=-\lambda(3\lambda+p)\,\omega_1-\lambda(q-3\lambda)\,\omega_2 . \qquad (2.34)$$

Замыкание уравнения (2.3I) с учетом (2.34) дает

$$q=-p . \qquad (2.35)$$

В силу последнего равенства имеем:

$$-d\ln\lambda=(3\lambda+p)(\omega_1+\omega_2), \qquad (2.36)$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=2p\,(\omega_1-\omega_2). \qquad (2.37)$$

Продолжая систему (2.36),(2.37), находим

$$dp = [p(p-3\lambda) - \tfrac{1}{2}(\lambda^2+1)](\omega_1+\omega_2). \qquad (2.38)$$

Замыкая систему уравнений (2.25), получим следующие квадратичные уравнения:

$$d\beta\wedge\omega_2 + [6\lambda\beta - 2p\beta - 3\lambda]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \qquad (2.39)$$

$$d\gamma\wedge\omega_1 + [3\lambda + 2p\gamma - 6\lambda\gamma]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \qquad (2.40)$$

$$d\alpha\wedge\omega_1 + [3\lambda - 2\beta\lambda - 6\lambda\alpha - \Gamma_4^{32}]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \qquad (2.41)$$

$$d\alpha\wedge\omega_2 + [6\alpha\lambda - 3\lambda + 2\gamma\lambda + \Gamma_4^{31}]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0. \qquad (2.42)$$

Из (2.41),(2.42), находим

$$d\alpha = 3\lambda(1-2\alpha)(\omega_1+\omega_2) - 2\lambda(\gamma\omega_1+\beta\omega_2) - \omega_4^3. \qquad (2.43)$$

Замыкание уравнений (2.38),(2.43) удовлетворяются тождественно.

Положим

$$h = 3\lambda - 6\lambda\alpha, \quad \Omega = \omega_1 + \omega_2. \qquad (2.44)$$

Замкнутая система уравнений пары f состоит из пфаффовых уравнений

$$\omega_3^4 = 0, \quad \omega_1^2 = 2\lambda\omega_1, \quad \omega_2^1 = 2\lambda\omega_2, \quad \omega_3^1 = \omega_2,$$

$$\omega_3^2 = \omega_1, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$

$$\omega_2^3 = \gamma\omega_1 + \alpha\omega_2, \quad \omega_4^1 = \gamma\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k,$$

$$\omega_4^2 = (1-\alpha)\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_3^3 = 2\lambda\Omega, \quad -d\ln\lambda = (3\lambda+p)\Omega,$$

$$dp = [p(p-3\lambda) - \tfrac{1}{2}(1+\lambda^2)]\,\Omega, \qquad (2.45)$$

$$d\alpha = (h - 2\gamma\lambda - \Gamma_4^{31})\,\omega_1 + (h - 2\beta\lambda - \Gamma_4^{32})\,\omega_2$$

и внешних квадратичных уравнений:

$$d\beta\wedge\omega_2 + [6\lambda\beta - 2p\beta - 3\lambda]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0,$$

$$d\gamma\wedge\omega_1 + [2p\gamma - 6\lambda\gamma + 3\lambda]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \qquad (2.46)$$

$$d\Gamma_4^{31}\wedge\omega_1 + d\Gamma_4^{32}\wedge\omega_2 + 6\lambda(\Gamma_4^{32} - \Gamma_4^{31})\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0$$

Имеем

$$S_1 = 3, \quad q = 4, \quad S_2 = 1, \quad Q = N = 5.$$

Система (2.45),(2.46) в инволюции и определяет пару f с произволом одной функции двух аргументов.

§3. Геометрические свойства пары f.

Матрица деривационных формул канонического репера пары f имеет вид:

$$\left\|\begin{matrix} (\lambda+p)\omega_1 + (\lambda-p)\omega_2 & 2\lambda\omega_1 & \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 & \omega_1 \\ 2\lambda\omega_2 & (\lambda-p)\omega_1 + (\lambda+p)\omega_2 & \gamma\omega_1 + \alpha\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 2\lambda(\omega_1+\omega_2) & 0 \\ \gamma\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2 & (1-\alpha)\omega_1 + \beta\omega_2 & \Gamma_4^{31}\omega_1 + \Gamma_4^{32}\omega_2 & -4\lambda(\omega_1+\omega_2) \end{matrix}\right\| \qquad (3.1)$$

Т е о р е м а 1. Поверхность (A_3) пары $\mathfrak{f}$ является квадрикой с прямолинейными образующими A_3A_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий поверхности (A_3) имеет вид:

$$\omega_1\omega_2 = 0 . \qquad (3.2)$$

Так как

$$d[A_1A_3]_{\omega_1=0} = \{-(\rho-3\lambda)\omega_2\}[A_1A_3],$$

$$d[A_2A_3]_{\omega_2=0} = \{(3\lambda-\rho)\omega_1\}[A_2A_3],$$

то прямые A_1A_3, A_2A_3 являются прямолинейными образующими поверхности (A_3).

Т е о р е м а 2. Торсы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) пары $\mathfrak{f}$ соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) определяются одним и тем же уравнением:

$$\beta(\omega_2)^2 - \gamma(\omega_1)^2 = 0 , \qquad (3.3)$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Т е о р е м а 3. Точки A_i пары $\mathfrak{f}$ являются фокальными точками конгруэнции (C) коник.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции (C) коник имеет вид:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \quad x^k\omega_k = 0,$$

$$2\lambda\{(x^1)^2 + (x^2)^2\omega_2\} + x^3\{x^1[(1-\alpha)\omega_1 - \beta\omega_2] + \qquad (3.4)$$

$$+ x^2[(1-\alpha)\omega_2 - \gamma\omega_1]\} + (x^3)^2[-\lambda(\omega_1+\omega_2)] = 0 .$$

Исключая из последних двух уравнений системы (3.4) отношение $\omega_1 : \omega_2$, получим систему уравнений для определения фокальных поверхностей конгруэнции

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0 , \quad x^4 = 0;$$

$$x^3\{2\lambda x^3(x^2 - x^1) + (x^2)^2\gamma - (x^1)^2\beta\} = 0 . \qquad (3.5)$$

Отсюда следует, что точки A_1 и A_2 являются фокальными точками конгруэнции (C). Система уравнений для определения оставшихся четырех фокальных точек конгруэнции запишется в виде:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0 , \quad x^4 = 0 ;$$

$$2\lambda x^3(x^2 - x^1) + (x^2)^2\gamma - (x^1)^2\beta = 0 . \qquad (3.6)$$

Плоскость, проходящую через прямую A_3A_4 и единичную точку

$$E = A_1 + A_2$$

прямой A_1A_2, назовем плоскостью α

Т е о р е м а 4. В паре $\mathscr{f}$ плоскость α определяется прямой A_3A_4 и линией пересечения касательных плоскостей к поверхностям $(A_1),(A_2)$ в точках A_1 и A_2 является плоскостью α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$(N, A_3, A_4, E) = 0, \tag{3.8}$$

где

$$N = 2\lambda(A_1 + A_2) + \alpha A_3 + A_4, \tag{3.9}$$

то линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) инцидентна плоскости α.

Т е о р е м а 5. Фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) пары $\mathscr{f}$ гармонически делят точки A_1 и A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения фокусов

$$F = sA_1 + tA_2 \tag{3.10}$$

луча A_1A_2, имеем уравнение:

$$t^2\gamma - s^2\beta = 0, \tag{3.11}$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Л и т е р а т у р а.

1. Малаховский В.С., Конгруэнции коник, порожденные расслояемой парой C_2. "Дифференц. геометрия многообразий фигур", вып. 1, Труды Калининградского ун-та, 1970, 5-26.

2. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. "Труды геом. семинара", М., ВИНИТИ АН СССР, 1971, т. 3, 193-220.

3. Овчинников В.М., Дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. 2, Калининградский университет, 1971, 38-42.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Ю.И. Попов

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ ОСНАЩЕННЫХ ГИПЕРПОЛОС $N(\Gamma_2)$ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.

В работе изучаются двумерные развертывающиеся гиперполосы $N(\Gamma_2)$ проективного пространства P_n. Рассмотрены специальные оснащения и связности, индуцируемые этими оснащениями на базисной поверхности гиперполосы $N(\Gamma_2)$. При исследовании используется аналитический аппарат и терминология, введенные в работах [2], [3].

§1. Аналитическое задание вырожденных развертывающихся гиперполос $N(\Gamma_2)$.

Гиперполоса $N(\Gamma_2)$, вложенная в проективное пространство P_n, называется вырожденной, если её базисная поверхность образована из одномерных плоских образующих. Вырожденная гиперполоса $N(\Gamma_2)$ характеризуется тем, что $rang\,\|b^0_{ij}\|=1$.

Как известно [I], в базисном многообразии B_2 гиперполосы $N(\Gamma_2)$ существует система координат, в которой выполняются условия:

$$b^0_{1ij_2} = 0 \quad (i,j,k,\ell = 1,2). \qquad (1.1)$$
$$(i_1, j_1, k_1, \ell_1 = 1;\ i_2, j_2 = 2),$$

Всякая система координат, удовлетворяющая этим условиям, называется канонической.

Очевидно, что в любой канонической системе координат

$$b^0_{1i_1 j_1} \neq 0. \qquad (1.2)$$

При переходе от одной канонической системы к другой имеем:

$$b_{ij_2} = b_{i'_1 j'_1} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_2}}. \qquad (1.3)$$

Из (I.3) получаем

$$\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_2}} = 0. \qquad (1.4)$$

Таким образом, формулы преобразования канонических систем координат базисного многообразия B_2 имеют вид:

$$x^{1'} = x^{1'}(x^1), \qquad (1.5)$$
$$x^{2'} = x^{2'}(x^1, x^2).$$

Обратные формулы имеют аналогичный вид:

$$x^1 = x^1(x^{1'}), \qquad (1.6)$$
$$x^2 = x^2(x^{1'}, x^{2'}).$$

В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые системы координат многообразия B_2 -канонические.

Выбор канонической координатной системы на B_2 геометрически означает, что плоская образующая гиперполосы $N(\Gamma_2)$, проходящая через точку (x^1_0, x^2_0), задается уравнением

$M_1^\alpha = M_1^\alpha(x_0^1, x^2)$. Отсюда вытекает, что линейно независимые точки M_1^α и M_{1/i_2}^α принадлежат плоской образующей, проходящей через M_1^α, и полностью её определяют.

Для вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ компоненты $\Gamma_{i_2 j}^{k_1}$ образуют геометрический объект и преобразуются по закону:

$$\Gamma_{i_2' j'}^{k_1'} = \Gamma_{i_2 j}^{k_1} \frac{\partial x^{k_1'}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i_2'}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} .$$

Отсюда следует, что если компоненты $\Gamma_{i_2 j}^{k_1}$ равны нулю в одной канонической системе координат, то они равны нулю и в любой другой канонической системе координат.

О п р е д е л е н и е I. Связность Γ_{ij}^{k} базисного многообразия B_2, для которой

$$\Gamma_{i_2 j}^{k_1} = 0 \qquad (1.7)$$

в любой канонической системе координат, называется κ-связностью.

Имеет место теорема:

Т е о р е м а I. Для всякой вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ существует оснащение, индуцирующее на базисной поверхности B_2 гиперполосы $N(\Gamma_2)$ κ-связность [2], [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что в любой канонической системе координат $b_{1ij_2}^0 = 0$, находим, что

$$b_{1ij/\kappa_2}^0 = -\Gamma_{\kappa_2 j}^{k} \cdot b_{1ki}^0 . \qquad (1.8)$$

При $i = j = 1$ получим

$$b_{111/\kappa_2}^0 = -\Gamma_{\kappa_2 1}^{k} b_{1k1}^0 = -\Gamma_{\kappa_2 1}^{1} b_{111}^0$$

или

$$b_{1ij/\kappa_2}^0 = \varphi_2 b_{1ij}^0 .$$

Из [3] следует, что существует оснащение вырожденной гиперполосы, индуцирующее на базисной поверхности B_2 – κ-связность Γ_{ij}^{k}.

О п р е д е л е н и е 2. Гиперполоса $N(\Gamma_2)$, вложенная в проективное пространство P_n, называется развертывающейся гиперполосой, если базисная поверхность B_2 гиперполосы состоит из одномерных плоских образующих, вдоль каждой из которых касательная двумерная плоскость постоянна.

В работе [3] доказано, что условия

$$b_{1ij_2}^{\lambda} = 0 , \quad n_{0j_2}^{\lambda} = 0 \qquad (1.9)$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы гиперполоса $N(\Gamma_m)$ в P_n $(n > m > 1)$ была развертывающейся.

Легко показать, что если оснащение развертывающейся гиперполосы Γ_2 индуцирует на B_2 κ-связность, то имеют место равенства

$$b_{1ij/\kappa_2}^0 = 0, \qquad (1.10)$$

$$b_{1ij/\kappa_2}^{\lambda} = 0 . \qquad (1.11)$$

Т е о р е м а 2. Для оснащенной развертывающейся гиперполосы Γ_2 соприкасающаяся плоскость вдоль плоских образующих постоянна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть на базисной поверхности гиперполосы $N(\Gamma_2)$ параметризация выбрана так, что $x^{i_1} = x_0^{i_1}$

есть уравнение плоской образующей.

Из основных уравнений [3] гиперполосы $N(\Gamma_2)$ для тензора M^α_{1/ijk_2} получим следующее выражение:

$$M^\alpha_{1/ijk_2} = \rho_{ij/k_2} M^\alpha_1 + \rho_{ij} M^\alpha_{1/k_2} + b^o_{1ij/k_2} X^\alpha_o +$$
$$+ b^\lambda_{1ij/k_2} X^\alpha_\lambda + b^o_{1ij}(m^1_{ok_2} M^\alpha_1 + n^\lambda_{ok_2} X^\alpha_\lambda + m^{1h}_{ok_2} M^\alpha_{1/h}) +$$
$$+ b^\lambda_{1ij}(m^1_{\lambda k_2} M^\alpha_1 + m^{1h}_{\lambda k_2} M^\alpha_{1/h}). \qquad (1.12)$$

Учитывая (I.9)-(I.II), равенство (I.I2) преобразуем к виду:

$$M^\alpha_{1/ijk_2} = (\rho_{ij/k_2} + b^o_{1ij} m^1_{ok_2} + b^\lambda_{1ij} m^1_{\lambda k_2}) M^\alpha_1 +$$
$$+ (\delta^h_{k_2} \rho_{ij} + b^o_{1ij} m^{1h}_{ok_2} + b^\lambda_{1ij} m^{1h}_{\lambda k_2}) M^\alpha_{1/i}.$$

Полученное соотношение и показывает, что вдоль плоских образующих соприкасающаяся плоскость постоянна.

Л е м м а I. Если оснащенная развертывающаяся гиперполоса Γ_2 индуцирует на базисной поверхности B_2 к-связность Γ^h_{ij}, то тензор $b^\lambda_{1ij/k}$ является к-тензором типа $\binom{0}{1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. леммы следует из соотношений (I.II), (I.I2) и соотношения

$$b^\lambda_{1k_2 j/h} = 0.$$

Л е м м а 2. Для развертывающейся гиперполосы $N(\Gamma_2)$ существует такое оснащение, при котором для тензора $b^\lambda_{1ij/k}$ выполняется условие

$$b^\lambda_{1ij/k_2} = \varphi_2 b^\lambda_{1ij}, \qquad (1.13)$$

где φ_2 -подтензор некоторого ковариантного вектора в B_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При переходе от одного оснащения к другому тензор $b^\lambda_{1ij/k}$ преобразуется по закону:

$$b^\lambda_{1ij//k} = b^\lambda_{1ij/k} - h_i b^\lambda_{1kj} + b^o_{1ik} b^\lambda_{1h_j} \psi^{1h}_o -$$
$$- h_j b^\lambda_{1ik} - h_k b^\lambda_{1ij} + b^o_{1jk} \psi^{1h}_o b^\lambda_{1hi}.$$

При $k = k_2$, в силу (I.9) и (I.I), имеем:

$$b^\lambda_{1ij//k_2} = b^\lambda_{1ij/k_2} - h_{k_2} b^\lambda_{1ij}.$$

Последнее соотношение показывает, что равенства

$$b^\lambda_{1ij//k_2} = 0 \quad \text{и} \quad b^\lambda_{1ij/k_2} = h_{k_2} b^\lambda_{1ij} \qquad (1.14)$$

эквивалентны. Из леммы I и соотношений (I.I4) вытекает справедливость сформулированного предложения.

Л е м м а 3. Для всякой развертывающейся гиперполосы имеет место равенство

$$b^\lambda_{1ki} u^i = 0, \qquad (1.15)$$

где u^i -тензор типа $\binom{1}{0}$.

Равенство (I.I5) выполняется в силу соотношения (I.9). Среди развертывающихся гиперполос $N(\Gamma_2)$ выделим класс конических гиперполос.

О п р е д е л е н и е 3. Развертывающаяся гиперполоса $N(\Gamma_2)$ называется конической, если плоские образующие базисной поверхности B_2 имеют общую точку (вершину гиперполосы).

Конические развертывающиеся гиперполосы $N(\Gamma_2)$ характеризуются следующим признаком:

Т е о р е м а 3. Для того,чтобы развертывающаяся гиперполоса $N(\Gamma_2)$ была конической,необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\rho_{i_2 j} = 0. \qquad (1.16)$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть развертывающаяся гиперполоса $N(\Gamma_2)$ является конической,то есть все её плоские образующие проходят через общую точку K_1^α (вершину гиперполосы).Так как точка K_1^α постоянна,то выполняется условие:

$$K^\alpha_{1/\kappa} = \gamma_\kappa K_1^\alpha. \qquad (1.17)$$

Кроме того,точка K_1^α принадлежит прямолинейной образующей,то есть

$$K_1^\alpha = V^{i_2} M^\alpha_{1/i_2} + W M_1^\alpha$$

или, в силу леммы 3,

$$K_1^\alpha = V^i M^\alpha_{1/i} + W M_1^\alpha, \qquad (1.18)$$

где V^i -линейно независимый К-вектор.Дифференцируя (1.18),находим,что

$$K^\alpha_{1/j} = V^i_{/j} M^\alpha_{1/i} + V^i M^\alpha_{1/ij} + W_{/j} M_1^\alpha + W M^\alpha_{1/j}. \qquad (1.19)$$

Используя основные уравнения гиперполосы ([2],Стр.28) и

соотношения (1.17),(1.18),приходим к уравнению

$$M^\alpha_{1/i}\,(V^i_{/j} + \delta^i_j W - \gamma_j V^i) + M_1^\alpha\,(V^i \rho_{ij} + W_{/j} - \gamma_j W) = 0.$$

Так как точки M_1^α и $M^\alpha_{1/i}$ линейно независимы,то

$$V^{i_1}_{/j} + \delta^{i_1}_j W - \gamma_j V^{i_1} = 0, \qquad (1.20)$$

$$V^i \rho_{ij} + W_{/j} - \gamma_j W = 0. \qquad (1.21)$$

В силу леммы 1.2 [2] из (1.20) находим,что $W=0$.Подставим это значение W в (1.21),тогда

$$V^i \rho_{ij} = 0,$$

или

$$\rho_{i_2 j} = 0. \qquad (1.22)$$

Д о с т а т о ч н о с т ь.Введем в рассмотрение точку

$$K_1^\alpha = V^i M^\alpha_{1/i}, \qquad (1.23)$$

где V^i- линейно независимый К-вектор,и покажем,что эта точка неподвижна.Продифференцируем (1.23) и,учитывая (1.9) и (1.3)[2],получим

$$K^\alpha_{1/j} = V^i_{/j} M^\alpha_{1/i} + V^i \rho_{ij} M_1^\alpha. \qquad (1.24)$$

Так как по условию $\rho_{i_2 j}=0$,то

$$\rho_{ij} V^i = 0 \qquad (1.25)$$

и,кроме того,

$$V^i_{/j} = \theta_j V^i \qquad (1.26)$$

Тогда равенство (I.24) перепишется в виде:

$$K^{\alpha}_{1/j} = v^{i}_{/j} M^{\alpha}_{1/i} = b_j v^i M^{\alpha}_{1/i} = b_j K^{\alpha}_{1},$$

то есть K^{α}_{1} есть неподвижная точка.

§2. Специальные оснащения гиперполосы $N(\Gamma_2)$ и специальные связности.

I. К-оснащение вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$.

Рассмотрим симметрический тензор b^{ijk}_{0} определяемый соотношением:

$$b^{0}_{1ij}\, b^{ijk}_{0} = \Delta^{k}_{i}, \qquad (2.1)$$

где Δ^{k}_{i} к-тензор типа $\binom{0}{1}$, характеризующийся условиями:

$$\Delta^{k}_{i_2} = 0,\quad \Delta^{k_1}_{i_1} = \delta^{k_1}_{i_1} = 1,\quad \Delta^{k_2}_{i_1} - \qquad (2.2)$$

-произвольная функция от x^i.

Из (2.I) и (2.2) следует, что компоненты b^{ijk}_{0} определяются однозначно, если задан тензор Δ^{k}_{i}, компонента $b^{ij_2k_2}_{0}$ — произвольная, а $b^{ij_1k}_{0}$ — не зависит от выбора Δ^{k}_{i}.

О п р е д е л е н и е 4. Оснащение вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$, индуцирующее ковариантный к-вектор $K_i = \frac{1}{3} b^{0}_{1ij/k} b^{ijk}_{0}$ (компонента $K_{i_2}=0$), называется К-оснащением.

Можно показать, что:

I/ На всякой вырожденной гиперполосе $N(\Gamma_2)$ существует К-оснащение.

2/ Для того, чтобы данное оснащение вырожденной гиперполосы было К-оснащением, необходимо и достаточно, чтобы индуцированная им связность Γ^{k}_{ij} удовлетворяла условию:

$$\Gamma^{j_1}_{i_2 j_1} = 0 \qquad (2.3)$$

Т е о р е м а 4. Для развертывающейся гиперполосы $N(\Gamma_2)$ все характеристические точки, соответствующие точкам одной и той же плоской образующей (рассматриваемой области базисной поверхности гиперполосы $N(\Gamma_2)$) совпадают между собой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для развертывающейся гиперполосы

$$p_{i_2k_2} = 0. \qquad (2.4)$$

При $i = i_2,\ j = j_2$ тензор $M^{\alpha}_{1,ij}$ примет вид:

$$M^{\alpha}_{1/i_2j_2} = p_{i_2j_2} M^{\alpha}_{1} + b^{\lambda}_{1i_2j_2} X^{\alpha}_{\lambda} + b^{0}_{1i_2j_2} X^{\alpha}_{0}$$

В силу соотношений (2.4),(I.9),(I.I), получим

$$M^{\alpha}_{1/i_2j_2} = 0.$$

С другой стороны

$$M^{\alpha}_{1/i_2j_2} = M^{\alpha}_{1/i_2,j_2} - \Gamma^{1}_{1j_2} M^{\alpha}_{1/i_2} - \Gamma^{k_2}_{i_2j_2} M^{\alpha}_{1/k_2}$$

или

$$M^{\alpha}_{1/i_2,j_2} = (\Gamma^{1}_{1j_2}\delta^{k_2}_{i_2} - \Gamma^{k_2}_{i_2j_2}) M^{\alpha}_{1/k_2}.$$

Это соотношение и показывает, что вдоль плоской образующей характеристическая точка одна и та же.

Т е о р е м а 5. Вершина конической развертывающейся гиперполосы $N(\Gamma_2)$ является характеристической точкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка K^{α}_{1} определяет вершину гиперполосы $N(\Gamma_2)$, то есть

$$K^{\alpha}_{1/k} = \gamma_k K^{\alpha}_1. \qquad (2.5)$$

С другой стороны

$$K^{\alpha}_1 = \lambda M^{\alpha}_1 + u^i M^{\alpha}_{1/i}, \qquad (2.6)$$

где u^i -линейно независимый k-вектор. Продифференцируем (2.6) и, учитывая (I.I5), получим

$$M^{\alpha}_1(\gamma_j \lambda - \lambda_{/j} - u^i p_{ij}) + M^{\alpha}_{1/j}(\gamma_j u^j - \lambda \delta^i_j - u^i_{/j}) = 0. \qquad (2.7)$$

Так как точки M^{α}_1 и $M^{\alpha}_{1/j}$ линейно независимы, то из соотношения (2.7) имеем:

$$\gamma_j \lambda - \lambda_{/j} - u^i p_{ij} = 0, \qquad (2.8)$$

$$\gamma_j u^j - \lambda \delta^i_j - u^i_{/j} = 0. \qquad (2.9)$$

Продифференцируем (I.I5) и подставим значение $u^i_{/j}$ из (2.9), приходим к выводу

$$b^{0}_{1ij/k} u^i = \lambda b^{0}_{1kj}. \qquad (2.10)$$

Умножим это равенство на $\frac{1}{3} b^{1kj}_0$ и свернем по k и j:

$$K_i u^i = \lambda.$$

Отсюда, при K-оснащении $(K_{i_2} = 0)$ находим, что

$$\lambda = 0.$$

Подставляем $\lambda = 0$ в (2.6), тогда

$$K^{\alpha}_1 = u^i M^{\alpha}_{1/i} = u^{i_1} M^{\alpha}_{1/i_1} + u^{i_2} M^{\alpha}_{1/i_2} = u^{i_2} M^{\alpha}_{1/i_2},$$

то есть вершина совпадает с характеристической точкой.

2°. Полувнутреннее оснащение вырожденной гиперполосы

О п р е д е л е н и е 5. Оснащение, для которого вектор K_i равен нулю, называется полувнутренним оснащением вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$.

I) Легко показать, что для всякой вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ существует полувнутреннее оснащение.

2) Тензор $b^{0}_{1ij/k}$ есть инвариант полувнутренних оснащений.

3) Для того, чтобы оснащение вырожденной двумерной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ было полувнутренним, необходимо и достаточно, чтобы это оснащение индуцировало нулевой тензор $b^{0}_{1ij/k}$.

3. Проективно-евклидова связность оснащенной гиперполосы $N(\Gamma_2)$.

О п р е д е л е н и е 6. Оснащение гиперполосы $N(\Gamma_2)$ называется центрально-вынужденным осевым, если оно является одновременно центральным и вынужденным осевым.

Т е о р е м а 6. Какова бы ни была гиперполоса $N(\Gamma_2)$, имеющая центрально-вынужденное осевое оснащение, в базисном многообразии гиперполосы $N(\Gamma_2)$ индуцируется проективно-евклидова связность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тензор кривизны при центрально-вынужденном оснащении имеет вид:

$$R^{k}_{ijk} = -\delta^{k}_{i} p_{\underline{j}\underline{k}} + p_{i\underline{j}} \delta^{k}_{\underline{k}} + b^{1}_{0} b^{0}_{1i\underline{j}} \delta^{k}_{\underline{k}} + b^{1}_{\lambda} b^{\lambda}_{1i\underline{j}} \delta^{k}_{\underline{k}}$$

или

$$R^h_{ijk} = \delta^h_i\, q_{j\underline{k}} - q_{i\underline{j}}\, \delta^h_{\underline{k}},$$

где

$$q_{ij} = -p_{ij} - b^1_\lambda\, b^\lambda_{1ij} - b^1_0\, b^0_{1ij}.$$

Дифференцируя q_{ij} и учитывая, что $b^1_{0/i} = m^1_{0i}$, $b^1_{\lambda/i} = m^1_{\lambda i}$, имеем

$$q_{ij/k} = -p_{ij/k} - b^1_\lambda\, b^\lambda_{1ij/k} - m^1_{\lambda k}\, b^\lambda_{1ij} - b^1_0\, b^0_{1ij/k} - m^1_{0k}\, b^0_{1ij}. \qquad (2.11)$$

Проальтернируем соотношение (2.II) по j и k, получим

$$q_{i\underline{j}/\underline{k}} = 0.$$

Т е о р е м а 7. Пусть дана вырожденная гиперполоса $N(\Gamma_2)$, вложенная в проективное пространство P_3. Если оснащающие прямые взять так, чтобы они вдоль каждой плоской образующей проходили через одну точку, то связность, индуцированная этим оснащением будет проективно-евклидовой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ в проективном пространстве P_3 характеристические плоскости нульмерны, как это непосредственно следует из определения характеристической плоскости гиперполосы. Тензор кривизны принимает вид:

$$R^h_{ijk} + \delta^h_i R^1_{1jk} = p_{i\underline{j}}\, \delta^h_{\underline{k}} + b^0_{1i\underline{j}}\, m^{1h}_{0\underline{k}}. \qquad (2.12)$$

так как по условию вдоль каждой плоской образующей $x^1 = x^1_0$

оснащение центральное, то в силу теоремы [6] тензор кривизны R^h_{ijk} преобразуется к следующему виду:

$$R^h_{ijk} = \delta^h_i\, q_{j\underline{k}} - q_{i\underline{j}}\, \delta^h_{\underline{k}}, \qquad (2.12')$$

где

$$q_{ij} = -p_{ij} - b^1_0\, b^0_{1ij}. \qquad (2.13)$$

Остается показать, что $q_{i\underline{j}/\underline{k}_2} = 0$.

Продифференцируем (2.I3) и учитывая, что $b^1_{0/k_2} = m^1_{0k_2}$, имеем

$$q_{ij/k_2} = -p_{ij,k_2} - m^1_{0k_2}\, b^0_{1ij}. \qquad (2.14)$$

Наконец, альтернируя (2.14) по j и k_2, получим

$$q_{i\underline{j}/\underline{k}_2} = 0.$$

Легко устанавливаются следующие результаты:

Т е о р е м а I0. Если вырожденная гиперполоса $N(\Gamma_2)$ допускает центральное оснащение, то данная поверхность является развертывающейся.

Т е о р е м а II. Если вырожденная гиперполоса $N(\Gamma_2)$ допускает аффинно-центральное оснащение, то данная поверхность есть коническая.

Л и т е р а т у р а

I. Атанасян Л.С., Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве. "Тр. семинара по вект. и тенз. анализу", т.9, 35I-4I0.

2. Атанасян Л.С., Воронцова Н.С., Построение инвариантного оснащения τ-вырожденной гиперповерхности многомерного

проективного пространства. "Уч.зап. МГПИ им.В.И.Ленина", 1965, 243, 5-28.

3. Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n. "Тр. Калининградского ун-та. Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. I, 1970, 27-46.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Свешникова Г.Л.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется расслояемая пара $(C_1, C_2)[I]$ конгруэнций $(C_1), (C_2)$ кривых второго порядка (коник), не лежащих в одной плоскости, не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей и имеющих вырождающиеся в линии фокальные поверхности.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4), \qquad (1)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (2)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \qquad (3)$$

Поместим вершину A_i $(i,j,k = 1,2;\ i \neq j)$ репера R в одну из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ $(A_1 \neq A_2)$.

вершины A_3 и A_4 – в полюсы прямой ℓ относительно коник C_1 и C_2.

Уравнения коник C_1 и C_2 относительно репера R (при соответствующей нормировке вершин A_α) имеют вид:

$$(x^3)^2-(a_1x^1)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0, \tag{4}$$

$$(x^4)^2-(a_2x^2)^2-2x^1x^2=0,\quad x^3=0, \tag{5}$$

Так как плоскости коник C_1, C_2 образуют двупараметрическое семейство, то ранг каждой из систем форм $\{\omega_1^4,\omega_2^4,\omega_3^4\}$, $\{\omega_1^3,\omega_2^3,\omega_4^3\}$ должен равняться двум. Пусть

$$\omega_1^4\wedge\omega_2^4\neq0,\quad \omega_1^3\wedge\omega_2^3\neq0. \tag{6}$$

Обозначим

$$\omega_i^4=\omega_i. \tag{7}$$

Система уравнений Пфаффа пары (C_1, C_2) запишется в виде:

$$\begin{gathered}\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\\ \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\\ \theta_i\equiv da_i-a_i(\omega_i^i-\omega_{i+2}^{i+2})=A_i^k\omega_k,\\ \Omega_i\equiv\omega_i^i+\omega_j^j-2\omega_{i+2}^{i+2}=b_i^k\omega_k.\end{gathered} \tag{8}$$

О п р е д е л е н и е. Пара (C_1,C_2) называется парой Φ, если 1) поверхности (A_i) вырождаются в линии, касательные к которым пересекают прямую A_3A_4, 2) поверхности (A_3)

и (A_4) являются невырождающимися огибающими поверхностями плоскостей коник, 3) существуют односторонние расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) [1].

Легко показать, что если точка A_i принадлежит конике и поверхность (A_i) вырождается в линию, то поверхность (A_i) является фокальной поверхностью конгруэнции коник.

Из определения пары Φ видно, что она является расслояемой парой конгруэнций коник с вырождающимися фокальными поверхностями.

§1. Теорема существования пар Φ.

Т е о р е м а 1.1. Существуют два класса пар Φ: пары Φ_0, определяемые вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа, и пары Φ_1, определяемые с произволом одной функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая условия 1) и 2) определения пары Φ, получаем:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_3^4=0,\quad \omega_4^3=0,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3i}\omega_i. \tag{1.1}$$

Односторонние расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) для пар Φ характеризуются квадратичными уравнениями:

$$\omega_2^3\wedge\omega_3^1+\omega_2\wedge\omega_4^1=0,\quad \Omega_1\wedge\omega_3^1=0, \tag{1.2}$$

$$2\omega_3^1\wedge\omega_3^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^1+\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2-\omega_2\wedge\omega_4^2=0,$$

$$\Omega_1\wedge\omega_3^2+a_1\theta_1\wedge\omega_3^1=0,\quad a_1\theta_1\wedge\omega_3^2=0,$$
$$\omega_1\wedge\omega_4^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^2=0,\quad \Omega_2\wedge\omega_4^2=0,$$
$$\Omega_2\wedge\omega_4^1+a_2\theta_2\wedge\omega_4^2=0,\quad a_2\theta_2\wedge\omega_4^1=0, \tag{1.2}$$
$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2-\omega_4^1\wedge\omega_4^2=0,$$
$$a_1\omega_3^1\wedge\omega_3^2=0,\qquad a_2\omega_4^1\wedge\omega_4^2=0.$$

Так как поверхности (A_3) и (A_4) не вырождаются, то

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2\neq 0,\quad \omega_4^1\wedge\omega_4^2\neq 0. \tag{1.3}$$

Тогда из двух последних уравнений системы (I.2) следует:

$$a_1=a_2=0, \tag{1.4}$$

а из уравнений

$$\Omega_1\wedge\omega_3^1=0,\quad \Omega_1\wedge\omega_3^2=0,$$
$$\Omega_2\wedge\omega_4^1=0,\quad \Omega_2\wedge\omega_4^2=0,$$

получаем

$$\Omega_1=0\ ,\quad \Omega_2=0. \tag{1.5}$$

Система конечных и пфаффовых уравнений пары Φ приводится к виду

$$\Gamma_3^{12}-\Gamma_3^{21}=0,\quad \Gamma_4^{12}-\Gamma_4^{21}=0,\quad \Gamma_4^{ii}+\Gamma_3^{ii}\Gamma_j^{3j}=0,$$
$$\Gamma_1^{31}-\Gamma_2^{32}=0,\quad m+\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}+\Gamma_4^{12}=0, \tag{1.6}$$
$$1-(\Gamma_1^{31})^2+m+2\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}=0,$$

где

$$m=\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}\neq 0,$$
$$\Gamma_3^{12}\neq 0,\ \Gamma_4^{12}\neq 0. \tag{1.7}$$

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_3^4=\omega_4^3=0,\quad \omega_i^i+\omega_j^j-2\omega_{i+2}^{i+2}=0,$$
$$\omega_i^3=\Gamma_i^{3i}\omega_i,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k. \tag{1.8}$$

Обозначим:

$$\Gamma_1^{31}=\alpha,\ \Gamma_3^{11}=a,\ \Gamma_3^{12}=b,\ \Gamma_3^{22}=c. \tag{1.9}$$

Тогда систему (I.8),(I.6) можно записать в виде:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_3^4=\omega_4^3=\omega_3^3=\omega_4^4=0,\quad \omega_1^1+\omega_2^2=0,$$
$$\omega_i^3=\alpha\omega_i\ ,\quad \omega_3^1=a\omega_1+b\omega_2\ ,\quad \omega_3^2=b\omega_1+c\omega_2\ , \tag{1.10}$$
$$\omega_4^i=-\alpha\omega_3^i-m\omega_j\ ,$$

причем

$$m=ac-b^2, \tag{1.11}$$

$$1-\alpha^2+m+2\alpha b=0. \tag{1.12}$$

Продолжая систему

$$\omega_i^3=\alpha\omega_i\ ,\quad \omega_4^i=-\alpha\omega_3^i-m\omega_j,$$

получаем

$$d\alpha=0,\quad dm=0. \tag{1.13}$$

Дифференцируя внешним образом конечное соотношение (1.12) и учитывая (6), находим

$$d\ell = 0. \tag{1.14}$$

Если a и c одновременно равны нулю, то получаем класс пар Φ_0, определяемый вполне интегрируемой системой.

Если a и c одновременно нулю не равны, получаем класс пар Φ_1, определяемый с произволом одной функции одного аргумента.

Матрица компонент деривационных формул репера R для пар Φ_0 имеет вид

$$\begin{bmatrix} \omega_1^1 & 0 & (\ell+\varepsilon)\omega_1 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_1^1 & (\ell+\varepsilon)\omega_2 & \omega_2 \\ \ell\omega_2 & \ell\omega_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon\ell\omega_2 & -\varepsilon\ell\omega_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.15}$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

§2. Геометрические свойства пар Φ_0.

Т е о р е м а 2.1. Коники C_1 и C_2 пары Φ_0 пересекаются в точках A_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения (4), (5) коник C_1, C_2 в силу (1.4) имеют вид:

$$(x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0, \ x^4 = 0. \tag{2.1}$$

$$(x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0, \ x^3 = 0. \tag{2.2}$$

Точки A_i принадлежат одновременно коникам C_1 и C_2.

Т е о р е м а 2.2. Совокупность прямых A_3A_4 пары Φ_0 является связкой прямых с центром в точке F,

$$F = A_3 + \varepsilon A_4. \tag{2.3}$$

Все коники конгруэнций (C_1), (C_2) пары Φ_0 принадлежат конусу

$$Q \equiv 2x^1x^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 + 2\varepsilon x^3x^4 = 0 \tag{2.4}$$

с вершиной в точке F [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Семейство прямых A_3A_4 является двупараметрическим, все прямые этого семейства проходят через неподвижную точку F.

Коники C_1, C_2 принадлежат конусу Q. С помощью матрицы (1.15) деривационных формул репера пары Φ_0 убеждаемся, что конус (2.4) инвариантный.

Т е о р е м а 2.3. Существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) пары Φ_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадратичные уравнения

$$\omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^k \wedge \omega_k = 0,$$

$$\omega_3^k \wedge \omega_k^3 - \omega_4^k \wedge \omega_k = 0,$$

характеризующие одностороннее расслоение от конгруэнции (A_3A_4) к конгруэнции (A_1A_2) [2], в силу (1.15) обращаются в тождества.

Т е о р е м а 2.4. Линии (A_1) и (A_2) пары Φ_0 являются плоскими линиями. Касательные к линиям (A_i) пересекаются в точке

$$B = (b+\varepsilon)A_3 + A_4. \qquad (2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_i B, \quad dB = b^2(\omega_2 A_1 + \omega_1 A_2), \qquad (2.6)$$

то для любого $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$(d^n A_i, A_1, A_2, B) = 0, \qquad (2.7)$$

что и доказывает теорему.

Обозначим через B^* точку, гармонически сопряженную точке B относительно A_3 и A_4. Имеем:

$$B^* = (b+\varepsilon)A_3 - A_4. \qquad (2.8)$$

Т е о р е м а 2.5. Поверхность (B) является плоскостью, инцидентной прямой A_1A_2. Поверхность (B^*) является невырожденной инвариантной квадрикой

$$b(b+\varepsilon)^2 x^1x^2 - b(3b+4\varepsilon)(x^3)^2 -$$
$$- 2b^2(b+\varepsilon)x^3x^4 + b(b+4\varepsilon)(b+\varepsilon)^2(x^4)^2 = 0. \qquad (2.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как уравнение для определения асимптотических линий поверхности (B) тождественно удовлетворяется, то поверхность (B) суть плоскость. В силу (2.6) эта плоскость инцидентна прямой A_1A_2.

Точка B^* лежит на квадрике (2.9). Дифференцируя (2.9) с помощью уравнений стационарности точки:

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha + \theta x^\alpha, \qquad (2.10)$$

убеждаемся, что (B^*) - инвариантная квадрика.

Т е о р е м а 2.6. Асимптотические линии на поверхностях (A_3) и (A_4) соответствуют. Каждая из поверхностей (A_3) и (A_4) является невырожденной инвариантной квадрикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Асимптотические линии поверхностей (A_3) и (A_4) определяются одним уравнением

$$\omega_1\omega_2 = 0 \qquad (2.11)$$

Значит, они соответствуют. Точки A_3 и A_4 лежат соответственно на квадриках

$$2x^1x^2 - 2bx^3x^4 + b(b+2\varepsilon)(x^4)^2 = 0, \qquad (2.12)$$

$$2(b+\varepsilon)^2x^1x^2 - b(b+2\varepsilon)(x^3)^2 + 2\varepsilon b(b+\varepsilon)x^3x^4 = 0. \qquad (2.13)$$

Дифференцируя (2.12) и (2.13) с помощью уравнений (2.10) убеждаемся, что (A_3) и (A_4) являются инвариантными квадриками.

Т е о р е м а 2.7. Квадрики (A_3) и (B^*) пересекают плоскость $x^3 = 0$ по коникам, касающимся коники C_2 в точках A_1, A_2. Квадрики (A_4) и (B^*) пересекают плоскость $x^4 = 0$ по коникам, касающимся коники C_1 в точках A_1, A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пересечении квадрики (A_3) соответственно B^*, плоскостью $x^3 = 0$ получаем коники

$$2x^1x^2 + b(b+2\varepsilon)(x^4)^2 = 0, \; x^3 = 0, \qquad (2.14)$$

$$b x^1 x^2 + b(b+4\varepsilon)(x^4)^2 = 0,\ x^3 = 0. \qquad (2.15)$$

В пересечении квадрики (A_4), соответственно (B^*), плоскостью $x^4 = 0$ получаем коники

$$2(b+\varepsilon)^2 x^1 x^2 - b(b+2\varepsilon)(x^3)^2 = 0,\ x^4 = 0, \qquad (2.16)$$

$$b(b+\varepsilon)^2 x^1 x^2 - b(3b+4\varepsilon)(x^3)^2 = 0,\ x^4 = 0. \qquad (2.17)$$

Из уравнений этих коник видно, что они касаются соответственно коник C_2 и C_1 в точках A_1 и A_2.

Литература

1. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Труды геометрического семинара, т.3, 1971.

2. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций, 1956. ГИТТЛ, М.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4. 1974

Скрыдлова Е.В.

КОНГРУЭНЦИИ $(CP)_{2,1}$.

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются конгруэнции $(CP)_{2,1}$ - вырожденные конгруэнции [1] пар фигур, коник C и точек P, в которых многообразие коник C является двупараметрическим (конгруэнцией), а многообразие точек P — однопараметрическим (линией). Предполагается, что плоскости коник C также образуют конгруэнцию. Выделены два типа конгруэнций $(CP)_{2,1}$, для каждого из которых построен геометрически фиксированный репер. Исследованы некоторые частные классы конгруэнций $(CP)_{2,1}$.

§1. Репер конгруэнции $(CP)_{2,1}$.

Каждой конике C конгруэнции $(CP)_{2,1}$ соответствует единственная точка P линии (P), с другой стороны, каждой точке P ставится в соответствие однопараметрическое семейство коник C. Пусть $\mathcal{L}_P$ - характеристика семейства плоскостей этих коник.

Конгруэнции $(CP)_{2,1}$ назовем конгруэнциями типа I или II в зависимости от того, пересекает ли прямая $\mathcal{L}_P$ соответствующую ей конику C или касается её.

Построим репер конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа I. Выберем некоторую конику C и соответствующую ей точку P. Вершину A_4 аналитического тетраэдра $(A_1A_2A_3A_4)$ совместим с P, A_3 поместим в полюс прямой относительно коники C; A_1, A_2 - в точки пересечения прямой $\mathcal{L}_P$ с коникой.

В репере конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа II вершина A_4 является точкой P, вершина A_1 — точкой касания характеристики $\mathcal{L}_P$ с исходной коникой C, A_2 - произвольным фокусом коники C, A_3 — полюсом прямой A_1A_2 относительно этой коники.

Имеем:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4) \tag{1}$$

где ω_α^β - формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{3}$$

Уравнения коники C относительно построенных реперов с учетом соответствующей нормировки имеют вид:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \; x^4 = 0. \tag{4}$$

§2. Конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа I.

Исключая случай пересечения касательной к линии (P) в точке P с характеристикой $\mathcal{L}_P$ можно принять формы

$$\omega_4^3 = \omega_1, \quad \omega_3^4 = \omega_2 \tag{5}$$

в качестве базисных форм данной конгруэнции. Тогда система пфаффовых уравнений конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа I в построенном репере будет иметь вид:

$$\begin{gathered} \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_i^4 = b_i\omega_1, \\ \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \quad \omega_4^i = a^i\omega_1, \; 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = c^k\omega_k. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем $i, j, k = 1,2$; $i \neq j$ и суммирование по индексам i, j не производится.

Из (6) следует, что конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа I определяются с произволом семи функций двух аргументов.

Т е о р е м а I. Прямолинейные конгруэнции $(\mathcal{L}_P)$, (A_iA_4), (A_3A_4), ассоциированные с конгруэнциями $(CP)_{2,1}$ типа I имеют по одному семейству соответствующих торсов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы этих прямолинейных конгруэнций определяются соответственно уравнениями

$$\omega_1(b_2\omega_1^3 - b_1\omega_2^3) = 0,$$

$$\omega_1(\omega_i^j - a^j\omega_i^3) = 0,$$

$$\omega_1(a^2\omega_3^1 - a^2\omega_3^2) = 0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Рассмотрим задачу расслоения от конгруэнции коник C к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) с одновременным расслоением прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) в направлении от (A_3A_4) к (A_1A_2). Аналитически такие расслоения характеризуются формулами:

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_1^{32}-\Gamma_3^{12}\Gamma_1^{31}+\Gamma_3^{21}\Gamma_2^{32}-\Gamma_3^{22}\Gamma_2^{31}=0,$$

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_2^{12}-\Gamma_3^{12}\Gamma_2^{11},\quad \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{12}-\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{11}=0,$$

$$c^1\Gamma_3^{12}-c^2\Gamma_3^{11}-2a^1-\Gamma_3^{21}\Gamma_2^{12}+\Gamma_3^{22}\Gamma_2^{11}=0,$$

$$\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}-\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11}-\Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22}+\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21}+2(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21})=0. \qquad (7)$$

$$c^1\Gamma_3^{22}-c^2\Gamma_3^{21}-2a^1-\Gamma_3^{11}\Gamma_1^{22}+\Gamma_3^{12}\Gamma_1^{21}=0,$$

$$\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{22}-\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{21}=0,\quad \Gamma_1^{21}\Gamma_3^{22}-\Gamma_1^{22}\Gamma_3^{21}=0,$$

$$a^1\Gamma_1^{32}+a^2\Gamma_2^{32}=0,\qquad b_1\Gamma_3^{12}+b_2\Gamma_3^{22}=0.$$

Т е о р е м а 2. Существует только два проективно неэквивалентных класса расслояемых конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа I -конгруэнции A, определяемые с произволом одной функции двух аргументов и конгруэнции B, определяемые с произволом девяти функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие невырождения прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) в линейчатую поверхность имеет вид:

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix}\Gamma_3^{11} & \Gamma_3^{21} & a^1 & a^2\\ \Gamma_3^{12} & \Gamma_3^{22} & 0 & 0\end{Vmatrix}=2 \qquad (8)$$

Учитывая (8), исследование системы (7) удобно проводить отдельно в каждом из четырех случаев

1) $\omega_3^1=0,\ \omega_3^2\neq 0$; 2) $\omega_3^1\neq 0,\ \omega_3^2=0$;
3) $\omega_3^1\wedge\omega_3^2=0,\ \omega_3^1\neq 0,\ \omega_3^2\neq 0$; 4) $\omega_3^1\wedge\omega_3^2\neq 0$.

В первом случае система пфаффовых уравнений (6) с учетом условий расслоения (7) приводится к виду

$$\omega_1^2=p\,\omega_3^2,\quad \omega_1^3=q\,\omega_3^2,\quad \omega_1^4=b\,\omega_1,\quad \omega_2^1=0,$$

$$\omega_2^3=0,\quad \omega_2^4=0,\quad \omega_3^2=\lambda^k\omega_k,\quad \omega_3^1=0,\quad \omega_4^1=0, \qquad (9)$$

$$\omega_4^2=a\,\omega_1,\quad 2\,\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=c^k\omega_k,$$

причем

$$c^1\lambda^2-c^2\lambda^1-2a=0. \qquad (10)$$

Класс расслояемых конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа I, определяемый системой (9), (10), назовем классом A. Он существует с произволом одной функции двух аргументов.

Исследование второго случая приводит к классу, проективно эквивалентному классу A.

В третьем случае получим следующую систему пфаффовых и конечных уравнений:

$$\omega_1^2=p\,\omega_3^2,\quad \omega_1^3=q\,\omega_3^2,\quad \omega_1^4=-\mu\,\omega_2^4,\quad \omega_2^1=\tau\,\omega_3^1,$$

$$\omega_2^3=-q\,\omega_3^1,\quad \omega_2^4=b\,\omega_1,\quad \omega_3^1=\Gamma_3^{1k}\omega_k,\quad \omega_2^3=\mu\,\omega_3^1, \qquad (11)$$

$$\omega_4^1=a\,\omega_1,\quad \omega_4^2=\mu\,\omega_4^1,\quad 2\,\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=c^k\omega_k.$$

$$c^1\Gamma_3^{12}-c^2\Gamma_3^{11}-2a=0. \qquad (12)$$

Конгруэнции, определяемые системой (11)-(12), назовем конгруэнциями B.

Замыкая и продолжая систему (11)-(12) находим произвол существования конгруэнций B —девять функций одного аргумента.

И, наконец, в случае $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \neq 0$ система (6), (7) оказывается несовместной. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3. Конгруэнции A обладают следующими геометрическими свойствами:

1)точка A_2 неподвижна,

2)точка A_1 является фокусом луча A_1A_4 прямолинейной конгруэнции (A_1A_4). Конгруэнции $(A_1A_3), (A_1A_4)$ имеют по одному семейству соответствующих торсов,

3)характеристическая точка грани $(A_1A_3A_4)$ принадлежит прямой A_1A_3,

4)точка A_2 является строенным фокусом конгруэнции коник C,

5)пара прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2),(A_3A_4)$ двусторонне расслояема,

6)поверхность (A_3) и линия (P) являются плоскими.

Доказательство.

1)Утверждение теоремы непосредственно следует из системы (9):

$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 .$$

2)Фокусы sA_1+tA_2 луча A_1A_4 конгруэнции (A_1A_4) определяются уравнением

$$\lambda^2 st\,(aq-p) .$$

Для определения торсов конгруэнций $(A_1A_3)(A_1A_4)$ получаем уравнения:

$$\omega_3^2(p\omega_2 - b\omega_1) = 0 ,$$

$$(p-aq)\,\omega_1\omega_3^2 = 0 .$$

Утверждения теоремы следуют из этих уравнений.

3)Характеристическая точка M плоскости $(A_1A_3A_4)$ определяется формулой

$$M = pA_3 - A_1 .$$

4)Фокальные точки коники C определяются уравнением:

$$(x^1)^3\left[\alpha(x^1)^3+\beta(x^1)^2x^2+\gamma x^1(x^2)^2+\delta(x^2)^3\right],$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ —не разные нулю величины. Отсюда следует, что A_2 является строенным фокусом коники C.

5)Для конгруэнций A по условию существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к конгруэнции (A_1A_2). Следовательно, достаточно установить расслояемость этой пары конгруэнций в обратном направлении. Условия расслоения

$$\omega_2^1\wedge\omega_3^1=0,\ \omega_1^3\wedge\omega_3^2=0,\ \omega_1^3\wedge\omega_3^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2=0,$$

удовлетворяются в силу системы (II), т.е. пара конгруэнций $(A_1A_2),(A_3A_4)$ действительно двусторонне расслояема.

6)Имеем:

$$dA_3 = \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4 ,$$

причем

$$d[A_2A_3A_4] = (\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4)[A_2A_3A_4] .$$

Следовательно плоскость $[A_2A_3A_4]$ неподвижна и поверхность (A_3) совпадает с ней.

Так как при любом n

$$(d^n P, A_2, A_3, A_4) = 0,$$

то кривая (P) -плоская.

Т е о р е м а 4. Для конгруэнций B справедливы следующие утверждения:

1)конгруэнция (A_1A_2) представляет собой связку прямых с центром в точке $A_1+\mu A_2$.

2)поверхность (A_3) и кривая (P) -плоские, причем кривая (P) лежит в плоскости (A_3),

3)пара прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2),(A_3A_4)$ двусторонне расслоена,

4)точки (A_1) и (A_2) являются фокусами прямолинейных конгруэнций (A_1A_4) и (A_2A_4) соответственно. Торсы этих конгруэнций соответствуют,

5)вершина A_4 репера является двойная точка гомографии [2] для пар поверхностей $(A_1),(A_3)$ и $(A_2),(A_3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1)Имеем:

$$d[A_1+\mu A_2] = (\omega_1^1+\mu\omega_2^1)[A_1+\mu A_2],$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Пункты 2),3) доказываются так же, как и в теореме 3 (6),5) соответственно).

4)Фокусы sA_i+tA_4 луча A_iA_4 прямолинейной конгруэнции (A_iA_4) определяются уравнением:

$$\varphi st = 0,$$

где φ -не равный нулю коэффициент. Координаты точки удовлетворяют этому уравнению, следовательно, A_i -фокус. Торсы конгруэнции (A_iA_4) определяются уравнением:

$$\varphi\,\omega_1\omega_3^1 = 0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

5)Имеем

$$dA_1\Big|_{\omega_3^1=0} = \omega_1^1A_1+\omega_1^4A_4,$$

$$dA_2\Big|_{\omega_3^1=0} = \omega_2^2A_2+\omega_2^4A_4,$$

$$dA_3\Big|_{\omega_3^1=0} = \omega_3^3A_3+\omega_2A_4,$$

что и требовалось доказать.

§3. Конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа II.

Не умаляя общности можно считать, что касательная к кривой (P) в точке P не пересекает ребро (A_1A_2) репера. Тогда формы

$$\omega_4^3 = \omega_1,\quad \omega_2^4 = \omega_2 \qquad (13)$$

можно считать линейно независимыми формами конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа II. Система уравнений Пфаффа, определяющая эти конгруэнции имеют вид:

$$\omega_1^2=\Gamma_1^{2k}\omega_k\,,\ \omega_2^1=\rho\,\omega_2^{*},\ \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k\,,\ \omega_1^4=b\,\omega_1\,,$$
$$\omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k\,,\ \omega_3^4=c\,\omega_1\,,\ \omega_4^i=a^i\omega_1\,,\ 2\,\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=\lambda^k\omega_k\,. \tag{14}$$

Система (14) определяет конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа II с произволом шести функций двух аргументов. Для этих конгруэнций справедлива теорема I.

Рассмотрим расслояемые конгруэнции типа II- конгруэнции, обладающие следующими свойствами:

1) существует расслоение от конгруэнции коник C к прямолинейной конгруэнции (A_2A_4),

2) пара прямолинейных конгруэнций (A_2A_3) и (A_1A_4) двусторонне расслояема.

Условия 1), 2) налагают следующие связи на коэффициенты системы уравнений (14):

$$\rho(2\Gamma_3^{11}-\Gamma_2^{31})=0,\ \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{12}-\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{11}-\lambda^1\rho-a^1=0,$$
$$\Gamma_3^{21}-\Gamma_1^{31}\rho+\tfrac{1}{2}(\lambda^1\Gamma_2^{32}-\lambda^2\Gamma_2^{31})-1=0,$$
$$\Gamma_1^{31}\Gamma_2^{32}-\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31}+\Gamma_1^{21}\rho+\Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22}-\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21}=0,$$
$$\Gamma_1^{21}\Gamma_2^{32}-\Gamma_1^{22}\Gamma_2^{31}=0,\ \Gamma_3^{11}\Gamma_1^{22}-\Gamma_3^{12}\Gamma_1^{21}=0, \tag{15}$$
$$\rho\Gamma_1^{21}=0,\ \rho\Gamma_1^{31}+1=0,\ a^2\rho+\Gamma_3^{12}=0,$$
$$\Gamma_1^{21}-c\,\Gamma_1^{32}=0,\ \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}-\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11}-a^2=0.$$

Условия невырождения прямолинейных конгруэнций (A_2A_4) (A_1A_4), (A_2A_3) в линейчатые поверхности имеют вид:

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} 0 & \Gamma_2^{31} & a^1 & 1\\ \rho & \Gamma_2^{32} & 0 & 0\end{Vmatrix}=2,\ \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \Gamma_3^{11} & c\\ \rho & 1 & \Gamma_3^{12} & 0\end{Vmatrix}=2.$$
$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} \Gamma_1^{21} & \Gamma_1^{31} & a^2 & 1\\ \Gamma_1^{22} & \Gamma_1^{32} & 0 & 0\end{Vmatrix}=2 \tag{16}$$

Разрешая систему (15) с учетом условий (16), будем иметь:

$$\Gamma_3^{11}=0,\ \Gamma_2^{31}=0,\ \Gamma_1^{32}=0,\ \Gamma_1^{21}=0,\ \lambda^1\rho+a^2=0,\ \rho\Gamma_1^{31}+1=0,$$
$$2\Gamma_3^{21}\rho+\lambda^1\Gamma_2^{32}=0,\ a^2\rho+\Gamma_3^{12}=0,\ \Gamma_2^{32}(\Gamma_1^{31}-\Gamma_3^{21})=0, \tag{17}$$
$$(c\rho\,\Gamma_1^{31}\,\Gamma_1^{22}\neq 0)$$

Осуществляя нормировку вершин репера таким образом, чтобы единичная точка прямой (A_1A_4) была инцидентна касательной плоскости к фокальной поверхности (A_2) конгруэнции коник C, систему пфаффовых и конечных уравнений расслояемых конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа II приведем к виду:

$$\omega_1^2=\Gamma_1^{22}\omega_2\,,\ \omega_1^3=-\omega_1\,,\ \omega_1^4=b\,\omega_1\,,\ \omega_2^1=\omega_2\,,$$
$$\omega_2^3=\Gamma_2^{32}\omega_2\,,\ \omega_3^1=-a^2\omega_2\,,\ \omega_3^2=\Gamma_3^{2k}\omega_k\,,\ \omega_3^4=c\,\omega_1\,,$$
$$\omega_4^i=a^i\omega_1\,,\ 2\,\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=-\omega_4^1+\lambda\,\omega_2\,, \tag{18}$$
$$\omega_1^1-\omega_4^4=\omega_1^4-\omega_4^1+\Gamma_2^{32}\omega_3^4-a^2\omega_2^3\,,$$
$$\Gamma^{32}(\Gamma_3^{21}+1)=0,\ 2\Gamma_3^{21}-a^1\Gamma_2^{32}\qquad (c\,\Gamma_1^{22}\neq 0). \tag{19}$$

Отметим, что в случае

$$\Gamma_3^{21} + 1 = 0$$

система уравнений (18)-(19) оказывается несовместной. Осуществив замыкание и продолжение системы (18)-(19) при условии

$$\Gamma_3^{21} + 1 \neq 0$$

получим ряд классов расслояемых конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа II, каждый из которых подробно исследован.

Рассмотрим один из них-конгруэнции $\mathfrak{D}$, определяемые следующей системой Пфаффа:

$$\omega_1^2 = \Gamma_1^{22}\omega_2, \quad \omega_1^3 = -\omega_1, \quad \omega_1^4 = b\omega_1, \quad \omega_2^1 = \omega_2,$$

$$\omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^1 = -a\omega_2, \quad \omega_3^2 = \mu\,\omega_1^2, \quad \omega_3^4 = c\omega_1, \tag{20}$$

$$\omega_4^1 = 0, \quad \omega_4^2 = a\omega_1, \quad 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = \lambda\omega_2, \quad \omega_1^1 - \omega_4^4 = \omega_1^4.$$

Произвол существования конгруэнций $\mathfrak{D}$ пять функций одного аргумента.

Т е о р е м а 5. Конгруэнции $\mathfrak{D}$ обладают следующими геометрическими свойствами:

1) торсы прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2), (A_1A_3), (A_2A_4)$ соответствуют координатным линиям,

2) грани $(A_1A_2A_4)$, (A_2, A_3A_4) репера стационарны вдоль координатных линий $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ соответственно,

3) характеристическая точка плоскости $(A_1A_3A_4)$ совпадает

с фокусом прямолинейной конгруэнции (A_1A_3),

4) фокальная поверхность (A_2) конгруэнции коник C вырождается в прямую линию, проходящую через фокус луча A_1A_4 прямолинейной конгруэнции (A_1A_4),

5) линия (P) -прямая, проходящая через фокус луча A_2A_3 конгруэнции (A_2A_3),

6) пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_4) расслояема в направлении от (A_1A_3) к (A_2A_4).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Торсы всех указанных конгруэнций определяются уравнением

$$\omega_1\,\omega_2 = 0,$$

что и доказывает теорему.

2) Имеем

$$d[A_1A_2A_4] = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_4^4)[A_1A_2A_4] + \omega_1\{[A_1A_2A_3] - [A_3A_2A_4]\},$$

$$d[A_2A_3A_4] = (\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4)[A_2A_3A_4] + \omega_2\{[A_1A_3A_4] - a[A_2A_1A_4]\}.$$

3) Характеристическая точка N грани $(A_1A_3A_4)$ определяется формулой

$$N = \mu A_1 - A_3.$$

Так как она принадлежит ребру (A_1A_3), то поверхность N является фокальной поверхностью прямолинейной конгруэнции (A_1A_3).

4) Имеем

$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2(A_1 + A_4),$$

причем

$$d[A_2, A_1+A_4] = (\omega_1^1+\omega_2^2)[A_2, A_1+A_4]$$

следовательно, (A_2) -прямая линия.

Фокусы sA_1+tA_2 луча A_1A_4 прямолинейной конгруэнции (A_1A_4) определяются уравнением:

$$s(s-t)=0.$$

Координаты точки A_1+A_4 удовлетворяют этому уравнению, следовательно, она действительно является фокусом луча рассматриваемой конгруэнции.

5) Доказательство аналогичное предыдущему.

6) Условия расслоения имеют вид:

$$\omega_3^2\wedge\omega_2^1=0,\quad \omega_1^2\wedge\omega_2^3=0,\quad \omega_1^1\wedge\omega_2^1-\omega_3^2\wedge\omega_2^3=0.$$

В силу системы (19) они удовлетворяются, что и доказывает теорему.

Литература

1. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. 3, 1973, 41-49.

2. Фиников С.П., Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева. Уч. записки МГПИ, 16, вып. 3, 1951, 235-260.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Г.П. Ткач

АФФИННО РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается пара Q конгруэнций (F_1) и (F_2) парабол F_1, F_2, плоскости которых пересекаются по линии ℓ, не являющейся диаметром параболы F_i $(i=1,2)$. Построен канонический репер пары Q, исследованы аффинно расслояемые пары Q и некоторые их подклассы.

§1. Канонический репер пары Q.

Пусть d_i -диаметр параболы F_i, проходящей через ту её точку, в которой касательная к параболе параллельна прямой ℓ, K_i -точка пересечения диаметра d_i с прямой ℓ.

Отнесем пару Q к каноническому реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где вектор $\bar{e}_3$ направлен по прямой ℓ, вектор $\bar{e}_i$ -параллелен диаметру d_i параболы F_i, вершина A канонического репера является серединой отрезка K_1K_2 и векторы $\bar{e}_\alpha$ $(\alpha=1,2,3)$ пронормированы так, что уравнения параболы F_i имеют вид:

$$(x^3)^2-2x^i+2a_i^3x^3+a_i^0=0,\quad x^j=0, \qquad (1.1)$$

причем

$$a_1^3+a_2^3=0. \qquad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$, по индексам i и j суммирование не производится. Выбирая формы ω^1, ω^2 за независимые первичные формы пары Q и тем самым исключая случай вырождения поверхности (A) и параллельности прямой ℓ касательной плоскости к поверхности (A) в точке A, запишем систему пфаффовых уравнений пары Q в виде:

$$\omega_j^i=\Gamma_{jk}^i\omega^k,\quad \omega_3^i=\Gamma_{3k}^i\omega^k,\quad \omega_i^3=-\lambda_{ik}\omega^k, \tag{1.3}$$
$$\Delta a_i=a_{ik}\omega^k,\ \Delta a_i^3=a_{ik}^3\omega^k,\ \Delta a_i^0=a_{ik}^0\omega^k,$$

где

$$\Delta a_{ik}=\omega_i^i-2\omega_3^3-a_i^3\omega_i^3,$$
$$\Delta a_{ik}^3=da_i^3+a_i^3\omega_3^3-\omega^3, \tag{1.4}$$
$$\Delta a_{ik}^0=\frac{1}{2}\,da_i^0+a_i^0\omega_3^3-a_i^3\omega^3.$$

Из (1.3) следует, что пары Q определяются с произволом двенадцати функций двух аргументов.

§2. Аффинно расслояемые пары Q.

Обозначим буквой Π_α плоскость, определяемую уравнением $x^\alpha=0$ $(\alpha=1,2,3)$.

Определение 1. Пара Q называется аффинно расслояемой, если существуют односторонние аффинные расслоения [1] от конгруэнций $(F_1),(F_2)$ и прямолинейной конгруэнции (ℓ) к конгруэнции (Π_3) плоскостей Π_3.

Теорема 1. Аффинно расслояемые пары Q существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Доказательство. Условия одностороннего аффинного расслоения от конгруэнций (F_i) $(i=1,2)$ и прямолинейной конгруэнции (ℓ) к конгруэнции (Π_3) запишутся в виде:

$$(\omega_i^i-2\omega_3^3)\wedge\omega_i^3+\omega_i^j\wedge\omega_j^3=0,$$
$$\Delta a_i^0\wedge\omega_i^3+\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0, \tag{2.1}$$
$$\Delta a_i^3\wedge\omega_i^3+\omega_3^1\wedge\omega_1^3+\omega_3^2\wedge\omega_2^3=0,$$

$$\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^2=0,$$
$$\omega_3^1\wedge\omega_1^3+\omega_3^2\wedge\omega_2^3=0. \tag{2.2}$$

Системы квадратичных уравнений (2.1), (22) приводятся к виду

$$\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0,$$
$$\omega_3^1\wedge\omega_1^3+\omega_3^2\wedge\omega_2^3=0,$$
$$(\omega_i^i-2\omega_3^3)\wedge\omega_i^3+\omega_i^j\wedge\omega_j^3=0, \tag{2.3}$$
$$\Delta a_i^0\wedge\omega_i^3=0,$$
$$\Delta a_i^3\wedge\omega_i^3=0,$$

Учитывая (1.3), имеем:

$$\lambda_{12}-\lambda_{21}=0,$$
$$(\Gamma^1_{31}-\Gamma^2_{32})\lambda_{12}-\Gamma^1_{32}\lambda_{11}+\Gamma^2_{31}\lambda_{22}=0,$$
$$(a_{ii}-\Gamma^j_{ij})\lambda_{ij}-a_{ij}\lambda_{ii}+\Gamma^j_{ii}\lambda_{jj}=0, \qquad (2.4)$$
$$a^0_{ii}\lambda_{ij}-a^0_{ij}\lambda_{ii}=0,$$
$$a^3_{ii}\lambda_{ij}-a^3_{ij}\lambda_{ii}=0.$$

Анализируя (1.3), (2.4), убеждаемся, что аффинно расслояемые пары Q существуют с произволом четырех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Если точка A аффинно расслояемой пары Q инцидентна диаметрам d_i парабол F_i, то плоскость Π_3 является касательной плоскостью к поверхности (A)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка A инцидентна диаметрам d_i парабол F_i, то уравнения (1.1) принимают вид:

$$(x^3)^2-2x^i+a^0_i=0,\ x^j=0, \qquad (2.5)$$

то есть

$$a^3_i=0.$$

Из последних двух уравнений системы (2.3), получаем:

$$\omega^3\wedge\omega^3_1=0,\quad \omega^3\wedge\omega^2_2=0 \qquad (2.6)$$

Так как плоскости Π_3 пары Q образуют двупараметрическое семейство и имеют место уравнения (2.6), то

$$\omega^3=0. \qquad (2.7)$$

Значит, плоскость Π_3 является касательной плоскостью к поверхности (A) в точке A.

Т е о р е м а 3. Если точка A инцидентна параболам F_i аффинно расслояемой пары Q и точки K_1 и K_2 - различны, то плоскость Π_3 является касательной плоскостью к поверхности (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка A инцидентна параболам F_1 и F_2, тогда

$$a^0_i=0.$$

Из уравнений

$$\Delta a^0_i\wedge\omega^3_i=0 \qquad (2.8)$$

системы (2.3), имеем:

$$a^3_1\omega^3\wedge\omega^3_1=0,\quad a^3_2\omega^3\wedge\omega^3_2=0 \qquad (2.9)$$

Так как точки K_1 и K_2 не совпадают, то

$$a^3_i\neq 0.$$

Учитывая, что плоскости Π_3 образуют двупараметрическое семейство, из (2.9) получаем:

$$\omega^3=0.$$

Следовательно, плоскость Π_3 является касательной плоскостью к поверхности (A) в точке A.

Обозначим буквой A_α конец вектора $\bar e_\alpha$:

$$\bar A_\alpha=\bar A+\bar e_\alpha. \qquad (2.10)$$

§3. Пары Q^*.

О п р е д е л е н и е 2. Парой Q^* называется аффинно расслоенная пара Q, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Точка A инцидентна диаметрам d_i парабол F_i,
2. Точка A_1 принадлежит характеристическому подпространству плоскости параболы F_1,
3. Касательные плоскости к поверхностям (A) и (A_3) параллельны,
4. Одно семейство асимптотических линий этих поверхностей соответствует,
5. Координатная сеть на поверхности (A) является асимптотической.

Т е о р е м а 4. Пары Q^* существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$d\bar{A} = \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2 + \omega^3\bar{e}_3,$$

$$d\bar{A}_3 = (\omega^1+\omega^1_3)\bar{e}_1 + (\omega^2+\omega^2_3)\bar{e}_2 + (\omega^3+\omega^3_3)\bar{e}_3,$$

и имеет место уравнение (2.7), то условия параллельности касательных плоскостей к поверхностям (A) и (A_3) принимают вид:

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^3_3 = 0. \tag{3.1}$$

Уравнение асимптических линий поверхности (A) пары Q запишется в виде:

$$\lambda_{11}(\omega^1)^2 + 2\lambda_{12}\omega^1\omega^2 + \lambda_{22}(\omega^2)^2 = 0.$$

Для пар Q^* имеем:

$$\lambda_{ii} = 0. \tag{3.2}$$

Условия соответствия одного семейства асимптотических линий поверхностей (A), (A_3) и принадлежности точки A_1 характеристическому подпространству плоскости параболы F_1 имеют соответственно вид:

$$\Gamma^1_{32} = 0, \tag{3.3}$$

$$\omega^2 + \omega^3_1 = 0. \tag{3.4}$$

Присоединяя замыкание

$$(\omega^1 + \omega^1_1)\wedge\omega^2 + \omega^2_3\wedge\omega^3_1 = 0 \tag{3.5}$$

уравнения (3.4) к системе (2.3) и учитывая (1.3), (3.1)-(3.4), получим

$$\lambda_{12} - \lambda_{21} = 0,$$

$$\Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{32} = 0, \quad a_{ii} - \Gamma^j_{ij} = 0, \tag{3.6}$$

$$a^0_{ii} = 0, \quad a^3_{ii} = 0, \quad \Gamma^2_{31} = 0.$$

Обозначим

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = b,$$

$$\Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{32} = s. \tag{3.7}$$

Система пфаффовых уравнений (1.3) приводится к виду:

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^3_3 = 0, \quad \omega^3_i = b\,\omega^j, \quad \omega^i_3 = s\,\omega^i,$$

$$\omega^2 + \omega^2_1 = 0, \quad \omega^1 + \omega^1_1 = -\Gamma^1_{21}\omega^2, \tag{3.8}$$

$$\omega^1_2 = \Gamma^1_{2k}\omega^k, \quad \frac{1}{2}da^0_i = a^0_{ij}\omega^j,$$

Замыкая уравнение

$$\omega_3^i = s\omega^i,$$

получим

$$ds = 0. \quad (3.9)$$

Следовательно,

$$s = const.$$

Осуществляя продолжение уравнений

$$\omega_i^3 = b\omega^j,$$

получим уравнение Пфаффа

$$-\frac{1}{2}\, d\ln b = -\omega^1 + \Gamma_{21}^1 \omega^2,$$

замыкание которого дает квадратичное уравнение

$$d\Gamma_{21}^1 \wedge \omega^2 = 0. \quad (3.10)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение

$$\omega^1 + \omega_1^1 = -\Gamma_{21}^1 \omega^2$$

и учитывая (3.10), получим конечное соотношение

$$\Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{3}\, bs. \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в (3.10) и учитывая (3.9), находим:

$$s = 0. \quad (3.12)$$

Из (3.11) следует, что

$$\Gamma_{21}^1 = 0 \quad (3.13)$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений пары Q^* запишется в виде:

$$\omega^3 = 0,\ \omega_3^3 = 0,\ \omega_3^i = 0,\ \omega_1^i + \omega^i = 0, \quad (3.14)$$

$$\omega_i^3 = b\omega^j,\ \omega_2^1 = \Gamma_{22}^1 \omega^2,\ \frac{1}{2}\, da_i^0 = a_{ij}^0 \omega^j,\ \frac{1}{2}\, d\ln b = \omega^1,$$

$$d\Gamma_{22}^1 \wedge \omega^2 - 4\Gamma_{22}^1 \omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

$$da_{12}^0 \wedge \omega^2 - 2a_{12}^0 \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \quad (3.15)$$

$$da_{21}^0 \wedge \omega^1 = 0.$$

Система (3.14),(3.15) - в инволюции и определяет пары Q^* с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 6. Пары Q^* обладают следующими геометрическими свойствами: 1/Аффинная нормаль поверхности (A) лежит в плоскости параболы F_2, 3/Поверхность (A)-линейчатая, 3/Асимптотические линии на поверхностях (A) и (A_3) соответствуют, 4/Прямолинейная конгруэнция (ℓ) образует связку параллельных прямых, 5/Поверхность (A_1) вырождается в прямую линию, параллельную вектору $\bar{e}_3$, 6/Вдоль координатной линии $\omega^2 = 0$ плоскость параболы F_1 стационарна, 7/На параболе F_1 существуют только четыре фокальные точки. Точки пересечения характеристики плоскости Π_2 с параболой F_1 являются сдвоенными фокальными точками параболы F_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Аффинная нормаль поверхности (A) в точке A определяется векторным уравнением

$$\bar{h} = \bar{A} + \tau(\bar{e}_2 - b\bar{e}_3),$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

2/Рассмотрим на поверхности (A) асимптотические линии

$$\omega^2 = 0.$$

Так как

$$d\bar{e}_1 = -\omega^1\bar{e}_1 - (\bar{e}_2 - b\bar{e}_3)\omega^2,$$

то вектор касательной к линии $\omega^2=0$ не изменяет своего направления при смещении по этой линии. Следовательно, линии $\omega^2 = 0$ –прямые.

3/Уравнение асимптотических линий поверхности (A_3) в силу (3.14) приводится к виду:

$$\omega^1\omega^2 = 0.$$

4/Имеем

$$d\bar{e}_3 = 0.$$

Следовательно, все прямые ℓ конгруэнции (ℓ) -параллельны.

5/Учитывая (3.14), находим

$$dA_1 = b\omega^2\bar{e}_3,$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

6/Имеем:

$$(dx^2)_{\omega^2=0} = \omega_2^2 x^2$$

Следовательно, вдоль линий $\omega^2 = 0$ плоскость Π_2 стационарна.

7/Система уравнений для определения фокальных точек параболы F_1 пары Q^* запишется в виде:

$$(x^1)^2 - 2x^1 + a_1^0 = 0, \quad x^2 = 0,$$

$$[(x^1)^2 - (2 - a_1^0)]^2 = 0,$$

откуда непосредственно следует, что две собственные сдвоенные фокальные точки F^* и F^{**} параболы F_1 определяются формулами:

$$\bar{F}^* = \bar{A} + \bar{e}_1 + \sqrt{2 - a_1^0}\,\bar{e}_3, \quad \bar{F}^{**} = \bar{A} + \bar{e}_1 - \sqrt{2 - a_1^0}\,\bar{e}_3,$$

Литература

I. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференц. геометрия многообразий фигур.", Калининград, 1973, вып. 3, с. 143-152.

2. Ткач Г.П., Пары конгруэнций парабол в эквиаффинном пространстве. "Дифференц. геометрия многообразий фигур" Труды Калининградского ун-та, 1970, вып. I, с. 78-85.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4. 1974

Х л я п о в а Е.А.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ КОНИКОЙ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются пары K, образованные конгруэнцией (F_1) центральных коник F_1 и поверхностью (F_2), описанной точкой F_2, не инцидентной плоскости коники F_1, причем касательная плоскость поверхности (F_2) не параллельна плоскости коники F_1. В работе подробно исследованы пары K_1, выделенные из пар K с использованием условий двустороннего расслоения пары ассоциированных прямолинейных конгруэнций и одностороннего аффинного расслоения от прямолинейных конгруэнций к конгруэнции плоскостей, и их геометрические свойства. Некоторые частные классы пар K рассматривались Липатовой Ф.А. [1].

§1. Система пфаффовых уравнений пары K.

Канонический репер $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ пары K строим следующим образом: вершину A репера совмещаем с точкой F_2, концы E_α векторов $\bar{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ располагаем на конике F_1 таким образом, что прямые E_1E_2, CE_3, где C — центр коники F_1, являются сопряженными диаметрами коники F_1,

а прямая E_1E_2 является линией пересечения касательной плоскости поверхности (A) и плоскости коники F_1.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \tag{1}$$

где формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства:

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \tag{2}$$

Относительно построенного репера уравнения коники F_1 имеют вид:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-x^1-x^2=0, \quad x^1+x^2+x^3=1. \tag{3}$$

Исключая из рассмотрения случай параллельности касательной плоскости поверхности (A) вектору $\bar{e}_3$, примем главные формы ω^1, ω^2 за независимые. Система дифференциальных и конечных уравнений пары K примет вид:

$$\omega^3=\Gamma^3_i\omega^i, \quad \omega_\alpha^\beta=\Gamma^\beta_{\alpha i}\omega^i, \quad \Gamma^3_1=\Gamma^3_2, \quad (i,j,k=1,2). \tag{4}$$

Из системы (4) следует, что пары K определяются с произволом девяти функций двух аргументов.

§2. Пары K_1.

О п р е д е л е н и е. Пара K называется парой K_1, если выполнены следующие условия: 1) прямолинейные конгруэнции (AE_3) и (E_1E_2) двусторонне расслояемы [2], 2) прямолинейная конгруэнция (AE_i) и конгруэнция координатных плоскостей $(A\bar{e}_j\bar{e}_3)$ (здесь и в дальнейшем $i \neq j$) односторонне аффинно расслояемы [3], 3) поверхность (E_i) является огибающей плоскостей $(A\bar{e}_i\bar{e}_3)$, 4) на индикатрисе вектора $\bar{e}_i$ касательная вдоль линии $\omega^j = 0$ параллельна плоскости $(A\bar{e}_j\bar{e}_3)$.

Условия, характеризующие пары K_1, аналитически записываются в виде:

$$\omega^1 \wedge (\omega^2 + \omega_2^1 + \omega_2^2) + (\omega^3 + \omega_2^3) \wedge \omega_3^1 = 0,$$
$$\omega^2 \wedge (\omega^1 + \omega_1^1 + \omega_1^2) + (\omega^3 + \omega_1^3) \wedge \omega_3^2 = 0,$$
$$(\omega^1 + \omega^2) \wedge (\omega_1^1 + \omega_1^2 - \omega_2^1 - \omega_2^2) + (\omega_1^3 - \omega_2^3) \wedge (\omega_3^1 + \omega_3^2) = 0, \quad (5)$$
$$\omega_3^1 \wedge (\omega^1 + \omega^2 + \omega_1^1 + \omega_1^2) + \omega_3^2 \wedge (\omega^1 + \omega^2 + \omega_2^1 + \omega_2^2) = 0,$$
$$\omega^1 \wedge (\omega_1^1 + \omega_1^2) + \omega^2 \wedge (\omega_2^1 + \omega_2^2) + (\omega^3 + \omega_1^3) \wedge \omega_3^1 + (\omega^3 + \omega_2^3) \wedge \omega_3^2 = 0,$$
$$\omega^1 \wedge (\omega^3 + \omega_1^3) + \omega^2 \wedge (\omega^3 + \omega_2^3) = 0,$$

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^i + \omega_i^3 \wedge \omega_3^i = 0,$$
$$\omega^i \wedge \omega_i^j + \omega^3 \wedge \omega_3^j = 0, \quad (6)$$
(здесь по индексам i, j не суммировать)

$$\omega_1^2 = -\omega^2, \quad \omega_2^1 = -\omega^1, \quad (7)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0. \quad (8)$$

Замыкание пфаффовых уравнений (7) даст

$$\omega^1 \wedge \omega_2^2 - \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = 0, \quad \omega^2 \wedge \omega_1^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_1^3 = 0. \quad (9)$$

Учитывая все приведенные выше условия (5)-(9) в системе уравнений (4) и обозначая $\Gamma_1^3 = a$, $\Gamma_{3i}^3 = b_i$, запишем замкнутую систему уравнений пары K_1 в виде:

$$\omega^3 = a(\omega^1 + \omega^2), \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^2 = -\omega^2,$$
$$\omega_1^3 = -a\omega^1, \quad \omega_2^1 = -\omega^1, \quad \omega_2^3 = -a\omega^2,$$
$$a\omega_3^1 = -\omega^2, \quad a\omega_3^2 = -\omega^1, \quad \omega_3^3 = -b_i\omega^i, \quad (10)$$
$$da = -a\omega_3^3, \quad db_i \wedge \omega^i = 0.$$

Система уравнений (10) – в инволюции и определяет пары K_1 с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а. Пары K_1 обладают следующими свойствами: 1) прямолинейная конгруэнция (AE_i) является параболической, её торсы высекают на фокальной поверхности семейство координатных линий,

2) точка A является центром луча AE_3 прямолинейной конгруэнции (AE_3),

3) координатные линии суть асимптотические линии поверхностей (A), (C), (E_i),

4) касательная плоскость поверхности центров коники F_1 в точке C параллельна касательной плоскости поверхности (A) в точке A,

5) касательная плоскость поверхности (E_3) в точке E_3

параллельна диаметру E_1E_2 коники F_1,

6) касательная вдоль координатной линии $\omega^i = 0$ в точке E_i поверхности (E_i) параллельна вектору $\bar{e}_3$, а вдоль линии $\omega^j = 0$ — вектору $\bar{e}_i$,

7) аффинная нормаль поверхности (A) в точке A проходит через центр C коники F_1,

8) аффинная нормаль поверхности (E_i) в точке E_i коллинеарна вектору $\bar{e}_j$,

9) аффинные нормали поверхностей (A) и (E_i) пересекаются в точке M, являющейся центром связки плоскостей $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждений 1-9 непосредственно следует из приведенных ниже формул. Фокусы F_3', F_3'' луча AE_3 прямолинейной конгруэнции (AE_3), фокусы F_i и торсы прямолинейной конгруэнции (AE_i) определяются соответственно формулами:

$$F_3' = \bar{A} + a\bar{e}_3, \quad F_3'' = \bar{A} - a\bar{e}_3;$$

$$\bar{F}_i = \bar{A} + \bar{e}_i, \quad \omega^j = 0.$$

Асимптотические линии поверхностей $(A), (C), (E_i)$ определяются уравнением:

$$\omega^1\omega^2 = 0.$$

Касательные плоскости поверхностей $(A), (C)$ соответственно в точках A и C коллинеарны векторам:

$$\bar{C}_i = \bar{e}_i + a\bar{e}_3.$$

Векторы

$$\bar{E}_3' = \bar{e}_1 - \frac{1}{a}\bar{e}_2 + (a + b_1)\bar{e}_3, \quad \bar{E}_3'' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$$

являются направляющими векторами касательной плоскости поверхности (E_3) в точке E_3.

Касательная плоскость поверхности (E_i) в точке E_i параллельна вектору

$$d\bar{E}_i - \bar{e}_i\omega^i + a\bar{e}_3\omega^j \qquad (\text{по } i \text{ — не суммировать!}).$$

Направляющие векторы аффинных нормалей поверхности (A) в точке A и поверхности (E_i) в точке E_i имеют соответственно вид:

$$\bar{\eta} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{\nu}_i = \bar{e}_j.$$

Аффинные нормали поверхностей $(A), (E_i)$ пересекаются в точке

$$\bar{M} = \bar{A} + \bar{e}_1 + \bar{e}_2,$$

для которой

$$d\bar{M} = 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

1. Липатова Ф.А., Об одном классе пар фигур, порожденных эллипсом и точкой. "Дифференц. геом. многообразий фигур", вып. 2 (Тр. Калининградского ун-та), 1971.

2. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1956.

3. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференц. геометрия многообразий фигур", вып. 3 (Межвузовский сборник), Калининград, 1973.

С е м и н а р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском университете.

В предыдущем выпуске освещена работа семинара до 17 мая 1972 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 11 октября 1972 года по 16 мая 1973 года.

11.10.1972. В.С. М а л а х о в с к и й, Касательно-оснащенные гиперкомплексы квадратичных элементов в P_n.

18.10.1972. Ю.И. П о п о в, Инвариантное оснащение центрированных вырожденных m -мерных гиперполос Γ_m ранга r $(r < m)$ многомерного проективного пространства.

25.10.1972. Г.П. Т к а ч, Конгруэнции нецентральных квадратичных пар в A_3.

1.11.1972. В.П. С е м е н о в а (Шапенко), Об одном классе вырожденных конгруэнций линейных пар в евклидовом пространстве.

15.11.1972. Ю.И. Ш е в ч е н к о, О некоторых связностях, ассоциированных с многообразиями пар фигур в P_n.

22.11.1972. В.И. Козлова, Конгруэнции коник с двумя фокальными поверхностями, вырождающимися в прямые линии.

29.11.1972. Б.А. А н д р е е в, Об отображениях точечных пространств в пространства пар фигур.

6.12.1972. М.М.О в ч и н н и к о в, Расслояемые пары фигур, образованные коникой и точкой вне плоскости коники.

13.12.1972. В.В. М а х о р к и н, Некоторые алгебраические вопросы теории многообразий алгебраических фигур.

20.12.1972. Ю.И. Ш е в ч е н к о, Относительно инвариантная система форм Пфаффа в расслоенном пространстве фигур.

27.12.1972. Е.А. Х л я п о в а, Об одном классе пар конгруэнций, порожденных центральной коникой и плоскостью.

3.1.1973. В.С. М а л а х о в с к и й, Касательно оснащенные гиперкомплексы центральных гиперквадрик.

7.2.1973. В.С. М а л а х о в с к и й, Касательно оснащенные конгруэнции кривых второго порядка.

14.2.1973. П.Р. Пога и Т.И. Мишенина, Об инвариантном оснащении вырожденных гиперполос проективного пространства.

21.2.1973. Г.Л. С в е ш н и к о в а, Расслояемая пара конгруэнций коник с вырождающимися фокальными поверхностями.

28.2.1973. И.М. Соколов, Многообразия оснащенных гиперболоидов в n-мерном эквиаффинном пространстве.

7.3.1973. В.Н. Х у д е н к о, Конгруэнции пар фигур, образованных квадрикой и прямой.

14.3.1973. М.М. П о х и л а, (Черновцы), Многообразия пар квадратичных элементов в P_n .

21.3.1973. С.А. Калинина, Конгруэнции пар фигур, образованных коникой и точкой в плоскости коники.

28.3.1973. Н.Н. Фетисова, Конгруэнции пар фигур в P_3, образованных коникой и прямой, принадлежащей плоскости коники.

4.4.1973. Е.В. С к р ы д л о в а, О вырожденных конгруэнциях линейных пар фигур.

11.4.1973. Т.П. Н о в о ж и л о в а, Вырожденные конгруэнции линейных и полуквадратичных пар в эквиаффинном пространстве.

18.4.1973. Л.Г. К о р с а к о в а, Расслоенные пары конгруэнций коник, касающихся линии пересечения их плоскостей.

25.4.1973. Г.Е. Фишман, Индуцированно-оснащенные многообразия, порожденные гиперквадрикой и точкой.

16.5.1973. И.Н. Околоскина, Дифференцируемое отображение пространства пар точек прямой на проективную плоскость.

Типография г. Гусева Зак. № 453—500